



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 20 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**А.В. Александров,**  
**Л.В. Дородницын**

Методика моделирования  
искусственных турбулентных  
полей высокоточными  
схемами на криволинейных  
сетках в присутствии твёрдых  
границ

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Александров А.В., Дородницын Л.В. Методика моделирования искусственных турбулентных полей высокоточными схемами на криволинейных сетках в присутствии твёрдых границ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 20. 20 с. EDN: **YIGXXW**  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-20>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Александров, Л.В. Дородницын**

**МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ИСКУССТВЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ  
ПОЛЕЙ ВЫСОКОТОЧНЫМИ  
СХЕМАМИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ  
СЕТКАХ В ПРИСУТСТВИИ  
ТВЁРДЫХ ГРАНИЦ**

**Москва — 2025**

*Александров А.В., Дородницын Л.В.*

**Методика моделирования искусственных турбулентных полей высокоточными схемами на криволинейных сетках в присутствии твёрдых границ**

В работе предложена методика моделирования динамики искусственных турбулентных полей высокоточными схемами, сохраняющими дисперсионные соотношения (DRP), на криволинейных сетках. Центральное внимание уделено постановке разностных граничных условий на твердой стенке. Выполнено обобщение существующих методик постановки граничных условий для схем DRP на случай неортогональных криволинейных координат в консервативной постановке. Искусственные турбулентные поля скорости реализуются на основе оригинального тензорного метода фильтрации.

**Ключевые слова:** синтетическая турбулентность, схемы DRP.

*Alexandrov Anatoly, Dorodnicyn Ludwig*

**The technique for modeling artificial turbulent fields by high-accuracy schemes on curvilinear grids in the presence of rigid boundaries**

In this paper the technique for modeling the dynamics of artificial turbulent fields by high-accuracy dispersion-relation-preserving (DRP) schemes on curvilinear grids is proposed. A central point is the imposition of numerical boundary conditions at a rigid wall. The existing DRP boundary treatments are extended to the case of conservative equations in non-orthogonal curvilinear coordinates. Artificial turbulent velocity fields are constructed on the base of the original tensor filtering method.

**Key words:** synthetic turbulence, Dispersion-Relation-Preserving schemes.

## Оглавление

Введение .....	3
Схема DRP для уравнений Эйлера в декартовых координатах.....	4
Методика моделирования в криволинейных координатах .....	5
Случай уравнений Эйлера в квазилинейной форме .....	6
Случай уравнений Эйлера в консервативной форме .....	8
Случай линеаризованных уравнений Эйлера.....	12
Моделирование рассеяния турбулентного следа на круговом цилиндре .....	16
Заключение.....	19
Список литературы.....	20

## Введение

Схемы, сохраняющие дисперсионные соотношения, (DRP) [1] и другие разностные алгоритмы со спектральным разрешением [2] широко используются в задачах аэроакустики. Помимо высокого порядка точности, данные схемы минимизируют дисперсионную ошибку. Отличительной особенностью таких алгоритмов является широкий шаблон – от 7 до 13 узлов сетки. Проблема постановки граничных условий для данного класса схем затрагивается в целом ряде работ [3–8]. Обычно при задании разностных условий на твердой стенке используют подход, предложенный Кристофером Тамом, когда в приграничных узлах для вычисления нормальных к стенке производных используются скошенные шаблоны. При этом, чтобы избежать численной неустойчивости и переопределенной системы линейных уравнений на границе, вводят фиктивные значения переменных вне расчетной области. Для линейных уравнений Эйлера и Навье–Стокса в декартовых координатах в случае прямолинейных границ данная методика описана в работе [3]. Для квазилинейных уравнений Эйлера на ортогональных криволинейных сетках в неконсервативной постановке используется та же методика со скошенными шаблонами и заданием давления в фиктивной точке [4]. В настоящей работе выполнено обобщение данной методики на случай криволинейных координат (необязательно ортогональных) для уравнений Эйлера в консервативной постановке.

Аналогично предложенной ранее для декартовой постановки методике [9], полученные граничные условия используются для моделирования акустических волн, возникающих в результате рассеяния турбулентного следа на выпуклом криволинейном препятствии. Методика основана на генерации искусственного турбулентного поля, соответствующего турбулентному следу с заданными характеристиками, на основе оригинального метода тензорной фильтрации белого шума [10]. Данный подход обобщает методы фильтрации [11, 12], в соответствии с которыми начальное поле скорости строится как ротор функции тока, определяемой сверткой ядра пространственного фильтра с членом белого шума. Полученное поле является бездивергентным и корректно воспроизводит одно- и двухточечные моменты первого и второго порядка, а также масштабы турбулентности.

Эволюция сгенерированного начального поля описывается уравнениями Эйлера, численное решение которых позволяет значительно сократить вычислительную стоимость эксперимента в сравнении с подходами на основе уравнений Навье–Стокса, поскольку не требует разрешения пристеночных масштабов.

В работе выполнено моделирование рассеяния турбулентного пятна на круговом цилиндре. Наблюдалась генерация акустических волн за счет рассеяния турбулентного следа на цилиндре. Полученные результаты качественно совпадают с ожидаемыми физическими характеристиками.

## Схема DRP для уравнений Эйлера в декартовых координатах

Нелинейные уравнения Эйлера в декартовых координатах имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}.$$

Вводится равномерная сетка с шагами  $(\Delta x, \Delta y)$ , на которой выполняется аппроксимация системы (1) с заменой производных по пространственным переменным конечными разностями на симметричных 7-точечных шаблонах:

$$\frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt} + C_{xij} \frac{1}{\Delta x} \sum_{s=-3}^3 a_s \mathbf{U}_{i+s,j} + C_{yij} \frac{1}{\Delta y} \sum_{q=-3}^3 a_q \mathbf{U}_{i,j+q} = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты схемы DRP найдены в [1], и они равны:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -a_{-1} = 0.79926643, \quad a_2 = -a_{-2} = -0.18941314, \\ a_3 = -a_{-3} = 0.02651995.$$

Для численного интегрирования по времени в [1] был разработан оригинальный явный метод Адамса. Однако предпочтительными оказываются явные методы Рунге–Кутты, специальные версии которых предлагались в [13, 14]. В настоящей работе мы будем использовать стандартный метод Рунге–Кутты с 4 стадиями и 4-м порядком аппроксимации.

