



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Е.М. Урвачев, [А.А. Бай](#)**

**Подавление сеточных  
возмущений при  
моделировании переноса  
излучения в М1-приближении**

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Урвачев Е.М., Бай А.А. Подавление сеточных возмущений при моделировании переноса излучения в М1-приближении // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 12. 29 с. EDN: [QDJRRW](#)  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-12>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук**

**Е. М. Урвачев, А. А. Бай**

**Подавление сеточных возмущений  
при моделировании переноса излучения  
в M1-приближении**

**Москва — 2025**

**Урвачев Е. М., Бай А. А.**

Подавление сеточных возмущений при моделировании переноса излучения в M1-приближении

В работе исследуется эффект возникновения численных возмущений при моделировании симметричных задач переноса излучения на прямоугольных сетках. Рассмотрен ряд двумерных тестовых задач с различными системами гиперболических уравнений: теория мелкой воды, перенос излучения в M1-приближении. Описаны методики стабилизации численного решения. Обсуждаются вопросы выбора методики реконструкции для задач радиационной гидродинамики.

**Ключевые слова:** численное моделирование, перенос излучения, численные неустойчивости

**Urvachev Egor Mikhailovich, Bay Anton Alekseevich**

Suppression of grid perturbations in the simulation of radiation transfer in the M1-approximation

The paper investigates the effect of numerical perturbations arising in the modeling of symmetric radiation transfer problems on rectangular grids. A series of two-dimensional test problems with different systems of hyperbolic equations are considered, including the shallow water theory and radiation transfer in the M1-approximation. Methods for stabilizing the numerical solution are described. Issues related to the choice of reconstruction methods for radiation hydrodynamics problems are discussed.

**Key words:** numerical simulations, radiation transfer, numerical instabilities

## Введение

В природу многих физических процессов заложена изначальная крупномасштабная симметрия. Так, например, в общих случаях развитие сильного взрыва [1] или взрыва сверхновой [2] можно описать в рамках сферической симметрии; динамику плазменных струй в активных экспериментах в атмосфере [3, 4] или на электрофизических установках [5], Z-пинчей [6, 7] — в рамках цилиндрической и т.д. Разумеется, развитие разнообразных неустойчивостей может несколько исказить картину, но общая динамика течения чаще всего сохраняет свою симметрию [8].

Описание таких явлений неразрывно связано с рассмотрением гидродинамических течений. Из-за наличия симметрии в системе численное моделирование целесообразно проводить на вычислительных сетках, обладающих соответствующей геометрией. В настоящее время для вычислительной гидродинамики интерес представляют сложные многомерные течения, которые уже невозможно описать в рамках простых геометрий. Из-за своей простоты и универсальности привлекательными для использования в моделировании оказываются прямоугольные сетки. Отметим, что прямоугольность сетки не означает фиксированную декартовую геометрию: на таких сетках можно описать как цилиндрическую, так и сферическую геометрии. В этом случае прямоугольность сетки подразумевает под собой параллельность граней ячеек вдоль соответствующих направлений.

Общим подходом для численного моделирования, например, в схемах типа MUSCL [9, 10], является разложение потоков интересующих величин вдоль выделенных направлений вычислительной сетки. Такое разложение течения, являющегося в реальности гладким и непрерывным, приводит к возникновению ряда численных неустойчивостей [11, 12], например, хорошо известному карбункул-эффекту [13]. Если в системе присутствуют условия для развития физических неустойчивостей, то сеточные возмущения могут привести к развитию физических и наоборот [12].

Наличие других физических процессов помимо гидродинамического течения, например, взаимодействия с магнитным полем [14, 15, 16] или переноса излучения [17, 18], может существенно усложнить картину рассматриваемой неустойчивости. Для исследования таких неустойчивостей практически невозможно обойтись без численного моделирования. В этом случае необходимо максимально ограничить воздействие сеточных возмущений. Построение многомерных численных схем без расщепления по направлениям является крайне сложной задачей [19, 20]. Даже в двумерном случае решение задачи Римана для уравнений гидродинамики может потребовать рассмотрение уже 16 различных состояний [21, 22]. Использование методов с вычислением потоков на основе кинетического моделирования [23, 24, 25] или бессеточных методов, например,

метода сглаженных частиц [26, 27], также сопряжено с высокими численными затратами. Поэтому до сих пор актуальной задачей является разработка приближенных методов для многомерных задач [28, 29].

В настоящей статье рассматриваются различные методики подавления сеточных возмущений в симметричных течениях, описываемых гиперболическими системами уравнений. Основным интересом представляют численные неустойчивости, возникающие при моделировании задач переноса излучения. Также обсуждаются вопросы моделирования задач радиационной гидродинамики.

## Описание численной схемы

Стоит начать с краткого описания схемы типа MUSCL [10] для прямоугольной сетки. Для простоты рассмотрим двумерный случай, обобщение на трехмерный проводится тривиально. Гиперболическая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathcal{U}$  — вектор консервативных величин в рассматриваемой системе, а  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  — векторы потока консервативных величин вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Изменение величин в ячейке  $(i, j)$  объемом  $V_{i,j}$  при переходе от шага  $n$  по времени к шагу  $n + 1$  через интервал  $\Delta t$  можно явно найти как

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{S_{i+1/2}\mathcal{F}_{i+1/2} - S_{i-1/2}\mathcal{F}_{i-1/2}}{V_{i,j}} + \frac{S_{j+1/2}\mathcal{G}_{j+1/2} - S_{j-1/2}\mathcal{G}_{j-1/2}}{V_{i,j}} = 0, \quad (2)$$

где полуцелыми индексами обозначаются потоки консервативных величин через соответствующие грани ячейки площадью  $S$ . Для их нахождения необходимо решить задачу Римана для каждой из граней:

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \text{Riemann}(\mathcal{U}_{i+1}^L, \mathcal{U}_i^R), \quad \mathcal{G}_{j+1/2} = \text{Riemann}(\mathcal{U}_{j+1}^L, \mathcal{U}_j^R), \quad (3)$$

где индексами  $L$  и  $R$  обозначены значения вектора  $\mathcal{U}$  слева и справа от рассматриваемой грани ячейки. Поскольку векторы консервативных величин определены для средних по объему значений, приписываемых центру ячеек, то для нахождения значений на грани необходимо провести так называемую процедуру реконструкции.

Традиционно базовым вариантом реконструкции является линейная, когда предполагается, что распределение физических величин внутри ячейки вдоль каждого из направлений подчиняется линейной функции. Это приводит к схеме второго порядка аппроксимации по пространству. Для каждого из направлений

можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i^{L,R} &= \mathcal{U}_{ij} \pm \frac{1}{2} \Delta x_i \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_i = \\ &= \mathcal{U}_{ij} \pm \frac{1}{2} \Delta x_i \cdot \text{Limiter} \left( \frac{\mathcal{U}_i - \mathcal{U}_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \frac{\mathcal{U}_{i+1} - \mathcal{U}_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \frac{\mathcal{U}_{i+1} - \mathcal{U}_i}{x_{i+1} - x_i} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{L,R} &= \mathcal{U}_{ij} \pm \frac{1}{2} \Delta y_j \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right)_j = \\ &= \mathcal{U}_{ij} \pm \frac{1}{2} \Delta y_j \cdot \text{Limiter} \left( \frac{\mathcal{U}_j - \mathcal{U}_{j-1}}{y_j - y_{j-1}}, \frac{\mathcal{U}_{j+1} - \mathcal{U}_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}}, \frac{\mathcal{U}_{j+1} - \mathcal{U}_j}{y_{j+1} - y_j} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где индексам  $L$  и  $R$  соответствует знак  $+$  и  $-$ , а функция-ограничитель может выбираться исходя из разных соображений. На практике широко распространено использование в качестве ограничителя функции `minmod`, возвращающей наименьшее по модулю число, если все числа одного знака, и ноль — иначе. Таким образом выбирается наименьшее абсолютное значение градиентов изменения физической величины между соседними ячейками.

Также существуют более сложные методы реконструкции, например, кусочно-параболическая [30] или WENO [31]. Тем не менее указанные методы в своих базовых вариантах основаны на разделении по направлениям (“directionally split”-схемы по терминологии англоязычных публикаций). Таким образом, можно отметить главную особенность таких схем — на каждом шаге по времени при нахождении потоков вдоль одного из направлений никак не используется информация о потоках вдоль других.

В качестве одного из методов перехода к многомерным схемам без расщепления по направлениям (“directionally unsplit”) можно рассматривать многомерную реконструкцию, которая учитывает все соседние ячейки по каждому из направлений [32, 33]. Стоит упомянуть постоянную реконструкцию, когда значение физической величины внутри отдельной ячейки предполагается постоянным, т.е.

$$\mathcal{U}_i^{L,R} = \mathcal{U}_j^{L,R} \equiv U_{ij}. \quad (6)$$

Такой подход приводит к схеме первого порядка по пространству. Несмотря на это, по своему определению такая реконструкция является многомерной (причем “directionally unsplit”), поскольку значения на гранях ячеек восстанавливаются согласованно.

