ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 14 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Веденяпин, Я.Г. Батищева,
Ю.А. Сафронов, Д.И. Богданов

Расширение вселенной в случае обобщенной метрики Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Расширение вселенной в случае обобщенной метрики Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера / В.В. Веденяпин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 14. 26 с. EDN: **JSKEWF**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-14

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева,
Ю. А. Сафронов, Д. И. Богданов

Расширение вселенной в случае обобщенной метрики Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера

Москва — 2025

Веденяпин В. В., Батищева Я. Г., Сафронов Ю. А., Богданов Д. И.

Расширение вселенной в случае обобщенной метрики Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей и анализируем модели Милна – МакКри и Фридмана. В случае метрики Фридмана удается описать простыми уравнениями ускоренное расширение Вселенной. Факт ускоренного расширения навязывает знак кривизны: кривизна отрицательна, и наша Вселенная – это пространство Лобачевского.

Ключевые слова: ускоренное расширение вселенной, уравнение Власова, уравнение Власова – Эйнштейна, уравнение Власова – Максвелла, уравнение Власова – Пуассона, постоянная Хаббла, кривизна пространства-времени.

Victor Valentinovich Vedenyapin, Yanina Genrikhovna Batishcheva, Yury Alexeevich Safronov, Dmitry Ilyich Bogdanov

Expansion of the universe in the case of the generalized Friedmann – Lemaitre – Robertson – Walker metric

In classical works, the equations for gravitational and electromagnetic fields are presented without deriving the right-hand sides. In this paper we provide a derivation of the right-hand sides and analyze the Milne – McCrea and Friedman models. In the case of the Friedman metric, it is possible to describe the accelerated expansion of the Universe with simple equations. The fact of accelerated expansion imposes a sign on the curvature: the curvature is negative, and our Universe is a Lobachevsky space.

***Keywords**:* accelerating expansion of the universe, Vlasov equations, Vlasov – Einstein equations, Vlasov – Maxwell equations, Vlasov – Poisson equations, Hubble constant, curvature of spacetime

Оглавление

1. Действие в общей теории относительности и уравнения для полей

Пусть $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in R, \mathrm{m}\geq 0$ и заряду $e\in\mathbb{R}$ в момент времени $t\in\mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$ равно $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{v}dmde$. Отметим, что в теории вероятностей для этой величины используется термин плотности распределения, а мы пользуемся терминологией, устоявшейся в кинетической теории и статистической физике. Рассмотрим действие

$$
\begin{aligned}
S[g_{\mu\nu},A_\mu] = -c\int m f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}\,d^3x d^3v dmdedt - \\
-\frac{1}{c}\int e f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)A_\mu u^\mu\, d^3x d^3v dmdedt + \\
+k_1\int\left(R+\Lambda\right)\sqrt{-g}\,d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где c – скорость света. Здесь u – это четырехмерная скорость (отметим, что это не вектор), нулевая компонента которой – это скорость света $u^0=c$, а три другие совпадают с трехмерной, как это принято в теории относительности [1-4]: $u^i=v^i$ $(i=1,2,3)$ – трехмерная скорость, $x^0=ct$ и x^i (латинские индексы $i=1,2,3$) – координата, $g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)$ – метрика (греческие индексы $\mu,\nu=0,1,2,3$), $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},t)=\partial A_\mu(\boldsymbol{x},t)/\partial x^\nu-\partial A_\nu(\boldsymbol{x},t)/\partial x^\mu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна. Λ – лямбда-член Эйнштейна (или просто лямбда Эйнштейна), $k_1=-\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2=-\frac{1}{4\pi c}$ – константы [1-4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование. В действии (1) интегрирование ведется по всей области изменения параметров, т.е. по пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, по скоростям $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$, массам $m\in R,\ \mathrm{m}\geq 0$, зарядам $e\in\mathbb{R}$ и времени $t\in\mathbb{R}$. Варьирование ведется обычным способом [1-4].

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова – Максвелла и Власова – Эйнштейна из действия (1) использовался в работах [5-10, 19-21]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$
\begin{aligned}
k_1\left(R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \\
=\int m\frac{f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},m,e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3v dm + \mathrm{k}_2\left(-2\mathrm{F}^{\beta\nu}\mathrm{F}^{\alpha\mu}\mathrm{g}_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{\mu\nu}\right)\sqrt{-\mathrm{g}}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в таком виде, видимо, в работах [9, 19-21]), второе (электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса) известно [1-2]. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова – Эйнштейна [3-21]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e\, u^\mu f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, m, e) d^3 v dm de. \quad (3)$$

Мы получили из действия (1) уравнения для полей (2-3). Чтобы получить замкнутые уравнения, нужно выписать уравнение на функцию распределения, которая появилась в уравнениях (2-3) из действия (1). Для этого нужно вывести уравнения движения частицы в заданных полях. Соответствующее действие хорошо известно [1-4]. Отметим, что это действие для частиц можно получить, подставив в первых двух слагаемых действия (1) функцию распределения в виде функции

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(\mathbf{x} - x(t))\, \delta\left(\mathbf{v} - \frac{dx}{dt}\right) \delta(m - m')\, \delta(e - e'). \quad (4)$$

Получаем, опуская штрихи, стандартное действие для частиц [1-4]:

$$S[x(t)] = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), t) u^\mu u^\nu}\, dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), t) u^\mu dt. \quad (5)$$

При такой подстановке подразумевается, что трехмерная скорость входит в четырехмерную **u,** как и раньше, формулой $\boldsymbol{u} = (c, v^1, v^2, v^3)$, где c – скорость света. Кроме того, предполагается, что трехмерная скорость есть производная координаты по времени $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}$, поэтому в левой части (5) стоит только эта координата, по которой и нужно варьировать, как положено, по Лагранжу. Обычное варьирование приводит к уравнениям Эйлера – Лагранжа, а потом к уравнениям для функции распределения. Таким образом, мы получим замкнутую систему уравнений, которая и называется системой уравнений Власова – Максвелла – Эйнштейна. Итак, мы имеем два действия: одно для вывода уравнений для полей (1), другое для вывода уравнений движения частиц в заданных полях (5) в полном соответствии с классическим выводом [1-4]. Действия связаны формулой (4). Подстановка (4) хорошо известна для уравнения Власова. Н. Н. Боголюбов: «Особенно ценно то, что уравнения Власова обладают микроскопическими решениями». Речь идет о том, что сумма дельта-функций (4) дает точные решения уравнения Власова, если аргументы дельта-функций удовлетворяют задаче N тел с любым N. Если мы в (4) возьмем сумму дельта-функций, то получим соответствующую сумму и в (5): это показывает единственность действия (1), так как любую функцию распределения (в широком классе) можно приблизить в слабом смысле суммой дельта-функций, увеличивая их число. Варьирование действия (5) было проведено нами в предыдущих работах и тщательно исследовано [5-10, 19-21] как для скоростей, так и для импульсов. Варьирование не совсем тривиально, и мы здесь не будем его воспроизводить, отсылая к этим работам, а здесь ниже проиллюстрируем эту схему в дальнейших примерах в более простых нерелятивистских и слаборелятивистских случаях. В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопления галактик во Вселенной.

Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия рассматривалась с различной степенью проникновения. Обзор 1992 года [15] по выводу уравнения Власова содержит 5 принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то они работали в скоростях с использованием символов Кристоффеля [3, 4, 11, 12], и уравнения были выведены только в работах [9, 19-21]. Таким образом, уравнения Власова – Эйнштейна оказались прекрасным тестом на схему вывода уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона [14-15], который такую задачу поставил, использовал импульсы и вывел уравнения для частиц в заданных полях (уравнения Лиувилля) [14]. Отметим, что до сих пор правильный вид уравнений Власова – Эйнштейна (и даже Эйнштейна) представляет трудности. Например, в недавних работах [11, 12] используются символы Кристоффеля для уравнения Лиувилля (как часть системы Власова – Эйнштейна), но функция распределения зависит от импульсов. Так что этот гибрид требует уточнения. В скоростях система уравнения Власова – Эйнштейна (и Власова – Максвелла – Эйнштейна) была выведена только недавно в работах [5-10] и воспроизведена с сокращениями, улучшениями, объяснениями и критикой других выводов в [19-21, 26-32]. Если европейские ученые во Франции, Германии и Италии работали в скоростях, то в США конкурирующая школа Филиппа Моррисона работала в импульсах и близко подошла к правильной форме системы уравнений Власова – Эйнштейна. Последняя работа Моррисона [14], содержащая попытку вывода системы Власова – Эйнштейна, дала правильное уравнение для частиц (уравнение Лиувилля), но правая часть уравнения Эйнштейна не далась: даже она почти правильная, с точностью до множителя. Работа Герхарда Рейна [13], многолетнего исследователя уравнений Власова – Эйнштейна, уже по части вывода следует линии Моррисона. Похоже, что единственный способ вывести уравнение Эйнштейна и уравнения Максвелла с правой частью дает только действие (1). Действия (1) и (5), таким образом, дают самый простой и прямой вывод замкнутой системы уравнений электродинамики и общей теории относительности (ОТО), упрощая всю ОТО и электродинамику использованием именно принципа наименьшего действия и уравнений Власова – Максвелла – Эйнштейна.

Дальнейший план статьи таков. В п. 2 покажем, как получаются космологические решения с помощью уравнений типа Власова в нерелятивистском случае. Этим мы обобщим решение Милна – МакКри [22]. В п. 3 получаются обобщения метода Милна – МакКри [22] на космологические решения при движении в заданной метрике с примерами общей изотропной метрики и метрики Фридмана – Леметра – Робертсона –

Уокера (ФРЛУ). Там мы столкнемся с вопросом, как определять постоянную Хаббла. Делается вывод, что обычный способ определять ее по полям, описанный во многих учебниках, некорректен, так как в телескопы наблюдается материя, а не метрика. Поэтому нужно рассматривать космологическое движение (это понятие мы введем, связав его с уравнениями типа Власова) материи в этой метрике, а константу Хаббла определять, как это делали Милн и МакКри [22]. Именно метрика ФРЛУ даст нам простые уравнения, которые объяснят ускоренное расширение Вселенной, и позволит определить знак кривизны в этой модели.

2. Уравнение Власова – Пуассона, космологические решения и нерелятивистская гидродинамика с лямбда-членом

Коротко воспроизведем простейшее нерелятивистское космологическое решение Милна – МакКри с добавкой лямбда-члена в форме уравнения Власова – Пуассона. Нерелятивистский случай соответствует действию [1-2, 5-9]:

$$S[U]=\int\left[\frac{mv^2}{2}-mU\right]f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m\right)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmdt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int\left(\left(\nabla U\right)^2-2\lambda U\right)d\mathbf{x}dt. \tag{7}$$

Варьируем по U, получая уравнения Пуассона с лямбда-членом

$$\Delta U=4\pi\gamma\int m\,f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{v}dmde-\lambda. \tag{8}$$

Мы видим, что для получения замкнутой системы уравнений нужно получить уравнение для функции распределения, появившейся в уравнении Пуассона (8). Действие для одной частицы получается из первого слагаемого в (7) при выборе $f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)=\delta\left(m-M\right)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{y}\left(t\right)\right)\delta\left(\mathbf{v}-\frac{dy}{dt}\right)$. Эта формальная подстановка – правило для получения правильных лагранжианов из действия (7) – работает для вывода любых систем типа Власова, и мы широко пользовались этим и будем пользоваться в дальнейшем. Получаем стандартное действие

$$S_1[y]=\int\left[\frac{My'^2}{2}-MU\left(\mathbf{y}\right)\right]dt.$$

Варьируем, как обычно, в механике и получаем уравнение Ньютона

$$\mathbf{y}''-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}}=0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{v},\\ \dot{\boldsymbol{v}}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{x}},\end{cases}$$

и тогда получаем уравнение на функцию распределения, дополняя уравнение (8):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right)=0. \qquad (9)$$

Система (8-9) и есть система уравнений Власова – Пуассона для гравитации с лямбда-членом, который и призван описать ускоренное расширение. Мы провели подробный вывод уравнения Власова – Пуассона в простейшем случае, который иллюстрирует правильность вывода уравнений типа Власова и в более сложных релятивистских и слаборелятивистских случаях. Этот способ вывода уравнений типа Власова отрабатывался в статьях [5-9] и является пока единственным способом получать в замкнутой форме уравнения электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. По сути, он следует всем учебникам по теории поля (см., например, [1-2]), где вводятся два действия для полей и для частиц. Наша небольшая добавка с уравнениями типа Власова [5-9] связала эти два действия (подстановка дельта-функции в одну сторону и переход к интегрированию с помощью функции распределения в обратную аналогичны связи лагранжевых и эйлеровых координат). Это позволило заодно получать правые части в уравнениях для полей (тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна). Это поставило на математическую платформу общую теорию относительности, упрощая ее и давая замкнутую систему уравнений из принципа наименьшего действия (1, 3). Это упростило и сделало математически строгой и всю гравитацию, и электродинамику именно с помощью уравнения Власова. Правильность такой схемы вывода уравнений типа Власова была сначала проверена на уравнениях Власова – Пуассона и уравнениях Власова – Максвелла, где ответ был известен, хотя правые части уравнений для полей не были выведены, и только после этого схема вывода была перенесена на уравнение Власова – Эйнштейна. Это важно, потому что как зарубежные, так и наши исследователи брали тензор энергии-импульса по своему усмотрению, что приводило к заведомо неправильным уравнениям для полей. Более того, сравнение релятивистских действий с нерелятивистскими и слаборелятивистскими позволил твердо установить все коэффициенты действия (1), а потому уравнения для полей. Дальнейшая наша цель – получение космологических решений. И сейчас мы выведем уравнения Милна – МакКри [22] из уравнения Власова. Система (8-9) имеет точное гидродинамическое следствие, т.к. допускается (согласно более общей теории) гидродинамический вид функции распределения [5-9, 17-22]: $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)=\rho(t,\mathbf{x},m)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{w}(t,\mathbf{x},m))$. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{w})=0,\\ \dfrac{\partial w_k}{\partial t}+w_i\dfrac{\partial w_k}{\partial x_i}+\dfrac{\partial U}{\partial x_k}=0,\\ \\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\,\rho dm-\lambda.\end{cases}$$

Это означает, что если $\rho(t,\mathbf{x},m)$ и $\mathbf{w}(t,\mathbf{x},m)$ удовлетворяют этой системе уравнений, то $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m)=\rho(t,\mathbf{x},m)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{w}(t,\mathbf{x},m))$ удовлетворяет системе уравнений Власова – Пуассона (8-9).