Разностная схема (2) задается во внутренних узлах сетки, для которых шаблоны не выходят за пределы расчетной области. Вблизи границ уравнения изменяются. Особое внимание следует уделить пристеночным узлам, расположенным вдоль границы  $y = 0$  ( $j = 0, 1, 2$ ), в которых производные по  $y$  аппроксимируются разностями на 7-точечных скошенных шаблонах. Соответствующие коэффициенты также были получены в [1].

Как показали исследования [3, 4], устойчивая схема получается при добавлении слоя фиктивных узлов (ghost points)  $j = -1$ . В системе (1) для узлов  $j = 0, 1, 2$  все производные по  $y$  заменяются разностями на шаблонах, лежащих в пределах области, тогда как производные давления  $\partial p / \partial y$  в дискретной форме используют шаблоны, включающие фиктивный узел. Отсюда возникает необходимость в начале каждой стадии Рунге–Кутты определять давление в фиктивном узле.

Построим уравнение для давления  $p$  на нижней границе области  $y = 0$ , которая совпадает с поверхностью твердого тела. Это уравнение должно следовать из основной системы уравнений и не противоречить граничному условию непротекания, которое ставится для вертикальной компоненты скорости и имеет вид  $v = 0$ .

Третье уравнение системы (1) записывается как

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Вдоль границы  $y = 0$  выполняется тождество  $v \equiv 0$ , благодаря чему в уравнении остается только последний член:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad y = 0.$$

Это соотношение аппроксимируется на 7-точечном шаблоне, включающем фиктивный узел  $j = -1$ :

$$\frac{1}{\Delta y} \sum_{q=-1}^5 \tilde{\alpha}_q p_{i,j+q} = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{\alpha}_q$  – коэффициенты кривой разности. Отсюда вычисляется значение давления в фиктивной точке:

$$p_{i,-1} = -\frac{1}{\tilde{\alpha}_{-1}} \sum_{q=0}^5 \tilde{\alpha}_q p_{i,q}.$$

Обратим внимание на тот факт, что уравнение (3) не только аппроксимирует дифференциальное граничное условие, вытекающее из постановки исходной задачи, но и непосредственно следует из разностной системы (2), дополненной граничным условием для скорости.

## Методика моделирования в криволинейных координатах

Пусть функции  $\xi(x, y), \eta(x, y)$  задают новые криволинейные координаты  $(\xi, \eta)$ , отображая исходную физическую область в прямоугольник

$$\xi_0 \leq \xi \leq E, \quad \eta_0 \leq \eta \leq H.$$

Пусть при этом граница  $\eta = \eta_0$  соответствует твердой поверхности обтекаемого тела. В области  $(\xi, \eta)$  вводится равномерная сетка

$$(\xi_i, \eta_j): \quad \xi_i = \xi_0 + i \Delta \xi, \quad \xi_{N_1} = E, \quad \eta_j = \eta_0 + j \Delta \eta, \quad \eta_{N_2} = H.$$

Существует много способов задания криволинейных координат с указанными свойствами. Важными для нас будут два обстоятельства. Во-первых, частным случаем (подклассом) являются ортогональные координаты  $(\xi, \eta)$ . Во-вторых, во многих ситуациях заранее известна регулярная сетка  $(x_{ij}, y_{ij})$ , и задача состоит в отыскании преобразования  $\xi(x, y), \eta(x, y)$ , согласованного с данной сеткой. Точнее, для вычислительных алгоритмов требуются не сами эти функции, а их производные по исходным декартовым координатам  $(x, y)$ , т.е. матрица Якоби.

В настоящей работе рассмотрим три модели газовой динамики и, соответственно, методику построения высокоточных схем для каждой из них: нели-

нейные уравнения Эйлера в квазилинейной и консервативной форме и, наконец, линеаризованные уравнения Эйлера с учетом неоднородного поля. Особое внимание будем концентрировать на технологии использования уравнений вблизи поверхности твердого тела.

### Случай уравнений Эйлера в квазилинейной форме

В криволинейных координатах  $(\xi, \eta)$  система уравнений Эйлера (1) приобретает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_\xi \frac{\partial U}{\partial \xi} + C_\eta \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0. \quad (4)$$

Введенные матрицы  $C_\xi$  и  $C_\eta$  даются, с учетом тождеств

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

следующими выражениями:

$$C_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} C_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} C_y, \quad C_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} C_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} C_y.$$

Далее в большинстве случаев для краткости будем обозначать

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

имея также в виду, что эти величины не требуется вычислять в ходе расчета нестационарной динамики задачи.

Итак,

$$C_\xi = \begin{pmatrix} u\xi_x + v\xi_y & \rho\xi_x & \rho\xi_y & 0 \\ 0 & u\xi_x + v\xi_y & 0 & \frac{1}{\rho}\xi_x \\ 0 & 0 & u\xi_x + v\xi_y & \frac{1}{\rho}\xi_y \\ 0 & \gamma\rho\xi_x & \gamma\rho\xi_y & u\xi_x + v\xi_y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$C_\eta = \begin{pmatrix} u\eta_x + v\eta_y & \rho\eta_x & \rho\eta_y & 0 \\ 0 & u\eta_x + v\eta_y & 0 & \frac{1}{\rho}\eta_x \\ 0 & 0 & u\eta_x + v\eta_y & \frac{1}{\rho}\eta_y \\ 0 & \gamma\rho\eta_x & \gamma\rho\eta_y & u\eta_x + v\eta_y \end{pmatrix}.$$

Далее в регулярных узлах сетки  $(\xi_i, \eta_j)$  уравнение (4) заменяется, по примеру декартовой геометрии (2), схемой с 7-точечными шаблонами вида

$$\frac{dU_{ij}}{dt} + C_{\xi ij} \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s U_{i+s,j} + C_{\eta ij} \frac{1}{\Delta\eta} \sum_{q=-3}^3 a_q U_{i,j+q} = 0. \quad (6)$$

При этом в матрицах  $C_\xi$  и  $C_\eta$  из (5) фигурируют производные криволинейных координат по декартовым. В случае аналитически заданного преобразования  $\xi(x, y), \eta(x, y)$  величины  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  непосредственно вычисляются для каждого узла сетки перед началом расчета. Более сложная процедура выполняется, если известна только сама сетка.