Многомерные схемы без расщепления по направлениям более высоких порядков являются довольно громоздкими и требуют большого количества вычислительных ресурсов. Приблизительно учесть наличие потока вдоль других

направлений можно с помощью более простых подходов, что в некоторых случаях позволит получить корректные результаты. Рассмотрим некоторые из них.

- Методы Рунге-Кутты [34].  
Перепишем уравнение (1) как

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathcal{U}), \quad (7)$$

где  $\mathcal{L}(\mathcal{U})$  отвечает за учет дивергенции потоков. Для интегрирования по времени можно воспользоваться методами Рунге-Кутты [34]. Например, для схемы второго порядка по времени можно записать

$$\mathcal{U}^{n+1/2} = \mathcal{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(\mathcal{U}^n), \quad (8)$$

$$\mathcal{U}^{n+1} = \mathcal{U}^n + \Delta t \mathcal{L}(\mathcal{U}^{n+1/2}), \quad (9)$$

где для численной дискретизации члена  $\mathcal{L}(\mathcal{U})$  на каждом подшаге используется соответствующая часть уравнения (2). Наличие промежуточных шагов в таком случае позволяет учесть изменения физических величин на гранях ячеек за счет потоков по всем направлениям.

- Схема MUSCL-Hancock [10].  
Такая схема является примером другого типа подходов, связанного с корректировкой реконструированных на гранях значений. Схема учитывает изменение величин на гранях ячеек за счет потока в соответствующем направлении через ячейку следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{U}}_i^{L,R} = \mathcal{U}_i^{L,R} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} (\mathcal{F}(\mathcal{U}_i^R) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_i^L)), \quad (10)$$

$$\widehat{\mathcal{U}}_j^{L,R} = \mathcal{U}_j^{L,R} + \frac{\Delta t}{2\Delta y_j} (\mathcal{G}(\mathcal{U}_j^R) - \mathcal{G}(\mathcal{U}_j^L)). \quad (11)$$

Задача Римана решается уже от модифицированных значений реконструированных величин. В базовой версии модификация проводится вдоль каждого из направлений. Далее уже можно перейти к многомерному варианту схемы [10]:

$$\widehat{\mathcal{U}}_{i,j}^{L,R} = \mathcal{U}_{i,j}^{L,R} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} (\mathcal{F}(\mathcal{U}_i^R) - \mathcal{F}(\mathcal{U}_i^L)) + \frac{\Delta t}{2\Delta y_j} (\mathcal{G}(\mathcal{U}_j^R) - \mathcal{G}(\mathcal{U}_j^L)). \quad (12)$$

В этом случае при решении задачи Римана вдоль каждого из направлений будут учтены потоки с других.

- Римановские решения с учетом градиентов:

для начала рассмотрим решатель HLL (Хартена, Лакса, ван Лира) [10, 35], являющийся одним из наиболее универсальных для применения к произвольным гиперболическим системам. Этот решатель основан на предположении наличия двух волн, распространяющихся от изначального разрыва:

$$\text{Riemann}(\mathcal{U}^R, \mathcal{U}^L) = \begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{U}^L), & S^L \geq 0, \\ \mathcal{F}(\mathcal{U}^R), & S^R \leq 0, \\ \mathcal{F}_{\text{HLL}}, & S^R < 0 < S^L, \end{cases} \quad (13)$$

где  $S^L$  и  $S^R$  — оценки скоростей распространения возмущений слева и справа от разрыва, а поток в промежуточной области

$$\mathcal{F}_{\text{HLL}} = \frac{S^R \mathcal{F}(\mathcal{U}^L) - S^L \mathcal{F}(\mathcal{U}^R) + S^R S^L (\mathcal{U}^R - \mathcal{U}^L)}{S^R - S^L}. \quad (14)$$

Выражение (14) выводится при рассмотрении закона сохранения в контрольном объеме с центром в границе между двумя ячейками, ограниченном по времени шагом  $\Delta t$ . При этом при интегрировании по контрольному объему предполагается постоянство величин по времени и пространству. Можно формально внести предположение о наличии градиентов величин при рассмотрении контрольного объема и получить модифицированное выражение для потока HLLG через грань между ячейками  $i$  и  $i + 1$  (G как раз и означает включение градиентов) [36, 37]:

$$\mathcal{F}_{\text{HLLG}} = \frac{S^R \mathcal{F}(\mathcal{U}_1^L) - S^L \mathcal{F}(\mathcal{U}_1^R) + S^R S^L (\mathcal{U}_2^R - \mathcal{U}_2^L)}{S^R - S^L}, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{U}_{1,2}^L = \mathcal{U}_i + f_{1,2}^L \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_i, \quad \mathcal{U}_{1,2}^R = \mathcal{U}_{i+1} + f_{1,2}^R \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_{i+1}, \quad (16)$$

$$f_1^L = \min \left( \frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} + S^L \Delta t \right), \quad f_2^L = \min \left( \frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} + \frac{S^L \Delta t}{2} \right), \quad (17)$$

$$f_1^R = \max \left( -\frac{\Delta x}{2}, -\frac{\Delta x}{2} + S^R \Delta t \right), \quad f_2^R = \max \left( -\frac{\Delta x}{2}, -\frac{\Delta x}{2} + \frac{S^R \Delta t}{2} \right), \quad (18)$$

где необходимые выражения для градиентов величин находятся с помощью реконструкции аналогично (4). Выражение для нахождения потоков вдоль другого направления находится полностью аналогично. Заметим, что при  $f_1^L = f_2^L = -f_1^R = -f_2^R = \Delta x/2$  выражение (15) перейдет в стандартный



поток HLL (14) с линейной реконструкцией по пространству. Авторами [36, 37] утверждается, что модификация позволяет уменьшить численную диффузию и подавить некоторые численные возмущения.

Теперь можно перейти к последовательному рассмотрению ряда задач, в которых возможно возникновение численных возмущений симметричных течений. Моделирование будет проводиться с помощью численного кода ELARA++, являющегося ответвлением основного программного комплекса FRONT [38, 39]. Во всех расчетах будем считать, что шаг по времени ограничен условиями Куранта-Фридрихса-Леви [40]:

$$\Delta t = \sigma \max_{ij} \left( \min \left( \frac{\Delta x_i}{S_{i,\max}}, \frac{\Delta y_j}{S_{j,\max}} \right) \right), \quad (19)$$

где  $S_{i,\max}$  и  $S_{j,\max}$  — максимальные скорости распространения возмущений, а число Куранта  $\sigma \leq 1$ . При этом для многомерных расчетов по умолчанию принимается значение  $\sigma = 0.25$ , если не оговорено обратное.

## Теория мелкой воды

Одной из наиболее простых и показательных гиперболических систем физических уравнений является приближение мелкой воды:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ hv_x \\ hv_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} hv_x \\ hv_x^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hv_x v_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} hv_y \\ hv_x v_y \\ hv_y^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (20)$$

где  $h$  — высота жидкости над нулевым уровнем,  $v_x$  и  $v_y$  — скорости ее движения вдоль соответствующих направлений, а  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения. Для системы уравнений мелкой воды скорости распространения возмущений могут быть оценены как предлагается в работах [37, 41]:

$$S^L = \min(v^L - a^L, v^R - a^R), \quad S^R = \max(v^L + a^L, v^R + a^R), \quad (21)$$

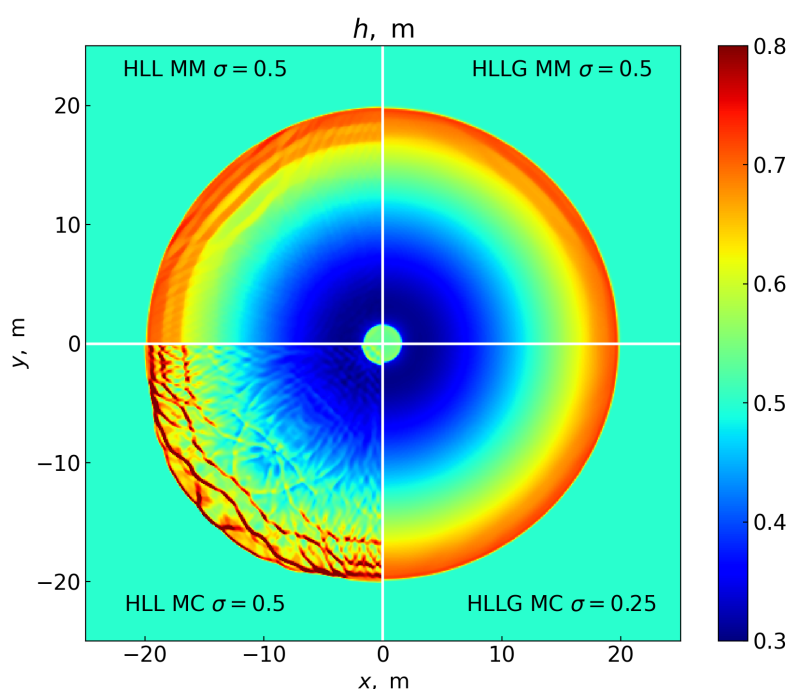
где  $v$  — скорость по направлению к нормали рассматриваемой грани, а  $a = \sqrt{gh}$ .

