



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.Е. Трифонова

О возможности построения
произвольной пятеричной
дроби с помощью
индуцированных
вероятностных функций

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Трифонова Е.Е. О возможности построения произвольной пятеричной дроби с помощью индуцированных вероятностных функций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 38. 40 с. EDN: [HQQBNJ](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-38)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-38>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е. Е. Трифонова

**О возможности построения
произвольной пятеричной дроби
с помощью индуцированных
вероятностных функций**

Москва — 2025

Трифорова Е. Е.

О возможности построения произвольной пятеричной дроби с помощью индуцированных вероятностных функций

В данной работе исследуются преобразования независимых в совокупности бернуллиевских случайных величин с рациональными вероятностями с помощью булевых функций. Такие преобразования случайных величин индуцируют преобразования рациональных вероятностей, соответственно, можно рассматривать задачи порождения вероятностей посредством данных преобразований. В работе изучается вопрос конечной порожденности для множества пятеричных дробей. Доказывается, что бесповторно замкнутый класс 5-несократимых функций и объединение бесповторно замкнутых классов 5-сократимых булевых функций двух типов являются конечно порождающими для множества всех пятеричных дробей.

Ключевые слова: бесповторно замкнутый класс булевых функций, бернуллиевская случайная величина, преобразование случайных величин, конечная порожденность

Ekaterina Evgen'evna Trifonova

On the possibility of constructing an arbitrary quinary fraction using induced probability functions

In this paper we study transformations of independent Bernoulli random variables with rational probabilities using Boolean functions. Such transformations of random variables induce transformations of rational probabilities, hence the tasks of generating probabilities through these transformations can be considered. In the paper we study the issue of finite generation for the set of quintuple fractions. We prove that the read-once closed class 5-irreducible functions and union of 5-reducible read-once closed classes of Boolean functions are finitely generative for the set of all quintuple fractions.

Key words: read-once closed class of Boolean functions, Bernoulli random variable, random variable transformation

Оглавление

Введение	3
Основные определения	4
О конечной порожденности	8
Список литературы	39

Введение

Преобразования бернуллиевских случайных величин привлекали внимание многих исследователей. Будем рассматривать преобразования следующего вида: есть множество независимых в совокупности бернуллиевских случайных величин, будем подставлять их в качестве переменных в булеву функцию, тогда на выходе булевой функции получим новую бернуллиевскую случайную величину с каким-то другим распределением. Очевидно, что вероятность того, что бернуллиевская случайная величина X_i принимает значение 1, определяет распределение случайной величины X_i полностью. Если мы рассматриваем в качестве подставляемых в булеву функцию бернуллиевские случайные величины с рациональными вероятностями, то одним из важных вопросов, привлекающих внимание исследователей, является вопрос конечной порожденности: можем ли мы из бернуллиевских случайных величин с вероятностями из конечного множества рациональных вероятностей, принадлежащих какому-то классу рациональных вероятностей, получить бернуллиевскую случайную величину с произвольной рациональной вероятностью из этого же класса?

Преобразования бернуллиевских случайных величин с рациональными вероятностями посредством булевых функций рассматривались в работах Р. Л. Схиртладзе, Ф. И. Салимова и Р. М. Колпакова (см. [1, 2, 3], а также обзор в [4]). Р. Л. Схиртладзе [1] показал, что преобразования с помощью конъюнкций и дизъюнкций ($\&$ и $\vee$) позволяют породить все множества двоично-рациональных и троично-рациональных распределений, используя конечное множество распределений. Ф. И. Салимов в [2] показал, что для простого $p \geq 5$ множества p -ично-рациональных распределений конечно порождены при преобразованиях операциями системы $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, 0, 1\}$. В работе Р. М. Колпакова [3] установлена конечная порожденность относительно преобразований системой $\{\&, \vee\}$ множеств рациональных бернуллиевских распределений, у которых в разложении знаменателя на простые множители могут встречаться простые числа из заданного конечного множества мощности не менее 2.