Технология разработана авторами [7, 8]. Предположим, сетка  $(x_{ij}, y_{ij})$  допускает обратимое и гладкое преобразование системы координат  $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$ . Тогда существует якобиан  $J$ , для которого в двумерном случае справедливы соотношения:

$$J = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Связь между элементами двух матриц Якоби такова:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -J \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -J \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = J \frac{\partial x}{\partial \xi}.$$

В свою очередь, производные декартовых координат по криволинейным приближенно вычисляются на равномерной сетке  $(\xi_i, \eta_j)$  с использованием 7-точечных DRP разностей, например:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \approx \frac{1}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s x_{i+s, j}.$$

После этого по формулам находится якобиан, а затем нужные нам параметры  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ .

В пристеночных узлах  $j = 0, 1, 2$  производные по поперечной переменной  $\eta$  заменяются косыми 7-точечными разностями: используются шаблоны, лежащие в пределах области; фиктивный узел привлекается только для производных давления  $\partial p / \partial \eta$ , встречающихся во втором, третьем и четвертом уравнениях системы (4)–(5).

Умножив второе уравнение системы (4)–(5) на  $\eta_x$ , третье на  $\eta_y$  и сложив, получим:

$$\begin{aligned} & (u \xi_x + v \xi_y) \eta_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \left( \xi_x \eta_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \\ & + (u \xi_x + v \xi_y) \eta_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \left( \xi_y \eta_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y^2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем, следуя [4], скорости в криволинейной системе координат  $U, V$ , связанные со скоростями  $u, v$  в декартовых координатах следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= u \xi_x + v \xi_y, \\ V &= u \eta_x + v \eta_y. \end{aligned} \quad (8)$$

Проделанные преобразования необходимы для того, чтобы получить уравнение для производной давления  $p$  по поперечной переменной на нижней границе  $\eta = 0$ . На этой границе выполняется условие равенства нулю  $V$  – поперечной компоненты скорости.

После приведения подобных слагаемых и с учетом (8), а также нулевой скорости  $V \equiv 0$  упрощаем выражение (7):

$$U\eta_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + U\eta_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \quad (9)$$

Если координаты ортогональные, то исчезает член, содержащий

$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0.$$

Перейдем к разностным уравнениям, использующим схему DRP. Запишем пространственную аппроксимацию уравнения (9) на нижней стенке ( $j = 0$ ) в регулярных (внутренних) узлах по касательной переменной. Таким образом, производные по  $\xi$  заменяются центральными 7-точечными разностями, производные по  $\eta$  – односторонними разностями, за исключением производной давления  $p$ . Последняя аппроксимируется с использованием фиктивного узла  $j = -1$  на 7-точечном скошенном шаблоне. Итак, аппроксимация при  $j = 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{U_{ij}\eta_{xij}}{\Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s u_{i+s,j} + \frac{U_{ij}\eta_{yij}}{\Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s v_{i+s,j} + \frac{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)_{ij}}{\rho_{ij} \Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s p_{i+s,j} + \\ + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2)_{ij}}{\rho_{ij} \Delta\eta} \sum_{q=-1}^5 \tilde{a}_q p_{i,j+q} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Исходя из аппроксимации (10) можно получить выражение для давления в фиктивной точке:

$$\begin{aligned} p_{i,-1} \frac{-\tilde{a}_{-1}}{\rho_{i,0} \Delta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2)_{i,0} = \frac{U_{ij}\eta_{xij}}{\Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s u_{i+s,j} + \frac{U_{ij}\eta_{yij}}{\Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s v_{i+s,j} + \\ + \frac{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)_{ij}}{\rho_{ij} \Delta\xi} \sum_{s=-3}^3 a_s p_{i+s,j} + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2)_{ij}}{\rho_{ij} \Delta\eta} \sum_{q=0}^5 \tilde{a}_q p_{i,j+q}. \end{aligned}$$

Элементы матрицы Якоби, если они не заданы явно, вычисляются на основе 7-точечных разностей на скошенных шаблонах, не использующих фиктивный узел.

Кристофер Там [4] вывел аналогичное (10) уравнение для случая трехмерной криволинейной геометрии, основываясь на разностной DRP схеме. Однако в монографии рассматривались лишь ортогональные координаты, в связи с чем в уравнении отсутствовал член с касательными производными давления: см. формулу (9).

### Случай уравнений Эйлера в консервативной форме

Систему двумерных уравнений Эйлера запишем в векторной форме [7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{Q}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} (\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F}) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{J} (\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F}) \right) = 0, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho h_t u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho h_t v \end{pmatrix}.$$

Удельная полная энергия  $e_t$  и полная энтальпия  $h_t$  выражаются как

$$e_t = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad h_t = e_t + \frac{p}{\rho} = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Во внутренних узлах сетки систему (11) привычным образом аппроксимируем с использованием симметричных 7-точечных разностей. Для вычисления величин в пристеночных узлах пойдем следующим путем.

Выпишем по отдельности уравнения для двух компонент импульса и полной энергии в криволинейных координатах (в системе (11) – вторая, третья и четвертая строки):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho u^2 + p) + \frac{\xi_y}{J} (\rho uv) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} (\rho u^2 + p) + \frac{\eta_y}{J} (\rho uv) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho uv) + \frac{\xi_y}{J} (\rho v^2 + p) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} (\rho uv) + \frac{\eta_y}{J} (\rho v^2 + p) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho e_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho h_t u) + \frac{\xi_y}{J} (\rho h_t v) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} (\rho h_t u) + \frac{\eta_y}{J} (\rho h_t v) \right) = 0.$$

Для последующей аппроксимации данных уравнений представим производные по поперечной переменной  $\eta$  от членов, содержащих давление, по формуле дифференцирования произведения, выделяя производные  $\partial p / \partial \eta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho u^2 + p) + \frac{\xi_y}{J} (\rho uv) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x \rho u^2}{J} \right) + p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} \right) + \\ + \frac{\eta_x}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y \rho uv}{J} \right) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho uv) + \frac{\xi_y}{J} (\rho v^2 + p) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x \rho uv}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y \rho v^2}{J} \right) + \\ + p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y}{J} \right) + \frac{\eta_y}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho e_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho h_t u) + \frac{\xi_y}{J} (\rho h_t v) \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} \rho u \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\eta_y}{J} \rho v \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \\ + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x u}{J} \right) + \frac{\eta_x u}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} + p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y v}{J} \right) + \frac{\eta_y v}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тем самым единственной величиной, которую потребуется определять в фиктивном узле, окажется давление  $p$ .

