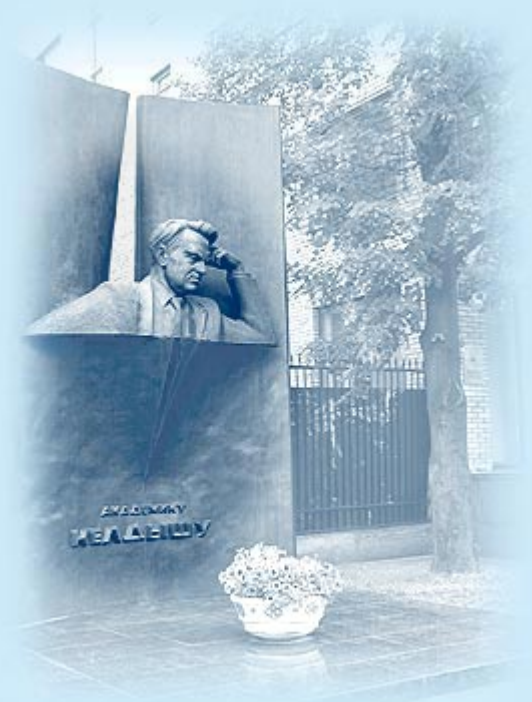




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 35 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П.В. Соломенцева

Численное моделирование
нагружения элементов
конструкции
электромагнитного
ускорителя масс методом
множителей Лагранжа с
независимой контактной
границей

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Соломенцева П.В. Численное моделирование нагружения элементов конструкции электромагнитного ускорителя масс методом множителей Лагранжа с независимой контактной границей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 35. 18 с. EDN: [EENXEZ](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-35)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-35>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук**

П.В. Соломенцева

**Численное моделирование нагружения элементов
конструкции электромагнитного ускорителя масс
методом множителей Лагранжа с независимой
контактной границей**

Москва — 2025

Соломенцева П.В.

Численное моделирование нагружения элементов конструкции электромагнитного ускорителя масс методом множителей Лагранжа с независимой контактной границей

Рассмотрено решение задачи мультиконтактного взаимодействия элементов конструкции внутри канала электромагнитного ускорителя масс рельсового типа. Для аппроксимации уравнений задачи теории упругости выбран метод конечных элементов, для учета контактных условий — метод множителей Лагранжа с независимой контактной границей. Проведенные расчеты позволили найти контактные границы между элементами конструкций, определить положения концентраторов напряжений и могут быть использованы для анализа прочности и надежности конструкций.

Ключевые слова: контактная задача, метод конечных элементов, метод множителей Лагранжа, независимая контактная граница, электромагнитный ускоритель.

Polina Vladimirovna Solomentseva

Numerical modeling of the electromagnetic accelerator structural elements loading using the Lagrange multiplier method with a detached contact boundary

The solution of the multicontact interaction problem of structural elements inside the barrel of a railgun-type electromagnetic mass accelerator is considered. The finite element method is chosen for approximating the equations of elasticity theory, while the Lagrange multiplier method with a detached contact boundary is used to account for contact conditions. The performed calculations made it possible to determine the contact boundaries between structural elements, identify stress concentration zones and provide data for strength and reliability analysis of the structures.

Key words: contact problem, finite element method, Lagrange multiplier, detached boundary, railgun.

1. Введение

Контактные задачи являются важной и актуальной областью исследований в механике, физике, инженерных науках и многих других прикладных дисциплинах. Особенно значимы они в тех ситуациях, где физические тела взаимодействуют под действием больших нагрузок, скоростей или температур — как, например, в случае работы электромагнитного ускорителя масс рельсового типа.

Электромагнитный ускоритель масс представляет собой устройство, в котором метаемое тело (якорь или снаряд) разгоняется за счёт электромагнитных сил, возникающих между токопроводящими рельсами и самим телом. В процессе ускорения происходит интенсивное контактное взаимодействие между телом и рельсами, сопровождаемое высокими токами, механическими нагрузками и тепловыми эффектами. Это взаимодействие может приводить к существенным напряжениям, деформациям и даже разрушению конструктивных элементов ускорителя — прежде всего канала с рельсами.

Для оценки работоспособности таких систем важно проводить моделирование контактного взаимодействия с учётом всех физико-механических факторов. Моделирование процессов в контактных зонах, возникающих при работе электромагнитного ускорителя масс, представляют собой сложную задачу с выраженной нелинейностью, где дополнительно требуется точное определение области контакта и возникающих контактных сил. Одним из широко применяемых классов методов для решения подобной задачи являются mortar-методы [1–4], на основе которых были разработаны более точные и устойчивые модификации [5, 6]. Также используются методы, основанные на декомпозиции области [7]. В настоящем исследовании реализован альтернативный подход — метод множителей Лагранжа с использованием независимой контактной границы, обладающий рядом преимуществ по сравнению с указанными методами [8].

Настоящая работа посвящена моделированию контактного взаимодействия между метаемым телом и токопроводящими рельсами в электромагнитном ускорителе масс. В качестве метода для учета контактного взаимодействия используется метод множителей Лагранжа с независимой контактной границей. Результаты моделирования позволяют выявить участки, в которых сосредотачиваются наибольшие напряжения, что может быть использовано при конструктивной оптимизации устройства. По данной теме представлены работы [7, 9–13].

2. Задача о нагружении канала электромагнитного ускорителя масс

Электромагнитный ускоритель масс (ЭМУ) используется для разгона тела (якоря) под действием силы Ампера [9]. Такие устройства применяют для

исследования поведения твердого тела при высоких скоростях, а также как перспективный механизм разгона тел, например, при осуществлении космических полетов [14]. Принципиальная схема устройства представлена на рисунке 1.