## Развал круговой плотины

Рассмотрим тестовую задачу о развале круговой плотины аналогично исследованию [37]. В среде размерами  $L \times L$ , где  $L = 50 \text{ м}$  с начальным уровнем воды  $h = 0.5 \text{ м}$  в центре задается область плотины с повышенным уровнем воды  $h_d = 2.5 \text{ м}$  в виде круга радиуса  $R_d = 2.5 \text{ м}$ . Скорость воды во всей среде изначально равна нулю, далее система отпускается и рассматривается динамика сброса воды после исчезновения плотины. Моделирование проводится на

прямоугольной сетке с декартовой геометрией с числом ячеек вдоль каждого направления  $N_x = N_y = 500$  и свободными граничными условиями.

На рис. 1 изображен уровень воды на момент времени  $t = 5$  с, полученный в расчетах с использованием римановских решателей HLL и HLLG и ограничителей ММ (minmod) и МС (monotonized central) при проведении линейной реконструкции. Второй ограничитель является более точным по сравнению с minmod и позволяет лучше сохранить точность в гладких областях, при этом  $MC(a, c, b) = MM(2a, c, 2b)$  [42].



*Рис. 1.* Профили уровня воды на момент времени  $t = 5$  с в задаче о развале круговой плотины. Расчеты с использованием римановских решателей HLL (слева) и HLLG (справа) и ограничителей minmod (ММ, сверху) и monotonized central (МС, снизу).

Из-за симметрии начальных условий и системы уравнений (20) ожидается, что решение будет представлять собой цилиндрически симметричную волну, распространяющуюся от центра. В результатах же, полученных с помощью решателя HLL, наблюдаются сильные искажения, связанные с численными эффектами. На рис. 1 ограничено максимальное значение уровня воды для сохранения наглядной и одинаковой цветовой гаммы для всех случаев, поскольку нас в основном интересует симметрия решения. В реальности возмущения при использовании ограничителя МС выше. Отметим, что расчеты по аналогии с работой [37] велись при числе Куранта  $\sigma = 0.5$ . Выбор такого большого значения как раз может приводить к численным возмущениям, поэтому обычно на

практике в многомерных расчетах число Куранта ограничивается значением  $\sigma \leq 0.25$ .

Модификация римановского решателя с учетом градиентов HLLG позволяет симметризовать течение для обоих ограничителей потока, что подтверждает выводы, сделанные авторами [37]. Отметим лишь, что даже в случае использования HLLG численное решение с ограничителем MC при  $\sigma = 0.5$  будет обладать расщепленной структурой на переднем фронте течения. Для дополнительной стабилизации решения в этом случае использовалось уменьшенное число Куранта  $\sigma = 0.25$ . Возможно, этот факт связан с деталями реализации, подробности же определения максимального шага в работе [37] не приводятся.

Рассмотрим теперь альтернативные варианты стабилизации решения. В качестве наиболее показательного выберем решатель HLL и ограничитель MC, поскольку в расчетах выше они показали наибольшую чувствительность к сеточным возмущениям.

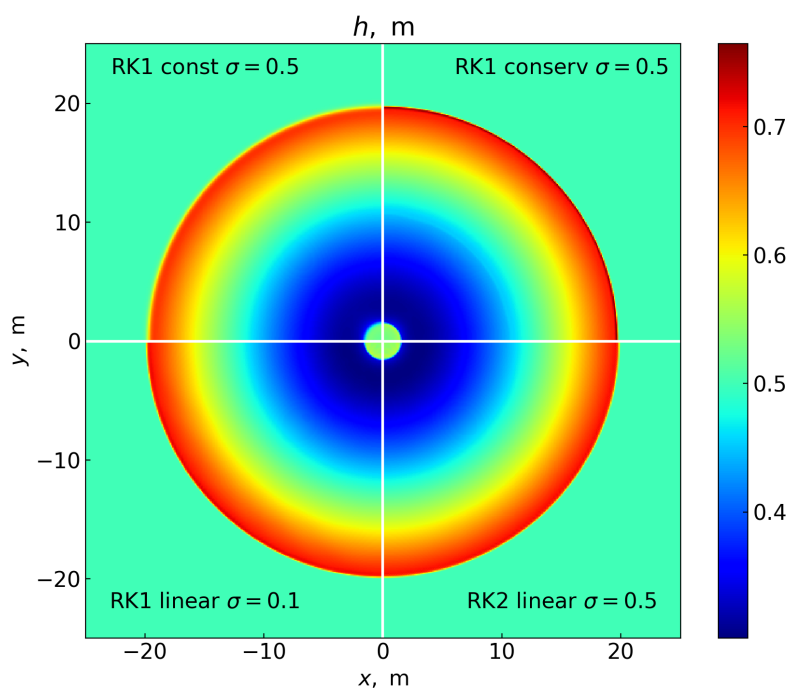
Для начала стоит детально обсудить методику проведения реконструкции величин на гранях ячеек. Вектор  $\mathcal{U}$  состоит из так называемых консервативных переменных, на которые записаны уравнения сохранения. В общем случае консервативные переменные представляют собой комбинацию примитивных, которые описывают какую-либо физическую величину, не обязательно сохраняющуюся. Для системы уравнений мелкой воды консервативными величинами являются  $h$ ,  $hv_x$  и  $hv_y$ , а примитивными —  $h$ ,  $v_x$ , и  $v_y$ . Забегая вперед стоит сказать, что обычно процедуру реконструкции по формулам (4) и (5) проводят для примитивных величин, особенно в случае гидродинамики. Затем уже реконструированные примитивные величины пересчитывают в консервативные на гранях. Переход к прямой реконструкции консервативных величин может помочь стабилизировать численное решение. Детали проведения процедуры реконструкции в работе [37] не приводятся. Тем не менее приводимые авторами [37] результаты идентичны результатам, изображенным на рис. 1 и полученным в рамках реконструкции примитивных величин.

В оригинальной работе [37] рассматривалась схема первого порядка по времени (т.е. Рунге-Кутты первого порядка) и второго порядка по пространству за счет линейной реконструкции. Можно провести исследования влияния порядка по различным величинам, а также шага по времени на стабильность решения.

На рис. 2 изображены результаты для задачи о развале плотины, полученные с использованием постоянной реконструкции (6), реконструкции консервативных величин, интегрирования по времени с помощью метода Рунге-Кутты второго порядка (9), а также уменьшенного шага по времени за счет выбора меньшего числа Куранта  $\sigma = 0.1$ . Все примененные методы привели к симметризации численного решения. Наименее ресурсоемким методом является

постоянная реконструкция, однако она приводит к более размытому переднему фронту течения. Использование метода Рунге-Кутты второго порядка по времени приводит к стабилизации решения даже при числе Куранта  $\sigma = 0.5$ . При этом качественно результаты согласуются с решением, полученным с помощью метода Рунге-Кутты 1-го порядка с уменьшенным шагом по времени. Использование же реконструкции консервативных величин позволяет наиболее четко описать передний край течения.

Таким образом, стабилизация численного решения в задаче о развале круговой плотины может быть получена с помощью более простых методов, чем решатель HLLG. Перейдем к рассмотрению других классов задач, в которых применение сложных методик может уже оказаться необходимым.



*Рис. 2.* Профили уровня воды на момент времени  $t = 5$  с в задаче о развале круговой плотины. Расчеты с использованием постоянной реконструкции (слева сверху), реконструкции консервативных величин (справа сверху), уменьшенного шага по времени (слева снизу) и метода Рунге-Кутты второго порядка (справа снизу).

## Перенос излучения в M1-приближении

Процесс переноса излучения может значительно усложнить физическую картину гидродинамического течения. Кроме этого, при численном моделировании такого процесса могут быть внесены дополнительные возмущения в

систему, в том числе зависящие от выбранного приближения [43, 44]. Ввиду сложности стоит рассмотреть этот процесс отдельно от уравнений гидродинамики.

Процесс переноса излучения в трехмерном случае полностью корректно может быть описан с помощью сложных семимерных уравнений Больцмана для фотонов или на интенсивность излучения [45]. Упростить уравнение переноса можно путем интегрирования по телесному углу и переходу к системе уравнений на моменты интенсивности [46]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} F_x \\ c^2 P_{xx} \\ c^2 P_{xy} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} F_y \\ c^2 P_{xy} \\ c^2 P_{yy} \end{pmatrix} = -c\kappa \begin{pmatrix} U - a_r T^4 \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где  $U$ ,  $F_x$  и  $F_y$  — плотность энергии и потоки излучения вдоль соответствующих направлений,  $P_{ij}$  — тензор давления излучения,  $c$  — скорость света,  $a_r$  — радиационная постоянная, а  $\kappa$  и  $T$  — коэффициент поглощения и температура среды. Здесь для наглядности мы также рассматриваем двумерный случай в неподвижной среде и модель серой непрозрачности, когда коэффициент поглощения не зависит от частоты излучения.

