

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 15 за 2025 г.</u>



*Рекомендуемая форма библиографической ссылки:* Гаммал А.С., Тучин Д.А. Реконструкция траектории полёта космического аппарата «Восток-1» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 15. 32 с. EDN: <u>XAHRNG</u> <u>https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-15</u>

# Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша

Российской академии наук

# А.С. Гаммал, Д.А. Тучин

# Реконструкция траектории полёта космического аппарата «Восток-1»

#### Гаммал А.С., Тучин Д.А.

#### Реконструкция траектории полёта космического аппарата «Восток-1»

Проведена реконструкция первого полёта человека в космос, выполненного Ю.А. Гагариным. Построена траектория выведения ракетой-носителем космического аппарата «Восток-1», восстановлены орбитальный полёт и манёвр торможения при баллистическом спуске в атмосфере Земли. Проведён сравнительный анализ построенных ранее реконструкций.

Ключевые слова: реконструкция, траектория, «Восток-1»

#### Gammal A.S., Tuchin D.A.

#### «Vostok-1» spacecraft flight path reconstruction

«Vostok-1» spacecraft flight path reconstruction of the during the first human flight into space, performed by Yuri Gagarin, is presented. The reconstruction of the launch vehicle launch trajectory was built, the orbital flight and ballistic descent in the Earth's atmosphere maneuver were reconstructed. A comparative analysis of previously constructed reconstructions has been carried out.

Key words: reconstruction, orbit, «Vostok-1»

## Оглавление

Введение
1. Исходные данные
2. Определение орбиты по измерениям
2.1. Метод Гаусса-Ньютона
2.2. Измерения широты, долготы и высоты
2.3. Измерения широты и долготы
2.4. Измерения двустрочных элементов
3. Орбитальный полёт
4. Траектория полёта ракеты-носителя
5. Импульс торможения
6. Анализ построенных ранее реконструкций
7. Визуализация реконструкции полёта
Заключение
Список сокращений
Библиографический список
Приложение. Иллюстрации

«Всякое проектирование начинается с баллистики и ею же заканчивается» С.П. Королев [1]

## Введение

Первый полёт человека в космическое пространство состоялся 12 апреля 1961 года: советский космонавт Юрий Алексеевич Гагарин стартовал на ракете-носителе (PH) «Восток 8К72» с космодрома Тюра-Там (ныне полигон Байконур), сделал один виток вокруг Земли на космическом аппарате (КА) «Восток-1» и благополучно приземлился [2].

В работе выполнена реконструкция траектории полёта от момента времени старта РН до катапультирования космонавта из спускаемого аппарата (СА). Проведено математическое моделирование траектории выведения РН. Восстановлена орбита полёта от момента отделения КА от третьей ступени РН до момента включения тормозной двигательной установки (ТДУ). Проведены расчёты величины и направления импульса торможения для обеспечения требуемого угла входа в атмосферу Земли.

Результатом построенной реконструкции является таблица кинематических векторов положения и скорости центра масс PH, КА и СА в инерциальной экваториальной системе координат (СК) J2000 [3] с секундным шагом по времени.

В п. 1 проанализированы открытые источники информации и приведены данные, использованные для построения реконструкции траектории движения КА «Восток-1».

В п. 2 приведены дифференциальные уравнения движения КА. Представлен метод определения параметров движения КА с использованием измерений, который использован для решения *задачи согласования* при переходе от кеплеровых элементов в задаче двух тел к дифференциальной модели движения искусственных спутников Земли (ИСЗ). Приведена необходимая *небесно-механическая интерпретация* геодезических координат и измерений двустрочных элементов в решении задачи согласования моделей при анализе других построенных реконструкций.

В п. 3 описан метод восстановления траектории КА «Восток-1» на участке его орбитального полёта. Плоскость орбиты определялась вектором космодрома в момент времени старта и вектором при катапультировании Ю.А. Гагарина от СА на высоте 7 км [4]. Найденная плоскость определяет наклонение орбиты и долготу восходящего узла (ДВУ). Для определения параметров в плоскости орбиты использованы данные [5; 6] высоты перигея 180 км и апогея 327 км. Согласование [7] старой (СК-42) и новой (ПЗ-90.02) модели фигуры Земли определяет эксцентриситет и полуось орбиты и, соответственно, период. По времени прохождения апогея, определённому системой «Глобус» на приборной панели КА «Восток-1», определялся момент времени прохождения перигея. Для определения аргумента перигея использовалось, по сути, одно независимое траекторное измерение: время сообщения Ю.А. Гагариным о выходе из тени Земли [4, с. 453]. Аргумент перигея искался методом дихотомии по условию нулевого значения рассогласования момента времени выхода из зоны затенения. Для обеспечения приложения импульса ТДУ проводилась коррекция ДВУ из условия прохождения трассы полёта КА «Восток-1» над точкой посадки. Построенные таким образом элементы орбиты согласовывались дифференциальной моделью движения ИСЗ на интервале витка полёта, и определялись начальные условия (НУ) для интегрирования уравнений при построении траектории движения.

После определения параметров движения КА «Восток-1» на орбитальном участке было проведено математическое моделирование траектории полёта РН (п. 4). При моделировании полёта первой и второй ступеней РН, в силу сходства циклограммы [6] с полётом РН «Союз», использованы данные выведения с космодрома во французской Гвиане.

Наличие импульса торможения для начала баллистического спуска СА на поверхность Земли отличает орбитальный полёт от суборбитального. Исполненный ТДУ импульс позволяет говорить о первом *орбитальном* полёте Ю.А. Гагарина в космосе. В п. 5 представлены результаты решения задачи нахождения угла направления выдачи импульса ТДУ относительно вектора скорости КА в плоскости орбиты для обеспечения входа в атмосферу Земли на высоте 100 км под определённым углом и спуска до высоты 7 км над точкой посадки.

Авторам работы известны несколько вариантов восстановления траектории полёта КА «Восток-1», в частности: реконструкция РКК «Энергия» [8]; двустрочные элементы Джоэла Руна (Joel Runes) [9] и визуализация Яндекс [10]. Несмотря на сложность баллистического анализа представленных реконструкций из-за существенно разного вида представляемых авторами данных, в п. 6 представлены результаты сравнения этих реконструкций с построенной в данной работе.

В п. 7 приведено описание использованных инструментов для визуализации и анимации трассы полёта КА «Восток-1».

Для представления времени привязки событий в работе используется московское время. Использованная в данной работе геодезическая широта определяется [7] как угол между нормалью к эллипсоиду Земли, проходящей через заданную точку, и плоскостью экватора с изменением от  $-90^{\circ}$  (юг) до  $90^{\circ}$  (север). Геодезическая долгота является двугранным углом между плоскостью начального меридиана и плоскостью текущего меридиана с положительным направлением от  $0^{\circ}$  до  $180^{\circ}$ , а к западу – с отрицательным направлением от  $0^{\circ}$  до  $-180^{\circ}$ . Геодезическая высота определяет расстояние по нормали к поверхности эллипсоида.

## 1. Исходные данные

Большинство данных по хронологии событий и по параметрам взяты из результатов предварительного анализа телеметрических и траекторных измерений [4; 11], хронология событий входа и выхода из зон связи с наземными станциями – из воспоминаний начальника отдела по подготовке и обеспечению космических полётов Главного штаба BBC СССР Николая Петровича Каманина [2] (рис. 4 приложения).

Позднее изделию 8К72 № Е10316 КА «Восток-1» [6] присвоен международный номер запуска National Space Science Data Center (NSSDC) 1961-012А с присвоением номера 00103 в системе North American Aerospace Defense Command (NORAD) [12]. В таблице 1 представлены параметры, используемые при математическом моделировании трассы полёта КА «Восток-1» и её визуализации.

Обозн.	Значение	Параметр	Источник
	1961-012A	Номер в NSSDC	[12]
_	00103	Номер в NORAD	[12]
$t_{cm}$	09:06:59.7	Старт	[6; 13]
_	09:08:59.2	Разделение 1-й и 2-й ступеней РН	[6]
$t_0$	09:18:27.0	Начало орбитального полёта КА	[14]
_	09:09:34.3	Сброс головного обтекателя	[6]
_	09:18:26.8	Разделение РН и КА	[6]
_	09:22:27.0	Видимость со станции NSA ELINT	[15]
_	09:30:00.0	Выход из зоны Заря-2	[2; 15]
_	09:49:00.0	Гагарин: «Нахожусь в тени»	[4, c. 449], [16]
_	09:52:00.0	Выход из зоны Хабаровска	[2]
$t_{\alpha}$	10:04:00.0	Гагарин: «Нахожусь в апогее»	[14, c. 5], [4, c. 453]
$t_{вых}$	10:09:15.0	Гагарин: «Вышел из тени Земли»	[15, c. 29], [4, c. 453]
$t_{ m тдy}$	10:25:04.2	Включение ТДУ	[6; 14]
$t_{noc}$	10:55:00.0	Посадка Гагарина	[15]
$h_{\pi}$	181 км	Высота перигея	[5; 6]
$h_{\alpha}$	327 км	Высота апогея	[5; 6]
$\Delta v_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}$	132 м/с	Импульс ТДУ	[6; 14; 17]

Таблица 1. Исходные данные

Старт произошёл 12 апреля 1961 г. в 09:06:59.7 [6; 13]. Время старта хорошо согласуется с «карточкой стреляющего КА «Восток-1» [8] (рис. 1 приложения). На рис. 2 приложения представлено полётное задание [4, с. 269].

Отметим, что в данных телеметрической информации отсутствовало время

разделения второй и третьей ступеней РН [6, с. 60]. Время разделения смоделировано согласно штатной работе второй ступени циклограммы РН «Союз». Начало орбитального полёта КА соответствует первой целочисленной секунде после момента отделения КА от РН.

Время выхода КА из тени Земли в 10:09:15 [2; 14; 15] является по сути одним единственным траекторным измерением.