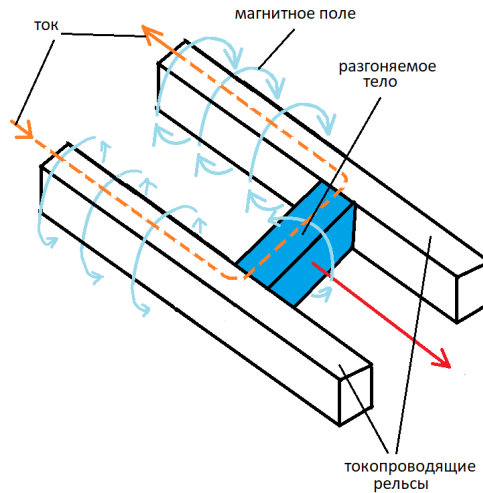


Рис. 1. Базовая схема ЭМУ

Токопроводящие рельсы, вдоль которых разгоняется якорь, помещают в канал, задача стенок которого обеспечить жесткость и прочность конструкции. Канал, как правило, изготавливают из композитных материалов. При этом в силу высокой стоимости натурального эксперимента особенно востребованным является консервативный расчет устройства, при котором принимают максимальные значения возникающих нагрузок. Наиболее интенсивные нагрузки при работе испытывают стенки канала ЭМУ, который, как правило, состоит из токопроводящих рельсов, изоляторов и силовых оболочек. Для оценки прочности и работоспособности ЭМУ на стадии проектирования необходимо исследование напряженно-деформированного состояния канала.

Рассмотрим поперечное сечение канала ЭМУ (рис. 2). Канал представляет собой цилиндр, состоящий из двух слоев. На внешнем слое намотана силовая оболочка, состоящая из полимерных композиционных материалов. Во внутреннем слое находятся токопроводящие рельсы и изолятор, не проводящий ток.

При работе электромагнитного ускорителя возникают высокоинтенсивные динамические нагрузки, действующие на элементы канала. При прохождении импульса электрического тока по рельсам возникает сила $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$. Вертикальная компонента расталкивает рельсы, а горизонтальная — притягивает. Под действием этих сил рельс вжимается в изолятор, деформируя его и следующую за ним силовую оболочку, возникает контактное взаимодействие между телами. Поскольку в контакт вступают не два тела, а больше, такие задачи называют мультиконтактными.

Элементы конструкции ЭМУ состоят, как правило, из разных материалов с разными физико-механическими свойствами. Так, например, материал для

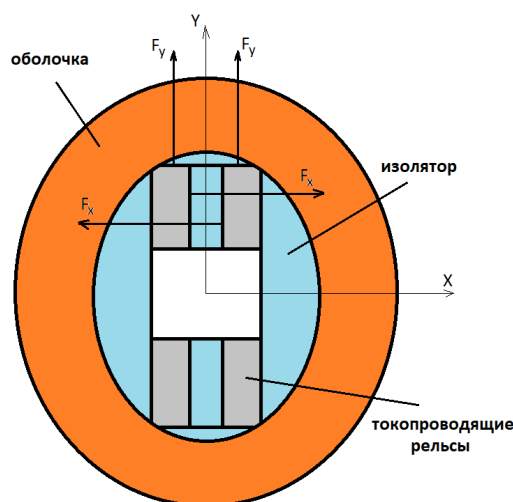


Рис. 2. Поперечное сечение канала электромагнитного ускорителя

токопроводящих рельсов, в качестве которого часто используется высоколегированная сталь или медь, можно считать изотропным. Однако материалы изоляторов и силовой оболочки таковыми считать уже нельзя [9]. Изоляторы могут быть изготовлены из полимерных композиционных материалов (ПКМ), не проводящих ток. Силовая оболочка также может быть изготовлена из волокнистого ПКМ, но полученного методом непрерывной намотки. ПКМ обладают свойствами анизотропии, причем ярко выраженного характера. Есть исследования (например, [15, 16]), показывающие, что свойства волокнистых ПКМ с регулярной структурой значительно отличаются по направлению волокон и в перпендикулярном им направлении, а значит, такой материал необходимо считать ортотропным. В изоляторе направления ортотропии одинаковы в каждой точке тела. Силовая оболочка электромагнитного ускорителя, изготовленная с помощью метода непрерывной намотки, имеет различные оси ортотропии в каждой точке тела.

3. Определяющие соотношения математической модели

В данной работе рассматриваются деформирование твердых тел в рамках исключительно теории упругости. Математическая модель контактной задачи состоит из двух составных частей: первая часть уравнений и соотношений отвечает за упругую деформацию тел, вторая — за их контактное взаимодействие.

3.1. Модель упругого деформирования тел

В линейной теории упругости предполагается, что перемещения и их градиенты настолько малы, что нет различия между их лагранжевым и эйлеровым представлениями [17, 18].

Задача теории упругости может быть представлена в трех постановках: в перемещениях, где неизвестными величинами являются перемещения, в напряжениях, где аналогично неизвестными будут напряжения, и в смешанном формате. В данной работе используется первая постановка, а именно решается задача теории упругости в перемещениях.

3.1.1. Фундаментальные соотношения теории упругости

Задача теории упругости состоит из уравнений равновесия, соотношений Коши и обобщенного закона Гука [18, 19]. Рассмотрим их подробнее.

Уравнения равновесия произвольного объема сплошной среды под действием внутренних и внешних сил имеют вид (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющемуся индексу, индекс меняется от 1 до 3) [17]

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0, \quad (1)$$

где σ — тензор напряжений, обладающий свойствами симметрии, b — массовые силы, воздействующие на тело, ρ — плотность материала.

Деформации сплошной среды определяются соотношениями Коши, которые в предположении малости градиентов перемещений записывается в виде [17]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Третьим базовым соотношением теории упругости является обобщенный закон Гука, который выражает связь между тензорами напряжений и деформаций [17]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

где C_{ijkl} — тензор упругих констант, который зависит от свойств конкретного материала.

Задание граничных условий в общем случае.

