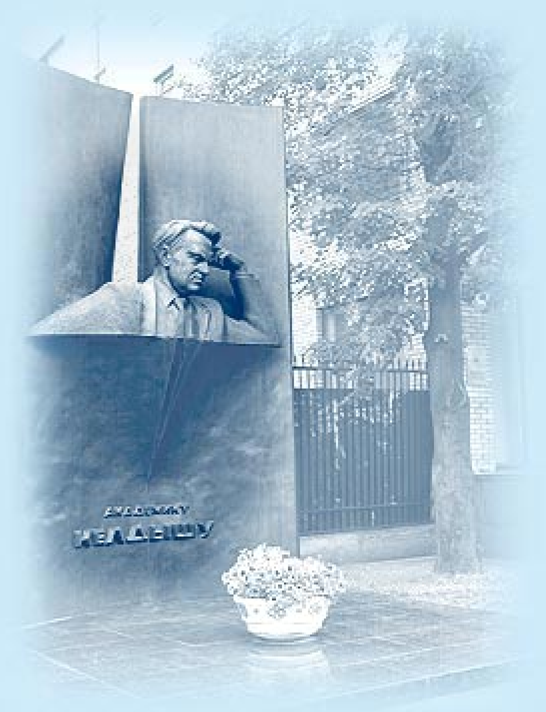
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 32 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

К.Р. Корнеев

Аффинные преобразования сопряжённых переменных в задаче энергетически оптимального перелёта

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Корнеев К.Р. Аффинные преобразования сопряжённых переменных в задаче энергетически оптимального перелёта // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 32. 33 с. EDN: **AVBEJX**
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-32

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

К.Р. Корнеев

Аффинные преобразования сопряжённых переменных в задаче энергетически оптимального перелёта

Москва — 2025

Корнеев К.Р.

Аффинные преобразования сопряжённых переменных в задаче энергетически оптимального перелёта

Рассматривается проблема планирования энергетически оптимальных межпланетных перелётов космических аппаратов с малой тягой. С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимизации сводится к двухточечной краевой задаче. Далее исследуются первые интегралы оптимальных траекторий при изменении сопряжённых переменных аффинными преобразованиями. С помощью использования аффинных преобразований случай некомпланарного перелёта между эллиптическими орбитами сводится к преобразованию плоского перелёта между круговыми орбитами.

Ключевые слова: малая тяга, энергетически оптимальный перелёт, непрямые методы оптимизации, принцип максимума Понтрягина, символьная регрессия, аффинные преобразования

Korneev K.R.

Affine transformation of adjoint variables in the energy optimal flight problem

The paper deals with low-thrust optimization of energy optimal interplanetary transfers of spacecraft. Application of Pontryagin’s Maximum Principle reduces the optimization problem to a two-point boundary-value problem. The first integrals of the optimal trajectories are then analyzed under affine transformations of the adjoint variables. Using these affine transformations, a coplanar transfer between circular orbits converted into a non-coplanar transfer between elliptical.

Key words: low-thrust propulsion, minimum-energy transfer, indirect optimization, Pontryagin’s maximum principle, symbolic regression, affine transformation

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-11-00038 «Эффективные методы проектирования траекторий и управления движением малых космических аппаратов в дальнем космосе».

Введение

Проектирование межпланетных траекторий с малой тягой представляет собой многоэтапный процесс, который начинается с предварительных оценок и анализа основных эксплуатационных параметров: времени миссии и расхода топлива. Для этой цели рассчитываются большие наборы оптимальных траекторий ещё на ранних этапах проектирования миссии. Как правило, задачи оптимизации траекторий с малой тягой не имеют аналитического решения, за исключением особых случаев (перелёт между близкими квазикруговыми орбитами, усреднённая задача о многовитковом перелёте и некоторые другие случаи). Следовательно, чтобы избежать трудоемких вычислений для каждого отдельного набора входных данных, разработка приближённых оценок параметров управления и производительности является весьма востребованной для общего случая.

Электрореактивные двигательные установки (ЭРДУ) характеризуются высоким удельным импульсом и низким уровнем тяги. Высокий удельный импульс обеспечивает большой запас характеристической скорости, который позволяет использовать такие двигатели в качестве маршевых. ЭРДУ обычно моделируются в соответствии с одним из допущений [1]: ограниченная электрическая мощность с идеально регулируемой ЭРДУ (ИР-модель) или постоянная скорость истечения рабочего тела ЭРДУ (ПСИ-модель). Минимизируемая в процессе оптимизации величина называется *функционалом*, который зависит как от выбранного способа моделирования ЭРДУ, так и от задачи. В усреднённом случае многовитковых перелётов с ПСИ-моделью существует аналитическое решение для траекторий с минимальным временем перелёта [2]: тяга всегда должна быть максимальной. Такой режим работы ЭРДУ позволяет проводить аналитическое исследование оскулирующих элементов орбиты в зависимости от направления тяги. Если сила тяги направлена тангенциально к траектории, то возникает спиральное решение с монотонным увеличением высоты перицентра и апоцентра орбиты. Для такого решения доступна аналитическая оценка времени раскручивания по спирали. Более того, существуют численные приближения затрат характеристической скорости для *оптимальных по времени* перелётов к Марсу и Венере [3].

В случае минимизации расхода топлива пассивные участки появляются в большинстве оптимальных решений для ПСИ-модель, что делает профиль тяги разрывным и препятствует сходимости численных методов. При рассмотрении ИР-модели минимизация расхода топлива приводит к получению непрерывных оптимальных решений, а значение целевого функционала показывает нижнюю границу расхода топлива в модели ПСИ-модель. Траектории с использованием ИР-модели называются *энергетически оптимальными*. Хотя характеристики реальных электрических двигателей ближе к тем, которые предполагает ПСИ-модель, на предварительном этапе анализа миссии зачастую применяют ИР-модель, после чего полученные траектории адаптируются к ПСИ-модели.

Существуют две основные группы подходов к оптимизации траекторий [4]: прямые методы и непрямые методы. Прямые методы обычно включают дискретизацию, при которой непрерывные функции траектории и управления заменяются конечномерными векторами на временно́й сетке. Затем полученная задача нелинейного программирования решается численно. Непрямые методы с использованием необходимых условий оптимальности сводят задачу оптимального управления к двухточечной краевой задаче. Принцип максимума Понтрягина [5] обычно предусматривает такие условия. В этом случае уравнения движения космического аппарата (КА) дополняются уравнениями для сопряженных переменных. Расширенная система уравнений обладает высокой чувствительностью к начальным условиям, что является основной проблемой непрямых методов.

Двухточечная краевая задача может быть погружена в однопараметрическое многообразие, что составляет основу методов продолжения (они же методы гомотопического продолжения). Эта группа методов широко представлена в работах В.Г. Петухова [6–8], где демонстрируется существование множества решений двухточечных краевых задача и изучается структура многовитковых перелётов с малой тягой. Метод продолжения позволяет точно определить путь гомотопии и в явном виде задавать принадлежность к тому или иному семейству решений.

Оптимальная по топливу траектория для ПСИ-модели включает пассивные и активные участки тяги, так называемое «bang-bang» управление. В этом случае разрывные дифференциальные уравнения могут быть сглажены [9–13] путём модификации функции переключения. Другой подход заключается в выборе альтернативного вектора состояния [14, 15], что может помочь снизить чувствительность двухточечной краевой задачи. Переменные состояния и сопряжённые переменные до момента переключения и сразу после него связаны между собой, что приводит к изучению их частных производных [16].

Также существует несколько групп методов, которые учитывают необходимые условия, но избегают использования гомотопии. Одним из ключевых методов является усреднение переменных по периоду обращения [17–19]. Другие авторы используют метод пристрелки [20] и роевые методы [21].

Как упоминалось ранее, двухточечная краевая задача межпланетного перелёта с малой тягой имеет несколько решений; некоторые исследования демонстрируют такие решения в явном виде. Эти решения отличаются значением функционала, что означает, что одна из траекторий является глобальным минимумом, а остальные – локальными минимумами. Условия оптимальности и достаточности второго порядка [22, 23] могут подтвердить локальную оптимальность, но их вычисление в общем случае затруднено.

Вместо прямой проверки локальной оптимальности стоит изучить структуру решений численно, в особенности структуру Парето-фронта [24, 25]. Переход между двумя семействами решений может быть выполнен с помощью специального типа гомотопии, который изменяет истинную аномалию ровно на один период [26]. Комбинация двух гомотопий позволяет получить двумерную структуру продолжения, что позволяет предложить новые эмпирические гомотопии [27]. Тем не менее ни одно из численных исследований не может доказать, что решение с минимальным функционалом среди других решений на самом деле является глобально оптимальным решением. Вместо этого термин «практически оптимальный» описывает наилучшее численное решение, глобальная оптимальность которого не может быть доказана [28].

Одним из мощнейших инструментов как для аналитического, так и для численного исследования [29] является использование канонических преобразований [30]. Эти преобразования позволяют менять сопряжённые переменные совместно с переменными состояния при переходе от одной системы координат к другой и даже при замене вектора состояния на альтернативный набор.

В настоящей работе предлагается использование аффинных преобразований начальных значений сопряжённых переменных для получения некомпланарных ИР-оптимальных траекторий между эллиптическими орбитами из компланарных ИР-оптимальных траекторий между круговыми орбитами. Эти аффинные преобразования вдохновлены каноническими преобразованиями, но не осуществляют переход в новую систему координат. Во-первых, в работе изучаются численные свойства такого аффинного преобразования и проводится сравнение с простыми поворотами сопряжённых переменных. Во-вторых, с помощью метода символьной регрессии устанавливаются взаимосвязи между параметрами аффинного преобразования и кеплеровыми элементами начальной и конечной орбит. Наконец, предлагается алгоритм получения начального приближения для перелёта к Марсу и Венере, а также численно рассматриваются ошибки в полученном начальном приближении.