Пусть $w_k(t,\mathbf{x},m)=\frac{\partial W}{\partial x^k}$. Такая подстановка проходит, согласно общей теории [5-9, 17-22], и получается точное Гамильтон – Якобиево следствие системы Власова – Пуассона с лямбда-членом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}+div(\rho\nabla W)=0, \\ \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{(\nabla W)^2}{2}+U=0, \\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\,\rho dm-\lambda. \end{cases} \tag{10}$$

Эта система уравнений обобщает систему Милна – МакКри [22] введением лямбды и зависимостью плотности и константы Хаббла от массы. Мы вывели эту систему из системы Власова – Пуассона, которую мы получили из принципа наименьшего действия: таким образом, мы обосновали и обобщили систему Милна – МакКри [22], которая признанным образом дает космологические решения в нерелятивистском случае.

Отметим, что если W есть функция только радиуса, то скорость дает как раз обобщенный разлет Хаббла: $w=\nabla W=W'(r)\frac{x}{r}$. Скорость разбегания $\frac{W'(r)}{r}$ называется постоянной Хаббла. Обратное тоже верно: любой разлет по Хабблу, если скорость пропорциональна расстоянию, означает, что скорость есть градиент некоторой функции. Этим космологическое расширение связывается с гидродинамическим и даже Гамильтон – Якобиевым следствиями уравнения Власова – Пуассона. В космологических решениях плотность не зависит от пространственной координаты. Тогда из первого уравнения получаем $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}=-3H(m,t),$ а также $\Delta W=3H(m,t).$ Мы покажем ниже, что $H(m,t)=\frac{W'(r)}{r}$ совпадает с постоянной Хаббла. Из третьего уравнения имеем уравнение $\Delta U=4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm-\lambda$. Решая два последних уравнения, имеем

$$\mathrm{W(r,m,t)}=\frac{H(m,t)}{2}r^2+\frac{A(m,t)}{r}+B(m,t) \text{ и } U(r,t)=\frac{4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm-\lambda}{6}r^2+\frac{\mathrm{C}(t)}{r}+D(t).$$

Мы видим, дифференцируя $W(r,m,t)$, что $H(m,t)=\frac{W'(r)}{r}$, то есть что это действительно постоянная Хаббла.

Здесь $A(m,t)$, $B(m,t)$, $C(t)$, $D(t)$ – произвольные функции. Получаем, подставляя эти выражения во второе уравнение системы (10):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial t}r^2+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{H^2}{2}r^2-\frac{AH}{r}+\frac{A^2}{2r^4}+\frac{4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm-\lambda}{6}r^2+\frac{C}{r}+D=0.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях радиуса (как это делали Милн и МакКри [22]), получаем

$$A(m,t)=0, \mathrm{C(t)}=0, \frac{\partial B}{\partial t}+\mathrm{D(t)}=0.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(m,t)}{\partial t}+3H(m,t)\rho(m,t)=0, \\ \dfrac{\partial H(m,t)}{\partial t}+H^2+\dfrac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho(t,m)dm-\dfrac{\lambda}{3}=0. \end{cases} \tag{11}$$

Так как скорость разбегания $\vec{w}=\nabla W=H\vec{r}$, имеем:

1) Условие расширения Вселенной $H\geq 0$.

2) Условие ускоренного расширения $\dfrac{\partial H(m,t)}{\partial t}\geq 0$,

т.е. $H^2+\dfrac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho(t,m)dm-\dfrac{\lambda}{3}\leq 0$.

Из второго условия видим определяющую роль лямбды для ускоренного расширения. Мы также видим: так как $\rho(m,t)$ обязано, вообще говоря, зависеть от массы, то и «постоянная» Хаббла $H(m,t)$, вообще говоря, зависит от массы. Мы получили систему уравнений (11), которая в принципе объясняет как изменение постоянной Хаббла, так и ее «напряжения» (Constant Hubble Tension [25]) именно зависимостью от времени и от массы: уравнения (11) можно считать точным уравнением константы Хаббла с лямбда-членом в нерелятивизме. Если, однако, $H(m,t)$ не зависит от массы (что второе из уравнений (11) допускает, как это и предполагали Милн и МакКри в [22]), мы можем свести систему (11) к системе двух обыкновенных уравнений. Обозначим $\mathrm{K}(t)=\dfrac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho(t,m)\,dm$ и получим

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt}+3HK=0, \\ \dfrac{dH}{dt}+H^2+K-\dfrac{\lambda}{3}=0. \end{cases} \tag{12}$$

Первое из уравнений (12) есть в точности уравнение (4) Милна – МакКри [22], а второе из уравнений (12) – это их уравнение (7) (но с лямбда-членом), полученное без всяких предположений из принципа наименьшего действия как его точное следствие. Система (12) решается точно, но нам достаточно и фазового портрета, который исследовался в [19, 26]. Условия ускоренного расширения – это узкая область под параболой $H\geq 0, \mathrm{K}\geq 0, H^2+K-\dfrac{\lambda}{6}\leq 0.$

Система (11) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в более общем случае, когда $H(m,t)$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов I_i. Пусть значение $H(m,t)$ на этом интервале равно

$H(i,t), i=1,...,r.$ Обозначая $m(i,t)=\frac{4\pi\gamma}{3}\int\limits_{I_i} m\rho(t,m)dm,$ получаем систему $2r$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dm(i,t)}{dt}+3H(i,t)m(i,t)=0, i=1,...,r, \\ \frac{dH(i,t)}{dt}+H(i,t)^2+\sum\limits_{\kappa=1,...r} m(\kappa,t)-\frac{\lambda}{3}=0. \end{cases}$$

В литературе широко обсуждается натяжение константы Хаббла (Constant Hubble Tension [25]), оно выражает несоответствие постоянной Хаббла наблюдениям и вопросам, от чего она вообще может зависеть. Получение точного решения следствия действия (1) для постоянной Хаббла в принципе может убрать это несоответствие. Теперь перейдем к релятивистскому случаю.

3. Примеры в релятивистском случае

Примеры, рассмотренные здесь, структурированы следующим образом. В первом примере изучается, как движется материя в плоской метрике Фридмана, во втором – классическое решение из учебников. Делается вывод, что определять константу Хаббла просто на основе метрики нельзя, так как наблюдатель измеряет движение именно материи. В третьем примере мы получаем космологическое решение для движения материи в произвольной изотропной метрике. Пример 4 – это космологическое движение материи в метрике Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера. Пример 5 – космология слабого релятивизма. Пример 6 – это изучение метрики Фридмана,обоснование ускоренного расширения и определение знака кривизны.

Пример 1. Метрика диагональная Фридмана: уравнения движения частиц в космологической задаче (Веденяпин В. В., Бай А. А., Аушев В. М., Гладков А. О., Измайлова Ю. А., Реброва А. А. [27-33]). $g_{\alpha\beta}=diag(1,-a^2(t),-a^2(t),-a^2(t)).$

Рассмотрим действие (частный случай общего действия (5))

$$S=-cm\int\sqrt{c^2-a^2(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x=\int Ldt+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x=S_p+S_f,$$

где лагранжиан частиц $L=-cm\sqrt{c^2-a^2(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=cmL_1$, S_p означает действие частиц, S_f означает действие полей. Варьирование действия S_p с учетом условия $\delta S_p=0$ дает уравнения движения частиц:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=-\frac{d}{dt}\left(cm\frac{a^2\dot{x}_i}{L_1}\right)=0, \qquad i=1,2,3.$$

Получаем выражение для гамильтониана

$$H=\sum p_i\dot{x}_i-L=\frac{c}{a}\sqrt{(mca)^2+p^2}.$$

Этот же результат получаем из массового соотношения, из общей формулы.