Система уравнений (22) является точной, но не замкнутой. Для замыкания можно использовать так называемое M1-приближение для переноса излучения. Такая модель представляет собой связь между тензором давления излучения и плотностью энергии и учитывает переход от изотропного случая к режиму светового луча [47, 48]:

$$P_{ij} = D_{ij}U, \quad D_{ij} = \frac{1 - \xi}{2}\delta_{ij} + \frac{3\xi - 1}{2}n_i n_j, \quad (23)$$

$$\xi = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}}, \quad f = \frac{|F|}{cU}, \quad n_i = \frac{F_i}{|F|}, \quad (24)$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта-символ Кронекера. M1-приближение, в отличие от диффузионного, позволяет рассматривать систему уравнений (22) как гиперболическую. Преимущества и недостатки такого подхода описаны, например, в [49, 44]. Отметим, что другими моделями, приводящими к гиперболической системе на моменты интенсивности, являются  $P_{1/3}$ - и  $P_1$ -приближения [50, 51].

Перейдем к рассмотрению ряда тестовых задач, в которых присутствуют симметричные потоки излучения.

## Свободное распространение излучения

Наиболее простым с точки зрения системы уравнений является режим свободного распространения излучения. В этом случае  $\kappa = 0$  и правая часть

уравнений (22) тождественно равна нулю. Скорости распространения возмущений можно приближенно оценить как  $S^R = -S^L = c$  [44]. Такая система уравнений становится похожей на систему уравнений мелкой воды (20), поэтому можно предположить, что соответствующие методы стабилизации сработают и в этом случае.

Рассмотрим свободный разлет излучения в среде размерами  $L \times L$ , где  $L = 2$  см, с начальной энергией  $U_0 = 10^4$  эрг/см<sup>3</sup>. Область повышенной энергии  $U_g = 10^{11}$  эрг/см<sup>3</sup> представляет собой круг радиусом  $R = 0.1$  см с центром, совпадающим с центром области. Моделирование будет проводиться на двумерной декартовой сетке с числом ячеек вдоль каждого направления  $N_x = N_y = 512$  и свободными граничными условиями.

Для начала испытаем более простые методы: повышение порядка по времени, уменьшение порядка по пространству и уменьшение временного шага. На рис. 3 изображены результаты расчета задачи о цилиндрическом свободном разлете излучения с помощью указанных выше методов стабилизации. Поскольку консервативные переменные в случае переноса излучения совпадают с примитивными, то соответствующий метод стабилизации не применялся.

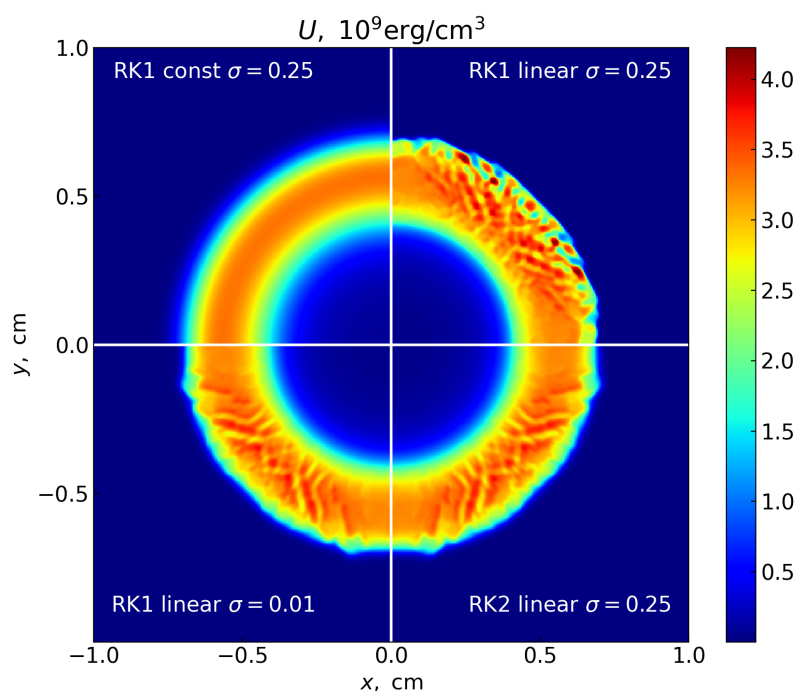
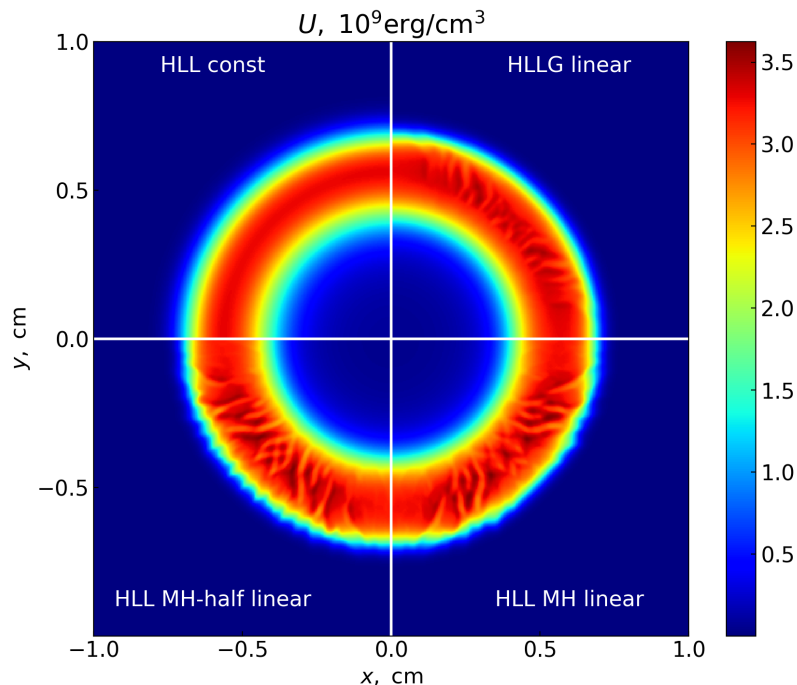


Рис. 3. Профили плотности энергии излучения на момент времени  $t = 2 \cdot 10^{-11}$  с в задаче о свободном разлете кругового профиля излучения. Расчеты с использованием различных реконструкций, порядков схемы Рунге-Кутты при интегрировании по времени и временного шага.

При линейной реконструкции наблюдаются сильные искажения решения

— симметричный профиль излучения становится фрагментированным. Даже уменьшение числа Куранта до значения  $\sigma = 0.01$  не приводит к стабилизации решения, как и использование метода Рунге-Кутты второго порядка, в отличие от задачи о развале круговой плотины. Решение полностью сглаживается при использовании постоянной реконструкции по пространству, однако в этом случае края области излучения существенно размываются из-за большой численной диффузии.

На рис. 4 представлены результаты расчетов с использованием технически более сложных методов стабилизации. Все расчеты проводились с использованием метода Рунге-Кутты второго порядка при интегрировании по времени и числом Куранта  $\sigma = 0.25$ . Применение схемы MUSCL-Hancock с базовым решателем HLL не приводит к подавлению численных возмущений ни при корректировке по отдельным направлениям (10)–(11), ни при многомерной (12). Решатель же с учетом градиентов HLLG позволяет значительно сгладить решение, при этом размытие фронтов излучения оказывается значительно меньшим, чем при использовании схемы более низкого порядка по пространству (в случае постоянной реконструкции).



*Рис. 4.* Профили плотности энергии излучения на момент времени  $t = 2 \cdot 10^{-11}$  с в задаче о свободном разлете кругового профиля излучения. Расчеты с использованием стандартного решателя HLL (слева сверху), решателя HLLG (справа сверху) и схемы MUSCL-Hancock (снизу: слева — с разделенной корректировкой, справа — с многомерной).

В описанной задаче присутствует сильный разрыв в начальных данных. В тесте из работ [52, 53] рассматривается более простой случай — разлет начального гауссового профиля излучения. Пусть теперь профиль плотности излучения задается во всей области как  $U = U_0 + U_g \exp(-(x^2 + y^2)/a_g^2)$ , где  $a_g = 0.125$  см. Остальные параметры тестовой задачи идентичны случаю кругового профиля излучения.

На рис. 5 представлены результаты расчетов свободного разлета гауссового профиля излучения. В этом случае из-за более слабого начального разрыва решатель HLLG уже приводит к полному подавлению возмущений, развивающихся при линейной реконструкции в решателе HLL и идентифицируемых в работе [53] как сеточный шум. Решение с постоянной реконструкцией оказывается излишне диффузионным, а схема MUSCL-Hancock даже с многомерной корректировкой (12) не приводит к заметному сглаживанию решения.