Умножив уравнение (12) на  $\eta_x$ , уравнение (13) – на  $\eta_y$  и сложив, получим уравнение поперечной компоненты импульса:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{J} (u\eta_x + v\eta_y) \right) + \\ & + \eta_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho u^2 + p) + \frac{\xi_y}{J} (\rho uv) \right) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} (\rho u^2 + p) + \frac{\eta_y}{J} (\rho uv) \right) + \\ & + \eta_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x}{J} (\rho uv) + \frac{\xi_y}{J} (\rho v^2 + p) \right) + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} (\rho uv) + \frac{\eta_y}{J} (\rho v^2 + p) \right) = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем это уравнение, учитывая введенные в (8) величины  $\xi_x u + \xi_y v = U$  и  $\eta_x u + \eta_y v = V$ :

$$\begin{aligned} \xi_x (\rho u^2 + p) + \xi_y (\rho uv) &= \rho u (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_x p = \rho u U + \xi_x p, \\ \eta_x (\rho u^2) + \eta_y (\rho uv) &= \rho u (\eta_x u + \eta_y v) = \rho u V \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \xi_x (\rho uv) + \xi_y (\rho v^2 + p) &= \rho v (\xi_x u + \xi_y v) + \xi_y p = \rho U v + \xi_y p, \\ \eta_x (\rho uv) + \eta_y (\rho v^2) &= \rho v (\eta_x u + \eta_y v) = \rho v V. \end{aligned}$$

Уравнение поперечной компоненты импульса перепишем с учетом проделанных преобразований, а также условия  $V = 0$  на нижней границе  $\eta = 0$ :

$$\begin{aligned} \eta_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho U u + \xi_x p}{J} \right) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho u V}{J} \right) + \eta_x p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x}{J} \right) + \frac{\eta_x^2}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \\ + \eta_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho U v + \xi_y p}{J} \right) + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho v V}{J} \right) + \eta_y p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y}{J} \right) + \frac{\eta_y^2}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученное уравнение остается разрешить относительно производной давления  $\partial p / \partial \eta$  при  $\eta = 0$ . К сожалению, это не ведет к существенному упрощению системы, как это происходит в декартовых координатах. Заметим также, что в случае условий прилипания равенство нулю всех компонент скорости приведет к тому, что в данном уравнении пропадут все члены, содержащие как поперечные, так и продольные компоненты скорости. Однако в случае уравнений Навье–Стокса должны быть учтены еще и вязкие члены, что, естественно, усложнит итоговое уравнение.

Вернемся к уравнениям Эйлера. Перейдем к разностным уравнениям, использующим схему DRP. При аппроксимации уравнения (15) на нижней стенке ( $j = 0$ ) производные по  $\xi$  заменяются центральными 7-точечными разностями, производные по  $\eta$  – односторонними разностями, за исключением  $\partial p / \partial \eta$ , аппроксимируемой косой разностью с использованием фиктивного узла  $j = -1$ . Итак, аппроксимация (15) на слое  $j = 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{xij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 \frac{a_s}{J_{i+s,j}} \left( \rho_{i+s,j} U_{i+s,j} u_{i+s,j} + \xi_{x_{i+s,j}} p_{i+s,j} \right) + \\ & + \frac{\eta_{xij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\rho_{i,j+q} u_{i,j+q} V_{i,j+q}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{xij} p_{ij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\eta_{x_{i,j+q}}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{xij}^2}{\Delta \eta J_{ij}} \sum_{q=-1}^5 \check{\alpha}_q p_{i,j+q} + \\ & + \frac{\eta_{yij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 \frac{a_s}{J_{i+s,j}} \left( \rho_{i+s,j} U_{i+s,j} v_{i+s,j} + \xi_{y_{i+s,j}} p_{i+s,j} \right) + \\ & + \frac{\eta_{yij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\rho_{i,j+q} v_{i,j+q} V_{i,j+q}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{yij} p_{ij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\eta_{y_{i,j+q}}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{yij}^2}{\Delta \eta J_{ij}} \sum_{q=-1}^5 \check{\alpha}_q p_{i,j+q} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\check{\alpha}_q$  и  $\check{\alpha}_q$  – коэффициенты соответствующих косых разностей.

Предыдущая формула дает выражение для давления в фиктивной точке.

$$\begin{aligned} p_{i,j-1} \frac{-\check{\alpha}_{-1}}{\Delta \eta J_{ij}} \left( \eta_{xij}^2 + \eta_{yij}^2 \right) &= \frac{\eta_{xij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 \frac{a_s}{J_{i+s,j}} \left( \rho_{i+s,j} U_{i+s,j} u_{i+s,j} + \xi_{x_{i+s,j}} p_{i+s,j} \right) + \\ & + \frac{\eta_{xij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\rho_{i,j+q} u_{i,j+q} V_{i,j+q}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{xij} p_{ij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\eta_{x_{i,j+q}}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{xij}^2}{\Delta \eta J_{ij}} \sum_{q=0}^5 \check{\alpha}_q p_{i,j+q} + \\ & + \frac{\eta_{yij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 \frac{a_s}{J_{i+s,j}} \left( \rho_{i+s,j} U_{i+s,j} v_{i+s,j} + \xi_{y_{i+s,j}} p_{i+s,j} \right) + \\ & + \frac{\eta_{yij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\rho_{i,j+q} v_{i,j+q} V_{i,j+q}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{yij} p_{ij}}{\Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q \frac{\eta_{y_{i,j+q}}}{J_{i,j+q}} + \frac{\eta_{yij}^2}{\Delta \eta J_{ij}} \sum_{q=0}^5 \check{\alpha}_q p_{i,j+q}. \end{aligned}$$

Отметим, что при построении аппроксимации в приграничных точках мы отказались от консервативной формы записи уравнений Эйлера, выделив поперечные производные давления. Тем самым в разностных уравнениях нарушается принцип консервативности в слоях  $j = 0, 1, 2$ . Впрочем, консервативность (дивергентность) схемы теряется уже при замене симметричных шаблонов скошенными. Однако этот дефект не играет большой роли благодаря высокой точности алгоритмов. Поэтому, возможно, консервативную DRP схему во

внутренних узлах допустимо сочетать с граничными условиями, построенными выше для квазилинейных уравнений.