Ранее автором было получено, что преобразования случайных величин с распределениями из конечного множества с помощью функции голосования не позволяют выразить все вероятности, записываемые пятеричными дробями [5]. Этот результат можно также распространить на все p -ичные дроби для произвольного простого p , $p \geq 5$. Кроме того, в статье [6] сформулированы некоторые свойства, которыми должны обладать функции из конечно порождающего множества при условии, что функции индуцируют p -несократимые вероятностные

функции. Вероятностные функции, не являющиеся p -несократимыми, будем называть p -сократимыми. Подробные определения p -несократимых и p -сократимых функций будут даны позже. Вопрос, какова доля p -сократимых вероятностных функций среди всех вероятностных функций, индуцированных булевыми функциями без фиктивных переменных, был подробно изучен в работе [7]. Следует отметить, что универсальная функция, входящая в состав конечно порождающей системы, описанной Ф. И. Салимовым, индуцирует p -сократимую функцию.

Ранее автором было получено, что классы p -сократимых индуцированных вероятностных функций разных типов и p -несократимых индуцированных вероятностных функций и соответствующие им классы булевых функций являются замкнутыми относительно бесповторной суперпозиции [8]. Данная работа посвящена доказательству того, что класс 5-несократимых булевых функций является конечно порождающим для множества всех пятеричных дробей и объединение классов 5-сократимых булевых функций двух типов также является конечно порождающим для множества всех пятеричных дробей.

Основные определения

Пусть x — случайная величина, принимающая значение 1 и 0 с вероятностью $\hat{x}$ и $1 - \hat{x}$ соответственно. Тогда распределение этой случайной величины однозначно определяется значением $\hat{x}$. Будем считать, что каждой случайной величине x , принимающей значения 0 и 1, сопоставлено число $\hat{x} \in [0; 1]$.

Будем рассматривать преобразования, осуществляемые в результате подстановки независимых в совокупности случайных величин со значениями 0 и 1 вместо переменных булевых функций. Такие преобразования описываются с помощью вероятностных индуцированных функций.

Определение 1. Пусть задана булева функция $f(x_1, \dots, x_n): \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, тогда *вероятностная функция* $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n): [0; 1]^n \rightarrow [0; 1]$, *индуцированная булевой функцией* $f(x_1, \dots, x_n)$, определяется соотношением:

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n): \\ f(x_1, \dots, x_n)=1}} \prod_{i=1}^n (x_i \hat{x}_i + (1 - x_i)(1 - \hat{x}_i)).$$

Из определения 1 следует, что если булева функция f задана своей СДНФ, то индуцированная функция может быть построена формальной заменой дизъюнкции на сложение, конъюнкции — на умножение, переменной x_i — на $\hat{x}_i$, переменной $\bar{x}_i$ — на $1 - \hat{x}_i$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем вероятностную функцию, записанную в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами. В общем виде эта запись выглядит так:

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \sum_{\kappa_1, \dots, \kappa_n \in \{0;1\}} \alpha_{\kappa_1 \dots \kappa_n} \hat{x}_1^{\kappa_1} \cdot \dots \cdot \hat{x}_n^{\kappa_n},$$

где $\hat{x}_1^{\kappa_1}$ — возведение в степень в обычном смысле, т. е. $\hat{x}_i^0 = 1$, $\hat{x}_i^1 = \hat{x}_i$.

Далее, если не оговорено иное, будем подразумевать, что p — простое число, $p \geq 5$. Будем рассматривать индуцированные вероятностные функции, построенные по булевым функциям без фиктивных переменных.

Определение 2. Классифицируем вероятностные функции, построенные по булевым функциям без фиктивных переменных, по значению коэффициента $\alpha_{1\dots 1}$ перед самым длинным одночленом $\hat{x}_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_n$ следующим образом:

- если $\alpha_{1\dots 1} = 0$, то функцию $\hat{f}$ будем называть *p -сократимой первого типа*;
- если $\alpha_{1\dots 1} = p^t A$, где $t \geq 1$, $A \in \mathbb{Z}$, $A \bmod p \neq 0$, то функцию $\hat{f}$ будем называть *p -сократимой второго типа*;
- если $\alpha_{1\dots 1} = A$, где $A \in \mathbb{Z}$, $A \bmod p \neq 0$, то функцию $\hat{f}$ будем называть *p -несократимой*.

Заметим, что p -сократимые функции первого типа являются p -сократимыми для любого простого $p \geq 5$, а p -сократимые функции второго типа и p -несократимые являются таковыми для одних p и не являются для других. Оценки числа p -сократимых функций приведены в [7]. Будем также обозначать коэффициент $\alpha_{1\dots 1}$ перед самым длинным одночленом индуцированной функции $\hat{f}$ как $\alpha(\hat{f})$.