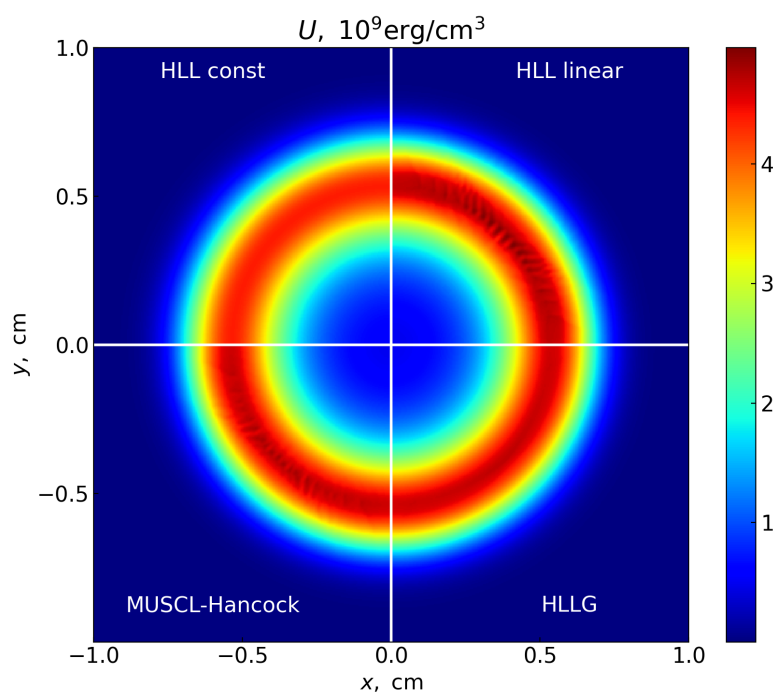


Рис. 5. Профили плотности энергии излучения на момент времени  $t = 2 \cdot 10^{-11}$  с в задаче о свободном разлете гауссового профиля излучения. Расчеты с использованием стандартного решателя HLL (сверху: слева — с постоянной реконструкцией, справа — с линейной), схемы MUSCL-Hancock с многомерной корректировкой (снизу слева) и решателя HLLG (снизу справа).



## Распространение излучения в среде

Перейдем теперь к случаю, когда излучение распространяется по неподвижной среде, имеющей коэффициент непрозрачности. Систему уравнений (22) необходимо дополнить уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) = c\kappa(U - a_r T^4), \quad (25)$$

где  $\rho$  и  $e$  — плотность и удельная внутренняя энергия среды.

Решение уравнения (22) можно разделить на два последовательных подшага. Сначала решается гиперболическая часть при равной нулю правой части, а затем с помощью неявной схемы происходит учет взаимодействия излучения и вещества [54, 55]. Разумеется, такое расщепление вносит дополнительную ошибку в систему, однако из-за малости шага  $\Delta t \sim \Delta x/c$  в гиперболической явной схеме это не приводит к значимым ошибкам для широкого спектра задач [54]. Для отказа от расщепления необходимо, например, перейти к линеаризации члена  $a_r T^4$  по изменению температуры на отдельном шаге по времени [56]. Другим вариантом является рассмотрение специальных уравнений состояний вещества [57], в которых теплоемкость среды  $c_v \sim T^3$  и, следовательно,  $e \sim c_v T \sim T^4$ , как, например, в задаче о тепловой волне Маршака [58].

Рассмотрим тестовую задачу об излучении бесконечного цилиндра. Пусть в оптически прозрачной холодной области размерами  $L \times L$ , где  $L = 2 \cdot 10^{10}$  см с начальной температурой  $T_0 = 10$  К и свободным пробегом  $l_0 = 1/\kappa\rho = 10^{12}$  см задана горячая оптически толстая область с температурой  $T_h = 3000$  К и свободным пробегом  $l_h = 10^8$  см. Область имеет вид цилиндра радиуса  $R_h = 2 \cdot 10^9$  см с центром, совпадающим с центром области. Аналогично разделу расчет будет производиться на двумерной сетке с декартовой геометрией и числом ячеек  $N_x = N_y = 512$ .

Результаты расчета задачи об излучающем цилиндре изображены на рис. 6. Поскольку  $|F| \sim 1/R$ , где  $R$  — расстояние от оси цилиндра, то в качестве наглядной изображаемой величины выбрано значение  $|F|R$ , по размерности представляющее собой светимость.

В случае стандартного решателя HLL и линейной реконструкции в решении присутствуют сильные нитеобразные возмущения. Такое поведение может быть связано с особенностью M1-приближения, которое приводит к нефизичному взаимодействию сталкивающихся потоков излучения [44]. Подобный эффект может наблюдаться возле граничных ячеек цилиндра из-за его дискретного описания на прямоугольной сетке. В пользу этого факта говорит наличие нескольких затененных областей возле границы цилиндра и при более диффузионном расчете с постоянной реконструкцией. При этом схема первого порядка по пространству приводит к более сильному размытию фронта и численной диффузии в область вне круга  $R_h + ct$ , куда еще не успело дойти излучение.

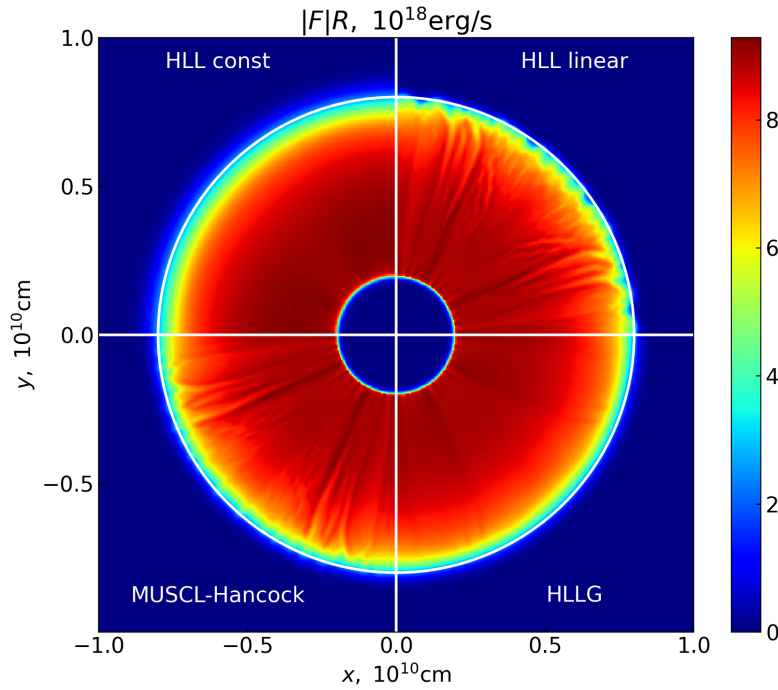


Рис. 6. Профили светимости на момент времени  $t = 2$  с в задаче об излучающем оптически толстом цилиндре. Расчеты с использованием стандартного решателя HLL (сверху: слева — с постоянной реконструкцией, справа — с линейной), схемы MUSCL-Hancock с многомерной корректировкой (снизу слева) и решателя HLLG (снизу справа). Круговой линией обозначено расстояние  $R_h + ct$ .

Схема MUSCL-Hancock практически не сглаживает нитевидные возмущения, однако использование решателя HLLG помогает практически полностью их подавить.

До этого момента мы рассматривали лишь декартовую геометрию. Перейти от декартовой геометрии к произвольной можно путем замены в гиперболическом уравнении обычной производной по пространству на ковариантную:

$$\partial_t \mathcal{U}_i + \partial_j \mathcal{F}_{ij} = 0, \quad \partial_j \mathcal{F}_{ij} \longrightarrow D_j \mathcal{F}^{ij}. \quad (26)$$

Во многих задачах интерес представляют сферические объекты, которые могут быть описаны на двумерной цилиндрической  $RZ$ -геометрии. В этом случае гиперболическая система (26) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_r \\ \mathcal{U}_z \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \mathcal{F}_{rr} \\ r \mathcal{F}_{zr} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{rz} \\ \mathcal{F}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\theta\theta}/r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Для моделирования системы (27) может быть также использована схема (2) с добавлением геометрических членов [55].

Рассмотрим теперь задачу об излучающей оптически толстой сфере [44, 59]. В отличие от описанного выше теста будем использовать область моделирования размерами  $[0, L/2]$  по оси  $R$  и  $[-L/2, L/2]$  по оси  $Z$ . Расчеты будут вестись на сетке с цилиндрической  $RZ$ -геометрией и числом ячеек  $N_r = 256$ ,  $N_z = 512$ . Граничные условия на внутренней границе оси  $r$  — неотражающая стенка (нулевой нормальный поток), все остальные — свободные. На рис. 7 представлены результаты расчета задачи об излучающей сфере, для визуализации использовалась величина  $|F|R^2$ , снова имеющая физический смысл нормированной светимости сферы. Как и для задачи о цилиндре, в плоской геометрии использование решателя HLLG позволяет практически полностью подавить нитеобразные возмущения. Вопросы оценки количественного качества решения были проведены в работе [44]. Данный тест подтверждает работоспособность методики HLLG на отличных от декартовой геометриях.