Реальный импульс ТДУ, рассчитанный бортовым интегратором, составил 132 м/с [14], хотя в [8] приведено значение 136 м/с. На самом деле, 136 м/с – это расчётный импульс торможения [17]. Время катапультирования Ю.А. Гагарина, определённое в данной работе, получено из условия нахождения СА на высоте 7 км [6].

Н.П. Каманиным обеспечена организация пунктов управления полётом в Москве, Тюра-Там, г. Новосибирске, г. Колпашево, г. Хабаровске и п. Елизово [2]. В таблице 2 приведены позывные станций с указанием времени их работы [2; 15].

Станция, позывной, частота	Данные	Время	КА «Восток-1»
ИП-1, «Заря-1», УКВ	СВЯЗЬ	07:10-09:1	3 [4, c. 438]
НИП-12, «Заря-2», УКВ	СВЯЗЬ	09:13-09:2	1 [4, c. 447]
НИП-6, «Заря-3», УКВ	СВЯЗЬ	09:25–09:29 [4, c. 448]	
Москва, «Весна», КВ	«Песня о Москве»	10:03-10:37	c 10:13
Новосибирск, «Весна», КВ	музыка	09:22-09:39	Нет
Алма-Ата, «Весна», КВ	песни в исполнении Р.Т. Баглановой	09:52-10:02	Нет
Хабаровск, «Весна-2», КВ	вальс «Амурские волны»	09:42–09:52	с 09:21, 09:53–09:57 – двусторонняя связь

Таблица 2. Наземные станции

Для обеспечения связи, приёма телеметрической информации и получения наземных траекторных измерений КА «Восток-1» имел в своём составе: радиотелеметрическую систему «Трал» (рис. 3 приложения), комплекс обеспечения траекторными измерениями станций «Кама» и прецизионную угломерную станцию фазовой пеленгации «Иртыш» [18]. Двусторонняя и односторонняя голосовая связь с Ю.А. Гагариным осуществлялась по ультракоротким (УКВ) и коротким волнам связи (КВ). Радиолокационная станция «Кама-Е» на наземном измерительном пункте (НИП) НИП-4 принимала телевизионное изображение Ю.А. Гагарина и проводила сеанс траекторных измерений [19].

Вдоль трассы полёта перед манёвром торможения КА «Восток-1» стояли *корабли* НИИ-4 для приёма телеметрии с использованием аппаратуры «Трал» [14; 18; 20]: «Краснодар» (рис. 5 приложения), «Ворошилов» (рис. 6 приложения) и «Долинск» (рис. 7 приложения).

В таблице 3 приведена привязка наземных станций и кораблей к геодезической СК [21].

НИП	Широта	Долгота	Высота, м
Пл. № 2, Тюра-Там, стартовый стол	45°55′12.6″	63°20′32.19″	125
ИП-1, Тюра-Там	45°55′12.6″	63°20′32.19″	125
НИП-12, г. Колпашево, Томская обл.	58°18'46.98″	82°54'11.73″	73
НИП-6, п. Елизово, Камчатская обл.	53°06′05″	158°21′33.88″	46
НИП-4, г. Енисейск	58°26′40.84″	92°15′53.63″	78
Москва, г. Москва	55°45′48.91″	37°36′50.99″	148
Новосибирск, г. Новосибирск	54°59′07.51″	82°53′45.85″	132
Алма-Ата, г. Алма-Ата	43°13′21.71″	76°51′07.31″	852
Хабаровск, г. Хабаровск	48°28′58.42″	135°04′18.87″	89
NSA ELINT, о. Шамия, Аляска, США	52°44′02.79″	174°05′27.29″	65
Корабль «Краснодар», Гвинейский залив	-10°10′	3°30′	0
Корабль «Ворошилов», Атлантический океан	-21°53'40.88"	-178°03'52.79"	0
Корабль «Долинск», о. Фернандо По	3°13'54.42″	9°22'47.46″	0
Точка посадки, берег р. Волга	51°16′14″	45°59′50″	43

Таблица 3. Координаты станций связи и точка посадки

Зарубежная радиолокационная станция слежения за запусками ракет из России NSA ELINT на о. Шамия (Shemya) в районе Аляски приняла телевизионный сигнал от КА «Восток-1» в 09:22:27 [15].

## 2. Определение орбиты по измерениям

#### 2.1. Метод Гаусса-Ньютона

В инерциальной геоцентрической СК J2000 [3] дифференциальные уравнения движения КА для  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{r}, \mathbf{v})^{\mathsf{T}}$  записываются в виде

$$\mathbf{x}_{0} = \mathbf{x} \left( t_{0} \right), \ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \left( \mathbf{x} \right) = \left( \mathbf{v}^{\mathsf{T}}, \ \ddot{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}} \right)^{\mathsf{T}}, \ddot{\mathbf{r}} = -\mu_{\mathfrak{I}} \frac{\mathbf{r}}{\left| \mathbf{r} \right|^{3}} + \mathbf{f}_{c} + \mathbf{f}_{\mathfrak{I}} + \mathbf{C}_{\mathsf{TCK}}^{\mathsf{12000}} \left( \mathbf{f}_{\mathfrak{P} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{a} \boldsymbol{\beta}} + \mathbf{f}_{\mathfrak{a} \boldsymbol{m} \boldsymbol{M}} \right),$$
<sup>(1)</sup>

где  $\mathbf{x}_0$  – вектор кинематических параметров НУ ,  $\mu_3$  – гравитационная постоянная Земли,  $\mathbf{f}_C$  и  $\mathbf{f}_3$  – гравитационные возмущения Солнца и Луны,  $\mathbf{C}_{rc\kappa}^{12000}$  – матрица  $3 \times 3$  перевода из гринвичской СК (ГСК) ПЗ-90.02 [7] в СК J2000,  $\mathbf{f}_{zpab}$  – гравитационное возмущение Земли, вызванное её нецентральным полем. Соотношения для расчёта  $\mathbf{f}_C$  и  $\mathbf{f}_3$  приведены в [22], для  $\mathbf{f}_{zpab}$  – в [23].

Расчёт вектора возмущающих ускорений  $\mathbf{f}_{amm}$  в ГСК, вызванных влиянием атмосферы Земли, производится по формуле

$$\mathbf{f}_{amm} = -\rho\left(\mathbf{r}_{\text{\tiny TCK}}\right) s_{\delta} \left|\mathbf{v}_{\text{\tiny TCK}}\right| \mathbf{v}_{\text{\tiny TCK}},\tag{2}$$

где  $\mathbf{r}_{\text{гск}}$  и  $\mathbf{v}_{\text{гск}}$  – векторы положения и скорости в ГСК,  $\rho(\mathbf{r}_{\text{гск}})$  – плотность атмосферы Земли в точке нахождения КА,  $s_{\delta}$  – баллистический коэффициент, величина которого определяется весовыми и аэродинамическими характеристиками КА. При интегрировании уравнений (1) движения КА «Восток-1» для расчёта плотности  $\rho$  использовалась статическая модель атмосферы Земли [24], баллистический коэффициент  $s_{\delta}$  принимался равным 0.0019м<sup>2</sup>/кг [25].

Дифференциальные уравнения в вариациях, необходимые для обработки измерений, всегда интегрируются совместно с уравнениями движения КА, поскольку для расчёта правых частей системы уравнений используется вектор кинематических параметров на текущий момент времени [26]:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}.$$
(3)

Следует учесть, что в блочном представлении матрица  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{F} \left( \mathbf{x} \right)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{r}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{v}} & \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$
 (4)

Соотношения для  $\frac{\partial \mathbf{f}_C}{\partial \mathbf{r}}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\pi}}{\partial \mathbf{r}}$  и  $\frac{\partial \left(-\mu_3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)}{\partial \mathbf{r}}$  приведены в [22],  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{грав}}}{\partial \mathbf{r}}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{атм}}}{\partial \mathbf{r}}$  и  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{атм}}}{\partial \mathbf{v}}$  находятся численным методом.

Гравитационная постоянная Земли µ<sub>3</sub>, экваториальный радиус Земли *R<sub>3</sub>* и разложение гравитационного поля по сферическим функциям определяются моделью ПЗ-90.02 [7]. Для расчёта матрицы  $C_{rck}^{12000}$  использовалась модель вращения Земли IAU2000A International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) [27]. Для учёта гравитационных возмущений  $f_c$  и  $f_n$  использовались коэффициенты полиномов Чебышёва модели DE421 [28]. Интегрирование уравнений движения (1) и уравнений в вариациях (3) на орбитальном участке полёта производилось модифицированным методом Адамса с переменным шагом [29], а на участке полёта РН – методом Рунге-Кутты 4-го порядка [30] с шагом 1 с. Для расчёта  $f_{epab}$  использовалось разложение по сферическим функциям степени 32 × 32 в модели ПЗ-90.02 [7].