Граничные условия для задачи теории упругости могут быть заданы следующим образом.

1) Граничные условия первого рода (кинематические)

$$\mathbf{u}(M) \cdot \mathbf{v}(M) = u_M,$$

означающие, что в точке M перемещение в направлении $\mathbf{v}$ равно значению u_M . Часто граничные условия первого рода используются для закрепления тела, так, например, условие $u_x(M) = 0$ будет означать, что тело в точке M зафиксировано по горизонтали.

2) Граничные условия второго рода (силовые)

$$\sigma^{ij} \cdot n_j = F^i,$$

где n_j — направляющие косинусы между нормалью к поверхности S_σ в данной точке и осью координат x_j , F^i — проекции поверхностных сил на ось x_i в рассматриваемой точке.

3) Смешанная комбинация первых двух типов условий.

3.2. Моделирование контактного взаимодействия

Рассмотрим моделирование контактного взаимодействия на примере двух тел B_1 и B_2 , вошедших в контакт под воздействием приложенных нагрузок P_{B_1} и P_{B_2} (рис. 3). Обозначим контактную поверхность Γ_C . В рамках моделирования контактного взаимодействия на Γ_C требуется выполнение двух базовых условий [20]:

1) Тела не должны проникать друг в друга. Чтобы ввести это условие в нашу математическую модель, обозначим g зазор между телами B_1 и B_2 и потребуем его неотрицательности [20]:

$$g^{(1)} = \min_{\mathbf{x}^{(2)} \in \Gamma^{(2)}} (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}) \cdot \mathbf{n}^{(1)} \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(1)} \in \Gamma^{(1)}, \quad (4)$$

где $\Gamma^{(1)}$ — поверхность тела B_1 , обращенная к B_2 , $\Gamma^{(2)}$ — поверхность тела B_2 , обращенная к B_1 , $\mathbf{n}^{(1)}$ — внешняя нормаль в точке $\mathbf{x}^{(1)}$ к поверхности контакта для тела B_1 , $g^{(1)}$ — зазор между телом B_2 и точкой $\mathbf{x}^{(1)}$. Если хотя бы для одной точки тела B_1 зазор равен нулю, то тела считаются находящимися в контакте.

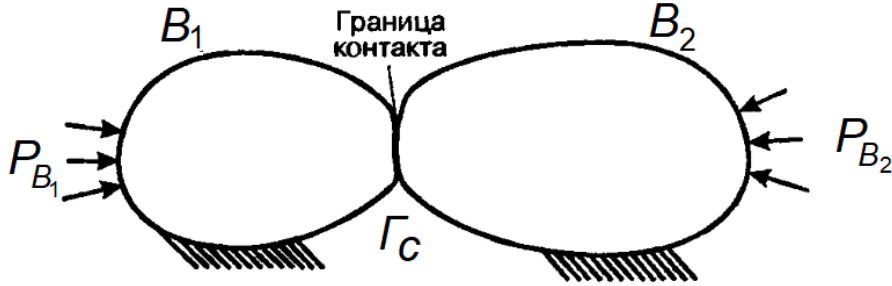


Рис. 3. Механический контакт двух тел

Для учета первого базового условия контактного взаимодействия на границе контакта Γ_C нормальные компоненты перемещений должны быть равны:

$$u_n^{(B_1)}|_{\Gamma_C} = u_n^{(B_2)}|_{\Gamma_C}. \quad (5)$$

2) Условие равного силового воздействия тел вдоль Γ_C друг на друга. Для учета второго базового условия контактного взаимодействия вдоль Γ_C нормальные компоненты напряжений должны быть равны (рассматривается случай без трения):

$$\sigma_n^{(B_1)}|_{\Gamma_C} = \sigma_n^{(B_2)}|_{\Gamma_C}. \quad (6)$$

4. Численный метод

В качестве базового численного метода выбран метод конечных элементов на треугольных элементах первого и второго порядков [21, 22]. Согласно этому методу представим численное решение $\bar{u}$ в виде разложения по базису

конечномерного пространства: $\bar{u} = \sum_{i=1}^n N_i u_i$.

Для получения определяющей системы линейных уравнений использован метод минимизации потенциальной энергии, согласно которому исходная задача может быть представлена в интегральной форме через функционал F , зависящий от искомых компонент перемещений. С учетом граничных условий он будет иметь следующий вид:

$$F = \Pi - A_1 - A_2 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_V Q u dV - \int_S P u dS, \quad (7)$$

где A_1 — работа объемных сил Q , A_2 — работа поверхностных сил P , Π — потенциальная энергия деформации тел, u — вектор перемещений.

Согласно методу минимизации потенциальной энергии приравняем первую вариацию функционала (7) к нулю и получим

$$\delta F = \delta \Pi - \delta A_1 - \delta A_2 = 0. \quad (8)$$

Тогда с учетом закона Гука и соотношений Коши в матричной форме (8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta F &= \delta \left(\frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T D \varepsilon dV \right) - \delta \left(\int_V Q \bar{u} dV \right) - \delta \left(\int_S P \bar{u} dS \right) = \\ &= \frac{1}{2} \delta \left(\int_V (\bar{u}^T B^T D B \bar{u} dV) \right) - \delta \left(\int_V Q \bar{u} dV \right) - \delta \left(\int_S P \bar{u} dS \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Разделим расчетную область на конечные элементы V_e , $e = \overline{1, m}$. Элементная матрица жесткости и элементный вектор правой части имеют вид

$$k^e = \int_{V^e} B_N^T D B_N dV, \quad (10)$$

$$f^e = \int_{V^e} (N^e)^T Q dV + \int_{S^e} (N^e)^T P dS, \quad (11)$$

где $B_N = B N$ — матрица производных от функций форм, а полная система линейных алгебраических уравнений примет вид

$$K u = F, \quad K = \sum_{e=1}^m k^e, \quad F = \sum_{e=1}^m f^e. \quad (12)$$

5. Учет контактного взаимодействия

Для учета контактного взаимодействия выбран метод множителей Лагранжа. Согласно этому методу к функционалу потенциальной энергии Π из (8) необходимо добавить интеграл вида

$$W_C = \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma, \quad (13)$$

где Λ — функция множителей Лагранжа, Γ_C — контактная граница между контактирующими телами 1 и 2, $x^{(i)} = X^{(i)} + u^{(i)}$ — актуальные положения сходственных точек (то есть точек, между которыми минимальное расстояние) тел $i = 1, 2$ на поверхности контакта, $X^{(i)}$ и $u^{(i)}$ — исходные положения и получаемые перемещения сходственных точек соответственно.