Задача оптимального управления с малой тягой

Рассмотрим дифференциальные уравнения движения космического аппарата в центральном гравитационном поле. В декартовых координатах они записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ являются векторами положения и скорости КА, $\mathbf{a}$ является ускорением тяги, μ – гравитационный параметр центрального небесного тела. Ускорение реактивной тяги выражается формулой

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_T}{m(t)} = \frac{\dot{m}_c u}{m(t)}\mathbf{e}, \tag{2}$$

где $\dot{m}_c$ – норма расхода топлива, $\mathbf{e}$ является единичным вектором тяги, m – текущая масса КА, и u – эффективная скорость истечения. ИР-модель подразумевает, что кинетическая энергия струи ограничена доступной электрической мощностью N, которая подаётся на двигатель с максимальной эффективностью η:

$$\frac{\dot{m}_c u^2}{2} \le \eta N_{max}. \tag{3}$$

Предположение об идеально регулируемом двигателе утверждает, что u и $\dot{m}_c$ могут быть выбраны произвольно, при условии, что они удовлетворяют ограничению (3). В этом случае может быть достигнута любая величина и направление ускорения $\mathbf{a}$. Выражая u в (2) через $\mathbf{a}$, m, $\dot{m}_c$ и подставляя ускорение тяги в (3), имеем

$$\frac{a^2(t)m^2(t)}{2\dot{m}} \le \eta N_{max}. \tag{4}$$

После перестановки и интегрирования мы получаем

$$\frac{1}{m_0 - m(t)} - \frac{1}{m_0} \le \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{a}^2(\tau)d\tau}{2\eta N_{max}}. \tag{5}$$

Минимальный расход топлива достигается, когда выражение (5) становится равенством. Простейший тип задачи с минимальной энергией предполагает, что максимальная доступная мощность не меняется со временем, а эффективность η также постоянная. Тогда мы приходим к задаче оптимального управления с функционалом

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{a}^2(t)dt \to \min. \tag{6}$$

Количество израсходованного топлива можно определить по формуле

$$m_p(t) = m_0 - \frac{m_0}{1 + J(t)m_0/\eta N_{\max}}. \tag{7}$$

Здесь m_0 – начальная масса КА. При этом рассматривается задача оптимального управления со временем перелёта в качестве внешнего параметра

$$\begin{aligned} &t_0 = 0, \\ &t_f = T \in \mathbb{R},\ T > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Конечное и начальное состояния фиксированные (задача встречи),

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}(t_0) &= 0, \\ \mathbf{r}_f - \mathbf{r}(t_f) &= 0, \\ \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(t_0) &= 0, \\ \mathbf{v}_f - \mathbf{v}(t_f) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ – начальные положение и скорость КА, $\mathbf{r}_f$ и $\mathbf{v}_f$ – конечные положение и скорость.

Необходимые условия оптимальности

Чтобы применить принцип максимума Понтрягина, необходимо ввести функцию Гамильтона-Понтрягина, которая также является гамильтонианом. Для уравнений движения (1) и функционала (6) гамильтониан принимает форму

$$H = -\frac{\mathbf{a}^2}{2} + \mathbf{p}_v \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a} \right) + \mathbf{p}_r \cdot \mathbf{v}, \tag{10}$$

где $\mathbf{p}_r$ и $\mathbf{p}_v$ являются векторами, сопряжёнными положению и скорости переменными. Для того чтобы функционал достигал минимума, гамильтониан должен быть максимизирован:

$$H\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{a}\right) \underset{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3}{\rightarrow} \max. \tag{11}$$

Из условия стационарности получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v. \tag{12}$$

Уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_r &= \frac{\mu}{r^3}\mathbf{p}_v - \frac{3\mu}{r^5}\mathbf{r}\left(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{r}\right), \\ \dot{\mathbf{p}}_v &= -\mathbf{p}_r. \end{aligned} \tag{13}$$

Они дополняются тривиальными условиями трансверсальности

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_r(t_0) &\in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{p}_r(t_f) &\in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{p}_v(t_0) &\in \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{p}_v(t_f) &\in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{14}$$

Двухточечная краевая задача для нашей задачи оптимального управления формулируется совокупностью уравнений (1), (9), (12), (13) и (14). Чтобы решить эту задачу, достаточно найти $\mathbf{p}_r\left(t_0\right)$ и $\mathbf{p}_v\left(t_0\right)$. Любое решение двухточечной краевой задачи удовлетворяет необходимым условиям оптимальности и, следовательно, является экстремалью Понтрягина.

Первые интегралы аффинных преобразований

Известно, что расширенная система (1), (13) также является уравнениями Гамильтона, широко известными в теоретической механике. При переходе в новую систему координат (СК) сопряжённые переменные необходимо преобразовать таким образом, чтобы система сохранила каноничность [30]:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}' = \Phi(\mathbf{x}), \\ \mathbf{p} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{p}'. \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ – это фазовый и сопряжённый векторы до преобразования Φ, а $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{p}'$ – это фазовый и сопряжённый векторы после преобразования. Такое преобразование называется каноническим. Такие преобразования позволяют легко менять системы координат и переходить от одного набора фазовых переменных к другому.

В работе предлагается использовать $\mathbf{x}'(t_0)$ и $\mathbf{p}'(t_0)$ в качестве начальных значений сопряжённых переменных. Полученная траектория будет экстремалью Понтрягина для краевой задачи, которая нам заранее неизвестна. Рассмотрим матрицу вида

$$R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \rho_1 & \nu_1 & \eta_1 \\ \rho_2 & \nu_2 & \eta_2 \\ \rho_3 & \nu_3 & \eta_3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{v}$ – это трёхмерные векторы параметров, которые определяют данное преобразование. Детерминант этой матрицы равен

$$\det R = \eta^2. \tag{17}$$

Детерминант равен нулю при коллинеарности векторов $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{v}$. Если векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{v}$ ортонормированы, то (16) является матрицей поворота системы координат. В силу этой особенности будем называть аффинные преобразования, осуществляемые с помощью данной матрицы *R-преобразованиями* (от слова rotation). Рассмотрим преобразования для следующей точки безразмерной СК:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \ \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \tag{18}$$

Шестимерный фазовый вектор этих граничных условий равен

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T. \tag{19}$$

Теперь рассмотрим R-преобразование, воздействующее на $\mathbf{x}_0$. По аналогии с каноническим преобразованием (15) запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_0 &= \begin{pmatrix} R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0) & O \\ O & R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0) \end{pmatrix} \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{p}_0 &= \begin{pmatrix} R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0) & O \\ O & R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0) \end{pmatrix}^T \mathbf{p}'_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае положение и скорость преобразуются независимо, что даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_0 &= R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0)\mathbf{r}_0, \\ \mathbf{v}'_0 &= R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0)\mathbf{v}_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Эти выражения легко проверить прямой подстановкой: в R-преобразование параметры будут $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}'_0$ и $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{v}'_0$. Введём обозначение для такой матрицы

$$R_{\rightarrow} = R(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0). \tag{22}$$

Дополним преобразование (21) преобразованием сопряжённых переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_0 &= R_{\rightarrow}\mathbf{r}_0, \\ \mathbf{v}'_0 &= R_{\rightarrow}\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{p}'_r(t_0) &= R_{\rightarrow}^{-T}\mathbf{p}_r(t_0), \\ \mathbf{p}'_v(t_0) &= R_{\rightarrow}^{-T}\mathbf{p}_v(t_0). \end{aligned} \tag{23}$$

Будем называть такое преобразование *односторонним R-преобразованием.* Такое аффинное преобразование осуществляет переход от траекторий, начинающихся в точке (19), к траекториям, начинающимся в некой другой заданной точке. Стоит заметить, что положение и скорость в конечной точке при этом неизвестны.

Если совместить одностороннее R-преобразование с обратным преобразованием, то получится следующее выражение:

$$R_{\rightleftarrows} = R(\mathbf{r}''_0, \mathbf{v}''_0) R^{-1}(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0). \tag{24}$$

Используем эту матрицу для построения преобразования

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}''(t_0) &= R_{\rightleftarrows}\mathbf{r}'(t_0),\\
\mathbf{v}''(t_0) &= R_{\rightleftarrows}\mathbf{v}'(t_0)\\
\mathbf{p}''_r(t_0) &= R_{\rightleftarrows}^{-T}\mathbf{p}'_r(t_0),\\
\mathbf{p}''_v(t_0) &= R_{\rightleftarrows}^{-T}\mathbf{p}'_v(t_0).
\end{aligned} \tag{25}$$

Указанное преобразование будем называть *двунаправленным R-преобразованием.* В отличие от однонаправленного R-преобразования, данное преобразование позволяет осуществить преобразование между двумя любыми точками фазового пространства (за исключением случаев вырождения матрицы R). Будем называть однонаправленное и двунаправленное R-преобразования *псевдоканоническими R-преобразованиями*, чтобы подчеркнуть сохранение старой СК.

Чтобы прояснить разницу между *каноническими* и псевдоканоническими преобразованиями, рассмотрим один практически важный случай *канонического R-преобразования:*

$$R_d = \begin{pmatrix} DU & 0 & 0 \\ 0 & VU & 0 \\ 0 & 0 & DU \cdot VU \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где DU и VU – это единицы измерения положения и скорости соответственно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= R_d\mathbf{r},\\
\mathbf{v}' &= R_d\mathbf{v},\\
\mathbf{p}'_r &= R_d^{-T}\mathbf{p}_r,\\
\mathbf{p}'_v &= R_d^{-T}\mathbf{p}_v.
\end{aligned} \tag{27}$$

Это преобразование позволяет перейти из безразмерной СК в размерную и наоборот. Например, оно позволяет перейти из СК с уравнениями движения (1), в которых $\mu = 1$, в систему с μ таким, как, например, у Солнца. Важно, что в канонических преобразованиях преобразуется вся траектория, а не только начальная точка.