Фундаментальные методы определения параметров движения КА по данным траекторных измерений, используемые далее, изложены в [31]. Пусть  $\Psi$  – вектор расчётных значений измеряемых функций от х,  $\tilde{\Psi}$  – измеренные значения,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} (t_0)$  – уточняемый шестимерный фазовый вектор неизвестных параметров, состоящий из трёх компонент вектора положения и трёх компонент вектора скорости,  $\xi = \tilde{\Psi} - \Psi$  – вектор невязок, тогда минимизируемый функционал с учётом весовой матрицы W имеет вид

$$\Phi = \xi^{\mathsf{T}} \mathbf{W} \xi. \tag{5}$$

Минимизация функционала с учётом симметричности W производится из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \xi^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{W} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}_0} = 0, \tag{6}$$

или

$$\frac{\partial \xi^{\mathsf{T}}}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{W} \boldsymbol{\xi} = 0. \tag{7}$$

Используя разложение  $\xi$  в ряд Тейлора в окрестности решения  $\mathbf{x}_0^{(s-1)}$ 

$$\boldsymbol{\xi}^{(s)} = \boldsymbol{\xi}^{(s-1)} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}_0} \cdot \left( \mathbf{x}_0^{(s)} - \mathbf{x}_0^{(s-1)} \right) + \dots$$
(8)

и оставляя линейный член, применяем метод Гаусса-Ньютона:

$$\frac{\partial \xi^{\mathsf{T}}}{\partial \mathbf{x}_{0}} \mathbf{W} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}_{0}} \cdot \Delta \mathbf{x} = -\frac{\partial \xi^{\mathsf{T}}}{\partial \mathbf{x}_{0}} \mathbf{W} \xi, \qquad (9)$$

где  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_0^{(s)} - \mathbf{x}_0^{(s-1)}$  называется поправкой, а  $\mathbf{K}_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial \xi^{\mathsf{T}}}{\partial \mathbf{x}_0} \mathbf{W} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}_0}\right)^{-1}$  – ковариационной матрицей. Итерации производятся до тех пор, пока не выполнится условие  $|\Delta \mathbf{x}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – наперед заданная величина.

Легко видеть, что (9) можно переписать в виде

$$\Delta \mathbf{x} = -\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_{i}}{\partial \mathbf{x}_{0}} \mathbf{W} \frac{\partial \xi_{i}}{\partial \mathbf{x}_{0}}\right)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \xi_{i}}{\partial \mathbf{x}_{0}} \mathbf{W} \xi_{i}\right),$$
(10)

Обращение матрицы (10) производится методом Гаусса [32]. Вектор  $x_0$  уточняется на момент времени  $t_0$  НУ. Для  $\frac{\partial \xi}{\partial x_0}$ , с учётом (3), справедливо

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}.$$
 (11)

#### 2.2. Измерения широты, долготы и высоты

На основании геодезических координат широты  $\phi$ , долготы  $\lambda$  и высоты h определяется вектор положения **r** во вращающейся СК [7]:

$$x = (R_{3}/\xi + h) \cos \varphi \cos \lambda,$$
  

$$y = (R_{3}/\xi + h) \cos \varphi \sin \lambda,$$
  

$$z = ((1 - e^{2}) R_{3}/\xi + h) \sin \varphi,$$
(12)

где  $e = \sqrt{f(2-f)}$  – эксцентриситет сечения эллипсоида Земли, f – коэффициент сжатия Земли,  $\xi = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}$  – первая основная сфероидическая функция.

Приведём соотношения для определения  $\varphi$ ,  $\lambda$  и h по кинематическому вектору положения, если x = 0 и y = 0, то

$$\varphi = 90^{\circ}$$
знак $(z), \lambda = 0, h = |z| - R_{3}\sqrt{1 - e^{2}}$ . (13)

Пусть  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ , тогда долгота  $\lambda$  определяется соотношением

$$\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{14}$$

Определение  $\varphi$  и *h* производится с использованием итерационного алгоритма. На шаге s = 0 итераций:

$$\varphi_{(0)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} (1 - e^2)}\right), h_{(0)} = |\mathbf{r}| - R_{3}.$$
(15)

На каждом шаге s > 0 итерации вычисляются:

$$\xi_{(s)} = 1 - e^{2} \sin^{2} \varphi_{(s-1)}, \ h_{(s)} = \frac{\sqrt{x^{2} + y^{2}}}{\cos \varphi_{(s-1)}} - \frac{R_{s}}{\xi_{(s-1)}},$$

$$\varphi_{(s)} = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - e^{2} \frac{R_{s}\xi_{(s-1)}}{R_{s}\xi_{(s-1)} + h_{(s-1)}}\right)}\right).$$
(16)

Цикл повторяется пока  $|\varphi_{(s)} - \varphi_{(s-1)}| > \varepsilon_{\varphi}$  и  $|h_{(s)} - h_{(s-1)}| > \varepsilon_h$ , где  $\varepsilon_{\varphi}$ ,  $\varepsilon_h$  – заданные априорные точности вычисления широты и высоты.

Обработка измерений  $\varphi$ ,  $\lambda$  и *h* на момент времени *t* заключается в формировании вектора по формуле (12). Этот вектор, будучи переведённым в инерциальную СК J2000, является измеренным значением.

Матрица частных производных расчётного значения измерения  $(x, y, z)^{T}$  по начальным условиям  $\mathbf{x}_{0} = (\mathbf{r}_{0}^{T}, \mathbf{v}_{0}^{T})^{T}$  в виде кинематических векторов положения и скорости в СК J2000 на момент времени  $t_{0}$  определяется как

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{C}_{_{J2000}}^{_{\text{TCK}}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0}, \tag{17}$$

где  $C_{rck}^{12000}$  – матрица 6 × 6 перевода из ГСК в СК J2000,  $\frac{\partial x}{\partial x_0}$  – матрица 6 × 6 частных производных, получаемая интегрированием уравнений в вариациях (3), 0 – нулевая матрица 3 × 3, Е – единичная матрица 3 × 3.

#### 2.3. Измерения широты и долготы

Частные производные по компонентам вектора положения описываются соотношениями:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$
(18)

Для вычисления частных производных  $\frac{\partial \varphi}{\partial(x,y,z)}$  можно воспользоваться формулой Боуринга [33] для определения геодезической широты:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{z + e^2 R_s \left( 1 - e^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sin^3 u}{\sqrt{x^2 + y^2} - e^2 R_s \cos^3 u} \right),$$
(19)  
$$u = \operatorname{arctg} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 - e^2}} \right).$$

Пусть  $a = e^2 R_3$ ,  $b = a (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $c = \sqrt{x^2 + y^2} - a \cos^3 u$ ,  $d = z + b \sin^3 u$ , тогда частные производные широты по компонентам вектора положения записываются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial (x, y, z)} = -\frac{1}{2} \frac{\left(1 - e^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{1 + \mathrm{tg}^2 u} \begin{pmatrix} zx \left(x^2 + y^2\right)^{-2} \\ zy \left(x^2 + y^2\right)^{-2} \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (x, y, z)} = \frac{3 \sin u \cos u}{c^2 \left(1 + \mathrm{tg}^2 \varphi\right)} \left( \left( bc \sin u - ad \cos u \right) \frac{\partial u}{\partial (x, y, z)} - \left( \begin{array}{c} xd \\ yd \\ -c \end{array} \right) \right).$$
(21)

Матрица Якоби частных производных расчётных значений широты и долготы по кинематическому вектору положения на момент времени t в ГСК имеет вид

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial \left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\lambda}\right)}{\partial \left(x,y,z\right)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$
 (22)

Матрица частных производных по начальным условиям  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^{\mathsf{T}}, \mathbf{v}_0^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$  в виде кинематических векторов положения и скорости в СК J2000 на момент времени  $t_0$  определяется как

$$\frac{\partial \left(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\lambda}\right)}{\partial \mathbf{x}_{0}} = \left( \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\lambda}} \ \mathbf{0} \right) \mathbf{C}_{_{\mathbf{J}\mathbf{2000}}}^{_{\mathrm{TCK}}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_{0}}, \tag{23}$$

где  $C_{12000}^{\Gamma CK}$  – матрица 6 × 6 перевода СК J2000 в ГСК,  $\frac{\partial x}{\partial x_0}$  – матрица 6 × 6 частных производных, получаемая интегрированием уравнений в вариациях (3), 0 – нулевая матрица 3 × 2.

#### 2.4. Измерения двустрочных элементов

Двустрочные элементы орбиты (Two Line Elements (TLE)) представляют собой наборы параметров численно-аналитической модели SGP-4 для описания движения КА [34].

С использованием алгоритмов [34] производится вычисление кинематических векторов положения и скорости в СК ТЕМЕ (True Equator, Mean Equinox). Для перевода как вектора положения, так и вектора скорости из СК J2000 в СК ТЕМЕ используется следующая матрица:

$$\mathbf{C}_{_{J2000}}^{^{\mathrm{TEME}}} = \mathbf{N}_{a} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}, \ \mathbf{C}_{^{\mathrm{TEME}}}^{^{\mathrm{J2000}}} = (\mathbf{C}_{_{J2000}}^{^{\mathrm{TEME}}})^{^{\mathrm{T}}},$$
(24)

где  $\varepsilon$  – истинный наклон эклиптики к экватору,  $\Delta \psi$  – нутация в долготе, N – матрица нутации, P – матрица прецессии, матрица N<sub>a</sub> имеет вид

$$\mathbf{N}_{a} = \begin{pmatrix} \cos\left(\Delta\psi\cos\varepsilon\right) & \sin\left(\Delta\psi\cos\varepsilon\right) & 0\\ -\sin\left(\Delta\psi\cos\varepsilon\right) & \cos\left(\Delta\psi\cos\varepsilon\right) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (25)

Виток полёта КА разбивается на некоторое количество участков по времени, на концах которых строятся векторы положения и скорости. Эти векторы рассматриваются как измерения с частными производными расчётных значений:

$$\frac{\partial (x, y, z, v_x, v_y, v_z)}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0},$$
(26)

где  $\frac{\partial x}{\partial x_0}$  – матрица 6 × 6 частных производных, получаемая интегрированием уравнений в вариациях (3), 0 – нулевая матрица 3 × 3, E – единичная матрица 3 × 3.

Таким образом, в работе решается задача согласования модели движения (2.1) и модели SGP-4 с использованием представленного метода (10) обработки траекторных измерений.

## 3. Орбитальный полёт

Построенная в работе реконструкция траектории КА «Восток-1» опиралась на участок орбитального движения на интервале времени  $[t_0, t_{\text{тлу}}]$  с 09:18:27.0 до 10:25:04.2 (таблица 1). В официальных данных НИИ-4 [6, с. 42] определения параметров движения КА представлены параметры фактической траектории, построенные по данным гироплатформы и по угломерным траекторным измерениям (таблица 4). Методика [6, с. 111–112] определения элементов орбиты КА учитывала нецентральность гравитационного поля и сопротивление атмосферы Земли. К сожалению, время оскуляции элементов орбиты в рассмотренных источниках не указано.