Запишем вариацию контактного интеграла W_C в виде

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_C} \delta \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta x^{(1)} - \delta x^{(2)}) d\Gamma \quad (14)$$

и получим новое равенство для нахождения минимума потенциальной энергии в виде

$$\delta F = \delta \Pi - \delta A_1 - \delta A_2 + \delta W_C = 0. \quad (15)$$

Для численного взятия интеграла во втором слагаемом в формуле (14) необходимо выполнить дискретизацию функции Λ , например, в виде разложения $\Lambda \approx \sum \lambda_i N_{\lambda i}$, $i = \overline{1, k}$, где коэффициенты λ_i — множители Лагранжа, а функции $N_{\lambda i}$ образуют базис на контактной границе Γ_C и могут быть выбраны различными способами [8]. Стандартной для метода конечных элементов является аппроксимация решения с помощью непрерывных кусочно-линейных функций. Однако функция множителей Лагранжа по сути имеет смысл распределения нормальных контактных напряжений на границе контакта, а напряжения зависят от производных перемещений u , поэтому логично выбирать способ аппроксимации в том же пространстве, которому принадлежат производные решения. Для метода конечных элементов с элементами первого порядка это кусочно-постоянные функции, в случае элементов второго порядка — кусочно-линейные с разрывами на ребрах элементов. В работе [8] подробно описаны виды аппроксимации множителей Лагранжа.

С учетом сказанного дискретизацию (14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta W_C \approx & \int_{\Gamma_C} \left(\sum_{j=1}^{n^{(1)}} N_j^{(1)} (X_j^{(1)} + u_j^{(1)}) - \sum_{s=1}^{n^{(2)}} N_s^{(2)} (X_s^{(2)} + u_s^{(2)}) \right) \sum_{i=1}^k N_{\lambda i} \delta \lambda_i d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_C} \sum_{i=1}^k N_{\lambda i} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n^{(1)}} N_j^{(1)} \delta (X_j^{(1)} + u_j^{(1)}) - \sum_{s=1}^{n^{(2)}} N_s^{(2)} \delta (X_s^{(2)} + u_s^{(2)}) \right) d\Gamma, \quad (16) \end{aligned}$$

где $n^{(1)}, n^{(2)}$ — размерность базиса для первого и второго тела соответственно, $N_i^{(1)}, N_i^{(2)}$ — функции формы для первого и второго тела.

Так как в (14) коэффициенты δu_i и $\delta \lambda_i$ не зависят друг от друга, то в вектор неизвестных добавляются новые переменные по количеству используемых множителей Лагранжа.

Реализация алгоритма расчета с независимой контактной границей более подробно описана в [8].

6. Результаты моделирования

Проведены расчеты с использованием авторского программного комплекса на языке C++. В силу симметрии конструкции канала электромагнитного ускорителя расчеты проводились на четвертой части области. Задача приведена в безразмерных параметрах. Предложено считать, что токопроводящие рельсы изготовлены из изотропного материала (сталь), материал изолятора рассматривается как трансверсально-ортотропный с осями ортотропии, совпадающими с осями координат X, Y (стеклотекстолит), а материал силовой оболочки также считается трансверсально-ортотропным, но с осями ортотропии, совпадающими с направлениями нормали и касательной к поверхности силовой оболочки. Предполагается, что силовая оболочка была сделана с помощью намотки полимерного композиционного материала. Физические параметры материалов приведены в таблице 1 [9].

Название	Значение
Токопроводящий рельс	
Материал	сталь
Модуль Юнга, E :	169
Коэффициент Пуассона, ν :	0.3
Изолятор	
Материал	стеклотекстолит
Модуль Юнга в нормальном направлении, E_n :	20.5
Модуль Юнга в касательном направлении, E_τ :	16.5
Коэффициент сдвига, $G_{\tau n}$	2.5
Коэффициент Пуассона, ν :	0.3
Силовая оболочка	
Материал	ПКМ
Модуль Юнга в нормальном направлении, E_n :	96
Модуль Юнга в касательном направлении, E_τ :	2.7
Коэффициент сдвига, $G_{\tau n}$	3
Коэффициент Пуассона, ν :	0.3

Таблица 1. Безразмерные параметры задачи

Изолятор закреплен слева и снизу, рельс не закреплен нигде, силовая обо-

лочка имеет закрепление по левому и нижнему краям. На рельс действуют силы $F_x = -4200 \cdot 10^{-8}$, $F_y = 6100 \cdot 10^{-8}$. Геометрия задачи приведена на рис. 4. На этом же рисунке показана используемая в расчете конечноэлементная сетка. Рельс состоит из 2780 конечных элементов, изолятор — из 4683, силовая оболочка — из 12477.