Пример 1. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$ индуцирует вероятностную функцию

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5) = & \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_5 + \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 + \hat{x}_1 \hat{x}_4 \hat{x}_5 + \hat{x}_3 \hat{x}_4 \hat{x}_5 - \hat{x}_1 \hat{x}_3 \hat{x}_4 \hat{x}_5 - \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4 \hat{x}_5 + \\ & + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_5 + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_4 \hat{x}_5 + \hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4 - \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4 \hat{x}_5 + 5\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4 \hat{x}_5. \end{aligned}$$

Коэффициент $\alpha(\widehat{f}) = 5$, соответственно, функция $\widehat{f}$ является 5-сократимой 2-го типа и r -несократимой для любого простого $r \geq 7$, например, она является 7-несократимой.

Пример 2. Булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$ индуцирует вероятностную функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3) = \widehat{x}_3 - \widehat{x}_1\widehat{x}_3 + \widehat{x}_1\widehat{x}_2$. Коэффициент $\alpha(\widehat{f}) = 0$, соответственно, функция $\widehat{f}$ будет являться p -сократимой 1-го типа для любого простого $p \geq 5$.

Множество правильных дробей со знаменателем r обозначим как $A(r) = \{\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{(r-1)}{r}\}$, $r \in \mathbb{N}$, множество чисел, выражимых правильными p -ичными дробями, обозначим как $\Gamma[p] = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} A(p^\alpha)$, а с помощью

$H(p^k)$ обозначим всевозможные правильные несократимые дроби со знаменателем p^k . Очевидно, $H(p^k) = A(p^k) \setminus A(p^{k-1})$.

В работе [6] определение p -несократимой функции было введено следующим образом.

Определение 3. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ — индуцированная f вероятностная функция, p — простое, $p \geq 5$. Тогда если $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, то значение функции $\widehat{f}$ можно представить как $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \bmod p \neq 0$. При этом если $m = k_1 + \dots + k_n$ для заданного p , любых $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, а также любых $k_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, то $\widehat{f}$ будем называть p -несократимой функцией.

Покажем, что определение 3 эквивалентно определению 2 в части, относящейся к p -несократимым функциям.

Лемма 1. Пусть $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ — индуцированная вероятностная функция, тогда неравенство $\alpha(\widehat{f}) \bmod p \neq 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\forall \widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ для $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $m = \sum_{i=1}^n k_i$, $D \bmod p \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\widehat{x}_i = \frac{a_i}{p^{k_i}}$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \bmod p \neq 0$, т.е. $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$. Подставим значения $\widehat{x}_i$ в индуцированную функцию $\widehat{f}$, записанную в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами и преобразуем, приведя к общему знаменателю:

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = \frac{B}{p^l} + \frac{\alpha(\widehat{f})}{p^{\sum_{i=1}^n k_i}} \cdot \prod_{i=1}^n a_i = \frac{D}{p^m},$$

где $l < \sum_{i=1}^n k_i$, $D \bmod p \neq 0$.

Если $\alpha(\widehat{f}) \bmod p \neq 0$, то при подстановке вместо переменных значений $\forall \widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ в функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ получаем, что $m = \sum_{i=1}^n k_i$.

Если при подстановке вместо переменных значений $\forall \widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ в функцию $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ получаем, что $m = \sum_{i=1}^n k_i$, то это значит, что $\alpha(\widehat{f}) \bmod p \neq 0$. $\square$

Будем классифицировать булевы функции с точки зрения индуцирования ими p -сократимых или p -несократимых вероятностных функций. Для каждой из булевых функций сначала удалим фиктивные переменные, для булевой функции без фиктивных переменных построим индуцированную функцию. И по тому, какой тип индуцированной функции получился, классифицируем исходную булеву функцию. Будем считать, что после удаления фиктивных переменных в каждой из булевых функций останется хотя бы одна существенная переменная, т. е. константы 0 и 1 не будем относить ни к какому из вышеперечисленных классов.

Обозначим как $\mathcal{Z}$ множество всех булевых функций, которые индуцируют p -сократимые функции первого типа, $\mathcal{R}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p -сократимые функции второго типа, $\mathcal{N}_p$ — множество всех булевых функций, которые индуцируют p -несократимые функции. Множества всех вероятностных индуцированных функций, которые являются p -сократимыми функциями первого типа, p -сократимыми функциями второго типа, p -несократимыми функциями будем обозначать как $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{R}}_p$, $\widehat{\mathcal{N}}_p$ соответственно.