Параметр	Значение
Высота перигея	181 км
Высота апогея	327 км
Наклонение	64°57'
Период	01:29:26.4

4 1 10 (1

Пусть кинематический вектор положения стартового стола PH «Пл. № 2 Тюра-Там» (таблица 3) в СК J2000 на момент старта  $t_{cm}$  (таблица 1) –  $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{r} (t_{cm})$ , а  $\mathbf{r}_{6} = \mathbf{r}(t_{6})$  – вектор положения СА в СК J2000 в момент времени завершения баллистического спуска t<sub>б</sub>, в предположении его нахождения над точкой посадки. Значение t<sub>б</sub> оценивается из условия нахождения СА в интервале времени между потерей связи с КА в 10:38:15 и временем катапультирования в 10:45:41 [4, с. 431], в настоящей работе значение t<sub>б</sub> определено как 10:43:14.

Векторы  $\mathbf{r}_{cm}$  и  $\mathbf{r}_{\delta}$  определяют начальное приближение плоскости орбиты из задачи двух тел, для которой находятся наклонение i и ДВУ  $\Omega$  плоскости орбиты:

$$\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)^{\mathsf{T}} = \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{r}_{\mathfrak{d}},$$

$$i = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{q_z}{|\mathbf{q}|}\right),$$

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{q_y/|\mathbf{q}|}{q_x/|\mathbf{q}|}\right) - \pi + \Delta\Omega,$$
(27)

где  $\Delta \Omega = 2.15^{\circ}$  – поправка к ДВУ, определяемая из разницы долготы посадки

и долготы подспутниковой точки в момент пролёта над ней, которая определяется совместно с параметрами импульса торможения в п. 5.

В основу достоверных данных для восстановления орбиты положены высоты перигея  $h_{\pi}$  и апогея  $h_{\alpha}$  (таблицы 1 и 4). Так как параметры  $h_{\pi}$  и  $h_{\alpha}$  [6] даны на 1961 год, то радиусы перигея  $r_{\pi}$  и апогея  $r_{\alpha}$  определялись средним радиусом Земли  $R_{3} = 637824.5$  м эллипсоида Красовского:

$$r_{\pi} = R_{3} + h_{\pi}, \ r_{\alpha} = R_{3} + h_{\alpha}.$$
 (28)

Полуось а и эксцентриситет орбиты е определяются по формулам:

$$a = \frac{1}{2} (r_{\pi} + r_{\alpha}), \ e = \frac{1}{2a} (r_{\alpha} - r_{\pi}).$$
<sup>(29)</sup>

Период Т определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_3}}.$$
(30)

С использованием системы «Глобус» [14] в 10:04:00 Ю.А. Гагарин передал, что находится в апогее [4, с. 453]. С использованием времени  $t_{\alpha}$  прохождения апогея можно определить время прохождения перигея  $t_{\pi} = t_{\alpha} - \frac{1}{2}T$ .

Положение на орбите, или среднее движение M на момент  $t_0,$  определяется по формуле

$$M = (t_0 - t_\pi) \frac{2\pi}{T}.$$
 (31)

Для определении значения аргумента перигея  $\omega$  использовано единственное независимое бортовое траекторное измерение – время  $t_{solx}$  выхода КА «Восток-1» из тени Земли (таблица 1). Используя нулевое значение  $\omega$  как начальное приближение, методом дихотомии в модели движения двух тел найдено значение аргумента перигея.

Необходимым условием определения траектории полёта является формирование импульса ТДУ в плоскости, проходящей через точку посадки. Это обеспечивается поправкой к ДВУ △Ω методом дихотомии с минимизацией долготы подспутниковой точки в момент минимального расстояния до точки посадки в момент пролёта. Параметры невозмущенной орбиты приведены в таблице 5.

Построенные элементы орбиты (таблица 5) в модели движения двух тел согласовывались с дифференциальной моделью движения ИСЗ (1).

Для согласования моделей использовался метод (10) обработки смоделированных трёх одновесовых измерений векторов положения в моменты времени:  $t_{\alpha}$  – прохождения апогея,  $t_{Bblx}$  – выхода из тени Земли,  $t_{MUH}$  – пролёта на минимальном расстоянии от точки посадки. Векторы положения строились в модели

движения двух тел, время  $t_{\text{мин}}$  определялось численно. Рассчитанные значения оскулирующих параметров орбиты в дифференциальной модели движения на момент времени  $t_0$  приведены в таблице 6.

Параметр	Обозначение	Значение
Время оскуляции	_	10:48:02.6
Время пролёта апогея	$t_{oldsymbol{lpha}}$	10:04:00.0
Время пролёта перигея	$t_{\pi}$	10:48:43.2
Наклонение	i	64°56'23″
ДВУ	$\Omega$	- 33°23'10″
Аргумент перигея	ω	82°10'56″
Полуось	a	6632.2 км
Эксцентриситет	e	0.011007

Таблица 5. Параметры орбиты в модели двух тел

Параметр	Обозначение	Значение
Начало орбитального полёта КА	$t_0$	09:18:27.0
Время пролёта апогея	$t_{\alpha}$	10:02:36.4
Время пролёта перигея	$t_\pi$	10:47:18.6
Наклонение	i	64°55'59″
ДВУ	$\Omega$	-33°11'49″
Аргумент перигея	ω	81°07'18"
Средняя аномалия	M	1°05'59″
Полуось	a	6623.2 км
Эксцентриситет	e	0.009631

Таблица 6. Оскулирующие элементы орбиты КА «Восток-1»

## 4. Траектория полёта ракеты-носителя

По данным [6], разделение первой (Блоки -Б, -В, -Г, -Д) и второй (Блок-А) ступеней РН произошло нормально, команда на разделение выдана интегратором на 119.50 секунде с её исполнением через 0.03 секунды. Разделение второй и третьей (Блок-Е) ступеней РН не зафиксировано из-за сбоя в записи. Отделение КА от третьей ступени РН произошло на 687.1 секунде.

Для математического моделирования полёта первой и второй ступеней РН, в силу схожей циклограммы их работы с параметрами выведения РН «Союз», были взяты данные при осуществлении запусков с космодрома Гвианского космического центра (ГКЦ), которые Баллистический Центр ИПМ им. М.В. Келдыша РАН получал при решении задач контроля выведения. Исходными данными являлся массив векторов положения { $\tau_i$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}_i$ },  $i = 1, \ldots, n$  в инерциальной СК J2000. Время  $t_{3ct}$  разделения второй и третьей ступеней определялось штатной циклограммой выведения РН «Союз» на 287.48 секунде полёта.

Траектория выведения  $\{\tau_i, \tilde{\mathbf{r}}_i\}$  одного из запусков РН «Союз» из ГКЦ преобразовывалась в траекторию выведения  $\{\tau_i, \bar{\mathbf{r}}_i\}$  со стартового стола «Пл. № 2 Тюра-Там» (таблица 3) в момент времени  $t_{cm}$  по формуле

$$\bar{\mathbf{r}}_{i} = \mathbf{C}_{\text{COD3}}^{\text{SK72}} \mathbf{C}_{\text{TCK}}^{\text{COD3}} \tilde{\mathbf{r}}_{i}, \qquad (32)$$

где матрица  $C_{_{\Gamma CK}}^{_{Conv}}$  определяет перенос СК J2000 ГКЦ в СК «Пл. № 2 Тюра-Там», а матрица  $C_{_{Conv}}^{_{8K72}}$  определяет плоскость траектории выведения от момента времени  $t_{cm}$  старта РН «Восток 8К72» до момента времени  $t_0$  выведения КА «Восток-1».

Для вектора положения  $\mathbf{r}_{cm}$  в СК J2000 на момент времени  $t_{cm}$  и  $\mathbf{\tilde{r}}_1$  матрица  $\mathbf{C}_{\mathrm{rku}}^{\mathrm{coss}}$  определяется соотношениями с использованием кватерниона ориентации  $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  ( $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{e}$ ) :

$$\mathbf{e} = \frac{\widetilde{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{r}_{cm}}{|\widetilde{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{r}_{cm}|}, \varphi = \arccos \frac{(\widetilde{\mathbf{r}}_1, \mathbf{r}_{cm})}{|\widetilde{\mathbf{r}}_1| |\mathbf{r}_{cm}|},$$
(33)

$$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{e}) = \left\{\cos\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}, -\sin\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}\mathbf{e}\right\}.$$
(34)

Для матрицы  $C^{Coos}_{\text{гкц}}$  справедливо

$$\mathbf{C}_{_{\mathrm{TKII}}}^{_{CO003}} = \begin{pmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2\\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1\\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$
(35)

Для вектора выведения КА «Восток-1»  $\mathbf{r}(t_0)$ :

$$\mathbf{n}_{1} = \frac{(\mathbf{C}_{_{\mathrm{rck}}}^{cm} \widetilde{\mathbf{r}}_{n}) \times (\mathbf{C}_{_{\mathrm{rck}}}^{cm} \widetilde{\mathbf{r}}_{1})}{|(\mathbf{C}_{_{\mathrm{rck}}}^{cm} \widetilde{\mathbf{r}}_{n}) \times (\mathbf{C}_{_{\mathrm{rck}}}^{cm} \widetilde{\mathbf{r}}_{1})|}, \mathbf{n}_{2} = \frac{\mathbf{r}(t_{0}) \times \mathbf{r}_{cm}}{|\mathbf{r}(t_{0}) \times \mathbf{r}_{cm}|},$$
(36)

$$\boldsymbol{\delta} = \arccos\left(\mathbf{n}_{1}, \mathbf{n}_{2}\right), \, \mathbf{n} = \mathbf{n}_{1} \times \mathbf{n}_{2}. \tag{37}$$

Матрица  $\mathbf{C}_{_{Cov}}^{_{8K72}}$  определяется по формуле (35) с использованием кватерниона  $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  ( $\delta, \mathbf{n}$ ) (34).