Теперь рассмотрим, какие первые интегралы могут сохраняться при псевдоканоническом R-преобразовании. Уравнения движения задачи двух тел имеют широко известный первый интеграл – орбитальный момент:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = const. \tag{28}$$

При этом расширенная система (1), (13) имеет следующий первый интеграл [1]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_r \times \mathbf{r} + \mathbf{p}_v \times \mathbf{v} = const. \tag{29}$$

Введём две величины вида

$$I_0 = (\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{M}) = (\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{M}_0) = const, \tag{30}$$

$$I_1 = \left[\mathbf{c}_0 \times \mathbf{M} \right] = \left[\mathbf{c}_0 \times \mathbf{M}_0 \right] = const, \tag{31}$$

где $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}(t_0)$, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(t_0)$ являются постоянными векторами. Указанные величины сохраняются на протяжении всей траектории для любых начальных условий, поэтому они являются первыми интегралами. Дополнительно ограничим сопряжённые переменные плоскостью Oxy:

$$\mathbf{p}_r(t_0) = \left(p_{rx}(t_0), p_{ry}(t_0), 0 \right)^T, \tag{32}$$

$$\mathbf{p}_v(t_0) = \left(p_{vx}(t_0), p_{vy}(t_0), 0 \right)^T. \tag{33}$$

В таком случае скалярный и векторный первые интегралы примут вид

$$I_0 = \left(\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{M}_0 \right) = p_{vx}(t_0) - p_{ry}(t_0), \tag{34}$$

$$I_1 = \left[\mathbf{c}_0 \times \mathbf{M}_0 \right] = -\mathbf{r}_0\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{p}_r(t_0) \right) - \mathbf{v}_0\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{p}_v(t_0) \right) = 0. \tag{35}$$

Теперь применим преобразование (23). Орбитальный момент перейдёт в

$$\mathbf{c}'_0 = \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{v}'_0. \tag{36}$$

Запишем сопряжённые переменные после преобразования:

$$\mathbf{p}'_r(t_0) = R^{-T}\mathbf{p}_r(t_0) = \frac{1}{\det R}\left(p_{rx}(t_0)\left[\mathbf{v}'_0 \times \mathbf{c}'_0 \right] + p_{ry}(t_0)\left[\mathbf{c}'_0 \times \mathbf{r}'_0 \right] \right), \tag{37}$$

$$\mathbf{p}'_v(t_0) = R^{-T}\mathbf{p}_v(t_0) = \frac{1}{\det R}\left(p_{vx}(t_0)\left[\mathbf{v}'_0 \times \mathbf{c}'_0 \right] + p_{vy}(t_0)\left[\mathbf{c}'_0 \times \mathbf{r}'_0 \right] \right). \tag{38}$$

Первый интеграл расширенной системы перейдёт в выражение

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathbf{c}'_0}{\det R}\left(\left(p_{rx}(t_0) - p_{vy}(t_0) \right)\left(\mathbf{r}'_0 \cdot \mathbf{v}'_0 \right) + p_{vx}(t_0)\left\| \mathbf{v}'_0 \right\|^2 - p_{ry}(t_0)\left\| \mathbf{r}'_0 \right\|^2 \right). \tag{39}$$

Отсюда немедленно следует, что

$$I'_0 = \left(\mathbf{c}'_0 \cdot \mathbf{M}'_0 \right) = \left(p_{rx}(t_0) - p_{vy}(t_0) \right)\left(\mathbf{r}'_0 \cdot \mathbf{v}'_0 \right) + p_{vx}(t_0)\left\| \mathbf{v}'_0 \right\|^2 - p_{ry}(t_0)\left\| \mathbf{r}'_0 \right\|^2, \tag{40}$$

$$I'_1 = \left[\mathbf{c}'_0 \times \mathbf{M}'_0 \right] = I_1 = 0. \tag{41}$$

Легко заметить, что первый интеграл I_1 сохраняется всегда, а I_0 сохраняется, если $\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0$ ортонормированы (случай *простого поворота*). Это означает, что компланарная траектория будет переходить в некую другую компланарную траекторию.

Однонаправленное R-преобразование неудобно тем, что нельзя менять первые интегралы независимо от изменения начальной точки траектории. Чтобы снять это ограничение, рассмотрим следующий класс преобразований:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0, \\
&\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0, \\
&\mathbf{p}'_r(t_0) = R^{-T}\mathbf{p}_r(t_0), \\
&\mathbf{p}'_v(t_0) = R^{-T}\mathbf{p}_v(t_0).
\end{aligned} \tag{42}$$

Будем называть такое преобразование *неканоническим R-преобразованием*, потому что по своей форме это преобразование перестало совпадать с каноническими преобразованиями. Орбитальный момент теперь не изменяется:

$$\mathbf{c}'_0 = \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{v}'_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{c}_0 = (0,0,1)^T. \tag{43}$$

Но при этом меняется первый интеграл расширенной системы:

$$\mathbf{M}'_0 = \left(-p'_{vz}(t_0), p'_{rz}(t_0), p'_{vx}(t_0) - p'_{ry}(t_0)\right)^T. \tag{44}$$

Рассмотрим, как меняется скалярный первый интеграл:

$$I_0 = p_{vx}(t_0) - p_{ry}(t_0). \tag{45}$$

После преобразования он примет вид

$$I'_0 = p_{vx}(t_0)\left(R^{-T}\right)_{11} + p_{vy}(t_0)\left(R^{-T}\right)_{12} - p_{rx}(t_0)\left(R^{-T}\right)_{21} - p_{ry}(t_0)\left(R^{-T}\right)_{22}. \tag{46}$$

То есть скалярный первый интеграл I_0 сохранится, если матрица R-преобразования имеет специальный вид, при котором будет выполняться

$$\begin{aligned}
&\left(R^{-T}\right)_{11} = \left(R^{-T}\right)_{22} = 1, \\
&\left(R^{-T}\right)_{12} = \left(R^{-T}\right)_{21} = 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

Теперь перейдём к рассмотрению векторного первого интеграла

$$I'_1 = \left(p'_{rz}(t_0), p'_{vz}(t_0), 0\right)^T. \tag{48}$$

Векторный первый интеграл будет равен нулю, если

$$p'_{rz} = p'_{vz} = 0. \tag{49}$$

Это приводит нас к специальному виду матрицы R-преобразования:

$$R = \begin{pmatrix} \rho_1 & \nu_1 & 0 \\ \rho_2 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1\nu_2 - \rho_2\nu_1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Если исключить из рассмотрения матрицы чистого масштабирования, условия (47) и (50) противоречат друг другу и порождают разные классы преобразований.

В данном разделе было рассмотрено три вида R-преобразований: канонические, псевдоканонические и неканонические. Неканонические R-преобразования можно разделить на два типа: *пространственные* (сохраняют скалярный первый интеграл, но нарушают векторный) и *плоские* (нарушают скалярный первый интеграл, но сохраняют векторный).

R-преобразование и простой поворот

Ранее упоминалось, что простой поворот сохраняет и скалярный, и векторный первые интегралы. Возникает вопрос: какие преимущества или недостатки возникают при использовании R-преобразований по сравнению с использованием простого поворота? Запишем матрицу простого поворота через псевдоканоническое R-преобразование с помощью процедуры ортонормирования:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|}, \tag{51}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \left(\mathbf{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{52}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|}. \tag{53}$$

Введём обозначение для этой матрицы поворота:

$$\hat{R} = R\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\mathbf{v}}\right). \tag{54}$$

Как нетрудно заметить, основное отличие заключается в ортогонализации скорости относительно положения. Ввиду свойств транспонирования и обращения матриц поворота можно переписать (23) в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}_0' = \hat{R}\mathbf{r}_0, \\ &\mathbf{v}_0' = \hat{R}\mathbf{v}_0 \\ &\mathbf{p}_r'\left(t_0\right) = \hat{R}\mathbf{p}_r\left(t_0\right), \\ &\mathbf{p}_v'\left(t_0\right) = \hat{R}\mathbf{p}_v\left(t_0\right). \end{aligned} \tag{55}$$

Сравним $R_{\rightarrow}$ и $\hat{R}$ в точке $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$. Для этого будем варьировать положение и скорость по трём осям декартовой СК. Заметим, что

$$\hat{R}\left(\mathbf{r}_0 + \delta r_x, \mathbf{v}_0\right) = \hat{R}\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 + \delta v_x\right) = \hat{R}\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 + \delta v_y\right) = I\,. \tag{56}$$

То есть для этих трёх вариаций преобразование поворота в $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ эквивалентно отсутствию какой-либо коррекции сопряжённых переменных.

Для исследования отличия между этими преобразованиями была построена оптимальная траектория с угловой дальностью φ, равной 40 виткам, а параметр κ (соотношение радиусов конечной орбиты к начальной) был равен 1.5. Время межпланетного перелёта подбиралось во внешнем оптимизаторе, что соответствует задаче встречи со свободным правым концом. Конечные граничные условия таковы:

$$\mathbf{r}_f = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \ \mathbf{v}_f = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}} & 0 \end{pmatrix}^T. \tag{57}$$

На рис. 1-6 представлены численные зависимости невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ изначального решения.

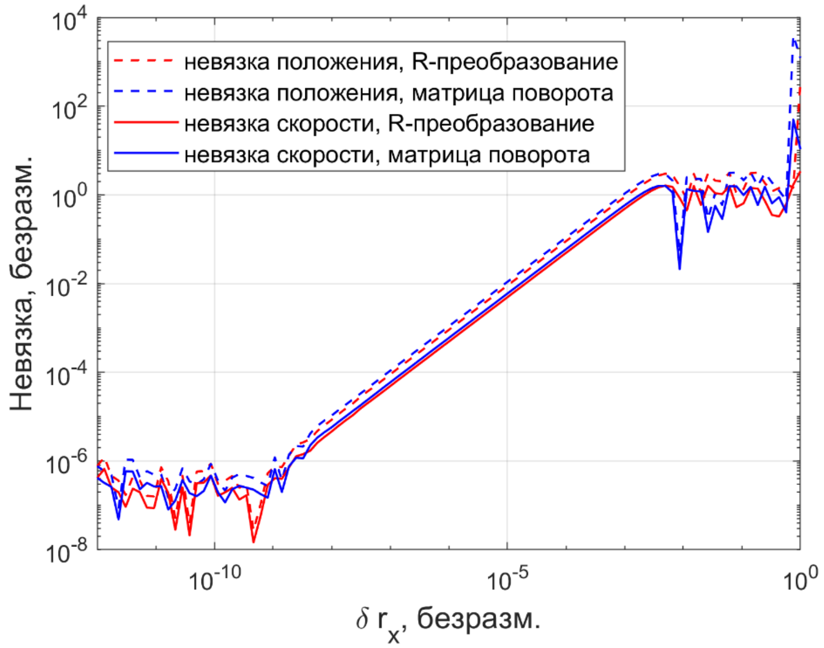


Рис. 1. Численная зависимость невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ от вариации δr_x

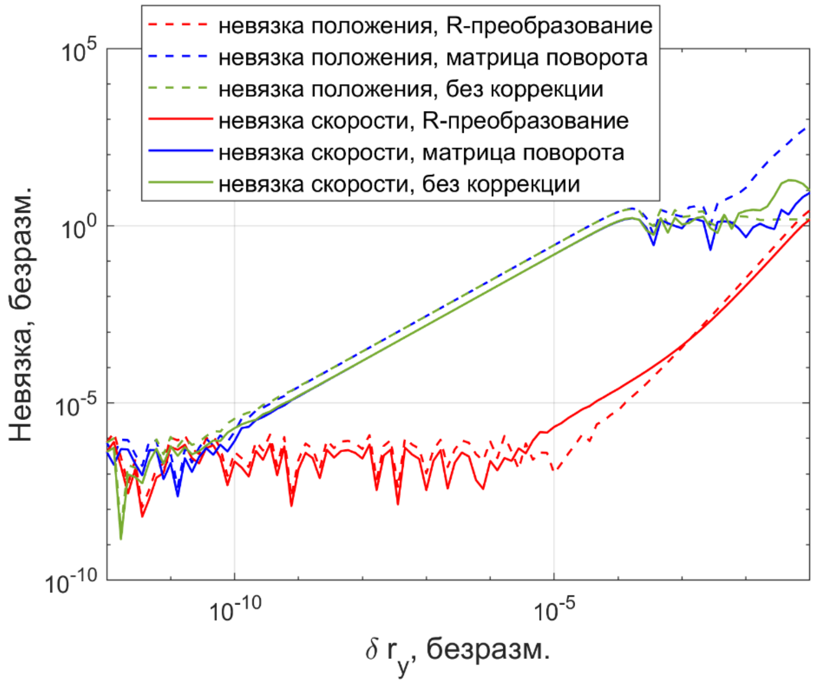


Рис. 2. Численная зависимость невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ от вариации δr_y