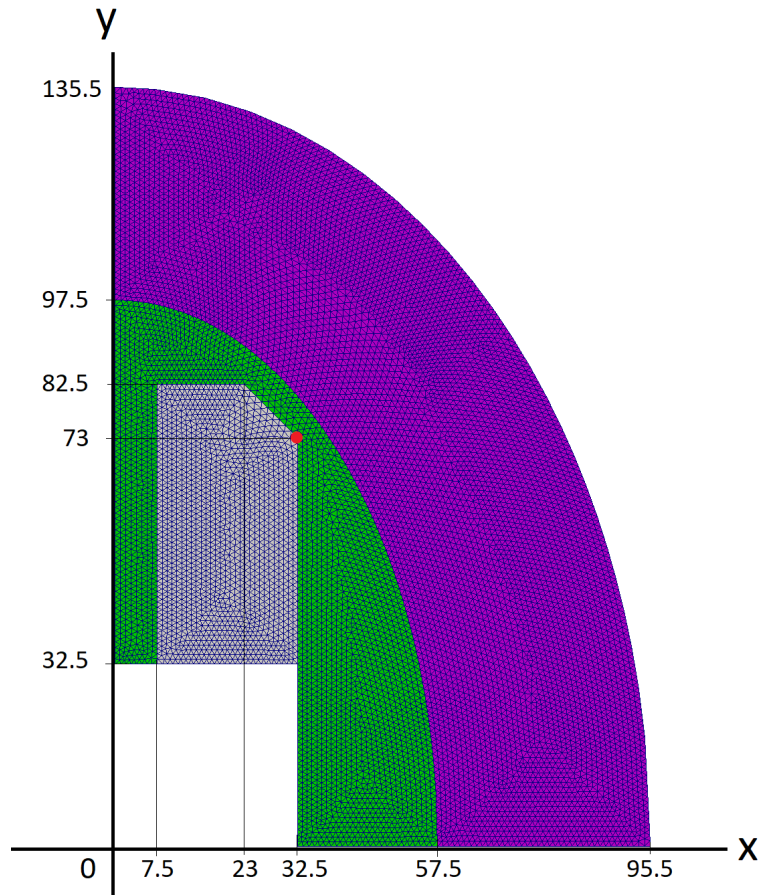


Рис. 4. Расчетная область и конечноэлементная сетка

На рисунке 5 представлены горизонтальная и вертикальная компоненты перемещений на деформированной форме, а также приведены полученные контактные границы (зеленая линия). На рисунке 6 представлены аналогичные компоненты, но для напряжений.

При работе электромагнитного ускорителя под воздействием внешних нагрузок рельс начинает вжиматься в изолятор и деформировать его. Можно заметить, что при деформировании тел между рельсом и изолятором справа появился зазор между телами, в этом месте тела не находятся в контакте. Похожий расчет с использованием альтернирующего метода Шварца представлен в работе [7]. Согласно результатам, приведенным в этой работе, между рельсом и изолятором тоже появляется аналогичный зазор. Однако еще появляется зазор между изолятором и силовой оболочкой, что отсутствует в наших результатах.

Наибольший интерес при исследовании напряженно-деформированного состояния конструкции представляют нормальные компоненты напряжений