### Случай линеаризованных уравнений Эйлера

Динамику возмущений будем моделировать на основе линеаризованных уравнений Эйлера. В этом случае наиболее целесообразно использовать уравнения, линеаризованные на решении нелинейных уравнений Эйлера с учетом его неоднородности. Это так называемые уравнения Эйлера с рефракцией [15], в которых присутствуют градиенты стационарного среднего поля.

#### Уравнения Эйлера, линеаризованные на непостоянном фоне в декартовых координатах

Запишем уравнения, пользуясь нотацией [16], в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + C_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{U} = (\rho' \quad u' \quad v' \quad p')^T$  – вектор-столбец возмущений примитивных переменных, матрицы  $C_x$  и  $C_y$  – те же, что в квазилинейной системе (1), матрица  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_y$ ,

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial x} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial x} & 0 & \gamma \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \rho}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial y} & \gamma \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Функции, участвующие в матрицах  $C_x$ ,  $C_y$  и  $\mathbf{K}$ , считаются заданными и не зависящими от времени. Дополнительной гипотезой является то, что величины, задействованные в матрице  $\mathbf{K}$ , не произвольны, а берутся из стационарного решения уравнений Эйлера (1).

Разностная аппроксимация системы (16) строится по примеру (2) с использованием 7-точечных разностей DRP:

$$\frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt} + C_{xij} \frac{1}{\Delta x} \sum_{s=-3}^3 a_s \mathbf{U}_{i+s,j} + C_{yij} \frac{1}{\Delta y} \sum_{q=-3}^3 a_q \mathbf{U}_{i,j+q} + K_{ij} \mathbf{U}_{ij} = 0. \quad (17)$$

Производные параметров в матрицах  $\mathbf{K}_x$  и  $\mathbf{K}_y$  получаются путем численного дифференцирования ранее найденного решения с применением таких же DRP разностей по  $x$  и  $y$  соответственно, откуда строится дискретный аналог матрицы  $\mathbf{K}$ .

Рассмотрим уравнение для нормальной пульсации скорости и граничное условие для нее на линии  $y = 0$ , которое имеет вид  $v' = 0$ . Третье уравнение системы

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v'}{\partial x} + v \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} u' - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial y} \rho' + \frac{\partial v}{\partial y} v' = 0$$

на границе упрощается благодаря условию  $v' \equiv 0$  и дополнительному предположению о том, что для среднего поля нормальная компонента скорости также обращается в нуль вдоль всей границы:  $v \equiv 0$ . Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial y} \rho' = 0.$$

Второе слагаемое исчезает, если предположить  $\partial p / \partial y = 0$ .

Последнее уравнение будем использовать при задании пульсации давления  $p'$  в фиктивном узле. Нормальную производную  $p'$  следует аппроксимировать на шаблоне, затрагивающем фиктивный узел, тогда как производную фонового давления  $p$  можно вычислить исходя из посчитанных значений, используя узлы в пределах области.

### Уравнения Эйлера, линеаризованные на непостоянном фоне в криволинейных координатах

В криволинейных координатах  $(\xi, \eta)$  система (16) выглядит как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + C_\xi \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} + C_\eta \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0.$$

Матрицы  $C_\xi$  и  $C_\eta$ , выраженные через параметры среднего поля, выписаны в (5).

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\xi + \mathbf{K}_\eta = \mathbf{K}_x + \mathbf{K}_y.$$

В матрице  $\mathbf{K}_\xi$  сгруппируем члены, содержащие величину  $\xi$ , а в матрице  $\mathbf{K}_\eta$  – остальное. Выразим  $\mathbf{K}_x$  и  $\mathbf{K}_y$  в новых переменных:

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) & \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{pmatrix},$$

$$K_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) & 0 & \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \gamma \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$K_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \end{pmatrix},$$

$$K_\eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{pmatrix}.$$

Скорости в криволинейной системе координат связаны со скоростями в декартовых координатах по аналогии с (8):

$$\begin{aligned} U &= u\xi_x + v\xi_y, & U' &= u'\xi_x + v'\xi_y, \\ V &= u\eta_x + v\eta_y, & V' &= u'\eta_x + v'\eta_y. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим граничное условие на кривой  $\eta = 0$ . Будем учитывать, что на границе для скоростей – как для пульсационной, так и фоновой – существует только касательная компонента, т.е.  $V' \equiv V \equiv 0$ .

Умножив второе уравнение системы на  $\eta_x$ , третье – на  $\eta_y$  и сложив, получим:

$$\begin{aligned}
& (u\xi_x + v\xi_y)\eta_x \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \left( \xi_x \eta_x \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \eta_x^2 \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) + \\
& + (u\xi_x + v\xi_y)\eta_y \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \left( \xi_y \eta_y \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \eta_y^2 \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x \eta_x \rho' + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x \eta_x u' + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_y \eta_x v' - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x^2 \rho' + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x^2 u' + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_y \eta_x v' - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_y \eta_y \rho' + \frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_x \eta_y u' + \frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_y \eta_y v' - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_y^2 \rho' + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_x \eta_y u' + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_y^2 v' = 0.
\end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых и с учетом (18), а также нулевых скоростей  $V' \equiv V \equiv 0$  приходим к выражению:

$$\begin{aligned}
& U\eta_x \frac{\partial u'}{\partial \xi} + U\eta_y \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial p'}{\partial \eta} - \\
& - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \xi} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \rho' - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \rho' + \frac{\partial u}{\partial \xi} \eta_x U' + \frac{\partial v}{\partial \xi} \eta_y U' = 0.
\end{aligned}$$

В случае ортогональных координат исчезают члены, содержащие

$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0.$$

Аппроксимируем уравнение в граничных узлах  $j = 0$  по образцу (10) и получаем выражение для пульсации давления в фиктивной точке:

$$\begin{aligned}
 p'_{i,-1} \frac{-\tilde{\alpha}_{-1}}{\rho_{i,0} \Delta \eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2)_{i,0} &= \frac{U_{ij} \eta_{xij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s u'_{i+s,j} + \frac{U_{ij} \eta_{yij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s v'_{i+s,j} + \\
 &+ \frac{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)_{ij}}{\rho_{ij} \Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s p'_{i+s,j} + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2)_{ij}}{\rho_{ij} \Delta \eta} \sum_{q=0}^5 \tilde{\alpha}_q p'_{i,j+q} - \\
 &- \frac{(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)_{ij} \rho'_{ij}}{\rho_{ij}^2 \Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s p_{i+s,j} - \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2)_{ij} \rho'_{ij}}{\rho_{ij}^2 \Delta \eta} \sum_{q=0}^6 \check{\alpha}_q p_{i,j+q} + \\
 &+ \frac{\eta_{xij} U'_{ij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s u_{i+s,j} + \frac{\eta_{yij} U'_{ij}}{\Delta \xi} \sum_{s=-3}^3 a_s v_{i+s,j}.
 \end{aligned}$$

## Моделирование рассеяния турбулентного следа на круговом цилиндре

Построенная выше технология схемных граничных условий применялись при моделировании рассеяния турбулентного пятна на круговом цилиндре.