Лемма 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ не содержит фиктивных переменных, $\widehat{f}$ — индуцированная f вероятностная функция. Вместо переменных в $\widehat{f}$ будем подставлять значения $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ для $i \in \{1, \dots, n\}$. Представим значение индуцированной функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \bmod p \neq 0$. Тогда

- если найдутся такие значения $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, что выполняется $m = k_1 + \dots + k_n$, то $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}}_p$;
- если найдутся такие значения $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, что выполняется $m < k_1 + \dots + k_n$, то $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}}_p \cup \widehat{\mathcal{Z}}$.

Доказательство. При подстановке в $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ значений $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ (для $i \in \{1, \dots, n\}$) для результирующего выражения $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \bmod p \neq 0$, степень знаменателя m зависит от коэффициента $\alpha(\widehat{f})$ следующим образом: если $\alpha(\widehat{f})$ кратен p , то $m < k_1 + \dots + k_n$, если $\alpha(\widehat{f})$ не кратен p , то $m = k_1 + \dots + k_n$. Таким образом, если вместо переменных в $\widehat{f}$ подставим несократимые дроби со знаменателями вида p^{k_i} , то

по степени знаменателя получившейся несократимой дроби можно определить, кратен коэффициент $\alpha(\widehat{f})$ числу p или нет. Соответственно, когда $m < k_1 + \dots + k_n$, то $\alpha(\widehat{f})$ либо равен 0, либо кратен p , т. е. $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}}_p \cup \widehat{\mathcal{Z}}$. А когда $m = k_1 + \dots + k_n$, то $\alpha(\widehat{f})$ не равен 0 и не кратен p , т. е. $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}}_p$. $\square$

В работе [8] было показано, что классы булевых функций $\mathcal{Z}$, $\mathcal{R}_p$, $\mathcal{N}_p$, а также классы соответствующих индуцированных вероятностных функций $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{R}}_p$, $\widehat{\mathcal{N}}_p$ являются замкнутыми относительно бесповторной суперпозиции.

О конечной порожденности

Пусть задано множество булевых функций F и множество правильных дробей G . Определим множество *выразимых вероятностей* $V_F(G)$ итерационно. Положим $V_F^1(G) = G$. Для $i \geq 1$ положим $V_F^{i+1}(G) = V_F^i(G) \cup \cup \{\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) | f \in F, \widehat{x}_j \in V_F^i(G)\}$. Тогда $V_F(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_F^i(G)$.

Будем говорить, что для простого $p \geq 5$ множество булевых функций F является *конечно порождающим* в $\Gamma[p]$, если найдётся такое конечное множество $G \subset \Gamma[p]$, что $V_F(G) = \Gamma[p]$.

Ранее был получен результат с необходимыми условиями того, что множество булевых функций, индуцирующих p -несократимые функции, конечно порождающее [6].

В данной работе доказывается, что классы $\mathcal{N}_5$ и $\mathcal{Z} \cup \mathcal{R}_5$ являются конечно порождающими в $\Gamma[5]$.

Напомним, что для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ единичными наборами называются совокупности значений переменных $x_1, \dots, x_n$, на которых функция f принимает единичное значение. Пусть $\eta_o(f)$ — число наборов с нечетным числом нулей среди единичных наборов булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, $\eta_e(f)$ — число наборов с четным числом нулей среди единичных наборов булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда для соответствующей индуцированной функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ справедливы следующие леммы.

Лемма 3 [7]. Для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и индуцированной ей функции $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ выполняется $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$.

Лемма 4 [7]. Для булевой функции f выполнено $\eta_e(f) = \eta_o(f)$ тогда и только тогда, когда f содержит не менее одной фиктивной переменной или $f \in \mathcal{Z}$.