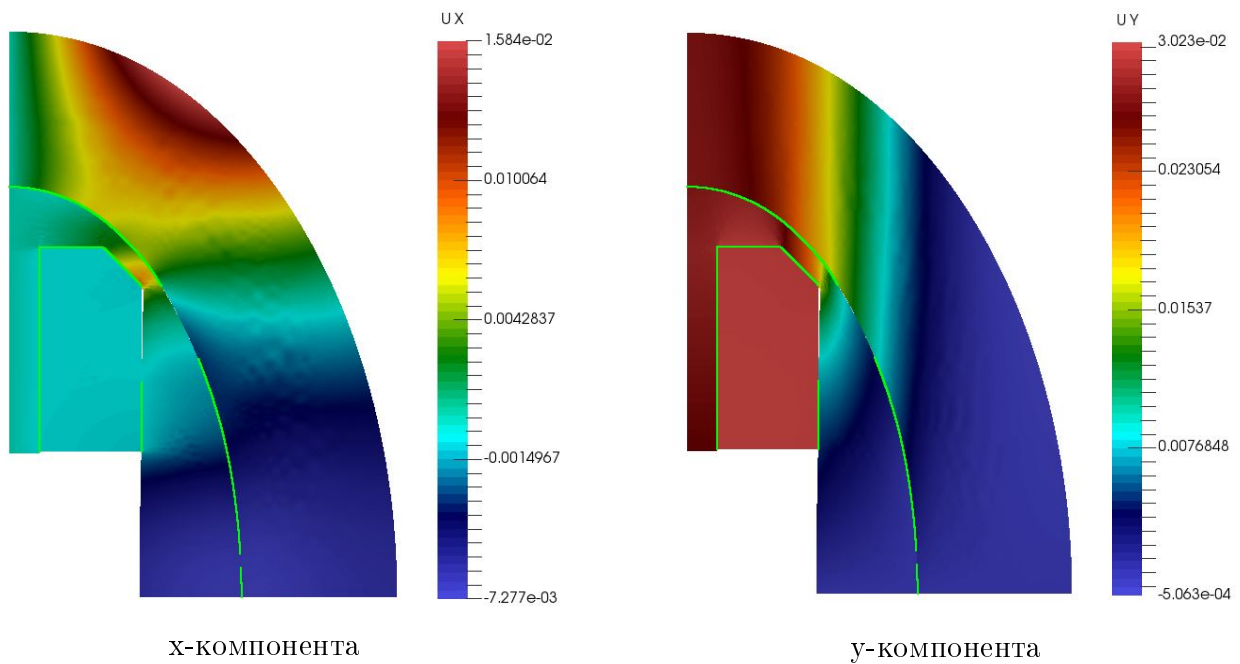


Рис. 5. Распределение перемещений

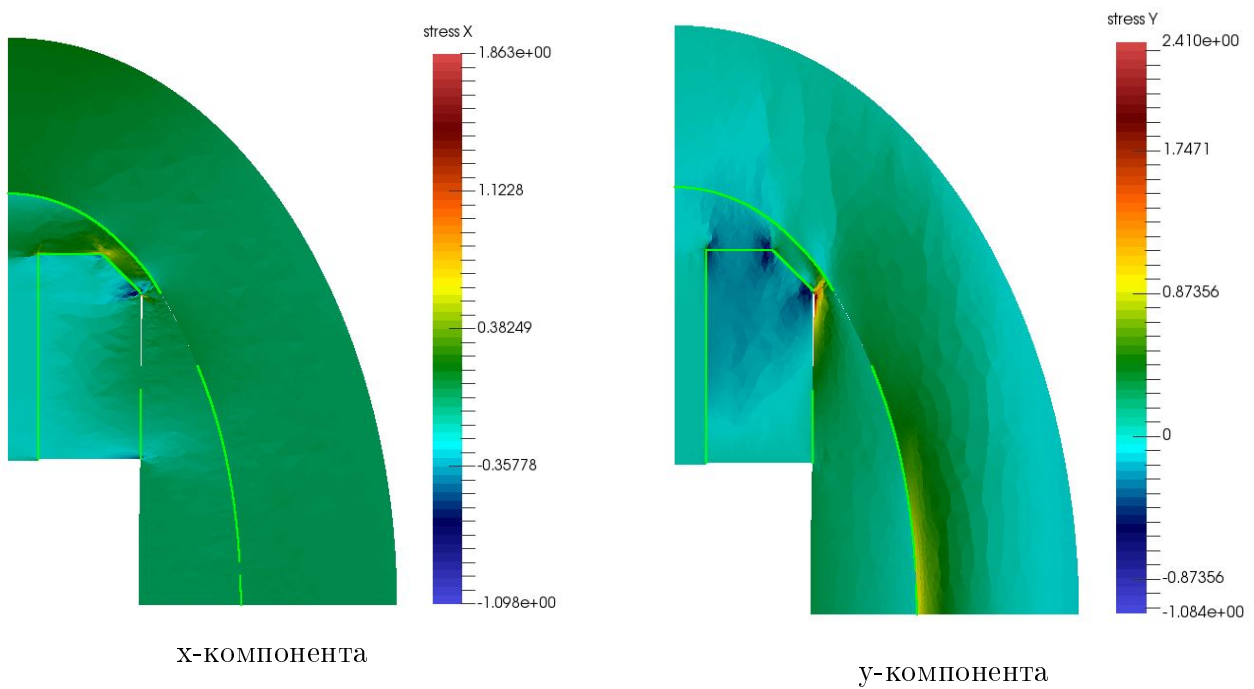


Рис. 6. Распределение напряжений

вдоль каждой из контактных границ. Контактную границу между рельсом и изолятором достаточно естественно можно разделить на 4 части (слева направо). Контактная граница между изолятором и силовой оболочкой считается единой. На графиках 7 приведены нормальные компоненты напряжений для контактной границы между рельсом и изолятором, на графике 8 — для контактной границы между изолятором и силовой оболочкой. Черным обозначена рассматриваемая величина для первого тела (в контактной паре

рельс-изолятор это рельс, в контактной паре изолятор-оболочка это изолятор), красным — для второго тела.

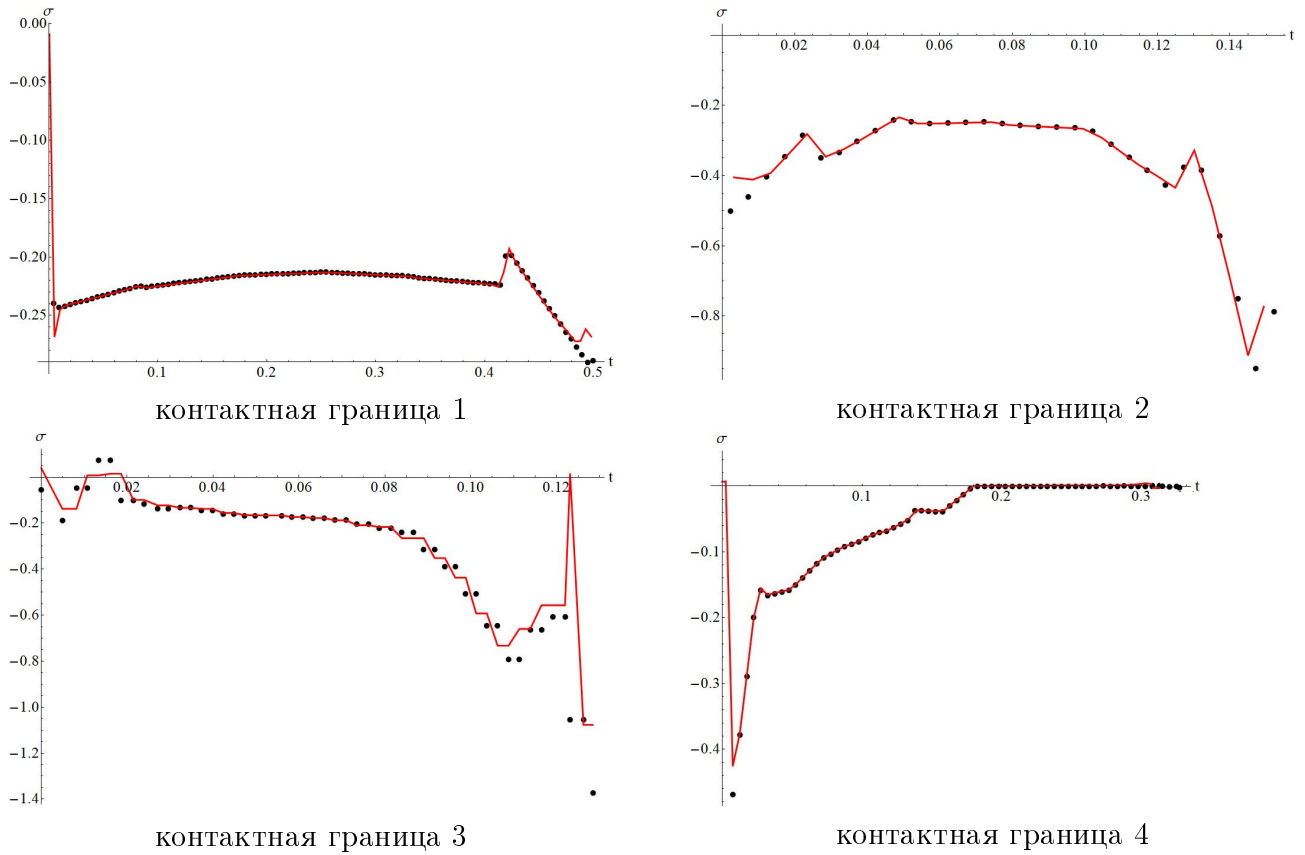


Рис. 7. Распределение напряжений вдоль контактных границ между рельсом и изолятором