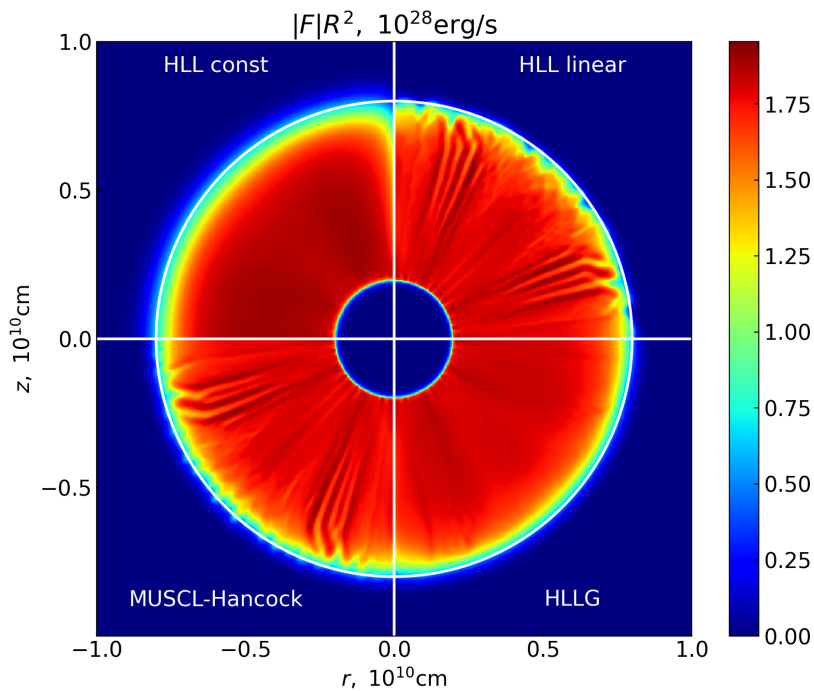


Рис. 7. Профили светимости на момент времени  $t = 2$  с в задаче об излучающей оптически толстой сфере. Расчеты с использованием стандартного решателя HLL (сверху: слева — с постоянной реконструкцией, справа — с линейной), схемы MUSCL-Hancock с многомерной корректировкой (снизу слева) и решателя HLLG (снизу справа). Круговой линией обозначено расстояние  $R_h + ct$ .

## Радиационная гидродинамика

Для учета течения среды систему уравнений (22), (25) необходимо дополнить уравнениями гидродинамики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho (e + v^2/2) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ (\rho (e + v^2/2) + p) v_x \end{pmatrix} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ (\rho (e + v^2/2) + p) v_y \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

и уравнением воздействия излучения на импульс вещества:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_y \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{c} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где  $\rho$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $p$  — плотность, компоненты скорости и давление среды. Отметим, что в представленном виде система уравнений (22) не содержит поправки, связанные с эффектами движения среды. Существует два варианта их учета: рассмотрение переноса излучения в лабораторной системе отсчета [46, 60] с Лоренц-преобразованием члена взаимодействия излучения и вещества либо описание уравнений в сопутствующей системе отсчета, т.е. движущейся со скоростью вещества [54, 61]. Каждый из подходов обладает как преимуществами, так и недостатками, их рассмотрение является предметом отдельных исследований, например, [2, 55].

Если в физической задаче важен обмен энергией и импульсом между излучением и веществом, то его в качестве начального приближения можно описать и без поправок  $O(v/c)$ .

При решении уравнений гидродинамики (28) традиционно выбирается процедура реконструкции примитивных величин:  $\rho$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  и  $p$ . Выбор примитивных величин объясняется более корректным описанием контактных разрывов, когда давление и скорость непрерывны. Предложим использовать для радиационно-гидродинамических расчетов комбинированную реконструкцию, выбрав набор  $\rho$ ,  $\rho v_x$ ,  $\rho v_y$  и  $p$ . Такой подход позволит как повысить корректность описания контактных разрывов по сравнению с полностью консервативной реконструкцией, так и получить возможность дополнительно стабилизировать решение, как в задаче о развале плотины из раздела. Детальное исследование вопросов стабилизации численного решения в задачах радиационной гидродинамики будет являться предметом будущих исследований.

## Корректность комбинированной реконструкции

Поскольку в задачах радиационной гидродинамики обычно сложно найти строгое аналитическое решение, то количественную корректность предложенной процедуры комбинированной реконструкции будем исследовать на одномерном тесте Сода о распаде разрыва [62]. Более того, при развивающихся неустойчивостях можно говорить о сходимости лишь по каким-то интегральным характеристикам [63].

Пусть в области  $[0, L]$ , где  $L = 1$  см слева от  $x_0 = 0.5$  см заданы плотность и давление  $\rho_l = 1$  г/см<sup>3</sup> и  $p_l = 1.0$  дин/см<sup>2</sup>, а справа —  $\rho_r = 0.1$  г/см<sup>3</sup> и  $p_r = 0.125$  дин/см<sup>2</sup>. Изначально среда находится в покое. Используется уравнение состояния в виде идеального газа с  $\gamma = 1.4$  и  $\mu = 1$ . На рис. 8 изображено сравнение результатов расчетов с помощью линейной реконструкции примитивных величин  $\rho$ ,  $v$  и  $p$  и комбинированных —  $\rho$ ,  $\rho v$  и  $p$  с аналитическим решением [10]. Для сравнения использовался одинаковый решатель HLL и интегрирование по времени с помощью метода Рунге-Кутты второго порядка, число ячеек составляло  $N = 256$ .

Переход к новой методике реконструкции приводит к возникновению небольшого горба в профилях давления и скорости в области контактного разрыва, в то время как решение, полученное с помощью реконструкции примитивных величин, гладко описывает эту область. Тем не менее вклад этой ошибки в суммарную оказывается незначительным. Характер уменьшения относительной ошибки в определении давления от числа используемых ячеек, определяемый как

$$\epsilon_{L2} = \frac{\|p - p_{\text{an}}\|_{L2}}{\|p_{\text{an}}\|_{L2}}, \quad (30)$$

при комбинированной реконструкции схож с аналогичным для реконструкции примитивных величин. При этом само значение относительной ошибки для нового метода оказывается даже несколько меньшим. Таким образом, сходимости решения предложенный вариант реконструкции не нарушает. Отметим, что аналогичные расчеты для реконструкции консервативных величин  $\rho$ ,  $\rho v$ ,  $\rho(e + v^2/2)$  в базовом варианте провести не удастся из-за возникновения на границах ячеек  $e < 0$  после реконструкции. В дальнейшем планируется продолжить исследование касательно методик реконструкций, в том числе для решателя с учетом контактного разрыва HLLC [10], а также построение решателя HLLC с учетом градиентных поправок (HLLCG).

## Заключение

Для решения систем гиперболических уравнений на практике часто используют явные схемы. Многомерность при этом учитывается путем расщепления по направлениям: общее течение раскладывается вдоль базисных направлений,