Гамильтоновы канонические уравнения $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\dot{x}_i = \frac{c}{a}\frac{p}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}}, \qquad \dot{p} = 0,$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ от пространственных переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и импульсов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(p, \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{c}{a}\frac{1}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}} = 0.$$

Используя гидродинамическую подстановку $f(t,x,p,m,e) = \rho(t,x,m)\delta(p - P(t,x,m))$, получаем уравнение неразрывности и уравнение движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho V) = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + V\frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

где

$$V = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=P} = \frac{c}{a}\frac{P}{\sqrt{(mca)^2 + P^2}}.$$

Отсюда получаем после градиентной подстановки $P = \nabla W$ уравнение неразрывности и уравнение Гамильтона–Якоби в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\dfrac{c}{a}\dfrac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}}\,\rho\right) = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{c}{a}\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим изотропный случай $W = W(r,t)$, который вместе с условием $\rho = \rho(t,m)$ дает космологические решения. Получаем выражения для импульсов и скоростей частиц

$$\nabla W = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial W}{\partial r}, \qquad v = \frac{c}{a}\frac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}} = \frac{c}{a}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = \hat{\mathbf{r}}\phi(r).$$

Также считая, что $\rho = \rho(t,m)$, разделяем переменные в уравнении неразрывности:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\hat{\mathbf{r}}\phi(r)) = -3H(m,t),$$

здесь $\hat{\mathbf{r}}$ – это единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}^i = \frac{x^i}{r}$,

$$div(\hat{\mathbf{r}}\phi(r)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\phi(r)) = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\phi,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\phi = 3H,$$

$$\phi = H(m,t)r + \frac{A(m,t)}{r^2}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a}\dfrac{\dfrac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2+\left(\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)^2}}=\phi, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}+\dfrac{c}{a}\sqrt{(mca)^2+\left(\dfrac{\partial W}{\partial r}\right)^2}=0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $\dfrac{\partial W}{\partial r}$, берем положительный корень:

$$\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{a^2cm\phi}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}},$$

выражаем корень:

$$\sqrt{(mca)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}=\frac{ac^2m}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{mc^3}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}=0.$$

Получаем систему уравнений для определения $W(r,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial r}=\dfrac{a^2cm\phi}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}=-\dfrac{mc^3}{\sqrt{c^2-a^2\phi^2}}. \end{cases} \tag{14}$$

Кроме этого, из условия $\dfrac{\partial^2 W}{\partial r\partial t}=\dfrac{\partial^2 W}{\partial t\partial r}$ имеем связь между функциями $a(t)$ и $\phi(r,t,m)$:

$$-a^2c^3m\phi\phi'=cma(\phi(2c^2-a^2\phi^2)\dot{a}+c^2a\dot{\phi}).$$

После подстановки ϕ получаем

$$-c^3ma^2\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)\left(-2\frac{A}{r^3}+H\right)=cma\left(\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)\left(2c^2-a^2\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)^2\right)\dot{a}+c^2a\left(\frac{A}{r^2}+rH\right)\right).$$

Приравниваем коэффициенты при степенях r. Из выражений при отрицательных степенях r следует, что $A=0$, и остается

$$-c^3ma^2rH^2=cma(2c^2rH\dot{a}-r^3a^2H^3\dot{a}+c^2ra\dot{H}).$$

Из коэффициента при r^3 имеем $\dot{a}=0$, то есть $a=const$. Приравниваем коэффициенты при r:

$$-c^3ma^2rH^2=c^3ma^2r\dot{H},$$

откуда получаем

$$H^2+\dot{H}=0.$$

Вывод. Точное следствие уравнений движения частиц в метрике модели Фридмана в космологическом случае независимо от уравнений для полей имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial t} + 3\rho H = 0, \\ H^2 + \dot{H} = 0, \\ a = const. \end{cases} \tag{15}$$

Из этих уравнений видно, что рассмотрения во всех учебниках модели Фридмана недостаточно, так как нужно рассматривать движение материи и на основе этого определять уравнение для константы Хаббла, как это сделано здесь. Третье из уравнений (15) показывает, что первый из отзывов Эйнштейна [35, 36] оправдался, а не второй, как это следует при рассмотрении движения материи. Второе из уравнений (15) показывает, что мы движемся в правильном [27-32] направлении: уже устранено влияние притяжения, осталось только свободное движения, как это видно из уравнений Милна – МакКри (13), и осталось только получить аналог лямбды в (13), при этом лямбда релятивистская из действия (1) здесь уже не участвует. Иными словами, имеется шанс получить лямбду нерелятивистскую (13) просто как следствие уравнений Власова – Эйнштейна, что и было бы триумфальным объяснением ускоренного расширения Вселенной из классического действия ОТО (1). Поэтому имеет особый смысл получить аналоги решений (15) в общем случае изотропной метрики. Это будет сделано в примере 3, а в примере 2 продолжим классические рассмотрения модели Фридмана. Отметим также, что определение во многих руководствах постоянной Хаббла как отношения $\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ неправомерно: в телескопы мы наблюдаем именно материю, а не метрику. И материя совершенно не вморожена в метрику.

Пример 2. Оценка стандартной модели Фридмана с точки зрения предыдущих вычислений. Модель Фридмана сыграла выдающуюся роль, но необходимо оценить теперь ее с точки зрения точных выражений примера 1.

Уравнение Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

После подстановки полученных ранее выражений для компонент тензора кривизны имеем стандартные выражения для модели Фридмана:

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00},$$

$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{i,i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Выражение для тензора энергии-импульса имеет вид в стандартной модели Фридмана

$$T=\begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на самом деле тензор энергии-импульса имеет точное выражение в уравнении (2), и хорошо видно, что там нет нулевых компонент. Это показывает, что метрика Фридмана не проходит как точное решение уравнений Эйнштейна. Тем не менее она и сейчас является способом получать простые модели, что мы и сделали в примере 1. В итоге имеем два уравнения Фридмана из учебников:

$$\Lambda+\frac{3\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{c^2}\rho,$$

$$\Lambda a^2+\dot{a}^2+2a\ddot{a}=0.$$

Если учесть, что $a=const$ (пример 1), то получим

$$\Lambda=\frac{8\pi G}{c^2}\rho,$$

$$\Lambda a^2=0.$$

Из второго уравнения получаем, что $a=0$. Это понятный ответ. Модель Фридмана несовместима с правильным выражением тензора энергии-импульса, когда вселенная разбегается: там все компоненты при разбегании ненулевые. Поэтому программа должна выглядеть так: найти простейшую метрику, дающую точное космологическое решение уравнения Власова – Эйнштейна.

Выводы. Простота получения решений движения частиц в метрике Фридмана в космологическом случае наталкивает на мысль сделать то же самое в более общих изотропных случаях: это было бы первым точным космологическим решением уравнения Эйнштейна. В следующем пункте мы начнем вычисления в общем случае изотропной метрики, получая последовательно аналоги уравнений (13-15).