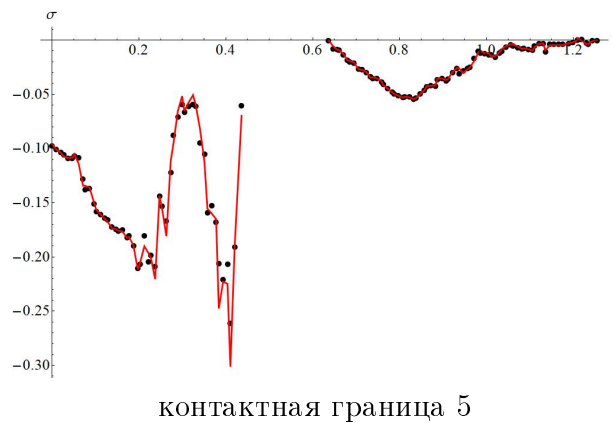


Рис. 8. Распределение напряжений вдоль контактных границ между изолятором и силовой оболочкой

Можно заметить, что равенство контактных напряжений выполняется почти всюду. Имеют место концентраторы напряжений в углах рельса, наибольший из них в точке с координатами (32.5, 73) на исходной форме (рис. 4, красная точка). Такое исследование позволяет предположить, что пиковые давления можно снизить, сгладив грани токопроводящего рельса.

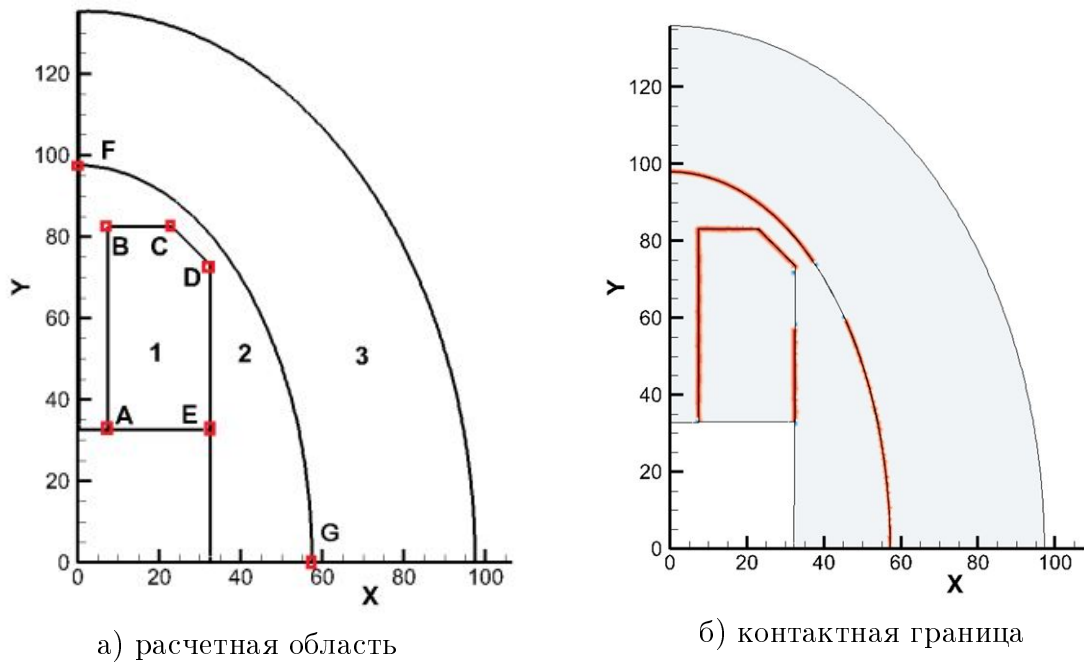


Рис. 9. Геометрия расчетной области и результаты расчетов из работы [7]

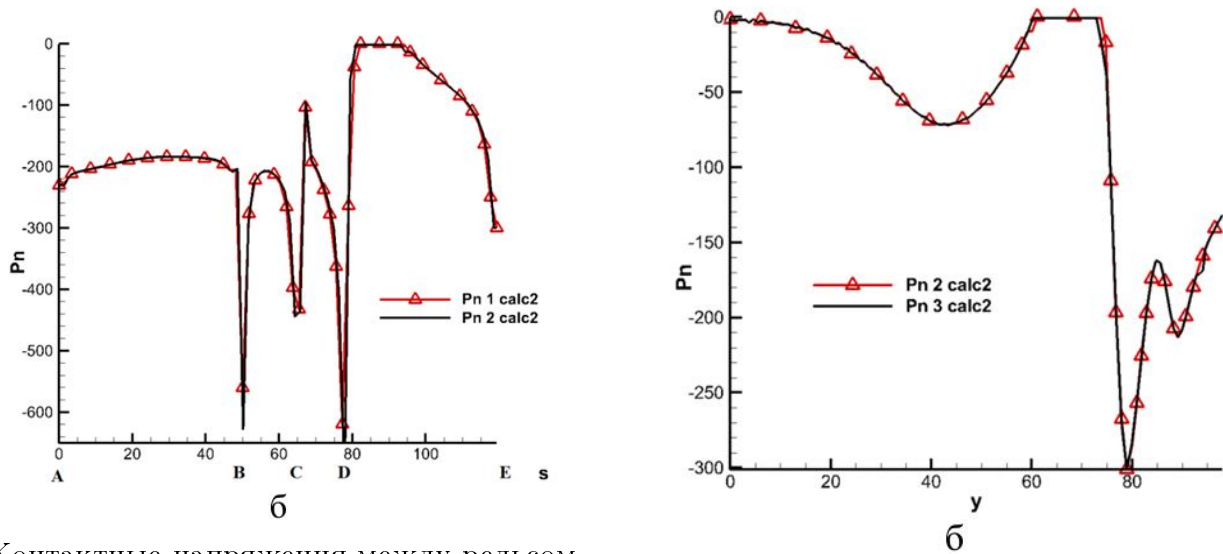
Контактные напряжения между рельсом
и изоляторомКонтактные напряжения между
изолятором и оболочкой