### Вычисление фонового течения

Задача рассматривается в двумерном приближении. Скорость потока, обтекающего цилиндр, характеризуется числом Маха  $M = 0.3$ .

Стационарное среднее поле вычислялось при помощи 7-точечной DRP схемы на основе уравнений Эйлера (4) в полярной системе координат.

Расчет выполнялся на цилиндрической сетке (рис. 1) размерами  $1000 \times 500$  узлов. По углу сетка была равномерной, а по радиусу шаг сетки увеличивался по закону геометрической прогрессии со знаменателем  $q = 1.003$ .

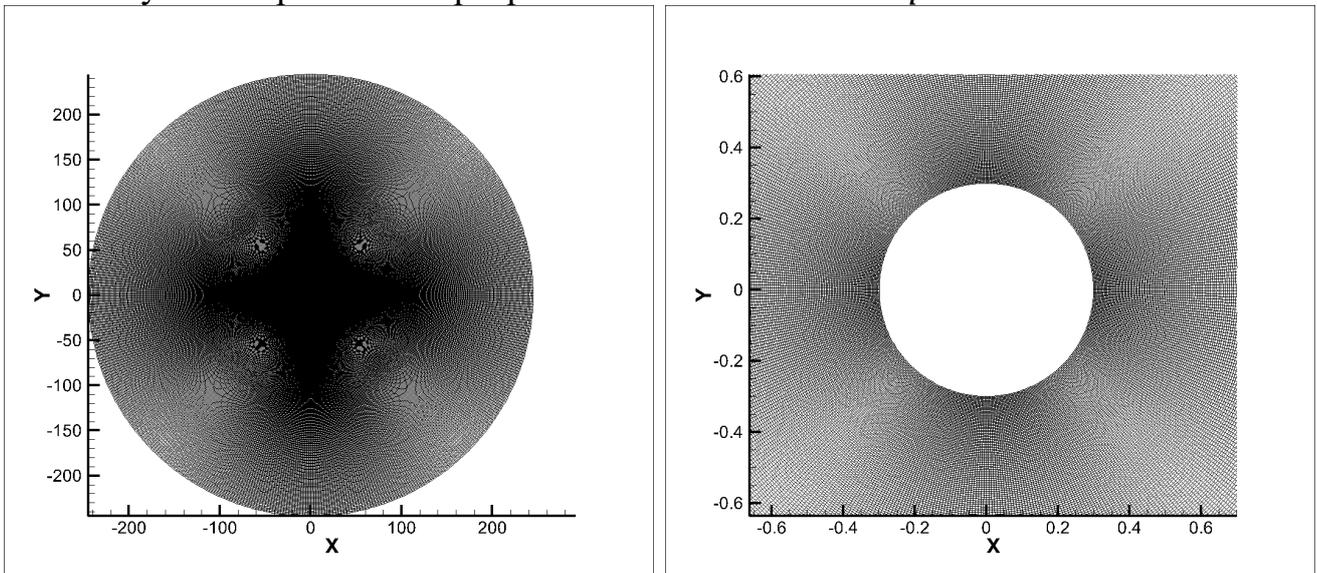


Рис. 1. Расчетная область с сеткой; справа – увеличенный фрагмент

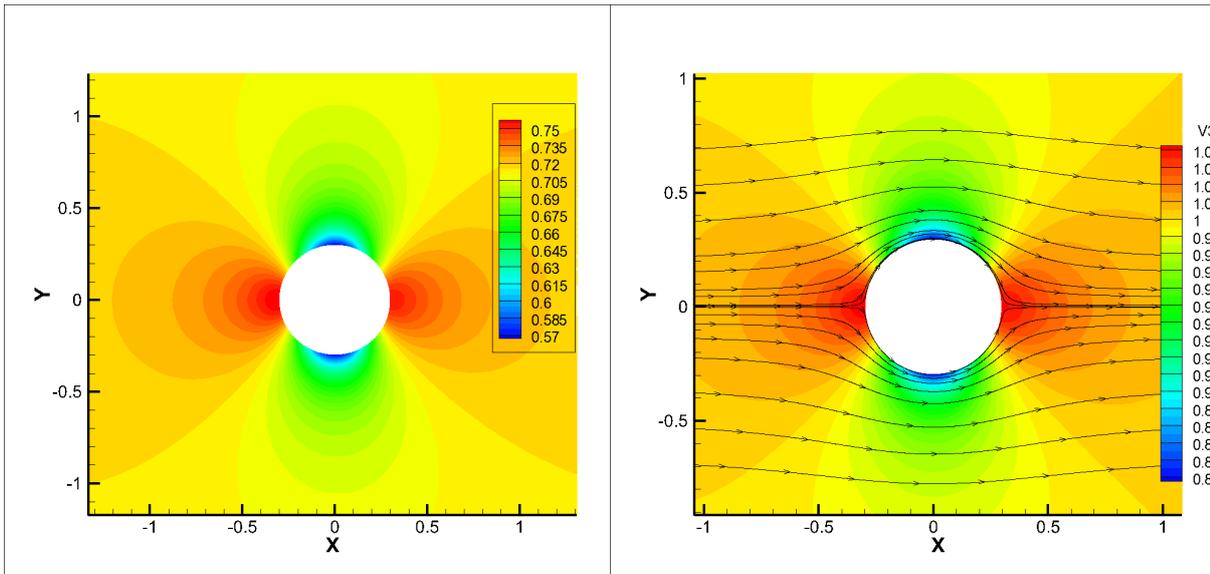


Рис. 2. Фоновые поля давления (слева) и плотности (справа)