На этапе преобразования траектории  $\{\tau_i, \tilde{\mathbf{r}}_i\}$  учитывалась разница геодезических высот стартовых комплексов космодромов. Пусть  $h_0$  – геодезическая высота «Пл. № 2 Тюра-Там», а  $\bar{h}_i$  – геодезические высоты  $\bar{\mathbf{r}}_i$ , тогда массив траектории  $\{\tau_i, \mathbf{r}_i\}$  определяется преобразованием

$$\bar{\mathbf{r}}_i \to (\tau_i, \varphi_i, \lambda_i, \bar{h}_i) \to (\tau_i, \varphi_i, \lambda_i, \bar{h}_i - (\bar{h}_1 - h_0)) \to \mathbf{r}_i$$
 (38)  
по формулам (12)–(16).

Таким образом сформирована опорная траектория выведения  $\{\tau_i, \mathbf{r}_i\}$  РН «Восток 8К72». По опорной траектории проводилась реконструкция полёта РН. Векторы положения  $\mathbf{r}(t_i)$  и скорости  $\mathbf{v}(t_i)$  до момента отделения второй ступени  $t_{3ct}$  рассчитывалась по формуле

$$t_{i} = \tau_{i}, \mathbf{r}(t_{i}) = \mathbf{r}_{i}, \mathbf{v}(t_{i}) = \frac{\mathbf{r}_{i} - \mathbf{r}_{i-1}}{\tau_{i} - \tau_{i-1}},$$
(39)

где  $i = 2, ..., n, \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_{cm}, \mathbf{v}(t_1) = 0$  (скорость в момент отрыва от поверхности стартового стола).

Восстановленное таким образом разделение второй и третьей ступеней РН произошло в 09:11:47.2.

Пусть время отделения второй ступени  $t_{\text{Блок-А}}$  соответствует индексу k массива  $\{\tau_i, \mathbf{r}_i\}$ . Положение и скорость полёта третьей ступени определялись по формулам:

$$t_i = \tau_k + (\tau_i - \tau_k) \frac{t_0 - t_{\text{Блок-A}}}{\tau_n - \tau_k}$$
(40)

$$\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}_k + \frac{\left(\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(t_{\text{Блок-A}}), \mathbf{e}_{xyz}\right)}{\left(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k, \mathbf{e}_{xyz}\right)} \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\right),$$
(41)

$$\mathbf{v}(t_i) = \mathbf{v}_k + \frac{\left(\mathbf{v}(t_0) - \mathbf{v}(t_{\text{Enor-A}}), \mathbf{e}_{xyz}\right)}{\left(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_{xyz}\right)} \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k\right),\tag{42}$$

где  $\mathbf{e}_{xyz}$  – единичный орт определяемой компоненты  $\mathbf{r}(t_i)$  или  $\mathbf{v}(t_i)$ .

## 5. Импульс торможения

Торможение КА «Восток-1» с использованием ТДУ (рис. 3 приложения) и посадку можно разбить на этапы:

- включение ТДУ в момент времени  $t_{\text{тду}}$  10:25:04.2 [6] с выдачей импульса торможения  $\Delta v_{\text{тду}} = 132 \text{ м/c}$  (таблица 1);
- вход в атмосферу Земли на высоте 100 км, при этом угол входа определял перегрузки, которые переносил Ю.А. Гагарин;
- спуск СА до высоты 7 км [6] в момент времени катапультирования.

Моделирование торможения выполнялось в импульсной постановке. По предоставленным до запуска материалам Отдела прикладной математики Академии наук СССР, угол входа величиной от 0° до 4° обеспечивает баллистический спуск СА в атмосфере с равномерно нарастающими перегрузками, не превышающими 10 g [11; 13].

В настоящей работе решалась задача нахождения угла направления  $\phi_{TДY}$  выдачи импульса относительно вектора скорости КА в момент  $t_{TAY}$ , при ограничении входа в атмосферу Земли на высоте 100 км под углом  $1^{\circ} \leq \alpha_{amm} \leq 4^{\circ}$  и нахождении СА на высоте 7 км от точки посадки (таблица 3) в момент времени  $t_{omd}$ .

Для определения параметров импульса ТДУ строилась орбитальная СК (ОСК). Пусть  $\mathbf{r}_{TДУ}, \mathbf{v}_{TДУ}$  – положения и скорости в СК J2000 на момент времени  $t_{TДУ}$  до выполнения импульса, ось  $O_x$  направлена по радиусу орбиты,  $O_y$  – вдоль направления движения (по трансверсали), а ось  $O_z$  дополняет систему до правой в направлении, ортогональном плоскости орбиты, тогда матрица  $\mathbf{C}_{OCK}^{J2000}$  перевода из ОСК в СК J2000 имеет вид

$$\mathbf{C}_{_{\mathrm{OCK}}}^{_{\mathrm{I2000}}} = \left( \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_{x} & \mathbf{e}_{y} & \mathbf{e}_{z} \end{array} \right), \tag{43}$$

где  $\mathbf{e}_x = \mathbf{r}_{\text{тду}} / |\mathbf{r}_{\text{тду}}|, \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{v}_{\text{тду}} / |\mathbf{v}_{\text{тду}}|, \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x.$ 

Вектор НУ  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} (t_{\text{тду}})$  (1) определяется соотношением

$$\mathbf{x}_{0} = \left(\mathbf{r}_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}^{\mathrm{\scriptscriptstyle T}}, \left(\mathbf{v}_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}} + \Delta \mathbf{v}_{_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}}\right)^{\mathrm{\scriptscriptstyle T}}\right)^{\mathrm{\scriptscriptstyle T}}, \\ \Delta \mathbf{v}_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}} = -\Delta v_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}} \mathbf{C}_{_{\mathrm{OCK}}}^{_{\mathrm{I}2000}} \left(\sin \varphi_{_{\mathrm{OCK}}}, \cos \varphi_{_{\mathrm{OCK}}}, 0\right)^{\mathrm{\scriptscriptstyle T}}, \\ \varphi_{_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}} = \arccos \frac{\left(\mathbf{v}_{_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}}, \Delta \mathbf{v}_{_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}}\right)}{\left|\mathbf{v}_{_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}}\right| \left|\Delta \mathbf{v}_{_{\mathrm{T}\mathrm{J}\mathrm{y}}}\right|}.$$
(44)

Угол входа в атмосферу Земли определяется по формуле

$$\alpha_{amm} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\left(\mathbf{r}\left(t_{amm}\right), \mathbf{v}\left(t_{amm}\right)\right)}{\left|\mathbf{r}\left(t_{amm}\right)\right| \left|\mathbf{v}\left(t_{amm}\right)\right|},\tag{45}$$

где  $t_{amm}$  – определяемое время прохождения КА высоты 100 км.

Минимизация функционала  $\Phi = ||\mathbf{r}_{omd}| - (R_{3} + h)| + |\alpha_{amm} - 2.013^{\circ}|$ производилась методом наискорейшего спуска, где  $\mathbf{r}_{omd} = \mathbf{r}(t_{omd}), t_{omd} -$ определяемое время катапультирования, а h – высота 7 км. Матрица Якоби  $\mathbf{J} = \frac{\partial (|\mathbf{r}_{omd}|, \alpha_{amm})^{\mathsf{T}}}{\partial \mathbf{q}}$  представима в виде

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial |\mathbf{r}_{omd}|}{\partial \varphi_{ock}} & \frac{\partial |\mathbf{r}_{omd}|}{\Delta v_{rgy}}\\ \frac{\partial \alpha_{amm}}{\partial \varphi_{ock}} & \frac{\partial \alpha_{amm}}{\Delta v_{rgy}} \end{pmatrix}$$
(46)

и определяется численным методом.

Обозначим искомый вектор неизвестных параметров через  $\mathbf{q} = (\varphi_{\text{оск}}, \Delta v_{\text{тду}})^{\text{т}}$ , тогда на каждом шаге итерации *s*  $\mathbf{q}_{(s)}$  ищется из уравнения

$$\mathbf{q}_{(s)} = \mathbf{q}_{(s-1)} - \mathbf{J}^{-1} \left( |\mathbf{r}_{omd}| - (R_{s} + h), \boldsymbol{\alpha}_{amm} - 2.013^{\circ} \right)^{\mathsf{T}}.$$
 (47)

При минимизации функционала время  $t_{omd}$  катапультирования на высоте 7 км приняло значение 10:45:20.3. Это время является конечной точкой моделирования реконструкции трассы полёта.

Найденное в ходе решения краевой задачи значение  $\varphi_{\text{тду}}$  составило 0.043°, при котором КА входил в атмосферу Земли на высоте 100 км в момент  $t_{amm}$  10:38:34 под углом  $\alpha_{amm} = 2.013^{\circ}$ .

Приведённое значение 10:35:00 момента времени при входе в атмосферу Земли в [15] является, по-видимому, номинальным значением при номинальной величине импульса 136 м/с.

## 6. Анализ построенных ранее реконструкций

Проведён анализ трёх реконструкций орбитального полёта КА «Восток-1»: в [8] представлена реконструкция РКК «Энергия»; на сайте [9] представлена реконструкция Джоэла Руна в виде TLE; на сайте [10] представлена реконструкция Яндекс. К сожалению, форматы, СК и типы представленных данных этих реконструкций различны, поэтому в данной работе проведено *согласование моделей движения* каждой из реконструкций с численной моделью движения ИСЗ (1). Все три реконструированные орбиты были выданы в виде кинематических векторов положения и скорости на момент времени  $t_0$  начала орбитального полёта КА «Восток-1» после отделения от третьей ступени РН (таблица 1).