Пример 3. Общая изотропная метрика: уравнения движения частиц и космологические решения [37]. Изотропная метрика:

$$g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} \mathrm{e(r,t)} & \mathrm{a(r,t)x} & \mathrm{a(r,t)y} & \mathrm{a(r,t)z} \\ \mathrm{a(r,t)x} & \mathrm{b(r,t)+d(r,t)x^2} & \mathrm{d(r,t)xy} & \mathrm{d(r,t)xz} \\ \mathrm{a(r,t)y} & \mathrm{d(r,t)xy} & \mathrm{b(r,t)+d(r,t)y^2} & \mathrm{d(r,t)yz} \\ \mathrm{a(r,t)z} & \mathrm{d(r,t)xz} & \mathrm{d(r,t)yz} & \mathrm{b(r,t)+d(r,t)z^2} \end{pmatrix}.$$

Имеем выражение для обратной метрики (А. О. Гладков, А. А. Русское):

$$g_{\alpha\beta} = K \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{b} + \mathrm{d}(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2) & -\mathrm{ax} & -\mathrm{ay} & -\mathrm{az} \\ -\mathrm{ax} & \mathrm{g}_{11} & \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{xy} - \mathrm{edxy}}{\mathrm{b}} & \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{xz} - \mathrm{edxz}}{\mathrm{b}} \\ -\mathrm{ay} & \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{xy} - \mathrm{edxy}}{\mathrm{b}} & \mathrm{g}_{22} & \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{yz} - \mathrm{edyz}}{\mathrm{b}} \\ -\mathrm{az} & \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{xz} - \mathrm{edxz}}{\mathrm{b}} & \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{yz} - \mathrm{edyz}}{\mathrm{b}} & \mathrm{g}_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{be} - (\mathrm{a}^2 - \mathrm{ed})(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)},$$

$$\mathrm{g}_{11} = \frac{1}{\mathrm{b}}(-\mathrm{a}^2\mathrm{y}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2 + \mathrm{eb} + \mathrm{edy}^2 + \mathrm{edz}^2),$$

$$\mathrm{g}_{22} = \frac{1}{\mathrm{b}}(-\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2 + \mathrm{eb} + \mathrm{edx}^2 + \mathrm{edz}^2),$$

$$\mathrm{g}_{33} = \frac{1}{\mathrm{b}}(-\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{y}^2 + \mathrm{eb} + \mathrm{edx}^2 + \mathrm{edy}^2).$$

По массовому соотношению $\mathrm{g}^{\alpha\beta}\mathrm{p}_\alpha\mathrm{p}_\beta = (\mathrm{mc})^2$ составим и решим квадратное уравнение относительно p_0:

$$\mathrm{g}^{00}\mathrm{p}_0^2 + 2\mathrm{g}^{i0}\mathrm{p}_i\mathrm{p}_0 + \mathrm{g}^{ij}\mathrm{p}_i\mathrm{p}_j = (\mathrm{mc})^2.$$

Физический смысл имеет корень, взятый с минусом [1]:

$$p_0 = \frac{1}{e}\Big(-2a(p_1x + p_2y + p_3z) - \sqrt{(a^2 - ed)(p_1x + p_2y + p_3z)^2 + e((mc)^2 - bp^2)}\Big).$$

Здесь использовано обозначение $\mathrm{p}^2 = \mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_2^2 + \mathrm{p}_3^2$.

Сделаем подстановку $\mathrm{p} = \nabla\mathrm{W}(\mathrm{r},\mathrm{t})$, $\mathrm{W}_\mathrm{t} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{H}(\mathrm{x},\mathrm{p}) = \mathrm{cp}_0$ и выпишем уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\mathrm{W}_\mathrm{t} = -\mathrm{H} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{e}}\Big(-\mathrm{arW}_\mathrm{r} - \sqrt{\mathrm{W}_\mathrm{r}^2(\mathrm{a}^2\mathrm{r}^2 - \mathrm{eb} - \mathrm{dr}^2\mathrm{e}) + \mathrm{e}(\mathrm{mc})^2}\Big). \quad (16)$$

Нам нужно еще посчитать скорости и уравнение неразрывности в изотропном случае, и мы докажем следующую лемму.

Лемма об изотропных гамильтонианах и уравнении неразрывности в космологических моделях. Пусть гамильтониан $H(p,x)$ зависит от этих аргументов через изотропные переменные p^2 и (p,x): $H(p,x) = H((p,x),p^2)$. Тогда:

1. При Гамильтон – Якобиевой подстановке $p = \nabla W$ гамильтониан приобретает вид

   $$H(p,x) = H((p,x),p^2) = H(rW_r, W_r^2);$$

2. Скорости имеют вид $v^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{\partial H}{\partial W_r}\dfrac{x^i}{r}$; это хаббловское расширение.

3. Уравнение неразрывности принимает вид

   $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0 \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}\right) = 0;$$

4. В космологическом случае, когда плотность $\rho = \rho(m,t)$ не зависит от пространственной координаты, переменные разделяются, и появляется «постоянная» интегрирования $h(t)$, которая называется постоянной Хаббла:

   $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0, \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}\right) = 3h$;
5. Уравнение $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}\right) = 3h$ имеет следующее общее решение:

   $\frac{\partial H}{\partial W_r} = hr + \frac{A(t)}{r^2}$;
6. В космологических моделях «постоянную» $A(t)$ можно положить равной нулю. При этом, подставляя это выражение для скоростей $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}$ из п. 2, получаем $v^i = h(t)x^i$, что полностью соответствует общепризнанному представлению о «постоянной Хаббла»;
7. Решая уравнение п. 5 относительно W_r, получаем $W_r = F(hr)$, где F – это функция, обратная к $\frac{\partial H}{\partial W_r}$;
8. При этом, подставляя это выражение для скоростей $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}$ из п. 2, получаем $v^i = h(t)x^i$, что полностью соответствует общепризнанному представлению о «постоянной Хаббла»;
9. Получаем следующую систему уравнений (задача Гурса):

$$W_r = F(hr)$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} = H(p,x) = H((p,x),p^2) = H(rW_r, W_r{}^2) = H(rF(hr), F(hr)^2).$$

Суммируя, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial r} = F(hr) \qquad .$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} + H(rF(hr), F(hr)^2) = 0$$

Условие совместности последних двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}.$$

Используя эту лемму для гамильтониана (16), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+3h\rho=0,\\ \frac{\mu\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{e(mc)^2+\mu\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}}=R,\\ \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{c}{e}\frac{\partial W}{\partial r}ar+\frac{c}{e}\sqrt{e(mc)^2+\mu\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}=0,\end{cases} \qquad (17)$$

где $\mu(r,t)=r^2(a^2-de)-be$, $\mathrm{R}(m,r,t)=\left(\frac{e}{c}h-a\right)r$ – безразмерный радиус-вектор r.

Эту систему уравнений следует дополнить уравнениями Эйнштейна для полей в изотропном случае, т.е. на метрические коэффициенты a,b,d,e. Но выведем следствия уравнений (17).

Решаем среднее уравнение системы (17) относительно W_r, получаем

$$W_r=Remc\cdot\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}(\mu^2-R^2\mu)}}.$$

Подставляя это выражение в нижнее уравнение (Гамильтона – Якоби), получаем

$$W_t=-m\mathrm{c}^2\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}(\mu^2-R^2\mu)}}\cdot(arR+\mu).$$

Получаем, как и в случае примера 1 для метрики Фридмана, уравнение на коэффициенты метрики, приравнивая вторые частные производные (условие совместности):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial t}=\frac{\partial^2 W}{\partial t\partial r}.$$

Перепишем выражения в удобном виде:

$$W_t=mcT\sqrt{\frac{1}{Z}},\ W_r=mcQ\sqrt{\frac{1}{Z}} \qquad (18)$$

где $Z=\mathrm{e}(\mu^2-R^2\mu)$, $T=-\mathrm{c}(arR+\mu)$, $\mathrm{Q}=\mathrm{eR}$,

$\mathrm{R}=\left(\frac{e}{c}h-a\right)r$, $\mu(r,t)=r^2(a^2-de)-be$.