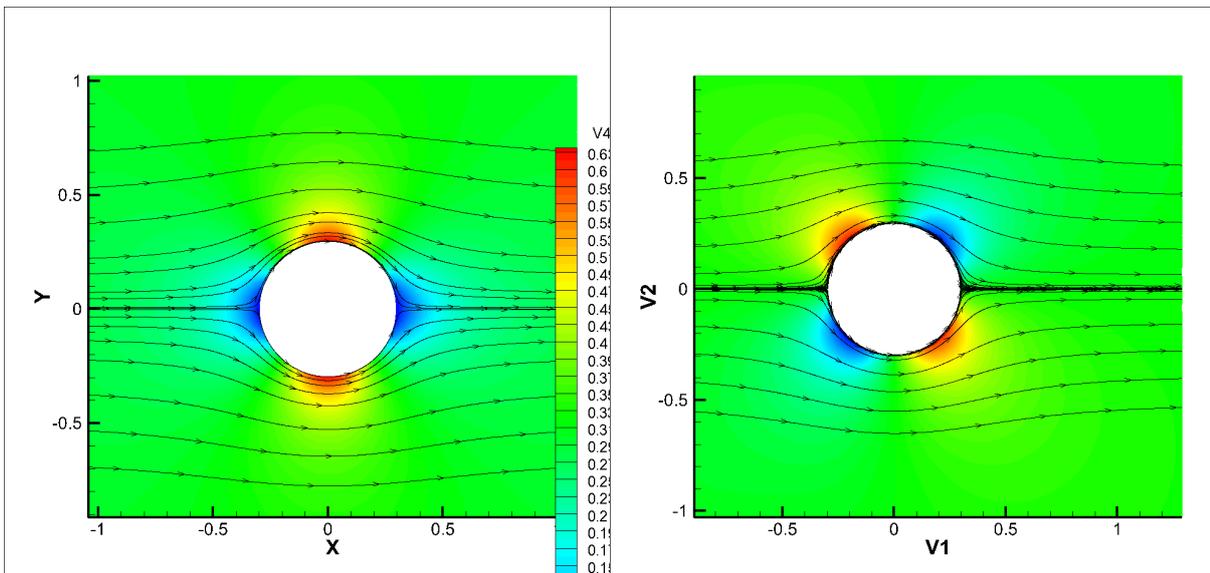


Рис. 3. Фоновые поля продольной (слева) и поперечной (справа) компоненты скорости

Установившееся среднее поле приведено на рис. 2–3. Показаны также линии тока.

### Турбулентный след

Для получения начального поля, имитирующего турбулентный след с заданными параметрами, использовалась оригинальная методика, основанная на тензорном методе фильтрации [10]. Приведем ее вкратце.

Идея данного класса методов состоит в свертке поля белого шума с заданным детерминированным ядром. Белый шум заменяется дискретной аппроксимацией в соответствии с методикой [11]. В двумерном случае область задания случайного поля разбивается на прямоугольные вихревые ячейки одинакового размера  $\Delta_x \times \Delta_y$ . В центре  $x^n$  каждого прямоугольника генерируется случайная

величина  $\Omega^n = \pm 1$ , определяющая равновероятное направление вращения  $n$ -го вихря. Турбулентное поле строится путем суммирования вклада вихрей, попадающих в область влияния точки  $\mathbf{x}$ .

В итоге искусственное турбулентное поле скорости имеет вид

$$u'(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathcal{M}(\mathbf{x})} \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n)}{\partial y} \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y},$$

$$v'(\mathbf{x}) = \sum_{n \in \mathcal{M}(\mathbf{x})} -\frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^n)}{\partial x} \Omega^n \sqrt{\Delta_x \Delta_y}.$$

Здесь  $\mathcal{M}(\mathbf{x})$  – множество номеров вихрей, расположенных в области влияния точки  $\mathbf{x}$ ; функция  $G(\mathbf{x})$  – ядро фильтра, о способе задания которого подробно говорится в [10].

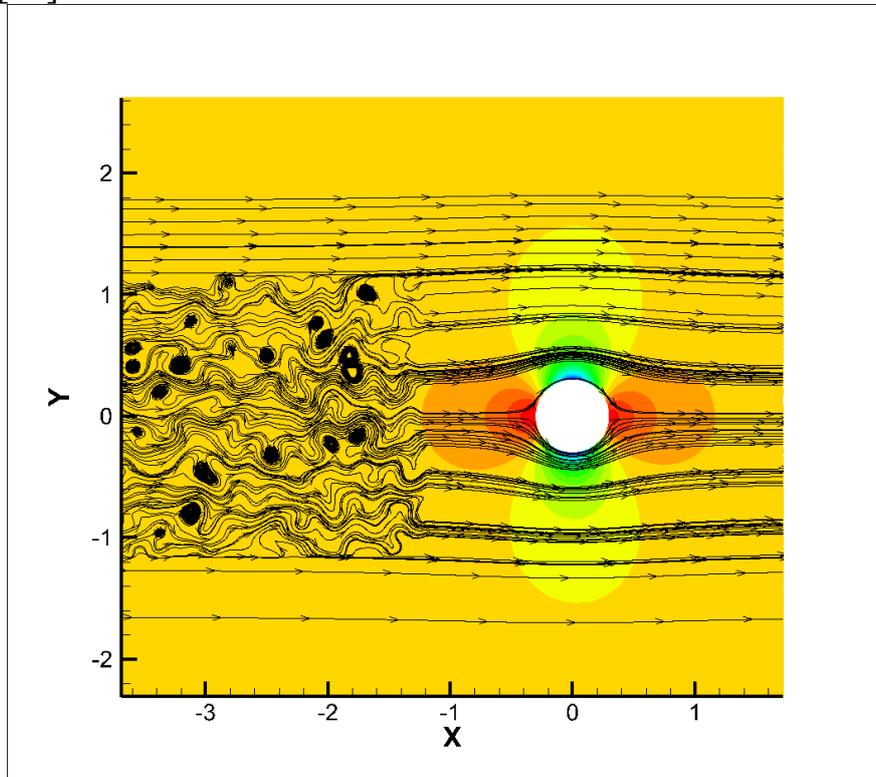


Рис. 4. Линии тока начального турбулентного поля

Указанным образом в прямоугольной области вверх по потоку от обтекаемого цилиндра строилось турбулентное поле скорости, которое добавлялось к среднему полю, полученному из расчета ламинарного обтекания цилиндра. На рисунке 4 приведены линии тока начального турбулентного поля.

Видно, что область задания турбулентных пульсаций ограничена прямоугольником. На границах данной области компоненты скорости имеют разрыв. Поэтому в основном расчете в начальные моменты времени граница турбулентной области становится источником акустических волн. Данные паразитные волны покидают расчетную область еще до момента начала взаимодействия турбулентного следа с препятствием.