D	Шир	ота	Долго	ота
время	Измерение	Невязка	Измерение	Невязка
09:23:14	63°36'00″	11'12″	143°48'00″	19'42″
09:28:14	51°56'24″	3'12"	174°51'36″	4'12"
09:30:01	45°55'48″	5'36″	-177°54'00"	-0'48″
09:33:14	35°28'12″	1'00″	-169°28'48″	-9'18"
09:38:14	17°33'00″	-0'30"	-159°56'24"	-17'42"
09:43:14	-0°43'48″	-3'18"	-152°28'12"	-23'18"
09:48:14	-18°49'48″	-7'42″	-145°01'12"	-28'12"
09:53:14	-36°15'00″	-13'30"	-135°33'00"	-30'48"
09:58:14	-52°02'24"	-20'30"	-120°19'12"	-27'18"
10:03:14	-62°19'12"	36'54"	-91°06'36"	2'12"
10:08:14	-63°38'24"	-8'24"	-47°48'36"	43'06"
10:13:14	-52°39'36"	12'06"	-17°38'24"	30'42"
10:15:21	-46°01'48″	35'18"	-9°50'24"	21'54"
10:18:14	-36°52'48″	25'18"	-1°55'48″	12'42″
10:23:14	-19°20'24″	34'06"	7°44'24″	1'12"
10:25:05	-12°37'48″	36'42"	10°39'36″	-1'36"

Таблица 7. Остаточные невязки согласования ор	обиты	РКК	«Энергия»
---	-------	-----	-----------

В реконструкции РКК «Энергия», выполненной Р. Муртазиным и В. Благовым, была восстановлена только трасса орбитального полёта КА «Восток-1». Представленная в [8] трасса дана в виде 16 значений широты и долготы подспутниковой точки (таблица 7, второй и четвёртый столбцы). Эти значения широты и долготы использовались как измерения в задаче определения параметров движения КА (п. 2.3) с минимизацией функционала, содержащего измерения с одинаковыми весами. Остаточные невязки представлены в третьем и пятом столбцах таблицы 7.

Анализ данных реконструкции [8] вызвал вопросы:

- по достаточно большой ошибке остаточных невязок при согласовании моделей движения;
- по приведённой величине импульса торможения 136 м/с в [6; 14] значение, насчитанное интегратором ТДУ, составляет 132 м/с;
- по приведённому времени выхода из тени Земли 10:15:21 [8, табл. 1], хотя по восстановленной орбите в данной работе это время составило 10:09:16, что соответствует [2; 4; 14; 15].

Реконструкция Яндекс представлена в виде ролика [10], останавливая который можно зафиксировать: время полёта КА «Восток-1», широту, долготу и высоту подспутниковой точки (таблица 8). Из геодезических параметров были получены кинематические векторы положения, и решалась задача согласования. Измеренные значения и компоненты остаточных невязок кинематических векторов положения представлены в таблице 8. По величинам остаточных невязок можно предположить «мультипликационность» представленной модели.

	,	1	1	1.2	, ,	
Время	Широта	Долгота	Высота, км	Невязк	и по полож	кению, м
09:19:37.6	62°57'05″	96°20'55″	177	-9403.8	3425.3	676.0
09:19:52.2	63°17'13″	97°58'48″	178	9411.8	-3492.2	-602.2
09:51:02.1	-27°18'29″	-140°28'32"	251	5639.6	-8056.0	-16505.8
09:51:14.2	-28°53'47″	-140°43'25"	253	-5605.3	7954.5	16525.0

Таблица 8. Измерения и невязки реконструкции Яндекс

Покойный Джоэл Рун представил свою реконструкцию [9] в виде TLE в аналитической модели SGP-4 [34] (листинг 1).

#### Листинг 1. TLE Джоэла Руна

```
      1
      1
      00103E
      61
      12
      A
      61102.25000000
      .00800000
      00000-0
      00000-0
      13

      2
      2
      00103
      64.9500
      327.8034
      0110269
      60.0000
      301.0898
      16.12052146
      09
```

Для решения задачи согласования модели движения по TLE на интервале витка было построено 19 кинематических векторов положения и скорости в модели SGP-4 (п. 2.4). Эти векторы были использованы в задаче определения параметров движения КА как измерения. В таблице 9 представлены остаточные невязки после решения задачи минимизации функционала, содержащего разности измеренных и расчётных значений.

Время	П	оложение, м	AI.	(	Скорость, м/	c
09:18:56.649	-23.3	-27.1	33.3	-0.074	0.070	0.0874
09:22:31.362	-31.7	-22.7	37.9	-0.088	0.017	-0.001
09:26:06.074	-46.8	-29.3	40.0	-0.065	-0.050	-0.020
09:29:40.786	-64.0	-44.7	44.5	-0.051	-0.079	-0.024
09:33:15.498	-78.6	-63.2	43.6	-0.013	-0.081	-0.038
09:36:50.211	-77.1	-82.1	43.3	0.020	-0.072	-0.021
09:40:24.923	-70.3	-94.6	40.3	0.031	-0.043	-0.014
09:43:59.635	-56.7	-96.6	39.8	0.041	-0.023	-0.012
09:47:34.347	-41.5	-86.6	39.5	0.066	-0.013	-0.021
09:51:09.060	-26.3	-65.8	43.6	0.093	-0.012	0.002
09:54:43.772	-11.5	-47.9	42.0	0.098	-0.003	0.052
09:58:18.484	0.2	-32.6	43.7	0.064	0.018	0.091
10:01:53.197	-0.2	-17.5	51.4	-0.000	0.023	0.085
10:05:27.909	-2.9	-13.9	59.1	-0.055	0.017	0.065
10:09:02.621	-15.6	-16.4	68.2	-0.093	-0.021	0.005
10:12:37.333	-33.3	-28.2	72.0	-0.076	-0.075	-0.033
10:16:12.046	-56.8	-46.2	68.8	-0.048	-0.120	-0.041
10:19:46.758	-67.9	-68.9	66.0	-0.020	-0.098	-0.026
10:23:21.470	-71.0	-86.7	61.0	-0.005	-0.078	-0.033

Таблица 9. Остаточные невязки согласования TLE

Для сравнения полученных в настоящей работе, РКК «Энергия», Джоэлом Руном и Яндекс реконструкций представлены характерные параметры этих орбит (таблица 10): высоты перигея  $h_{\pi}$  и апогея  $h_{\alpha}$  относительно среднего радиуса Земли Крассовского, время прохождения апогея  $t_{\alpha}$ , зафиксированное Ю.А. Гагариным (таблица 1), время выхода из тени Земли  $t_{geax}$ , зафиксированное Ю.А. Гагариным (таблица 1) и наклонение *i*.

Тиолици то: Сривнение реконструкции							
Реконструкция	$h_{\pi}$ , км	h <sub>α</sub> , км	$t_{\alpha}$	t <sub>вых</sub>	i		
Построенная	181.0	326.5	10:02:45	10:09:14	64°55'59″		
НИИ-4	181.0	327.0	10:04:00	10:09:15	64°57'00″		
РКК «Энергия»	151.4	336.7	10:03:09	10:09:16	64°53'53″		
Джоэл Рун	161.8	302.3	09:56:20	10:09:16	65°03'06″		
Яндекс	58.0	540.2	10:03:42	10:08:20	65°55'18″		

Таблица 10. Сравнение реконструкций

Для относительного сравнения, в таблице 10 приведены результаты определения орбиты в НИИ-4 [6].

В таблице 11 представлены кинематические векторы НУ реконструкций в СК J2000 на момент времени 9:18:27.

Таолица 11. Пачальные условия реконструкции											
Реконструкция	Ι	Іоложение,	м	Cı	корость, м/	c					
Построенная	2248545.1	1819503.9	5887283.4	-6248.684	4624.573	958.950					
РКК «Энергия»	2410960.3	1732918.8	5815617.1	-6333.444	4487.244	1284.483					
Джоэл Рун	2760013.4	1437758.6	5754433.7	-6035.657	4700.113	1742.946					
Яндекс	2970315.5	1270895.0	5706188.4	-6199.275	4429.127	1957.423					

Таблица 11. Начальные условия реконструкций

## 7. Визуализация реконструкции полёта

Визуализация (рис. 8 приложения) производилась с использованием **Python 3.8.3** и ряда дополнительных пакетов **Python**: **Matplotlib** [35] и **Cartopy** [36]. Построение карты мира и расположение объектов на ней производилось в равнопромежуточной проекции **Plate Carrée** с использованием пакета **Cartopy**. Границы территории СССР построены на основе данных, представленных в **CShapes v0.6** [37] с историческими границами стран. Затенение Земли и линия терминатора строились с помощью встроенного в **Cartopy** модуля **Nightshade**, реализующего расчёт положения Солнца на основе алгоритма [34].

По ссылке http://www.kiam1.rssi.ru/~den/vostok1/ расположены файлы:

- vostok1\_trace.txt текстовый файл–таблица с кинематическими векторами положения и скорости траектории движения КА «Восток-1» с секундным шагом по времени;
- flight\_animation.mp4 и flight\_animation.wmv видеоролики построенной реконструкции в различных форматах;
- vostok1\_19610412\_061827.tle двустрочные элементы орбитального движения построенной реконструкции.

Текстовый файл vostok1\_trace.txt содержит: в 1-м столбце – секунду от «команды подъём»; во 2-м столбце – дату; в 3-м столбце – московское время; в 4-м столбце – участок полёта (1 – PH + KA / 1-я ступень (Блоки Б, В, Г, Д), 2 – PH + KA / 2-я ступень (Блок-А), 3 – PH + KA / 3-я ступень (Блок-Е), 4 – КА в орбитальном полёте, 5 – КА от момента включения ТДУ до входа в атмосферу Земли на высоте 100 км, 6 – СА до высоты 7 км); в 5-м столбце – широта в градусах; в 6-м столбце – долготу в градусах; в 7-м столбце – высоту в км; в 8-м столбце – модуль вектора скорости ГСК в км/с; в 9–11 столбцах – компоненты вектора положения СК J2000 в м; в столбцах 12–14 – компоненты вектора скорости СК J2000 в м/с.