Здесь все компоненты метрики есть функции (r,t) радиус-вектора и времени, а постоянная Хаббла есть, вообще говоря, функция (m,t) времени и массы.

Получаем уравнение

$$2ZQ_t-QZ_t=2ZT_r-TZ_r. \qquad (19)$$

Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которые дают космологические решения.

Все три функции этого уравнения есть полиномы по r, если коэффициенты метрики сами полиномы по r. Тогда можно приравнять коэффициенты при степенях r, что и будет обобщением метода Милна – МакКри.

Рассмотрим случай, когда метрика есть функция только от времени:

$$Z = z_4 r^4 + z_2 r^2 + z_0, \mathrm{T} = t_2 r^2 + t_0, \mathrm{Q} = q_1 r .$$

Получаем три уравнения при пятой, третьей и первой степенях:

$$\begin{aligned} &2z_4 q_{1t} - z_{4t} q_1 = 0, \\ &2z_2 q_{1t} - z_{2t} q_1 = 2z_2 t_2 - 4z_4 t_0, \\ &2z_0 q_{1t} - z_{0t} q_1 = 4z_0 t_2 - 2z_2 t_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое уравнение интегрируется:

$$\frac{q_1}{\sqrt{z_4}} = const = I(m) \text{ – безразмерный интеграл,} \quad (21)$$

где $q_1 = \dfrac{e^2}{c} h - a\mathrm{e}$, $z_4 = e(a^2 - \mathrm{de})^2 - e(a^2 - \mathrm{de})\left(\dfrac{e}{c} h - a\right)^2$.

Остальные коэффициенты в (20):

$$z_2 = -2be^2(a^2 - \mathrm{de}) + \mathrm{be}^2\left(\frac{e}{c} h - a\right)^2, \; z_0 = e(\mathrm{be})^2,$$

$$t_2 = -c(a^2 - \mathrm{de}) - ca\left(\frac{e}{c} h - a\right) = cde - ca^2 - aeh + ca^2 = cde - aeh = e(cd - ah), \; t_0 = c\,\mathrm{be}.$$

Эти уравнения обобщают соотношения примера 1. Пример 1 [33] значительно обобщает и упрощает результаты работ [27-32], а также показывает, что первое [35, 36] из предположений Эйнштейна в отношении работы Фридмана [34] о тривиальности этой модели для космологических решений оказалось оправданным. Особый интерес представляет последнее из уравнений (20), т.к. оно содержит уравнение на постоянную Хаббла, имеющее вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 = \lambda(a,b,d,e,h).$$

Отклонение от свободного движения (метрики Минковского и модели Фридмана) $\lambda(a,b,d,e,h)$ должно дать ускоренное расширение в терминах метрики, если оно положительно. Для следующего примера метрики, обобщающей ФРЛУ, $\lambda(a,b,d,e,h) = \dfrac{hb_t}{b}$. Итак, мы построили общую теорию движения материи в космологических решениях в изотропной метрике. Для окончания нужно еще движение полей в заданной метрике по уравнениям Эйнштейна. Рассмотрение частных случаев представляет значительный интерес: мы свели задачу к исследованию знака $\lambda(a,b,d,e,h)$.

Пример 4. Рассмотрим случай [37] с произвольными $b(t)$ и $d(t)$, но с $e = 1, \mathrm{a} = 0$.

Найдем обратную матрицу, обозначая ее соответствующие компоненты большими буквами, получим E=1, A=0, $D = \dfrac{-d}{b(b + dr^2)}, B = \dfrac{1}{b}.$ Это обобщает случай Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера [1-4]. Мы видим, что если уравнения для полей описываются метрическим тензором с нижними индексами, которые входят в действие (1) (здесь это соответствует коэффициентам с большими буквами), то необходимые уравнения для материи – метрикой с верхними индексами. Получим для движения материи уравнения (20).

$q_1 = \frac{h}{c}$, $z_4 = d^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2$, что дает первое из уравнений (20),

$$2\left(d^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)\left(\frac{h}{c}\right)_t - \left(d^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)_t\left(\frac{h}{c}\right) = 0,$$

или $2d^2h_t - h(d^2)_t - d_t\left(\frac{h}{c}\right)^2 = 0$, где интеграл (21) дает связь $\left(\frac{h}{c}\right)^2 = I^2(m)\left(d^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)$.

Во втором из уравнений (20) $z_2 = 2bd + b\left(\frac{h}{c}\right)^2$, $t_2 = cd$, $t_0 = cb$, и оно превращается в

$$2\left(2bd + b\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)\left(\frac{h}{c}\right)_t - \left(2bd + b\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)_t\left(\frac{h}{c}\right) = 2\left(2bd + b\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)(cd) - 4\left(d^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)(cb)$$

или

$4bd\left(\frac{h}{c}\right)_t - (2bd)_t\left(\frac{h}{c}\right) - b_t\frac{h^3}{c^3} = -2b\frac{1}{c}h^2d$. Или $4bdh_t - 2(bd)_t h - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bdh^2 = 0.$

Наконец, третье уравнение $2z_0q_{1t} - z_{0t}q_1 = 4z_0t_2 - 2z_2t_0$ (20) дает при $z_0 = \mathrm{b}^2$, $q_1 = \frac{1}{c}h$

$2b^2\frac{h_t}{c} - (b^2)_t\frac{h}{c} = 4b^2cd - 2\left(2bd + b\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)cb$. Или $bh_t - b_th + bh^2 = 0$.

Система уравнений:

$$\begin{aligned}
&2d^2h_t - h(d^2)_t - d_t\left(\frac{h}{c}\right)^2 h = 0,\\
&4bdh_t - 2(bd)_t h - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bdh^2 = 0, \qquad (22)\\
&bh_t - b_th + bh^2 = 0.
\end{aligned}$$

Условия ускоренного расширения из третьего уравнения дают ограничения на метрику: $\frac{hb_t}{b} > 0.$

Отметим, что при $d = 0$ мы получаем ответ примера 1. Здесь же мы получили космологическое уравнение движения материи в метрике, обобщающей FLRU, но это лишь полдела. Чтобы замкнуть уравнения, нужно исследовать еще уравнения для полей Эйнштейна, а там тензор энергии-импульса навязывает неравенство нулю всех компонент тензора Эйнштейна. Это еще одно препятствие к получению точных решений уравнений Власова – Эйнштейна в космологической задаче. Однако из третьего уравнения видна принципиальная возможность получить ускоренное расширение Вселенной.