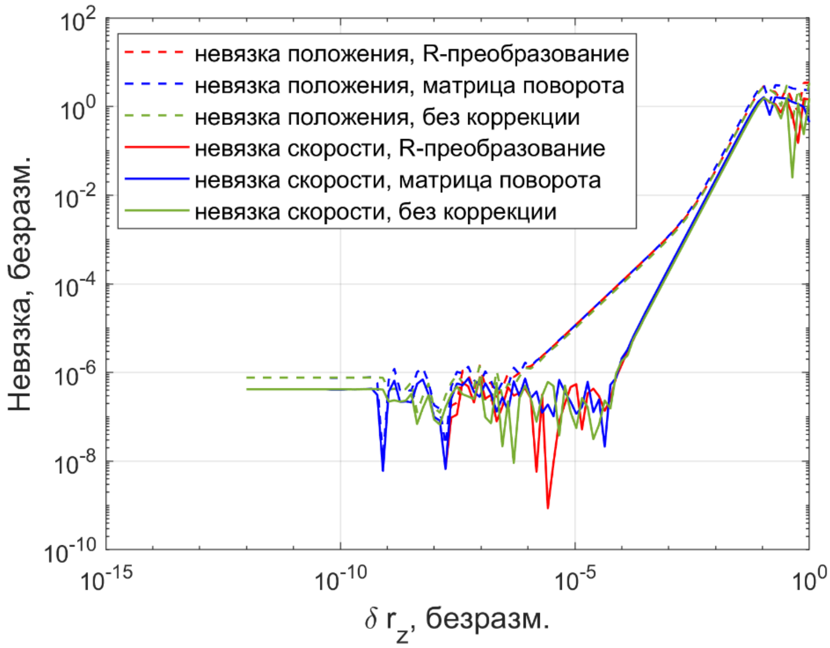


Рис. 3. Численная зависимость невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ от вариации δr_z

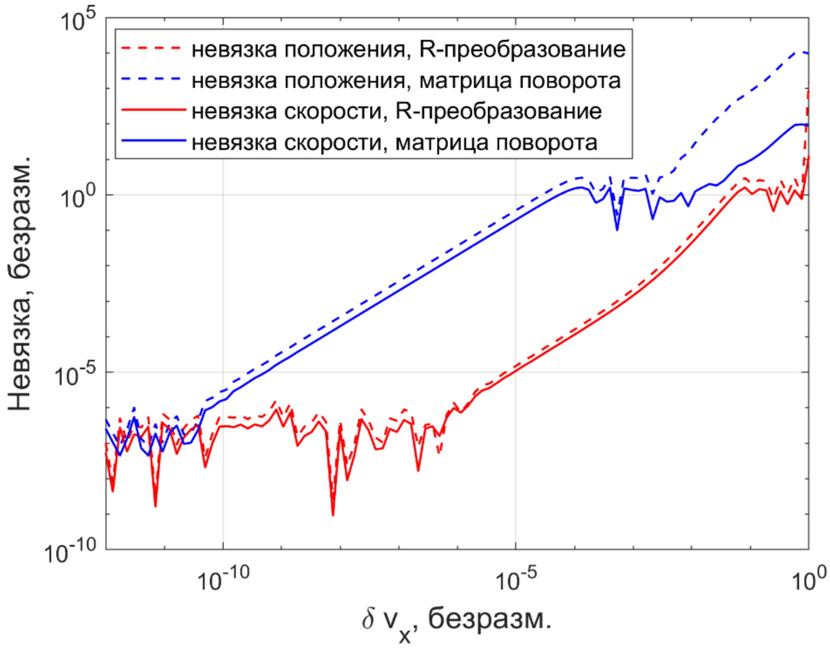


Рис. 4. Численная зависимость невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ от вариации δv_x

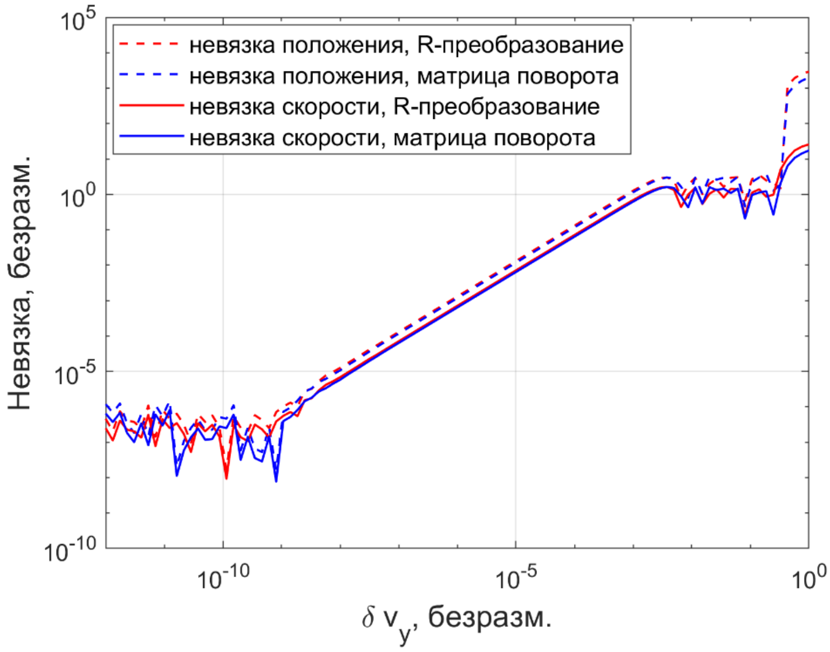


Рис. 5. Численная зависимость невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ от вариации δv_y

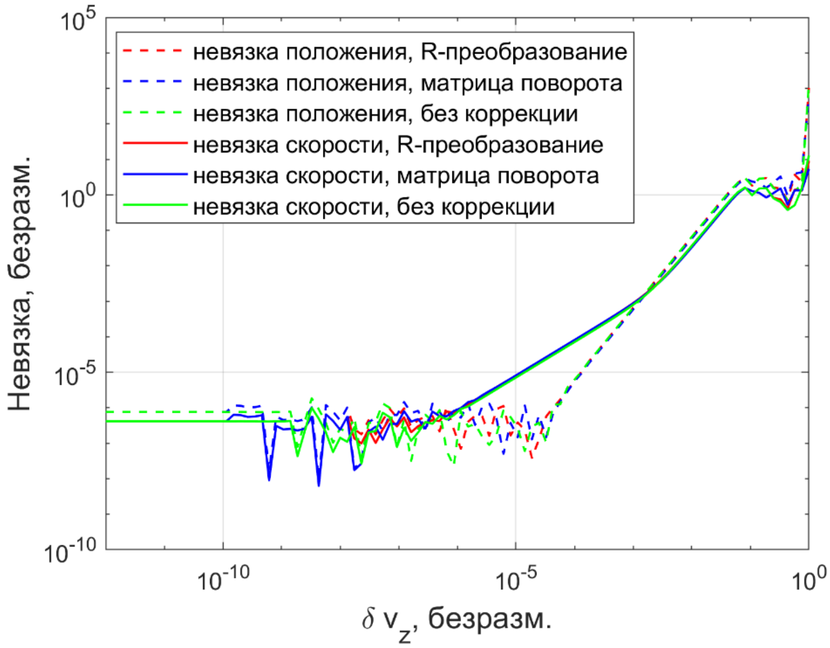


Рис. 6. Численная зависимость невязок положения и скорости относительно $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ от вариации δv_z

Интегрирование велось в декартовых переменных, поэтому невязка без вариаций была порядка 10^{-7}. Угловая дальность в 40 витков позволила пронаблюдать эффекты R-преобразования без включения эффектов, связанных с малой угловой дальностью, но при этом численная неустойчивость многовитковых перелётов ещё не начала оказывать заметного влияния.

Из приведённых графиков видно, что по направлениям $\delta r_y, \delta v_x$ R-преобразование имеет меньшую чувствительность. По этим направлениям невязка граничных условий меньше на 3-4 порядка, чем невязка после использования матрицы простого поворота.

Важно отметить, что это свойство сужает возможности использования неканонического плоского R-преобразования. Аналогично вариациям $\delta r_y, \delta v_x$, параметры R-преобразования ρ_2, v_1 будут мало влиять на траекторию.

Пространственное неканоническое R-преобразование наклонения и восходящего узла конечной орбиты

Ограничим пространство параметров пространственного R-преобразования, рассмотрев обратно транспонированную матрицу:

$$R_i^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{pmatrix}, \qquad (58)$$

Ранее в (47) было показано, что пространственное неканоническое R-преобразование с такой обратно транспонированной матрицей сохраняет скалярный первый интеграл I_0. Матрица R-преобразования при этом принимает следующий вид:

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j^2+1} & \frac{j}{j^2+1} \\ 0 & -\frac{j}{j^2+1} & \frac{1}{j^2+1} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Чтобы исследовать данный класс преобразований, был построен вспомогательный набор данных, в котором варьировался единственный параметр R-преобразования – j, а каждому преобразованию соответствовала некая конечная орбита с заранее неизвестными параметрами.

При помощи метода символьной регрессии [31] удалось обработать набор данных и определить, что j – это коэффициент, связанный с наклонением конечной орбиты i. В таком случае остаётся проблема контроля восходящего узла конечной орбиты. Так как R-преобразование является матрицей, его можно преобразовывать с помощью *подобных матриц*:

$$R_{i\Omega} = R_\Omega^{-1} R_i R_\Omega. \tag{60}$$

Здесь R_Ω – это матрица поворота, которая записывается в виде

$$R_\Omega = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

где Ω – это долгота восходящего узла орбиты. В этом преобразовании долгота восходящего узла задаётся точным образом.