## Заключение

Реконструкция траектории КА «Восток-1» строилась на всём интервале времени первого пилотируемого полёта: от момента времени старта до катапультирования на высоте 7 км. Динамикой орбитального движения и участком работы ТДУ увязывались все этапы полёта.

Представлена таблица кинематических векторов положения и скорости КА «Восток-1» с секундным шагом по времени.

Создан видеоролик трассы траектории движения с демонстрацией основных этапов первого пилотируемого орбитального полёта Ю.А. Гагарина.

Результат сравнения ранее полученных реконструкций говорит о наибольшем приближении высот перигея, апогея и наклонения построенной орбиты к исходным данным.

Восстановлено время 9:11:47.2 разделения второй и третьей ступеней РН.

Найден угол 0.043° в плоскости орбиты относительно скорости движения, при котором КА «Восток-1» входил в атмосферу Земли на высоте 100 км под углом 2.013° в момент времени 10:38:34.

Восстановлено время 10:45:20 катапультирования Ю.А. Гагарина на высоте 7 км из СА.

Достоверность построенной реконструкции подтверждается приведением СА в точку посадки с точностью 6.3 км при исполнении импульса 132 м/с.

## Список сокращений

$R_{\scriptscriptstyle 3}$	экваториальный радиус Земди
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
NORAD	North American Aerospace Defense Command
NSSDC	National Space Science Data Center
TLE	Two Line Elements
ГКЦ	Гвианский космичесий центр
ГСК	гринвичская система координат
ДВУ	долгота восходящего узла
ИСЗ	искусственный спутник Земли
КА	космический аппарат
КВ	короткая волна
НИП	наземный измерительный пункт
НУ	начальные условия
ОСК	орбитальная система координат
PH	ракета-носитель
CA	спускаемый аппарат
СК	система координат
ТДУ	тормозная двигательная установка
УКВ	ультракороткая волна

# Библиографический список

- 1. Аппазов Р.Ф. Следы в сердце и в памяти / Р.Ф. Аппазов. Симферополь : Издательство «Доля», 2001. 415 с.
- 2. *Каманин Н.П.* Скрытый космос. Т. 1 / Н.П. Каманин. М. : Издательство «РТСофт», 2013. 760 с.
- 3. Жаров В.Е. Сферическая астрономия / В.Е. Жаров. Фрязино, 2006. 480 с.
- 4. Первый пилотируемый полёт. Российская космонавтика в архивных документах. В 2-х книгах. Книга 1 / под ред. В.А. Давыдова. — М. : «Родина МЕ-ДИА», 2011. — 560 с.
- 5. *Махмудов Б.М.* Об измерении поглощенных доз радиации при полётах космических кораблей / Б.М. Махмудов // Вестник Московского Университета. 1968. № 2. С. 11—16.
- 6. Первый пилотируемый полёт. Российская космонавтика в архивных документах. В 2-х книгах. Книга 2 / под ред. В.А. Давыдова. М. : «Родина МЕ-ДИА», 2011. — 543 с.
- 7. Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.02). Параметры общеземного эллипсоида и гравитационного поля Земли. М., 1990. 40 с.

- Муртазин Р. Факты об орбите Гагарина / Р. Муртазин, В. Благов // Новости космонавтики. — 2016. — № 4. — С. 7—9. — URL: https://www.roscosmos.ru/ media/pdf/Novostikosmonavtiki/nk2016-04.pdf.
- 9. Двустрочные элементы орбиты Джоэла Руна [Электронный ресурс]. URL: http://www.satobs.org/seesat/Apr-2011/0029.html (дата обр. 28.02.2025).
- 58 лет первому полёту человека в космос реконструкция Яндекса [Электронный pecypc]. — URL: https://rutube.ru/video/4a88e97d8e8a672320a8f4a 16d518643/?ysclid=m3ll4oi7pa182929697 (дата обр. 28.02.2025).
- 11. Афендикова Н.Г. К истории начала космической эры. Докладная записка Тихонравова / Н.Г. Афендикова // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 52. С. 21. URL: https://keldysh.ru/papers/2015/prep2015 52.pdf.
- 12. NASA: Vostok-1 [Электронный pecypc]. URL: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/ nmc/spacecraft/display.action?id=1961-012A (дата обр. 28.02.2025).
- РКК Энергия им. С.П. Королева, 1946-1996. Т. 1 / под ред. Ю.П. Семенова. М. : Менонсовполиграф, 1996. — 670 с.
- Лисов И. 106 минут Гагарина в свете рассекреченных документов / И. Лисов,
   И. Афанасьев // Новости космонавтики. 2011. № 6. С. 2—1. URL: https://www.roscosmos.ru/media/pdf/Novostikosmonavtiki/nk2011-06-.pdf.
- 15. Полёт Гагарина. Материалы, опубликованные в «Правде». М. : Правда, 1961. 46 с.
- Переговоры между Ю.А. Гагариным и Землей. Госкорпорация «Роскосмос» [Электронный pecypc]. — URL: https://www.roscosmos.ru/28343/ (дата обр. 28.02.2025).
- Chertok B.E. Rockets and People, Volume III, Hot Days of the Cold War: The NASA History Series / B.E. Chertok. — Washington, DC : U.S. Government Printing Office, 2009. — 796 p.
- 18. *Крисс П.Ж.* ОКБ МЭИ и «Восток» / П.Ж. Крисс. М. : «ГЛАСНОСТЬ», 2011. 56 с.
- 19. *Письменный Н.М.* Космонавтика это не только космонавты: (автобиографические записки). Книга 3 / Н.М. Письменный. М. : Изд-во СГУ, 2013. 391 с.
- 20. *Куприянов В.Н.* Вклад специалистов Ленинграда в создание плавучих научноизмерительных и командно-измерительных комплексов. Часть І. Переоборудование гражданских судов в морские космические научно-измерительные комплексы (конец 1950-х - 1960-е годы) / В.Н. Куприянов, А.В. Лосик // Технологос. — 2024. — № 2. — С. 98—110. — URL: https://doi.org/10.15593/perm. kipf/2024.2.08.

- Научно-измерительный пункт [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wiki pedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%BE-%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9\_%D0%BF%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%82 (дата обр. 28.02.2025).
- 22. *Тучин Д.А.* Автономное определение орбиты на борту космического аппарата // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 7. С. 36. URL: https://doi.org/10.20948/prepr-2019-7.
- 23. Гордиенко Е.С., Ильин И.С., Мжельский П.В., Михайлов Е.А., Паламарчук Е.А., Погодин А.В., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Филиппова Е.Н., Худорожков П.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полёта малых космических аппаратов «Зонд-ПП» и «Рэлек» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. — 2016. — № 2. — С. 31—43.
- 24. ГОСТ 4401–81 Атмосфера стандартная. Параметры. М. : ИПК Издательство стандартов, 1981. — 181 с.
- Тепловой анализ траекторий возвращения от Луны с несколькими входами в атмосферу для баллистической капсулы и аппаратов скользящего спуска / В.В. Леонов [и др.] // Космич. исслед. — 2021. — Т. 59, № 3. — С. 196—208.
- 26. *Картан* Э. Интегральные инварианты / Э. Картан ; под ред. В.В. Степанова. Москва Ленинград : Изд. технико теоретической литературы, 1940. 216 с.
- Proceedings of the IERS Workshop on the Implementation of the New IAU Resolutions // IERS Technical Note № 29 / Observatoire de Paris, Paris, France. 2002, 18–19 April.
- Folkner W.M. The Planetary and Lunar Ephemeris DE421 / W.M. Folkner, J.G. Williams, D.H. Boggs // The Interplanetary Network Progress Report. – 2016. – Vol. 42–178. – P. 1–34.
- 29. Степаньянц В.А. Эффективный алгоритм решения систем дифференциальных уравнений движения / В.А. Степаньянц, Д.В. Львов // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 6.
- 30. Гарифуллин М.Ф. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений / М.Ф. Гарифуллин. М. : ТЕХНОСФЕРА, 2020. 192 с.
- 31. *Аким Э.Л., Энеев Т.М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Т. 1, № 1. С. 5—50.
- 32. *Демидович Б.П.* Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. М. : Наука, 1966. 664 с.

- 33. *Bowring B.R.* Transformation from spatial to geodetic coordinates / B.R. Bowring // Survey Review. 1976. No. 23. P. 323—327.
- Vallado D.A. Fundamentals of astrodynamics and applications / D.A. Vallado. Microcosm Press Hawthorne, 2013. — 1108 p.
- 35. Matplotlib: Rel: v3.2.2. matplotlib/matplotlib / T.A. Caswell [et al.]. Zenodo, 2020.
- 36. Cartopy. v0.18.0. UK: Met Office, 03.05.2020 [Электронный ресурс]. 2020. URL: https://github.com/SciTools/cartopy/archive/v0.18.0.tar.gz (дата обр. 28.02.2025).
- Weidmann N.B. The Geography of the International System: The CShapes Dataset / N.B. Weidmann, D. Kuse, K.S. Gleditsch // International Interactions. — 2010. — Vol. 36, no. 1. — P. 86—106. — URL: http://www.doi.org/10.1080/03050620903 554614.
- 38. Корабль-спутник «Восток» (ЗКА) [Электронный ресурс]. URL: https://osik takan.ru/space\_ap/vostok\_3KA\_comp-shem.html (дата обр. 28.02.2025).
- 39. «Краснодар» Служба космических исследований отдела морских экспедиционных работ Академии наук СССР [Электронный pecypc]. URL: http://ski-omer.ru/%D1%81%D1%83%D0%B4%D0%B0/%D0%BA%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D1%80 (дата обр. 28.02.2025).
- «Ворошилов»/«Ильичёвск» Служба космических исследований отдела морских экспедиционных работ Академии наук СССР [Электронный реcypc]. — URL: http://ski-omer.ru/%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE% D1%88%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%B2/ (дата обр. 28.02.2025).
- 41. «Долинск» Служба космических исследований отдела морских экспедиционных работ Академии наук СССР [Электронный ресурс]. — URL: http://skiomer.ru/%D1%81%D1%83%D0%B4%D0%B0/%D0%B4%D0%BE%D0% BB%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BA (дата обр. 28.02.2025).