Следствие 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, возможно, с фиктивными переменными, $\hat{f}$ — индуцированная f вероятностная функция. Вместо переменных в $\hat{f}$ будем подставлять значения $\hat{x}_i \in A(5)$. Представим значение индуцированной функции $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \frac{D}{5^m}$, $D \bmod 5 \neq 0$. Тогда если найдутся такие значения $\hat{x}_i \in A(5)$, что выполняется $m < k_1 + \dots + k_n$, то $\alpha(\hat{f}) = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Следует из лемм 2, 3, 4. $\square$

Лемма 5. Пусть для индуцированной функции $\hat{f}$ найдутся такие значения $\hat{x}_i \in H(p^{k_i})$ для $i \in \{1, \dots, n\}$, что выполнено $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \bmod p \neq 0$, $m = \sum_1^n k_i$. Тогда $f(x_1, \dots, x_n)$ не содержит фиктивных переменных.

Доказательство. Из условия леммы следует, что $\alpha(\hat{f}) \neq 0$, следовательно, согласно лемме 3 выполнено $\eta_e(f) - \eta_o(f) \neq 0$, т. е. $\eta_e(f) \neq \eta_o(f)$ и по лемме 4 булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не содержит фиктивных переменных. $\square$

Лемма 6. Если булева функция f принадлежит одному из классов $\mathcal{Z}$, $\mathcal{R}_p$, $\mathcal{N}_p$, то функция $\bar{f}$ принадлежит тому же классу.

Доказательство. Будем рассматривать f после удаления фиктивных переменных. Построим индуцированную функцию $\hat{f}$ и классифицируем f по величине $\alpha(\hat{f})$. Пусть $f_1(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(x_1, \dots, x_n)$, тогда $\hat{f}_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = 1 - \hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$. Представим $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ и $\hat{f}_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ в виде суммы одночленов с целыми коэффициентами, тогда выполнено $\alpha(\hat{f}) = -\alpha(\hat{f}_1)$. Отсюда по определению классов получаем, что f_1 принадлежит тому же классу, что и f . Лемма доказана. $\square$

Следствие 2. Если правильная дробь вида $a/5^k$ принадлежит одному из классов $V_{\mathcal{N}_5}(G)$, $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(G)$, то дробь вида $1 - a/5^k$ принадлежит этому же классу.

Лемма 7. Для множества 5-несократимых функций $\mathcal{N}_5$ выполняется $A(5^3) \subset V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

Доказательство. Введем обозначения для некоторых вероятностных функций, индуцированных булевыми функциями из $\mathcal{N}_5$. Будем обозначать как $\hat{\&}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ функцию, индуцированную конъюнкцией n переменных $x_1 \& \dots \& x_n$, как $\hat{h}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ — функцию, индуцированную $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$, и наконец обозначим как $\hat{h}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ функцию, индуцированную $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$. Запишем выражения для индуцированных функций:

$$\widehat{\&}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n, \widehat{h}_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2 + 2x_1x_2, \widehat{h}_2(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_1x_2x_3.$$

Рассмотрим различные правильные дроби $a/5^3 \in A(5^3)$. Возможно несколько вариантов.

1. Если числитель a у правильной дроби $a/5^3$ кратен 5, т. е. представим в виде $a = 5b$, то получаем, что $a/5^3 = 5b/5^3 = b/5^2$, а любая правильная дробь $b/5^2 \in A(5^2)$. Следовательно такая дробь уже принадлежит $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, так как $V_{\mathcal{N}_5}^1(A(5^2)) = A(5^2)$.
2. Если числитель a у правильной дроби $a/5^3$ представим в виде $a = bc$, где $1 \leq b \leq 24$, $b \in \mathbb{N}$, $b \bmod 5 \neq 0$, $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, то такая дробь может быть получена следующим образом: $\widehat{\&}(b/5^2, c/5) = bc/5^3 = a/5^3$, где $b/5^2 \in A(5^2)$, $c/5 \in A(5)$. Следовательно, $a/5^3 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.
3. Если числитель a у правильной дроби $a/5^3$ может быть представлен как $a = 125 - bc$, где $1 \leq b \leq 24$, $b \bmod 5 \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, то в силу того, что $bc/5^3 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, как показано в предыдущем пункте, и следствия 2 получаем, что поскольку $a/5^3 = (125 - bc)/5^3 = 1 - bc/5^3$, то выполнено $a/5^3 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

Приведенными выше способами можно выразить все числители правильных дробей из $A(5^3)$, кроме числителей из множества $\{31, 43, 47, 58, 67, 78, 82, 94\}$.