Расчет распространения и рассеяния пятна выполнялся с помощью квазилинейных уравнений Эйлера (4) на той же сетке, на которой ранее было получено среднее поле. Для моделирования использовалась описанная выше методика.

Турбулентный след рассеивался на цилиндре, что ожидаемо приводило к образованию акустических волн (рис. 5).

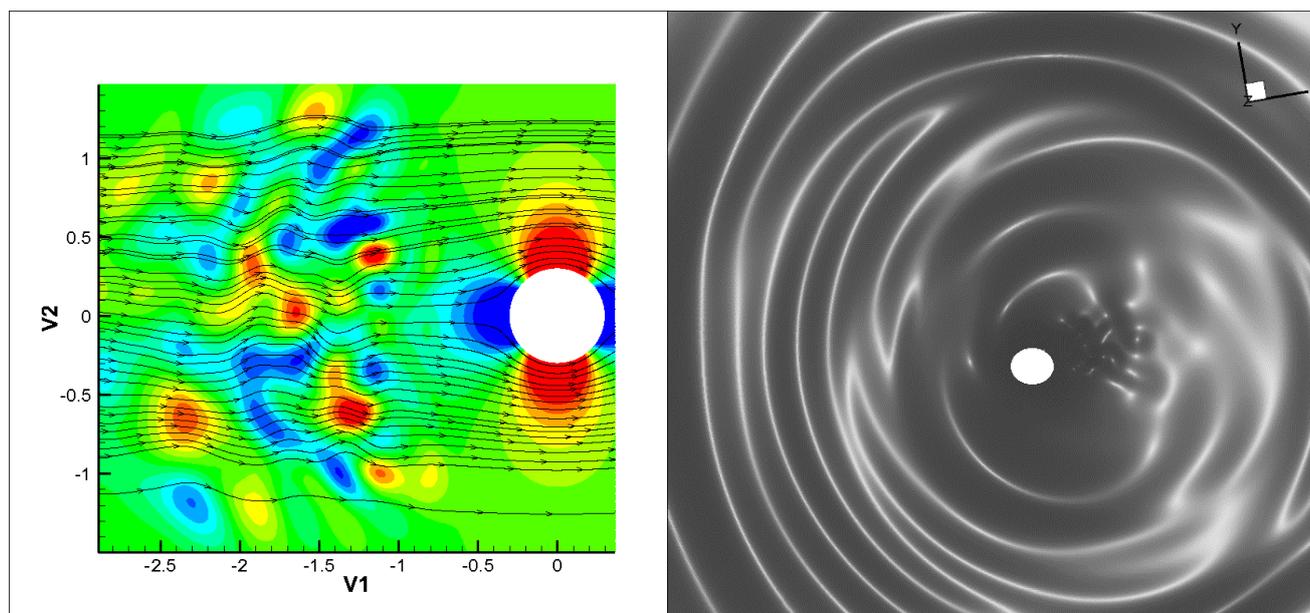


Рис. 5. Турбулентный след, заданный перед цилиндром, (слева) и акустические волны, образующиеся в результате рассеяния этого следа на цилиндре

## Заключение

В работе предложена методика моделирования искусственных турбулентных полей высокоточными схемами, сохраняющими дисперсионные соотношения (DRP), на криволинейных сетках в присутствии твердых границ.

Выполнено обобщение существующих методик постановки граничных условий для DRP на случай криволинейных координат (необязательно ортогональных) в консервативной постановке.

Полученные граничные условия применялись для моделирования рассеяния турбулентного пятна на круговом цилиндре. Реализация искусственных турбулентных полей скорости осуществляется на основе оригинального тензорного метода фильтрации белого шума.

Полученные результаты качественно совпадают с ожидаемыми.

В дальнейшем планируется использование данной методики для предсказания акустических характеристик в дальнем поле от рассеяния турбулентного следа на профиле.

## Список литературы

1. Tam C.K.W., Webb J.C. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // *J. Comput. Phys.*, 107, (1993), 262–281.
2. Bogey C., Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // *J. Comput. Phys.*, 194, (2004), 194–214.
3. Tam C.K.W., Dong Zh. Wall boundary conditions for high-order finite-difference schemes in computational aeroacoustics // *Theor. Comput. Fluid Dynamics*, 6, (1994), 303–322.
4. Tam C.K.W. *Computational Aeroacoustics: A Wave Number Approach*. – Cambridge Aerospace Series, v.33, Cambridge Univ. Press, N.Y., 2012.
5. Kim J.W., Lee D.J. Generalized characteristic boundary conditions for computational aeroacoustics // *AIAA J.*, 38(11), (2000), 2040–2049.
6. Kim J.W., Lee D.J. Generalized characteristic boundary conditions for computational aeroacoustics, Part 2 // *AIAA J.*, 42(1), (2004), 47–55.
7. Marsden O., Bogey C., Bailly C. High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies. *Journal of Computational Acoustics*, 13(4), (2005), 731–748.
8. Marsden O., Bogey C., Bailly C. Direct noise computation around a 3-D NASA 0012 airfoil // *AIAA 2006-2503*
9. Александров А.В., Дородницын Л.В. Численное моделирование отраженных акустических волн при взаимодействии турбулентного следа с прямоугольным профилем // *Прикладная математика и информатика №75*, М.: МАКС Пресс, 2024, с.52–65.
10. Александров А.В., Дородницын Л.В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2021, №95. – М., 15 с.
11. Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X., Synthetic turbulence methods for computational aeroacoustic simulations of leading edge noise // *Computers and Fluids*, 157, (2017), 240–252. doi:10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
12. Shen Z., Zhang X. Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction // *J. Sound Vibr.*, 458, (2019), 544–564.
13. Calvo M., Franco J.M., Ranzani L. A new minimum storage Runge–Kutta scheme for computational acoustics // *J. Comput. Phys.*, 211, (2004), 1–12.
14. Berland J., Bogey C., Bailly C. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge–Kutta algorithm // *Comput. Fluids*, 35, (2006), 1459–1463.
15. Блохинцев Д.И. *Акустика неоднородной движущейся среды*. – М.: Наука, 1981.
16. Дородницын Л.В. *Неотражающие граничные условия и их приложение в газовой динамике. Учебное пособие*. – М.: МАКС Пресс, 2010, 124 с.