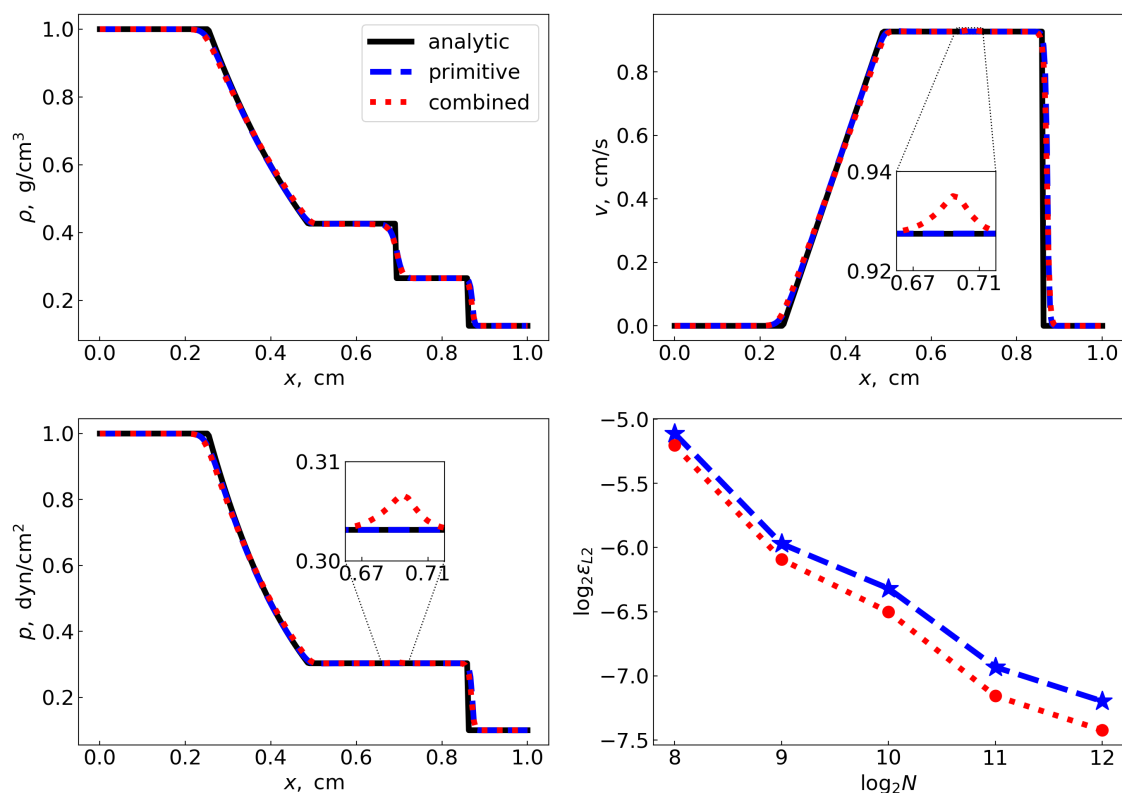


Рис. 8. Профили плотности  $\rho$ , скорости  $v$  и давления  $p$  в задаче Сода о распаде разрыва. Аналитическое решение соответствует сплошным линиям, расчеты с реконструкцией примитивных величин — штриховым, а с комбинированной реконструкцией — пунктирным. Также изображена зависимость относительной ошибки  $\epsilon_{L2}$  по норме  $L2$  в определении давления от используемого числа ячеек при расчете.

которые затем рассматриваются независимо. Такое описание может приводить к различным искажениям решений, которые заведомо должны быть симметричными. Разумеется, моделирование симметричных течений может проводиться на сетках с соответствующей геометрией. Тем не менее если необходимо проводить моделирование сложного течения, то его проще всего описать на прямоугольных сетках. Возникающие численные искажения при этом могут подавляться за счет модификации стандартных разностных схем.

Наличие дополнительного сложного процесса, такого как перенос излучения, может существенно усложнить физическую картину течения. При этом даже выбор конкретной методики моделирования этого процесса может существенно повлиять на развитие различных неустойчивостей. В настоящей работе рассмотрен ряд гиперболических систем уравнений с последовательным усложнением физической модели: теория мелкой воды, M1-приближение для переноса излучения. Для каждого класса задач приведены соответствующие тестовые задачи, демонстрирующие численные возмущения, нарушающие симметрию те-

чения. Для их подавления применялся ряд подходов: понижение порядка схемы по пространству, повышение порядка по времени, использовании схемы с многомерной корректировкой MUSCL-Hancock [10] и использование римановского решателя с учетом градиентов HLLG [36].

Использование постоянной реконструкции по пространству позволило симметризовать решение во всех рассмотренных случаях. Тем не менее, такой подход является очень диффузионным и сглаживает абсолютно все слабые возмущения. Для стабилизации решения в теории мелкой воды хорошо подходят все описанные методы. Нитевидные возмущения [44, 53] в задачах переноса излучения без учета гидродинамики удалось подавить с помощью градиентного решателя HLLG.

Для дополнительной стабилизации численных неустойчивостей в задачах радиационной гидродинамики был предложен метод комбинированной реконструкции. Вместо интерполяции на грани примитивных гидродинамических величин  $\rho$ ,  $v$  и  $p$  предлагается перейти к комбинации  $\rho$ ,  $\rho v$  и  $p$ . Такой подход может позволить как повысить корректность описания контактных разрывов по сравнению с полностью консервативной реконструкцией, так и подавить сеточные возмущения.

Обнаруженные факты вносят вклад в улучшение методики численного моделирования процессов переноса излучения. Кроме этого, предложенные методы могут применяться при численном моделировании неустойчивостей, развивающихся в радиационно гидродинамических процессах, в том числе при астрофизических условиях [44] или при активных экспериментах в геофизике [64, 65, 66].

Работа Е. М. Урвачева по исследованию численных неустойчивостей выполнена в рамках Государственного задания № FMWN-2025-0006. Авторы благодарны Д. А. Бадьину, С. И. Глазырину и Т. В. Лосевой за ценные обсуждения во время работы.

## Список литературы

- [1] *Sedov L. I.* Unsteady Motions of Compressible Media with Blast Waves. No. 87. — American Mathematical Soc., 1967.
- [2] *Urvachev E., Glazyrin S.* Simulation of SN2009ip Bolometric Light Curves // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2022. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 633–644.

- [3] *Zetser J. I., Poklad Yu. V., Erlandson R. E.* Active Experiments in the Ionosphere at Altitudes of 140–360 km. Optical Observations Results Reanalysis // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. — 2021. — Vol. 57. — Pp. 745–760.
- [4] Dynamics of the Expansion of Artificial Plasma Formations in Earth’s Ionosphere / T. V. Losseva, E. M. Urvachev, E. S. Goncharov, A. N. Lyakhov // *Plasma Physics Reports*. — 2024. — Vol. 50, no. 11. — Pp. 1411–1420.
- [5] Formation of Directed Plasma Jets During the Combustion of a High-Current Vacuum-Arc Discharge / A. G. Roussikh, A. S. Zhigalin, V. I. Oreshkin et al. // *Plasma Physics Reports*. — 2024. — Vol. 50, no. 7. — Pp. 800–809.
- [6] *Haines M. G.* A review of the dense Z-pinch // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2011. — Vol. 53, no. 9. — P. 093001.
- [7] Calculation of output power and X-ray spectrum of Z-pinches based on multiwire arrays / O. G. Olhovskaya, V. A. Gasilov, M. M. Basko et al. // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2016. — Vol. 8. — Pp. 422–437.
- [8] On the effect of initial internal roughness in ICF targets on their compression / S. I. Glazyrin, P. P. Zakharov, K. E. Gorodnichev, S. E. Kuratov // *Physics of Plasmas*. — 2024. — Vol. 31, no. 6.
- [9] *Colella P.* A direct Eulerian MUSCL scheme for gas dynamics // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1985. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 104–117.
- [10] *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. — Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] *Quirk J. J.* A contribution to the great Riemann solver debate. — Springer, 1997.
- [12] On physical and numerical instabilities arising in simulations of non-stationary radiatively cooling shocks / D. A. Badjin, S. I. Glazyrin, K. V. Manukovskiy, S. I. Blinnikov // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — Vol. 459, no. 2. — Pp. 2188–2211.
- [13] *Liou M.-S.* Mass flux schemes and connection to shock instability // *Journal of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 623–648.
- [14] Oscillations of magnetohydrodynamic shock waves on the surfaces of T Tauri stars / A. V. Koldoba, G. V. Ustyugova, M. M. Romanova, R. V. E. Lovelace // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2008. — Vol. 388, no. 1. — Pp. 357–366.



- [15] *Gasilov V. A., Koldoba A. V., Ustyugova G. V.* The instability of a radiative shock wave in a magnetic field // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2011. — Vol. 3. — Pp. 81–91.
- [16] Magneto-rotational instability in the accreting envelope of a protostar and the formation of the large-scale magnetic field / E. P. Velikhov, K. R. Sychugov, V. M. Chechetkin et al. // *Astronomy reports*. — 2012. — Vol. 56. — Pp. 84–95.
- [17] Astrophysically relevant radiation hydrodynamics experiment at the National Ignition Facility / C. C. Kuranz, H.-S. Park, B. A. Remington et al. // *Astrophysics and space science*. — 2011. — Vol. 336. — Pp. 207–211.
- [18] *Haworth T. J., Harries T. J.* Radiation hydrodynamics of triggered star formation: the effect of the diffuse radiation field // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2012. — Vol. 420, no. 1. — Pp. 562–578.
- [19] *Colella P.* Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws // *Journal of computational physics*. — 1990. — Vol. 87, no. 1. — Pp. 171–200.
- [20] *Balsara D. S.* Multidimensional HLLE Riemann solver: application to Euler and magnetohydrodynamic flows // *Journal of Computational Physics*. — 2010. — Vol. 229, no. 6. — Pp. 1970–1993.
- [21] *Schulz-Rinne C. W., Collins J. P., Glaz H. M.* Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensional gas dynamics // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 1993. — Vol. 14, no. 6. — Pp. 1394–1414.
- [22] *Váchal P., Liska R., Wendroff B.* Fully two dimensional HLLEC Riemann solver // *Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics*. — 2004. — Pp. 4–7.
- [23] *Pullin D. I.* Direct simulation methods for compressible inviscid ideal-gas flow // *Journal of Computational Physics*. — 1980. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 231–244.
- [24] *Chetverushkin B. N.* Kinetic schemes and quasi-gas-dynamic system of equations // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2005. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 337–351.
- [25] *Smith M. R., Macrossan M. N., Abdel-Jawad M. M.* Effects of direction decoupling in flux calculation in finite volume solvers // *Journal of Computational Physics*. — 2008. — Vol. 227, no. 8. — Pp. 4142–4161.