Теперь построим набор данных для анализа взаимосвязи между параметрами преобразования (60). Оказалось, что удобно искать связь в следующем виде:

$$C_i j + i = 0. \tag{62}$$

Был построен отдельный набор данных для аппроксимации коэффициента C_i. На рис. 7 представлена зависимость этого параметра от Ω и κ.

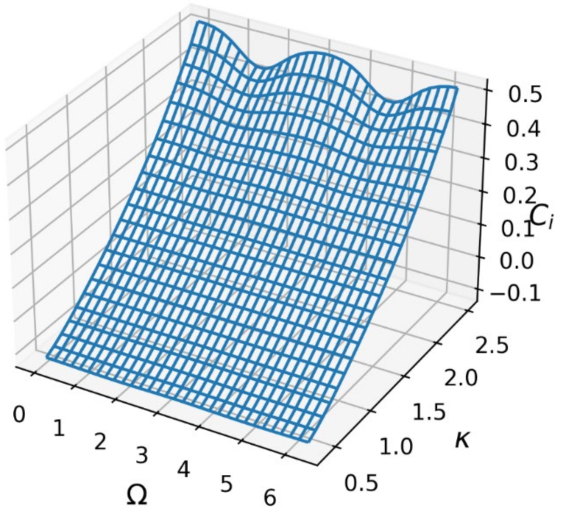


Рис. 7. Зависимость коэффициента C_i от Ω и κ.

Эту поверхность оказалось удобно аппроксимировать следующими выражениями:

$$C_i = C_0^i(\kappa) + C_1^i(\kappa)\cos 2\Omega,\ \sigma\text{=1.7E-3}, \tag{63}$$

$$C_0^i(\kappa) = -\left(C_{0,0}^i + \kappa\left(C_{0,1}^i + C_{0,2}^i\kappa\right)\right)\ln\kappa,\ \sigma = 6.6E-4, \tag{64}$$

$$C_1^i(\kappa) = C_{1,0}^i\left(\kappa + C_{1,1}^i\right)\left(\kappa^3 - 1\right),\ \sigma = 5.4E-4. \tag{65}$$

Соответствующие коэффициенты перечислены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты аппроксимации $R_{i\Omega}$ преобразования

N	C_0^i	C_1^i
0	-4.459247E-2	1.208435E-3
1	-2.516674E-1	-1.425563
2	3.938937E-2	

Теперь запишем получившееся пространственное неканоническое R-преобразование:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0, \\
&\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0 \\
&\mathbf{p}_r'\left(t_0\right) = R_{i\Omega}^{-T}\left(\kappa, i, \Omega\right)\mathbf{p}_r\left(t_0\right), \\
&\mathbf{p}_v'\left(t_0\right) = R_{i\Omega}^{-T}\left(\kappa, i, \Omega\right)\mathbf{p}_v\left(t_0\right).
\end{aligned} \tag{66}
$$

Итоговое преобразование (66) позволяет контролировать наклонение и восходящий узел конечной орбиты без решения соответствующей краевой задачи пространственного перелёта, используя только решение задачи компланарного перелёта между круговыми орбитами виртуальных планет. Отрицательной стороной этого преобразования является изменение радиуса конечной орбиты, что приходится компенсировать за счёт выбора другого соотношения радиусов до преобразования. Пример перелёта после преобразования представлен на рис. 8. Для получения этой траектории использовался плоский межпланетный перелёт с параметрами κ = 1.7, j = -0.93 и угловой дальностью 5 витков.

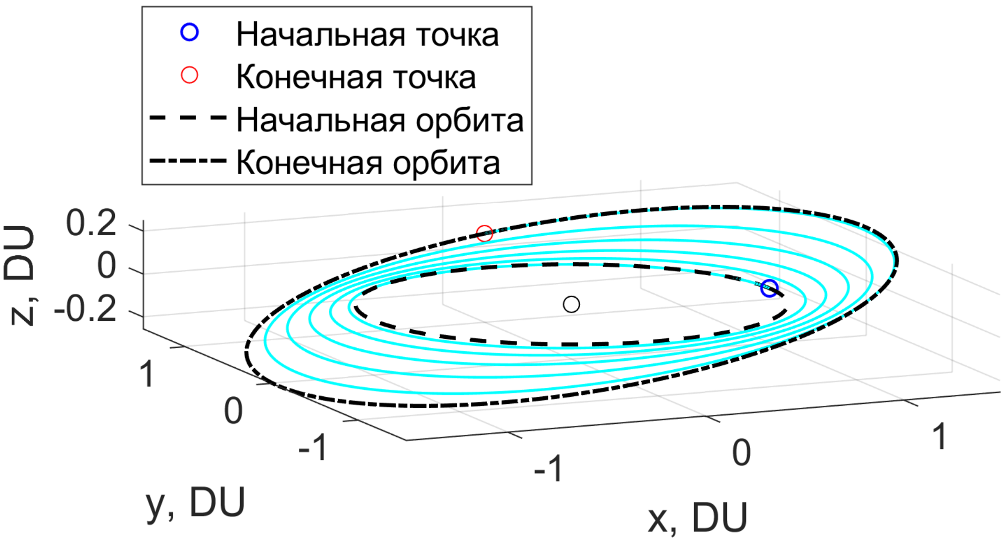


Рис. 8. Перелёт с наклонением 10˚, восходящим узлом 30˚ и радиусом конечной орбиты 1.5.

Плоское неканоническое R-преобразование эксцентриситета и долготы перицентра конечной орбиты

Второй важной проблемой является контроль над эксцентриситетом e и долготой перицентра ϖ конечной орбиты. Для исследования того, как эксцентриситет траекторий меняется под действием плоского неканонического R-преобразования, зададим матрицу масштабирования вида

$$R_e = \begin{pmatrix} \lambda(1-\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(1+\varepsilon)}{\sqrt{\lambda(1-\varepsilon^2)}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda(1-\varepsilon^2)} \end{pmatrix}, \tag{67}$$

где λ имеет смысл большой полуоси a (новое обозначение введено, чтобы отличать параметр преобразования от физической величины), а ε имеет смысл e_x (x-компонента векторного эксцентриситета). Диагональные элементы обнулены в силу их малого влияния на конечную орбиту. Напомним, что такое преобразование сохраняет компланарность траектории согласно (50). Ещё раз воспользуемся преобразованием матрицами подобия и изменим долготу перицентра с помощью следующей матрицы:

$$R_\omega = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Угол поворота χ нелинейным образом задаёт долготу перицентра и требует отдельной аппроксимации. Получившееся преобразование записывается следующим образом:

$$R_{e\omega} = R_\omega^{-1} R_e R_\omega. \tag{69}$$

Теперь будем исследовать, как параметр e_x конечной орбиты зависит от λ и ε. Для этого построим соответствующий набор данных, где будем варьировать эти параметры. Рис. 9 демонстрирует изолинии e_x при $\kappa = 1.4$. Все остальные контурные графики для e_x имеют схожую структуру, поэтому здесь не приводятся. Оказалось, что существует два ортогональных направления для любых κ: направление нулевого изменения эксцентриситета и направление максимального изменения. Второе направление определяется следующим углом:

$$\beta = 0.642; \tag{70}$$

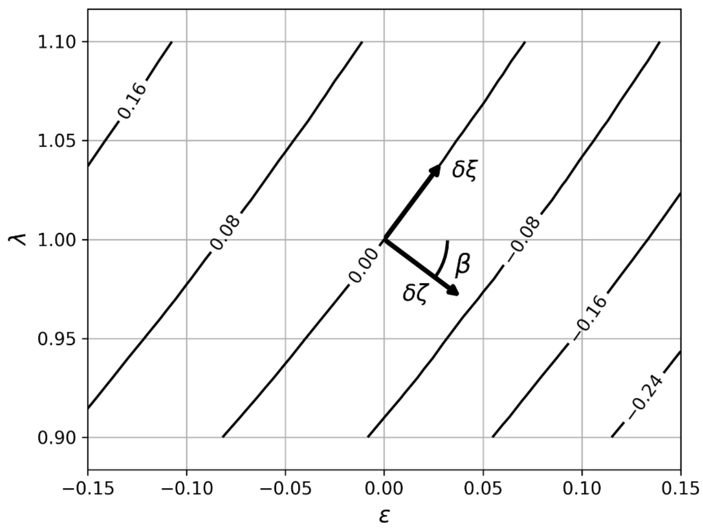


Рис. 9. Изолинии эксцентриситета с начальным приближением в виде плоского перелёта между круговыми орбитами с κ=1.4

Параметр β является усреднённым по всем соотношениям радиусов κ. Исследуем два получившихся направления. Для этого введём новые переменные следующим образом:

$$\zeta = -\sin(\beta) + \delta\zeta, \tag{71}$$

$$\xi = \cos(\beta) + \delta\xi. \tag{72}$$

Здесь $\delta\zeta, \delta\xi$ – это вариации вдоль указанных направлений. Тогда λ и ε выражаются из новых переменных так:

$$\varepsilon = \zeta\cos(\beta) + \xi\sin(\beta), \tag{73}$$

$$\lambda = -\zeta\sin(\beta) + \xi\cos(\beta). \tag{74}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что при нулевых $\delta\zeta, \delta\xi$ матрица (67) будет единичной. В силу того, что вдоль одного направления эксцентриситет не меняется, сосредоточимся на другом параметре:

$$C_e\delta\zeta + e = 0 \tag{75}$$

$$\delta\xi = 0. \tag{76}$$

Создадим очередной вспомогательный набор данных и изучим, как ведёт себя этот параметр. На рис. 10 представлена зависимость параметра C_e от ω и κ.