Рис. 10. Распределения контактных напряжений из [7]

Аналогичная задача исследована в работе [7]. На рис. 9, б) показана полученная контактная граница. Сравнивая ее с полученной описанным методом (рис. 6, зеленая линия), можно заметить, что результаты качественно похожи: контактная граница между рельсом и изолятором терпит разрыв на правой границе рельса, но сохраняет контакт в нижней части правой границы рельса. Контактная граница между изолятором и силовой оболочкой также терпит разрыв в середине. Места разрывов контактной границы, а также протяжен-

ность этих разрывов сходны в обеих работах.

Также на рис. 10 представлены контактные напряжения между рельсом и изолятором и между изолятором и оболочкой. Заметим, что численно решения тоже похожи. График на рисунке 8, соответствующий контактной границе 5, инвертирован относительно результатов упомянутой работы — в работе А.С. Родина обход этой части контактной границы идет от точки G до точки F (9, а), а на рис. 8 идет в обратном направлении — от F до G .

7. Заключение

Рассмотрена математическая модель электромагнитного ускорителя рельсового типа. Исследовано напряженно-деформированное состояние сечения канала ускорителя. Для этого численно решена контактная задача теории упругости с помощью комбинации метода конечных элементов и модификации метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей. Проведенные вычисления позволили определить области контакта между элементами конструкции, выявить зоны повышенных напряжений и предоставить данные для оценки прочностных характеристик и надежности системы.

Список литературы

- [1] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Глизнуцина П.В. Сравнение вариантов метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". 2017. № 5. С. 35–48.
- [2] Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия элементов твэла с учетом ползучести на основе mortar-метода // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 110. 24 с.
- [3] Neto A.G., Pimento P.M., Wriggers P. A master-surface to master-surface formulation for beam to beam contact. Part I: Frictionless interaction // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2016. V. 303. Pp. 400–429.
- [4] Neto A.G., Pimento P.M., Wriggers P. A master-surface to master-surface formulation for beam to beam contact. Part II: Frictional interaction // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. V. 319. Pp. 146–174.
- [5] Neto A.G., Wriggers P. Computing pointwise contact between bodies: a class of formulations based on master-master approach // Computational Mechanics. 2019. V. 64. Pp. 585–609.
- [6] Neto A.G., P. Wriggers. Master-master frictional contact and applications for beam-shell interaction // Computational Mechanics. 2020. V. 66. Pp. 1213–1235.
- [7] Галанин М.П., Родин А.С. Моделирование контактного взаимодействия элементов электромагнитного ускорителя с помощью метода декомпозиции области // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 82. 20 с.
- [8] Галанин М.П., Лукин В.В., Соломенцева П.В. Сравнение способов аппроксимации функции множителей Лагранжа при решении контактных задач методом с независимой границей контакта // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 6(105). С.17–32.
- [9] Терещенко А.Н., Лукин В.В., Головкин К.Д., Плеханов А.В., Родин А.С. Оценка прочности и жесткости электромагнитного ускорителя с силовым корпусом из полимерного волокнистого композиционного материала // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 51. 24 с.
- [10] Галанин М.П., Родин А.С. Моделирование контактного взаимодействия элементов электромагнитного ускорителя с учетом ортотропных свойств материалов // Матем. моделирование. 2021. Т. 33, № 4. С. 79–94.

- [11] Du X., Liu S., Guan J. Design and Experimental Study of a Curved Contact Quadrupole Railgun // Electronics. 2022. Vol. 11. ArtNo. 3108.
- [12] Галанин М.П., Сорокин Д.Л. Моделирование электромагнитного поля в ускорителях рельсового типа в отсутствие внешнего кожуха // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 43. 16 с.
- [13] Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Уразов С.С. Моделирование эрозии металлического контакта в ускорителе типа рельсотрон // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 4(15). С. 81–97.
- [14] Сажин М.В., Сафонов М.В., Семенцов В.Н. Применение рельсотрона Арцимовича для возвращения с Луны // Вестник Московского университета. Физика. Астрономия. 2021. № 3. С. 50–53.
- [15] Бажанов В.Л. и др. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. М.: Высшая школа, 1970. 408 с.
- [16] Васильев В.В. и др. Композиционные материалы. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
- [17] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 319 с.
- [18] Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
- [19] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.
- [20] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer, 2006. 521 p.
- [21] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 543 с.
- [22] Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2011. 44 с.

Содержание

1. Введение	3
2. Задача о нагружении канала электромагнитного ускорителя масс	3
3. Определяющие соотношения математической модели	5
3.1. Модель упругого деформирования тел	5
3.1.1. Фундаментальные соотношения теории упругости	6
3.2. Моделирование контактного взаимодействия	7
4. Численный метод	8
5. Учет контактного взаимодействия	9
6. Результаты моделирования	10
7. Заключение	15
Список литературы	16