- [26] Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for complex fluid flows: Recent developments in methodology and applications / T. Ye, D. Pan, C. Huang, M. Liu // *Physics of Fluids*. — 2019. — Vol. 31, no. 1.
- [27] Numerical viscosity control in Godunov-like smoothed particle hydrodynamics for realistic flows modeling / A. N. Parshikov, S. A. Medin, G. D. Rublev, S. A. Dyachkov // *Physics of Fluids*. — 2024. — Vol. 36, no. 1.
- [28] *Koldoba A. V., Ustyugova G. V.* Difference scheme with a symmetry analyzer for equations of gas dynamics // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2020. — Vol. 12. — Pp. 125–132.
- [29] Multidimensional approximate Riemann solvers for hyperbolic nonconservative systems. Applications to shallow water systems / K. A. Schneider, J. M. Gallardo, D. S. Balsara et al. // *Journal of Computational Physics*. — 2021. — Vol. 444. — P. 110547.
- [30] *Colella P., Woodward P. R.* The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // *Journal of computational physics*. — 1984. — Vol. 54, no. 1. — Pp. 174–201.
- [31] *Balsara D. S., Shu C.-W.* Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // *Journal of Computational Physics*. — 2000. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 405–452.
- [32] *Hubbard M. E.* Multidimensional slope limiters for MUSCL-type finite volume schemes on unstructured grids // *Journal of Computational Physics*. — 1999. — Vol. 155, no. 1. — Pp. 54–74.
- [33] *Kim S.-E.* A multi-dimensional linear reconstruction scheme for arbitrary unstructured mesh // 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. — 2003. — P. 3990.
- [34] *Butcher J. C.* Numerical methods for ordinary differential equations. — John Wiley & Sons, 2016.
- [35] *Harten A., Lax P. D., Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM review*. — 1983. — Vol. 25, no. 1. — Pp. 35–61.
- [36] Development of a semi-implicit fluid modeling code using finite-volume method based on Cartesian grids / M. R. Smith, C.-T. Hung, K.-M. Lin et al. // *Computer Physics Communications*. — 2011. — Vol. 182, no. 1. — Pp. 170–172.

- [37] Development of an improved spatial reconstruction technique for the HLL method and its applications / M. R. Smith, K.-M. Lin, C.-T. Hung et al. // *Journal of Computational Physics*. — 2011. — Vol. 230, no. 3. — Pp. 477–493.
- [38] Simulation of direct drive target compression and ignition taking into account hot electrons generation / S. I. Glazyrin, A. V. Brantov, M. A. Rakitina et al. // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2022. — Vol. 85, no. 12. — Pp. 1966–1971.
- [39] Comparative modeling of the 2012b outburst of supernova 2009ip / E. M. Urvachev, S. I. Blinnikov, S. I. Glazyrin, D. S. Shidlovski // *Astronomy Letters*. — 2023. — Vol. 49, no. 8. — Pp. 454–464.
- [40] *De Moura C. A., Kubrusly C. S.* The courant–friedrichs–lewy (cfl) condition // *AMC*. — 2013. — Vol. 10, no. 12. — Pp. 45–90.
- [41] Calculation of shallow water flows using a Cartesian cut cell approach / D. M. Causon, D. M. Ingram, C. G. Mingham et al. // *Advances in water resources*. — 2000. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 545–562.
- [42] *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow // *Journal of Computational Physics*. — 1977. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 263–275.
- [43] Beyond moments: relativistic lattice Boltzmann methods for radiative transport in computational astrophysics / L. R. Weih, A. Gabbana, D. Simeoni et al. // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2020. — Vol. 498, no. 3. — Pp. 3374–3394.
- [44] The simulation of superluminous supernovae using the M1 approach for radiation transfer / E. Urvachev, D. Shidlovski, N. Tominaga et al. // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2021. — Vol. 256, no. 1. — P. 8.
- [45] *Castor J. I.* Radiation hydrodynamics. — 2004.
- [46] *Mihalas D., Auer L. H.* On laboratory-frame radiation hydrodynamics // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 2001. — Vol. 71, no. 1. — Pp. 61–97.
- [47] *Dubroca B., Feugeas J.-L.* Etude théorique et numérique d’une hiérarchie de modèles aux moments pour le transfert radiatif // *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. — 1999. — Vol. 329, no. 10. — Pp. 915–920.

- [48] *Hanawa T., Audit E.* Reformulation of the M1 model of radiative transfer // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 2014. — Vol. 145. — Pp. 9–16.
- [49] A high-performance and portable asymptotic preserving radiation hydrodynamics code with the M1 model / H. Bloch, P. Tremblin, M. González et al. // *Astronomy & astrophysics*. — 2021. — Vol. 646. — P. A123.
- [50] *Olson G. L., Auer L. H., Hall M. L.* Diffusion, P1, and other approximate forms of radiation transport // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 2000. — Vol. 64, no. 6. — Pp. 619–634.
- [51] *Chetverushkin B. N., Olkhovskaya O. G., Gasilov V. A.* Stabilized Scheme for Calculating Radiation Transfer in the P1 Approximation // *Doklady Mathematics* / Springer. — 2024. — Pp. 1–6.
- [52] *Tominaga N., Shibata S., Blinnikov S. I.* Time-dependent Multi-group Multi-dimensional Relativistic Radiative Transfer Code Based on Spherical Harmonic Discrete Ordinate Method // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2015. — Vol. 219, no. 2. — P. 38.
- [53] *Fuksman J. D. M., Mignone A.* A radiative transfer module for relativistic magnetohydrodynamics in the PLUTO code // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2019. — Vol. 242, no. 2. — P. 20.
- [54] FORNAX: a flexible code for multiphysics astrophysical simulations / M. A. Skinner, J. C. Dolence, A. Burrows et al. // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2019. — Vol. 241, no. 1. — P. 7.
- [55] On the Modeling of Type IIP Supernovae in the Gray-Opacity Approximation and Properties of Their Light Curves / E. M. Urvachev, S. I. Blinnikov, S. I. Glazyrin, P. V. Baklanov // *Astronomy Letters*. — 2022. — Vol. 48, no. 1. — Pp. 20–28.
- [56] *Gonzalez M., Audit E., Huynh P.* HERACLES: a three-dimensional radiation hydrodynamics code // *Astronomy & Astrophysics*. — 2007. — Vol. 464, no. 2. — Pp. 429–435.
- [57] *Chetverushkin B. N., Olkhovskaya O. G., Gasilov V. A.* Three-Level Scheme for Solving the Radiation Diffusion Equation // *Doklady Mathematics* / Springer. — Vol. 108. — 2023. — Pp. 320–325.

- [58] *Pomraning G. C.* The non-equilibrium Marshak wave problem // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 1979. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 249–261.
- [59] *Spitzer Jr. L.* Physical processes in the interstellar medium. — John Wiley & Sons, 2008.
- [60] *Krumholz M. R., Klein R. I., McKee C. F.* Radiation-hydrodynamic simulations of collapse and fragmentation in massive protostellar cores // *The Astrophysical Journal*. — 2007. — Vol. 656, no. 2. — P. 959.
- [61] A numerical model for multigroup radiation hydrodynamics / N. M. H. Vaytet, E. Audit, B. Dubroca, F. Delahaye // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 2011. — Vol. 112, no. 8. — Pp. 1323–1335.
- [62] *Sod G. A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *Journal of computational physics*. — 1978. — Vol. 27, no. 1. — Pp. 1–31.
- [63] *Urvachev E. M.* Numerical simulation of the asymmetrical supernova scenarios in the presence of an equatorial disk // *Plasma Physics Reports*. — 2024. — Vol. 50, no. 7. — Pp. 810–821.
- [64] *Dyal P.* Particle and field measurements of the Starfish diamagnetic cavity // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2006. — Vol. 111, no. A12.
- [65] *Pongratz M. B.* History of Los Alamos participation in active experiments in space // *Frontiers in Physics*. — 2018. — Vol. 6. — P. 144.
- [66] Radiation-belt remediation using space-based antennas and electron beams / B. E. Carlsten, P. L. Colestock, G. S. Cunningham et al. // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2019. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 2045–2063.

## **Оглавление**

|  |    |
|--|----|
| Введение . . . . .                                   | 3  |
| Описание численной схемы . . . . .                   | 4  |
| Теория мелкой воды . . . . .                         | 8  |
| Развал круговой плотины . . . . .                    | 8  |
| Перенос излучения в M1-приближении . . . . .         | 11 |
| Свободное распространение излучения . . . . .        | 12 |
| Распространение излучения в среде . . . . .          | 16 |
| Радиационная гидродинамика . . . . .                 | 19 |
| Корректность комбинированной реконструкции . . . . . | 20 |
| Заключение . . . . .                                 | 20 |
| Список литературы . . . . .                          | 22 |