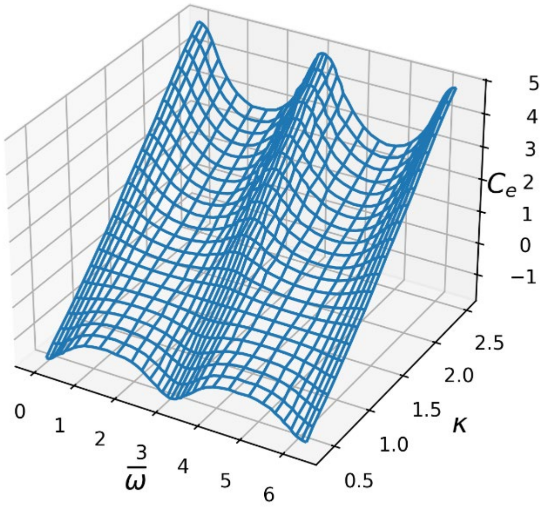


Рис. 10. Зависимость коэффициента C_e от ϖ и κ

Эта поверхность аппроксимируется следующими выражениями:

$$C_e(\kappa,\varpi) = C_0^e + \sin(\varpi)\left(C_1^e \sin(\varpi) + C_2^e \sin(3\varpi)\right),\ \sigma = 4.9E-2, \tag{77}$$

$$C_0^e(\kappa) = (\kappa-1)3.272585,\ \sigma = 8.4E-2, \tag{78}$$

$$C_1^e(\kappa) = -(\kappa-1)1.931513,\ \sigma = 4.9E-2, \tag{79}$$

$$C_2^e(\kappa) = -(\kappa-1)0.4543650,\ \sigma = 2.3E-2. \tag{80}$$

Параметр χ аппроксимируется формулой

$$\chi = \frac{\varpi}{2} + \frac{1}{6}\sin(2\varpi) + \frac{1}{32}\sin(4\varpi),\ \sigma = 2.1E-2. \tag{81}$$

Эта формула также получена с помощью символьной регрессии, но её коэффициенты удалось привести к виду простых дробей. Используем эту матрицу, чтобы записать плоское неканоническое R-преобразование:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}_0' = \mathbf{r}_0,\\
&\mathbf{v}_0' = \mathbf{v}_0,\\
&\mathbf{p}_r'(t_0) = R_{e\varpi}^{-T}(\kappa,e,\varpi)\mathbf{p}_r(t_0),\\
&\mathbf{p}_v'(t_0) = R_{e\varpi}^{-T}(\kappa,e,\varpi)\mathbf{p}_v(t_0).
\end{aligned} \tag{82}$$

Преобразование (82) позволяет контролировать эксцентриситет и долготу перицентра конечной орбиты без решения соответствующей краевой задачи, используя только решение задачи компланарного перелёта между круговыми орбитами. Как и в прошлый раз, отрицательной стороной является изменение радиуса конечной орбиты, что приходится компенсировать за счёт выбора другого соотношения радиусов до преобразования. Пример перелёта после преобразования представлен на рис. 11. Для получения этой траектории использовался плоский перелёт с κ=1.55, $\delta\zeta = -0.1121$ и угловой дальностью 5 витков.

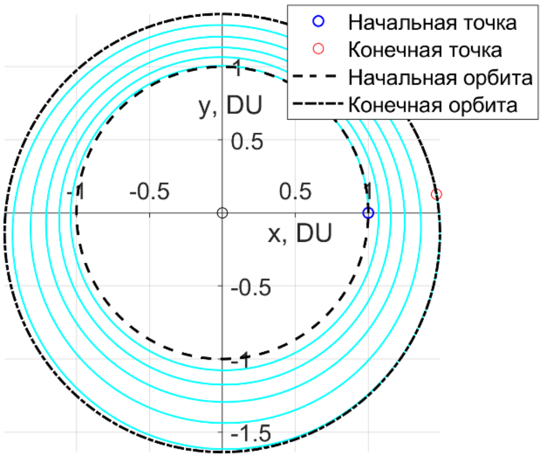


Рис. 11. Перелёт с эксцентриситетом конечной орбиты 0.1, долготой перицентра 90° и большой полуосью конечной орбиты 1.5.

Стоит подчеркнуть, что преобразование (66) и преобразование (82) автоматически учитывают переход от случая с $\kappa > 1$ к случаю $\kappa < 1$. Дополнительные настройки долготы перицентра и восходящего узла не требуются. Также стоит заметить, что эти преобразования при $\kappa = 1$ вырождаются, поэтому в этой точке R-преобразования следует доопределять единичной матрицей. Чтобы всё-таки получить траекторию с $\kappa = 1$, стоит взять другое начальное приближение и с помощью эффекта изменения радиуса добиться нужного результата.

Получение начальных приближений для межпланетных перелётов

Чтобы успешно применить предлагаемые аффинные преобразования для получения начальных приближений энергетически оптимальных траекторий, надо учитывать эффект сокращения большой полуоси конечной орбиты. Этот эффект может быть аппроксимирован с помощью символьной регрессии, но более эффективным подходом оказалось сгенерировать сразу всё множество перелётов с целевыми параметрами, а потом отобрать подходящие. Целевыми параметрами являются:

1. Наклонение конечной орбиты *i*,
2. Долгота восходящего узла конечной орбиты Ω,
3. Эксцентриситет конечной орбиты *e*,
4. Долгота перицентра конечной орбиты ϖ,
5. Большая полуось конечной орбиты a,
6. Угловая дальность перелёта φ.

Во-первых, необходимо иметь многообразие компланарных энергетически оптимальных перелётов между круговыми орбитами виртуальных планет с различными значениями соотношения радиусов орбит κ. Во-вторых, нужно преобразовать это многообразие в многообразие орбит с нужными целевыми параметрами. В-третьих, необходимо отобрать из получившегося многообразия траекторию с нужной величиной большой полуоси орбиты.

Для первого шага подойдёт как сплайн численно посчитанного многообразие решений, так и аппроксимация символьной регрессией [32]. Второй шаг потребует более детального рассмотрения.

Разобьём второй шаг на четыре преобразования сопряжённых переменных. Первое преобразование – это одностороннее каноническое преобразование $R_{\rightarrow}$, для которого необходимо, чтобы в многообразии решений были начальные положение и скорость, такие как в (18). В этом преобразовании будем использовать положение и скорость Земли в безразмерных переменных:

$$R_1 = R_{\rightarrow}\left(\mathbf{r}_З\left(t_0\right), \mathbf{v}_З\left(t_0\right)\right). \tag{83}$$

Конечная орбита после этого преобразования не будет круговой, что неудобно для применения других преобразований. Чтобы упростить задачу, необходимо округлить конечную орбиту:

$$R_2 = R_{e\omega}\left(\kappa_1, e_1, \bar{\omega}_1 + \pi - \theta_0\right),\ \kappa_1 \approx a_1. \tag{84}$$

Здесь $e_1, \bar{\omega}_1, a_1$ – параметры конечной орбиты после первого преобразования, θ_0 – истинная аномалия Земли в начальной точке. После этого преобразования нужно настроить долготу перицентра и эксцентриситет

$$R_3 = R_{e\omega}\left(\kappa_2, e, \bar{\omega} - \theta_0\right),\ \kappa_2 \approx a_2, \tag{85}$$

где a_2 – большая полуось конечной орбиты после второго преобразования. После этого преобразования требуется настроить наклонение и восходящий узел:

$$R_4 = R_{i\Omega}\left(\kappa_2, i, \Omega - \theta_0\right),\ \kappa_2 \approx a_2. \tag{86}$$

Стоит обратить внимание, что после третьего преобразования эксцентриситет может существенно поменяться, что нелинейно повлияет на результат. Чтобы сгладить этот эффект, используется значение большой полуоси после второго преобразования.

На последнем этапе получается многообразие решений с различными большими полуосями, из которых необходимо отобрать такое решение, в котором будет целевое значение большой полуоси. Результаты массовых расчётов с указанной цепочкой преобразований представлены в табл. 2. И для Марса, и для Венеры посчитано 630 тыс. начальных приближений, из которых отобрано 12 тыс. с нужным значением большой полуоси. Полный расчёт этого множества траекторий занимает полторы минуты на персональном компьютере средней мощности.

Таблица 2

Среднеквадратичные ошибки задания начального приближения для перелётов к Марсу и Венере с помощью предложенной методики для диапазона дат старта 2026.01.01 – 2026.12.01

Целевой параметр	Марс	Венера
e	0.022	0.013
i	0.21°	1.1°
Ω	3.6°	2.4°
ϖ	16.0°	39.1°
φ	79.2°	29.5°

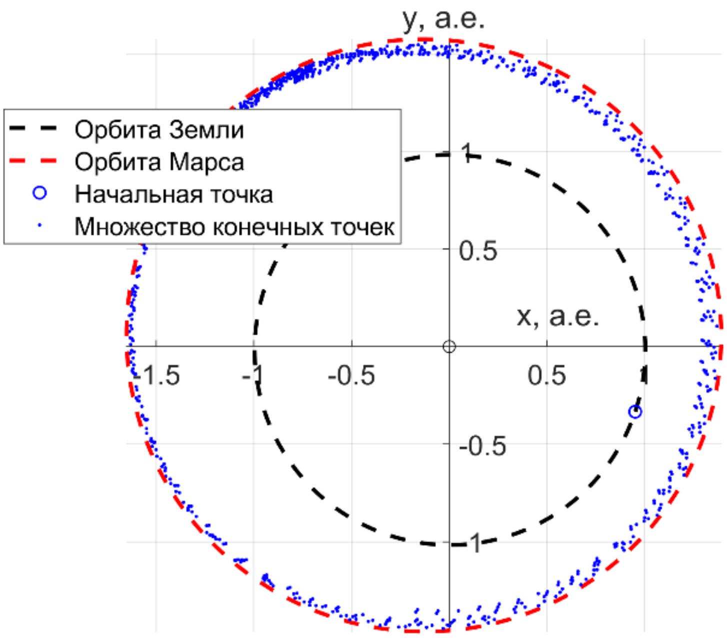


Рис. 12. Множество конечных точек перелётов на орбиту Марса, полученное с помощью предлагаемого алгоритма. Дата старта 01.09.2026

На рис. 12 представлено полученное многообразие конечных точек для перелётов к орбите Марса. Стоит заметить, что реальное положение Марса исключается из рассмотрения из-за отсутствия репрезентативности. Используя полученное многообразие, можно найти такие точки (и времена перелёта), в которых невязка положения и скорости относительно Марса будут достаточно небольшими, чтобы эту траекторию потом использовать в качестве начального приближения.

Таблица 2 демонстрирует, что ошибка задания некоторых целевых параметров (эксцентриситет, наклонение, долгота восходящего узла) приемлемая, а ошибка других параметров (долгота перицентра, угловая дальность) невелика. Возникает вопрос о характере и причинах этих ошибок. Для случая перелёта к Марсу на рис. 13-17 продемонстрировано периодическое поведение этих ошибок в зависимости от угловой дальности.