Пример 5. Анализ метрики Фридмана – уравнения (22) (Сафронов Ю. А., Богданов Д. И., Веденяпин В. В.). Упростим уравнения (22), приводя первые производные к диагональному виду: для этого нужно решить систему уравнений как линейную относительно первых производных. Получаем простую систему, эквивалентную системе (22):

$$\begin{aligned} d_t &= -2\frac{d^2c^2}{h}, \\ h_t &= -(2dc^2 + h^2), \\ b_t &= -(2dc^2)\frac{b}{h}. \end{aligned} \tag{23}$$

Из третьего уравнения следует, что $bd_t - db_t = 0$, $\frac{d}{b} = k$ – интеграл ($b = -a^2$ в обычных обозначениях примера 1). Мы автоматически оказались в случае постоянной кривизны – модели Фридмана. При ускоренном расширении вселенной $d \prec 0$. Так как $b \prec 0$, имеем следствие $k \succ 0$. Это пространство Лобачевского. Мы выяснили, что знак кривизны определяется из эксперимента и точного следствия уравнений, получающихся из принципа наименьшего действия. Итак, мы не только получили простое объяснение ускоренного расширения Вселенной на основе системы (23) без введения лямбды Эйнштейна, полей, темной энергии, но и впервые получили возможность надежно говорить о знаке кривизны на основе хорошо проверенного эксперимента об ускоренном расширении Вселенной.

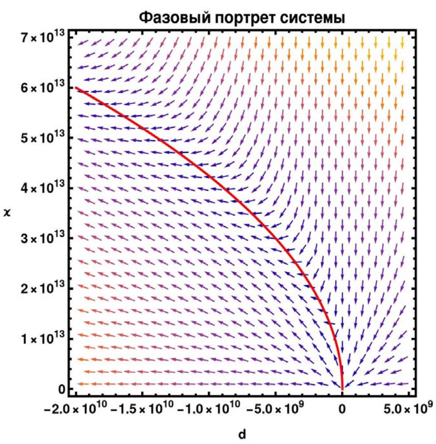

Рис. 1. Фазовый портрет

Покажем фазовый портрет системы (23) в переменных d, h на основе первых двух уравнений (23) (рис. 1). Чтобы условие $\dot{h} > 0$ выполнялось, необходимо, чтобы выполнялось условие $d(t) < -\frac{h^2}{2c^2}$. Красной линией обозначена кривая $d = \frac{h^2}{2c^2}$.

Нас интересует левая половина данного портрета, т.к. предполагаем $d(t) < -\frac{h^2}{2c^2}$. Видим, что условие $\dot{h} > 0$ выполняется, предположение $d(t) < -\frac{h^2}{2c^2}$ со временем не нарушается. Заметим, что полученная система является жесткой в силу разного масштаба компонент, т.е. без введения обезразмеривания трудно поддается численному решению. Приведем также фазовый портрет с линиями тока на нем, при этом масштабируем систему, положив $c = 1$ (рис. 2).

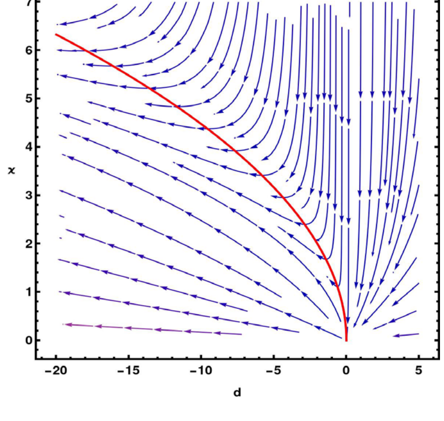

Рис. 2. Линии тока для $c = 1$

Заметим, что интеграл (21) существует в том случае, когда $z_4 > 0$. Этому условию соответствует объединение открытых интервалов $d \in (-\infty, -\frac{h^2}{c^2}) \cup (0, +\infty)$. Так как нас интересует только случай $d(t) < -\frac{h^2}{2c^2}$, то получаем ограничение на переменную метрики $d(t) < -\frac{h^2}{c^2}$. На рис. 3 представлен фазовый портрет, на котором красной линией изображена верхняя ветвь параболы $d = -\frac{h^2}{2c^2}$, фиолетовой линией изображена верхняя ветвь параболы $d = -\frac{h^2}{c^2}$. Все линии тока выше фиолетовой параболы выходят из бесконечности и уходят в бесконечность, при этом линии тока рассматриваемой нами системы находятся ниже фиолетовой параболы. Заметим, что они начинаются в нуле. Можно это показать, расписав интеграл (21) следующим образом:

$$\frac{h^2}{c^2 d^2 + h^2 d} = const,$$

тогда при $d \to 0$ имеем $h \to 0$, причем это величины одного порядка малости. Природа поведения системы между параболами и решения, которые получаются вне области существования нашей системы, требуют дополнительного исследования.

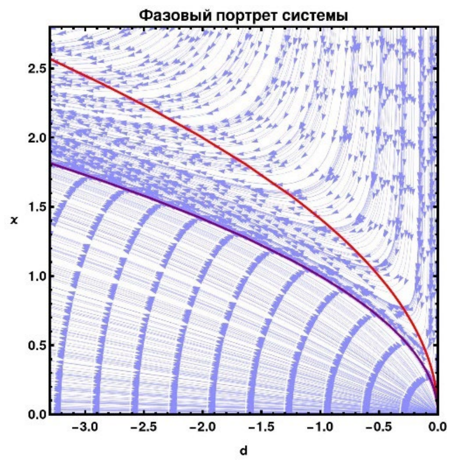

Рис. 3. Линии тока для $c = 1$

Удобно переписать систему (23), используя соотношение $\frac{d}{b} = k$:

$$h_t + h^2 = -2bkc^2,$$

$$b_t = -2kc^2 \frac{b^2}{h}.$$

В таком виде явно входят $\frac{d}{b} = k$ – кривизна с обратным знаком – и $b = -a^2$ – параметр Фридмана, откуда хорошо видно, что кривизна должна быть отрицательной для ускоренного расширения Вселенной. Можно искать частное решение в виде $b = Ah^2$, откуда находим из условия совпадения двух уравнений (24) $A = -\frac{1}{kc^2}$. Это решение является сепаратриссой двух режимов: под этой параболой решения стартуют из начала координат, над ней решения начинаются вблизи вертикальной оси h на плюс бесконечности. Где живет наша Вселенная?

Пример 6. Гамильтониан метрики Фока – Ландау [1-2]. Рассмотрим метрику

$$g_{\alpha\beta} = diag\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1 + \frac{2U}{c^2}, -1 + \frac{2U}{c^2}, -1 + \frac{2U}{c^2}\right).$$

Этот пример интересен тем, что он уточняет слабый релятивизм, нужно этот случай объединять с предыдущим примером.

Запишем действие:

$$S = -mc\int\sqrt{c^2 + 2U - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2 d\boldsymbol{x}dt - \frac{\mathrm{c}^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Лагранжиан для частиц:

$$L = -mc\sqrt{c^2 + 2U - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Откуда имеем

$$p = \frac{mc\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\frac{dx}{dt}}{\sqrt{c^2+2U-\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} \text{ (компоненты 1, 2, 3),}$$

$$p^2 = \frac{m^2c^2\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{c^2+2U-\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}, \qquad \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{(c^2+2U)p^2}{p^2+m^2c^2\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)},$$

$$\mathrm{H} = \frac{mc\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\sqrt{c^2 + 2U - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} + mc\sqrt{c^2 + 2U - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Окончательно получим

$$\mathrm{H} = c\sqrt{\frac{c^2 + 2U}{c^2 - 2U}\left(p^2 + m^2c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\right)}.$$

Далее выкладки должны быть аналогичны выкладкам из случая слабого релятивизма [37], это является пространством для дальнейших исследований. Дальнейшие уточнения и обобщения возможны также переходом к общей метрике примера 2 – изотропной метрике – и добавлением уравнений Эйнштейна. Все эти примеры показывают правильность определения константы Хаббла по Милну – МакКри через материю, а не через метрику (ибо материя не «вморожена» в метрику) и дают очень простое объяснение ускоренного расширения Вселенной. Более того, удается получить простое обоснование знака кривизны.