1. ЕНИМАНИЕ       9.01'51"         2. МИНУТНАЯ ГОТОВНОСТЬ 9.01'51"       9.03'00"         3. КЛИЧ НА СТАРТ       9.03'00"         4. ПРОТЯЖКА І       9.03'06"         5. ПРОДУВКА       9.03'51"         6. КЛЮЧ НА ДРЕНАЖ       9.03'51"         9.05'51"       9.04'51"         8. ПРОТЯЖКА 2       9.05'51"         9.05'51"       9.05'51"         9.05'51"       9.05'51"         12				Tar	Reparte	107.4	9.54
2. МИНУТНАЯ ГОТОВНОСТЬ 9.01'51"       9.03'00"       Ланина старт       9.03'00"         4. ПРОТЯЖКА І       9.03'06"       12-7 44       12-7 44         5. ПРОДУВКА       9.03'51"       9.04'51"       12-7 44         6. КЛЮЧ НА ДРЕНАЖ       9.03'51"       9.04'51"       12-7 44         7. П У С К       9.05'51"       9.05'51"       12-7 44         8. ПРОТЯЖКА 2       9.05'51"       9.05'51"       12-7 44         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400         9.05'51"       9.05'51"       12-7 44       400	I. ВНИМАНИЕ			he	any	the	- Ym
3. КЛАЧ НА СТАРТ       9.03'00"         4. ПРОТЯЖКА І       9.03'06"         5. ПРОДУВКА       9.03'16"         6. КЛАЧ НА ДРЕНАЖ       9.03'51"         9.05'51"       9.04'51"         7. П У С К       9.05'51"         8. ПРОТЯЖКА 2       9.06'41"         9.05'51"       9.05'51"         12-7       12-7         4. ПРОТЯЖКА 1       9.03'16"         5. ПРОДУВКА       9.05'51"         9.05'51"       9.05'51"         12-7       12-7         4. ПРОТЯЖКА 2       9.05'51"         9.05'51"       9.05'51"         12.01-01-01-01-01-01-01-01-01-01-01-01-01-0	2. МИНУТНАЯ ГОТОВНОСТЬ	9.01'51"		, Nº	Dq.	2000	her ~
4. ПРОТЯЖКА І       9.03'06"       Алинина         5. ПРОДУВКА       9.03'16"       Алинина         6. КЛЮЧ НА ДРЕНАЖ       9.03'51"       9.04'51"         7. П У С К       9.05'51"       9.05'51"         8. ПРОТЯЖКА 2       9.06'41"       9.06'41"         9. Об'51"       9.06'41"       12.04.	З. КЛЮЧ НА СТАРТ	9.03'00"		-m	2ma	mall	ys
5. ПРОДУВКА     9.03'16"       6. КЛЮЧ НА ДРЕНАЖ     9.03'51"       9.03'51"     9.04'51"       7. ПУСК     9.05'51"       8. ПРОТЯЖКА 2     9.06'41"       9.05'51"     9.06'41"       9.05'51"     12.04'51"	4. ПРОТЯЖКА I	9.03'06"		An	-7-	625	JA-R
6. КЛЮЧ НА ДРЕНАЖ       9.03'51" 9.04'51"         7. ПУСК       9.05'51" 9.05'51"         8. ПРОТЯЖКА 2       9.06'41" 9.06'41"         9.05'51" 0.05'51"       12.04'51"         9.05'51" 0.05'51"       12.04'51"	5. ПРОДУВКА	9.03'16"		yai	then	- A	40. C
7. ПУСК         9.05'51"         9.05'51"         12.01           8. ПРОТЯЖКА 2         9.06'41"         9.06'41"         12.01         12.01           9. Об'51"         9.06'41"         9.06'41"         12.01         12.01	6. КЛЮЧ НА ДРЕНАЖ	9.03'51"	9.04'51"	de	- /	~	
8. ПРОТЯЖКА 2 9.06'41" 9.06'41" 4. 61.	7. ПУСК	9.05'51"	9.05'51"		12.0	rap	~~~~
0 94 MILTRAILICE 0 16'51" 0 16'51"	8. ПРОТЯЖКА 2	9.06'41"	9.05'41"			*. fr.	-
5. SAAAI AHAE	9. Зажигание	9.06'51"	9.06'51"				
				520			
580				81			

## Приложение. Иллюстрации



non "YTBEPKHAD" - 3 -Государственной комиссии Корния К.Руднев Х. Настройку баланса усилителей СОБИС и РСК произвести на частоть, обеспечивающие следующие номинальные объемные соотношения расходов кошпонентов топлива через THA: HOJETHOE SAJAHUE Kvz = 1,80 нонылю зодиты Кля нолета испятателя косконавта старшего лейтенныта Гагарина Юрия Алексеевича на изделии 8072 № Е10316 с объектом "ЗКА" № 3 12 апреля 1961 г. K., = 1,86 K. = 1,568 ХІ. Уставка программного токораспределителя B-256 KA 159,5 сек. Подготовку космического полета и пуск изделия преизвести в соответствии со следующими исходными данными: Мисрици. келдыш I. <u>ВРЕМЯ СТАРТА</u> (московское) 9 часов 07 манут с дойуском ± 7 мин. Сапрания С. Королев С. Задина. МРИКИН О.Задин С. ЗВЕРЕВ Насто Лагальцов М. РЯЗАНСКИЙ П. ПОЛНОЕ ВРЕМЯ ПОЛЕТА I час.46 мин. КА 1454 Н. ПИЛЮГИН B. WSHELLOB Ш. ДАЛЬНОСТЬ ПОЛЕТА ADBAXAPOB в. БАРМИН 1,03 оборота вокруг Земли REFLECT K. KEPMMOB А. ИШЛИНСКИ IV. TEORESHAECKNE RAWHEE С. КОСБЕРГ 12. % 61 ЦОВИЦАТ И. ВИНОГРАДОВ К. БУШУЕВ ВИЛИВ. ЯЗДОВСКИМ А ГОЛИОНОРОВ 34037'59",2 ute а) Азимут линии прицеливания б) Координать расчетной точки приземления:
 - широта 52,5° с.ш.
 - долгота 47,7° в.д. А. БОГОМОЛОВ 12.04.64 С. АБРАМОВ С. АБРАМОВ Л. ГУСЕВ С. АЛЕКСЕЕВ y. HAGTPONKA IPHEOPA B-137M A. urning I. Время заряда интегрирующих элементов компнди "Разделение" 308,29 сек. Задание составили: 2. Время заряда интегрирурцих элементов коменды "Наддув" 399,88 сек. egle egitur (BE3BEPEWII) (ЖУРАВЛЕВ) УІ. НАСТРОЛКА ПРИБОРОВ КИ22-88-2 и И-22-8 Ворания Кирсанов) опану (КАЛИНИН) I. Установочное значение кахущейся скорости в момент горов. (ЯЧЕИСТОВ) 11.04.612. видачи главной команды на выключение двигателя Ш стуцени ..... 2283,52 м/сек.

Рис. 2. Полётное задание [4]



Рис. 3. КА «Восток–1» [38]: 1 – ленточные антенны системы связи с Землёй «Заря»; 2 – приборный отсек; 3 – жалюзи системы терморегулирования; 4 – сопла ориентации ТДУ; 5 – антенны связи системы «Сигнал»; 6 – ТДУ; 7 – антенны «Трал»; 8 – солнечный датчик; 9 – космонавт в катапультируемом кресле; 10 – оборудование системы жизнеобеспечения; 11 – иллюминаторы; 12 – телекамера; 13 – ручка управления ориентацией корабля; 14 – приборная доска; 15 – запасы воды и пищи; 16 – антенна УКВ; 17 – антенны командной радиолинии; 18 – СА; 19 – баллоны со сжатым газом системы ориентации.



Рис. 4. Сергей Павлович Королев и Николай Петрович Каманин [2]



Рис. 5. Корабль «Краснодар» [39]



Рис. 6. Корабль «Ворошилов» [40]



Рис. 7. Корабль «Долинск» [41]



Рис. 8. Трасса реконструированной орбиты: 1 – старт (9:06:59.7); 2 – отделение 1-ой ступени РН (9:08:59.2); 3 – сброс головного обтекателя (9:09:34.3); 4 – отделение 2-ой ступени РН (9:11:47.2); 5 – выход из зоны «Заря–1» (9:13); 6 – отделение 3-й ступени РН (9:18:26.8); 7 – выход из зоны «Заря–2» (9:21); 8 – видимость со станции Шамия (9:22:27); 9 – выход из зоны «Заря–3» (9:29); 10 – включение систем ориентации на Солнце (9:51); 11 – выход из зоны Хабаровска (9:52); 12 – завершение построения солнечной ориентации (9:55:10); 13 – Гагарин: «Пролетаю над Америкой» (09:57); 14 – пролёт апогея (10:02:45); 15 – Гагарин: «Нахожусь в апогее» (10:04:00); 16 – выход из тени Земли (10:09:15); 17 – автоматическая команда на подготовку включения ТДУ (10:15); 18 – включение ТДУ (10:25:04.2); 19 – вход в атмосферу на высоте 100 км (10:38:34).

Александр Сергеевич Гаммал, младший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН e-mail: gammalas-kiam@yandex.ru

Денис Андреевич Тучин, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН e-mail: den@kiam1.rssi.ru home: http://www.kiam1.rssi.ru/~den