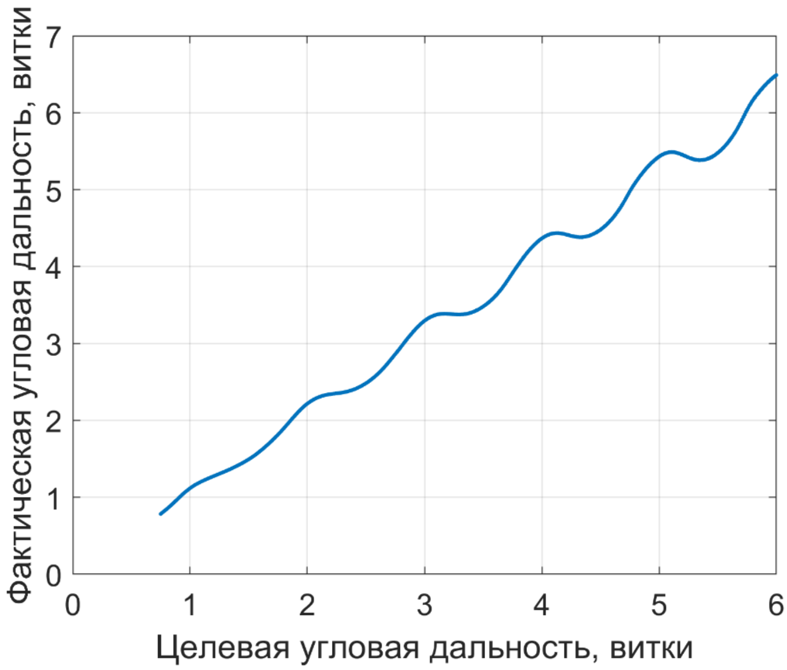


Рис. 13. Зависимость фактической угловой дальности после цепочки преобразований в зависимости от целевой угловой дальности

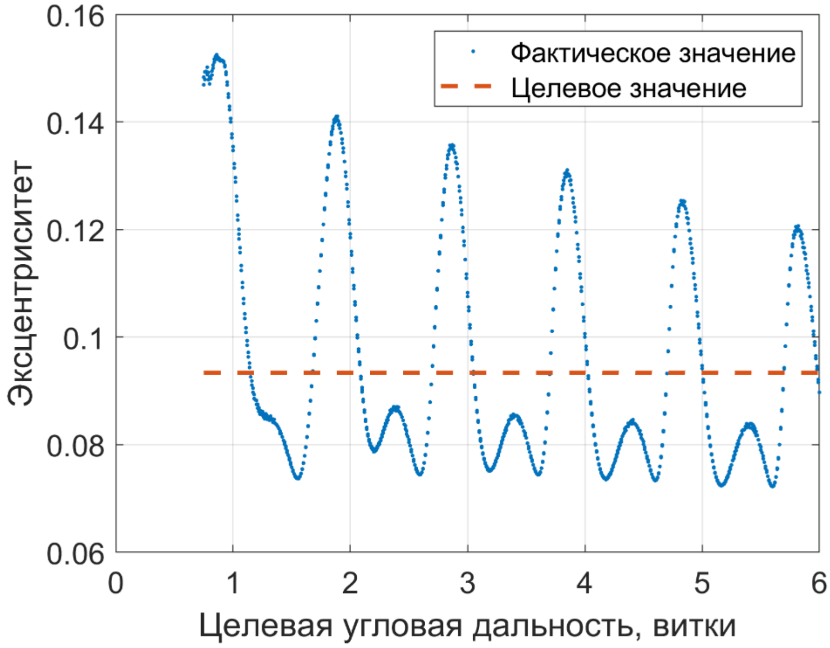


Рис. 14. Сравнение фактического эксцентриситета после цепочки преобразований и целевого эксцентриситета в зависимости от целевой угловой дальности

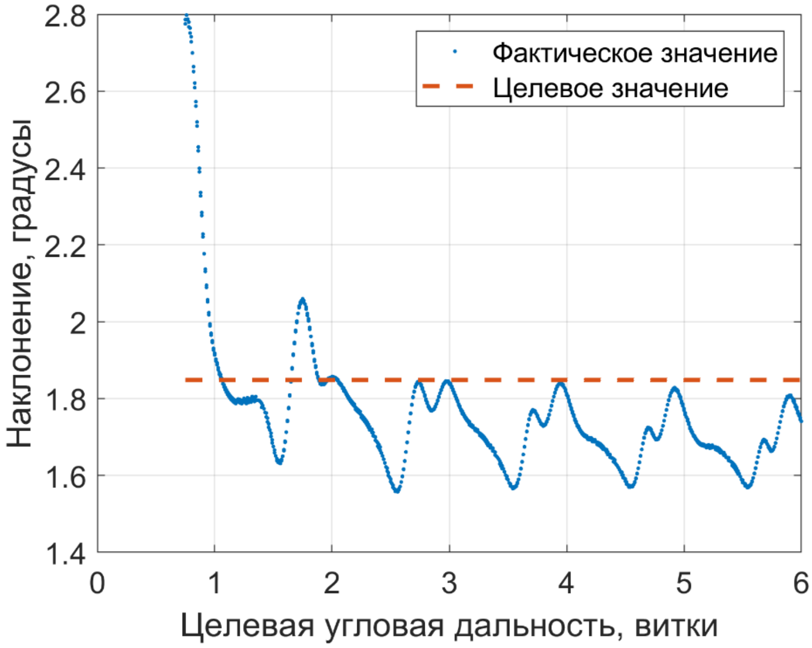


Рис. 15. Сравнение фактического наклонения после цепочки преобразований и целевого наклонения в зависимости от целевой угловой дальности

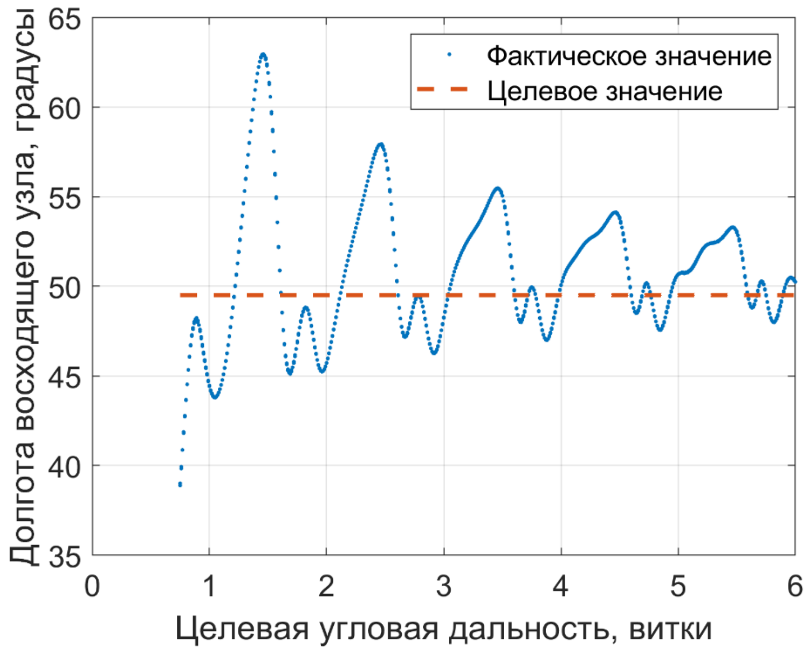


Рис. 16. Сравнение фактической долготы восходящего узла после цепочки преобразований и целевого значения в зависимости от целевой угловой дальности

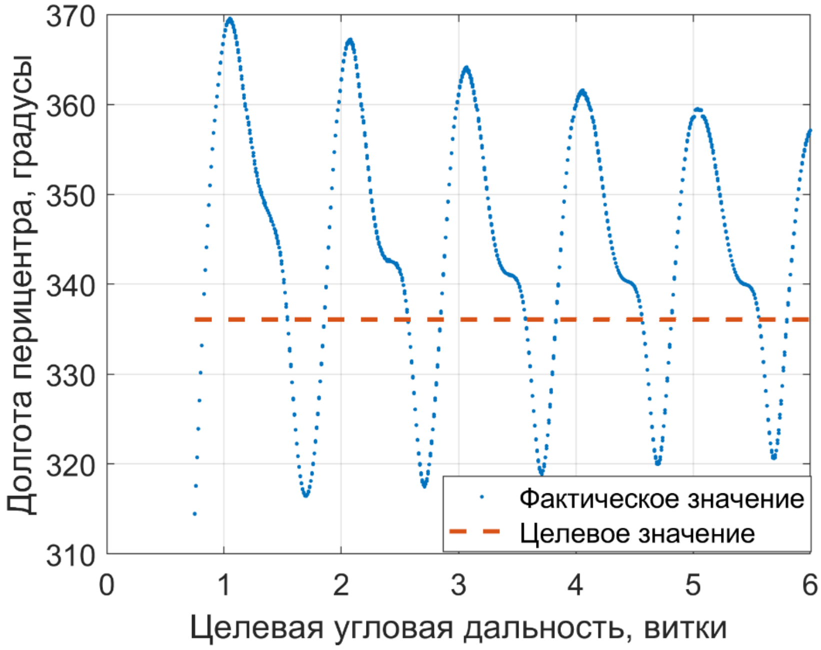


Рис. 17. Сравнение фактической долготы перицентра после цепочки преобразований и целевого значения в зависимости от целевой угловой дальности

Периодический характер ошибок задания целевых параметров связан с тем, что во время аппроксимаций не учитывались два важных фактора: нелинейное влияние одних R-преобразований на другие, а также зависимость результата
R-преобразования от угловой дальности. Несмотря на то, что все эти нелинейные зависимости можно было бы учесть с помощью символьной регрессии, это привело бы к переусложнению символьных аппроксимаций вплоть до их полной неприменимости для реальных задач.

На практике существует два хороших решения этой проблемы. Во-первых, можно добавить вариации целевых параметров при обсчёте многообразия решений. Например, рассматривать не какую-то фиксированную величину долготу перицентра, а рассмотреть диапазон долгот, из которых по аналогии с большой полуосью отбирать подходящие. Второй подход заключается в оптимизации параметров R-преобразования после получения начального приближения.

Стоит заметить, что для траекторий с другим функционалом R-преобразования также применимы. В особенности удобно использовать двустороннее R-преобразование. Рассмотрим линейный функционал, который соответствует ПСИ-модели:

$$J_{ПСИ} = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \mathbf{a}(t) \right\| dt \to \min. \tag{87}$$

На рис. 18 и рис. 19 показано получение начального приближения для траектории к Венере с использованием ПСИ-модели из другого оптимального решения с этой же моделью.