Заключение

Мы получили возможность выводить уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [3-15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получать и уравнения гравитации, и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. Также это единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звезд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова – Максвелла – Эйнштейна была получена для скоростей [9] и для импульсов [19-21], что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона – Якоби. Здесь мы исследовали важные слаборелятивистские примеры [20-23] – обобщения моделей типа Милна – МакКри. В работах [19-21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где была выведена и обобщена модель Милна – МакКри [20-21]. На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна $\mathrm{U(r)} = -\frac{\gamma}{\mathrm{r}} + \mathrm{ar}^2$ [24-25], где второе слагаемое связано с лямбда-членом Эйнштейна. Но теперь никакие лямбды, темные энергии и мифические частицы не требуются. Мы построили математическую теорию ускоренного расширения Вселенной как релятивистский эффект, исходя из точных уравнений движения частиц в заданной метрике. Эти модели дают возможность описывать и космические аномалии, или напряжения постоянной Хаббла (The Hubble Constant Tension). Мы проанализировали классические модели ФЛРУ и нашли, как в них движется материя в космологии, обобщая решение Милна – МакКри. Представляет значительный интерес продолжить исследование предложенных здесь моделей для получения общего решения как в изотропном случае, так и в сравнении с экспериментами. Подход с помощью уравнений типа Власова и их гидродинамических и Гамильтон – Якобиевых следствий здесь наиболее адекватен именно в космологических моделях. Но мы получили даже больше: ускоренное расширение вселенной навязывает знак кривизны в модели Фридмана: можно уверенно сказать в рамках метрики Фридмана, что мы живем в пространстве Лобачевского.

Список литературы

1. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.М.: Наука, 1988.

3. Choquet-Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, University Press. 2015.

4. Cercigniani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.

5. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН, 47 (2013), 5–17.

6. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Метод Гамильтона – Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Докл. РАН, 461:2 (2015), 136–139.

7. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М. Уравнение типа Власова – Максвелла – Эйнштейна и переход к слабелятивистскому приближению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 59:11 (2019), 1883–1898 . Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M., “Equation of Vlasov – Maxwell – Einstein type and transition to a weakly relativistic approximation”, Comput. Math. Math. Phys., 59:11 (2019), 1816–1831.

8. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона – Якоби // Докл. РАН, 449:5 (2013), 521–526.

9. Веденяпин В. В., Воронина М. Ю., Руссков А. А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Доклады РАН, 2020, т. 495, с. 9–139.

10. Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V., The Properties of Vlasov – Maxwell – Einstein Equations and its Applications to Cosmological Models // European Physical Journal Plus. 2020. T. 135. № 5. C. 400.

11. Lars Andersson and Mikolaj Korzyński, Variational principle for the Einstein – Vlasov equations. arXiv:1910.12152; (October 2019).

12. H˚akan Andréasson, The Einstein – Vlasov System. Kinetic Theory. Living Rev. Relativ. 14, 4 (2011). https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.1367

13. Rein G. Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas — A review. Class.Quant.Grav. 40 (2023) 19, 193001. doi:10.1088/1361-6382/acf436

14. Okabe T., Morrison P. J., Friedrichsen III J. E., Shepley L. C. Hamiltonian Dynamics of Spatially – Homogeneous Vlasov – Einstein Systems // Physical Review D 84, 024011 (11pp) (2011).

15. Huanchun Ye and Morrison P. J. Action principles for the Vlasov equations // Phys Fluids B. 1992. V. 4. № 4. P. 771–777.

16. Madelung E., Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form) // Z Phys, 40 (1926), 322–326.

17. Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех, 1983, № 6, 10–22.

18. Козлов В. В. Общая теория вихрей. Изд-во Удмуртского ун-та, Ижевск, 1998, 239 с.

19. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov – Poisson equation system //The European Physical Journal Plus. – 2021. – Т. 136. – №. 6.

20. Веденяпин В. В., Парёнкина В. И., Свирщевский С. Р. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:6 (2022), 1016–1029.

21. Веденяпин В. В. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона – Якоби и космологических решениях // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 504 (2022), 51–55.

22. McCrea W.H., Milne E.A. Newtonian universes and the curvature of space. // Quart. J. Math. 5, 73 (1934).

23. Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P. BBGKY hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.

24. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.

25. Capozziello S., Gurzadyan V. G. Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy // The European Physical Journal Plus. – 2023. – Т. 138. – №. 2. – С. 184.

26. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. Hydrodynamic consequences of Vlasov – Maxwell – Einstein equations and their cosmological applications. Gravit. Cosmol. 29, No. 1, 1-9 (2023).

27. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. Gravitation and Cosmology. 26, No. 2, pp. 173–183. (2020).

28. Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M. Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein – Vlasov equations. Eur. Phys. J. Plus.,2022, т.137, № 9. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03257-7.

29. Веденяпин В. В., Бай А. А., Петров А. Г. О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна – МакКри и о точках Лагранжа. Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 514:1 (2023), 69–73.

30. Vedenyapin V. V., Bay A. A. Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne – McCrea solution for Lorentzian metric. Eur. Phys. J. Plus (2024) 139:111.; https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-04885-x.

31. Vedenyapin V. V., Bay A. A., Parenkina V. I. and Petrov A. G. Minimal Action Principle for Gravity and Electrodynamics, Einstein Lambda, and Lagrange Points. Markov Processes Relat. Fields 29, 515–532 (2023).

32. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Чечеткин В. М. Уравнения типа Власова – Максвелла – Эйнштейна и их следствия. Приложения к

астрофизическим задачам. ТМФ, 218:2 (2024), 258–279. https://doi.org/10.4213/tmf10551.

33. Веденяпин В. В., Аушев В. М., Гладков А. О., Измайлова Ю. А., Реброва А. А. Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна – МакКри. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2024. № 3. 28 с.https://doi.org/10.20948/prepr-2024-3; https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-3.

34. Фридман А. А. О кривизне пространства // УФН, 1963, т. 80, № 3, 439–446. Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 56 (1), 59 (1924). Работа впервые опубликована на нем. языке в Zs. Phys. 11, 377 (1922).

35. Эйнштейн А. Замечание к работе А. Фридмана «О кривизне пространства», УФН, 1963, т. 80, № 3, 453. A. Einstein, Bemerkung zu der Arbeit von A.Friedman «Uber die Krummung des Raumes», Zs. Phys. 11, 326 (1922).

36. Эйнштейн А. К работе А. Фридмана «О кривизне пространства» // УФН, 1963, т. 80, № 3, 453. A. Einstein, Notiz zu der Arbeit von A. Friedman «Uber die Krummung des Raumes», Zs. Phys. 21, 228 (1923).

37. Веденяпин В. В. Математическая теория расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия. ЖВМ и МФ, 2024, т. 64, № 11, с. 2110–2127. Vedenyapin V. V., Mathematical Theory of the Expanding Universe Based on the Principle of Least Action. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2024, Vol. 64, No. 11, pp. 2624–2642. © Pleiades Publishing, Ltd., 2024.