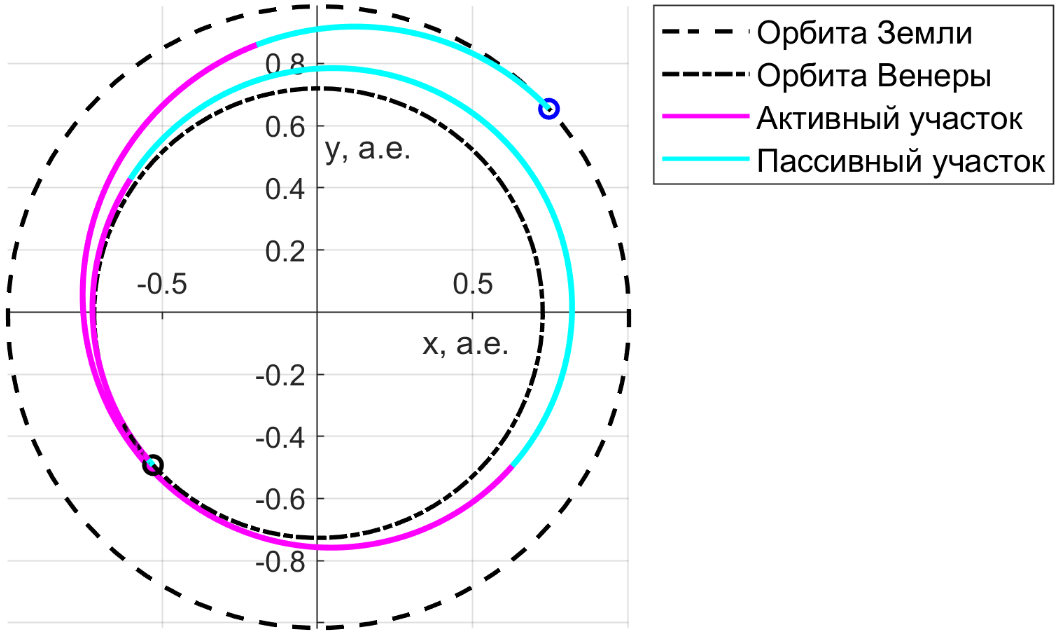


Рис. 18. Оптимальная по топливу траектория перелёта Земля-Венера с датой старта 01.11.2032 и длительностью 390.8 суток. Красным кружком показано положение Венеры

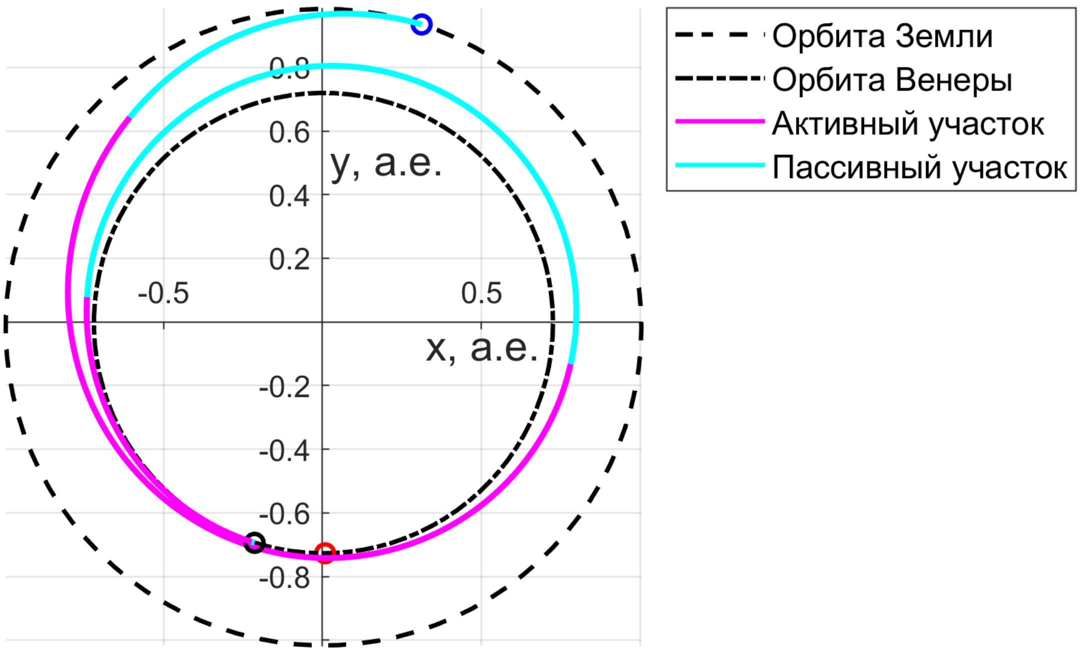


Рис. 19. Начальное приближение для даты старта 01.01.2028, полученное двусторонним R-преобразованием из решения для 01.11.2032. Чёрным кружком показано положение КА, а красным кружком – положение Венеры

Заключение

В работе представлена методика использования аффинных преобразований для получения некомпланарных энергетически оптимальных перелётов между эллиптическими орбитами. Показано существование таких аффинных преобразований, которые сохраняют некоторые первые интегралы в процессе преобразования плоской круговой траектории. Предложенные аффинные преобразования были назван R-преобразованиями.

Методика позволяет получить начальное приближение для межпланетных перелётов без фактического решения каких-либо краевых задач и без использования метода продолжения. Также этот метод применим для оптимальных по топливу перелётов, что потенциально ускоряет планирование межпланетных миссий.

Список литературы

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 678 с.
2. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Москва: Вычислительный центр АН СССР, 1968. 108 с.
3. Константинов М.С. и др. Механика космического полета : Учебник для втузов / ред. Мишин В.П. Москва: Машиностроение, 1989. 408 с.
4. Morante D., Sanjurjo Rivo M., Soler M. A Survey on Low-Thrust Trajectory Optimization Approaches // Aerospace. 2021. Vol. 8, № 3. P. 88.
5. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. 3-е изд. Москва: Наука, 1976. 392 с.
6. Petukhov V.G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004. Vol. 42, № 3. P. 250–268.
7. Petukhov V.G. Optimal multi-orbit trajectories for inserting a low-thrust spacecraft to a high elliptic orbit // Cosmic Res. 2009. Vol. 47, № 3. P. 243–250.
8. Petukhov V.G. Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2012. Vol. 50, № 3. P. 249–261.
9. Taheri E., Kolmanovsky I., Atkins E. Enhanced smoothing technique for indirect optimization of minimum-fuel low-thrust trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, № 11. P. 2500–2511.
10. Taheri E. et al. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 2 // Acta Astronautica. 2020. Vol. 172. P. 166–179.
11. Taheri E. et al. A novel approach for optimal trajectory design with multiple operation modes of propulsion system, part 1 // Acta Astronautica. 2020. Vol. 172. P. 151–165.
12. Taheri E., Junkins J.L. Generic smoothing for optimal bang-off-bang spacecraft maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2018. Vol. 41, № 11. P. 2470–2475.

13. Jiang F., Baoyin H., Li J. Practical Techniques for Low-Thrust Trajectory Optimization with Homotopic Approach // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35, № 1. P. 245–258.
14. Mazzini L., Cerreto M. Theory and Applications of Optimal Finite Thrust Orbital Transfers // Modeling and Optimization in Space Engineering / ed. Fasano G., Pintér J.D. Cham: Springer International Publishing, 2019. Vol. 144. P. 233–269.
15. Junkins J.L., Taheri E. Exploration of alternative state vector choices for low-thrust trajectory optimization // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2019. Vol. 42, № 1. P. 47–64.
16. Petropoulos A., Russell R. Low-Thrust Transfers Using Primer Vector Theory and a Second-Order Penalty Method // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Honolulu, Hawaii: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
17. Kechichian J.A. Optimal Low-Earth-Orbit-Geostationary-Earth-Orbit Intermediate Acceleration Orbit Transfer // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1997. Vol. 20, № 4. P. 803–811.
18. Geffroy S., Epenoy R. Optimal low-thrust transfers with constraints—generalization of averaging techniques // Acta Astronautica. 1997. Vol. 41, № 3. P. 133–149.
19. Krier G., Mostaza D. Fast and robust optimization of high fidelity continuous thrust transfer orbits with constraints // Proceedings of the 25th International Symposium on Space Flight Dynamics, Munich, Germany. 2015. P. 19–23.
20. Meng Y., Zhang H., Gao Y. Low-Thrust Minimum-Fuel Trajectory Optimization Using Multiple Shooting Augmented by Analytical Derivatives // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2019. Vol. 42, № 3. P. 662–677.
21. Pontani M., Conway B.A. Particle Swarm Optimization Applied to Space Trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33, № 5. P. 1429–1441.
22. Azimov D.M. Analytical solutions for extremal space trajectories. Oxford: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2018.
23. Prussing J.E., Sandrik S.L. Second-Order Necessary Conditions and Sufficient Conditions Applied to Continuous-Thrust Trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2005. Vol. 28, № 4. P. 812–816.
24. Lee S. et al. Evolutionary Computing for Low Thrust Navigation // Space 2005. Long Beach, California: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
25. Russell R.P. Primer Vector Theory Applied to Global Low-Thrust Trade Studies // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2007. Vol. 30, № 2. P. 460–472.
26. Wang Y., Hou X., Topputo F. Thrust continuation of time-optimal orbital transfers with soft terminal conditions // Astrophys Space Sci. 2024. Vol. 369, № 4. P. 39.

27. Zhang J., Xiao Q., Li L. Solution space exploration of low-thrust minimum-time trajectory optimization by combining two homotopies // Automatica. 2023. Vol. 148. P. 110798.
28. Pan B., Pan X., Lu P. Finding Best Solution in Low-Thrust Trajectory Optimization by Two-Phase Homotopy // Journal of Spacecraft and Rockets. 2019. Vol. 56, № 1. P. 283–291.
29. Das Chagas Carvalho F., Da Silva Fernandes S., De Moraes R.V. A numerical study for optimal low-thrust limited power transfers between coplanar orbits with small eccentricities // Comp. Appl. Math. 2016. Vol. 35, № 3. P. 907–936.
30. Powers W.F., Tapley B.D. Canonical transformation applications to optimal trajectory analysis. // AIAA Journal. 1969. Vol. 7, № 3. P. 394–399.
31. Cranmer M. Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl. 2023.
32. Корнеев К.Р. Использование символьной регрессии для аппроксимации решений задачи оптимального межпланетного перелёта с малой тягой // 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Москва, 2024. С. 247–248.

Оглавление

Введение 3
Задача оптимального управления с малой тягой 5
Необходимые условия оптимальности 7
Первые интегралы аффинных преобразований 8
R-преобразование и простой поворот 13
Пространственное неканоническое R-преобразование наклонения и восходящего узла конечной орбиты 17
Плоское неканоническое R-преобразование эксцентриситета и долготы перицентра конечной орбиты 20
Получение начальных приближений для межпланетных перелётов 24
Заключение 31
Список литературы 31