4. Дроби $a/5^3$ с числителями 31, 43, 47, 58 могут быть получены следующим образом:

$$\widehat{h}_2(3/5, 1/5, 3/5) = 31/125,$$

$$\widehat{h}_2(2/5, 2/5, 2/5) = 47/125,$$

$$\widehat{h}_1(4/5, 6/25) = 43/125,$$

$$\widehat{h}_1(2/5, 17/25) = 58/125.$$

Таким образом, эти дроби принадлежат $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

5. Дроби $a/5^3$ с числителями 94, 82, 78, 67 в силу следствия 2 и того, что $31/125, 43/125, 47/125, 58/125 \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, также будут принадлежать $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

Таким образом, показали, что все правильные дроби со знаменателем 5^3 из множества $A(5^3)$ принадлежат множеству $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$. Лемма доказана. $\square$

Определение 4. Пусть натуральное число X выражается как

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i, \quad (1)$$

где b_i, a_i — числа от 0 до C_{n-1}^i , $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Будем называть подобное выражение числа X *представлением*, число i — номером разряда представления, n — числом разрядов представления и записывать следующим образом: $b_{n-1}a_{n-1} \dots b_3a_3.b_2a_2.b_1a_1.b_0a_0$.

Теорема 1. *Представление, определенное выше, с $n \geq 4$ разрядами позволяет выразить все числа от 10 до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$. При этом для такого представления дополнительно выполняется следующее свойство:*

либо $\exists j : 2 \leq j \leq n-1$, что для любых таких i , что $0 < i < j$, выполнено $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$, а для всех таких i , что $j \leq i \leq n-1$, выполнено $(b_i = 0) \& (a_i = 0)$,

либо $\forall i : 1 \leq i < n-1$ выполнено $(0 < b_i < C_{n-1}^i) \vee (0 < a_i < C_{n-1}^i)$ и $(b_{n-1} = 1) \& (a_{n-1} = 0) \vee (b_{n-1} = 0) \& (a_{n-1} = 1)$.

Доказательство. Покажем, что для $n \geq 4$ подобным образом можно представить все числа, начиная с 10 вплоть до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$.

Представление для 10 выглядит как 00....00.01.01. Очевидно, что свойство для него выполняется.

Покажем, как будем строить представления для чисел, больших 10, и что для каждого вновь построенного представления свойство будет выполняться.

Будем вести доказательство по индукции. Представление для первого числа 10 мы построили, и свойство для него выполняется. Предположим, у нас есть представление для какого-то числа X и свойство для него выполняется. Покажем, как построить представление для числа $X' = X + 1$ и что для этого представления свойство также будет выполняться. Элементы представления числа X будем обозначать как b_i, a_i , а элементы представления числа X' будем обозначать как b'_i, a'_i , где $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Тогда значения элементов b'_i, a'_i для числа X' определим следующим образом.

1. Попробуем прибавить единицу к 0-му разряду. Тогда возможны следующие варианты:

- $b_0 = 0, a_0 = 1$, тогда $b'_0 = 1, a'_0 = 0$, а для остальных $i \geq 0$ положим $b'_i = b_i, a'_i = a_i$, построение представления для X'

закончено. Запишем формулу для получившегося числа:

$$X' = \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 3 = \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (2 + 1) = X + 1.$$

- $b_0 = 1, a_0 = 0$, тогда $b'_0 = 0, a'_0 = 0$ и прибавляем единицу к 1-му разряду. Запишем формулу для произведенной операции:

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (3b_1 + 2a_1 + 1) \cdot 4 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 3 + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1. \end{aligned}$$

- $b_0 = 0, a_0 = 0$, тогда $b'_0 = 1, a'_0 = 1$ и в зависимости от значений в 1-м разряде возможны следующие варианты:

- $b_1 \leq 1, a_1 \geq 2$, тогда $b'_1 = b_1 + 1, a'_1 = a_1 - 2$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i, a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_1 < C_{n-1}^1$). Запишем формулу получившегося числа:

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (3(b_1 + 1) + 2(a_1 - 2)) \cdot 4 + \\ &+ 3 + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i - 4 + 5 = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1. \end{aligned}$$

- $b_1 = 1, a_1 \leq 1$, тогда $b'_1 = b_1 - 1, a'_1 = a_1 + 1$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i, a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_1 < C_{n-1}^1$). Запишем формулу получившегося числа:

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (3(b_1 - 1) + 2(a_1 + 1)) \cdot 4 + \\ &+ 3 + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i - 4 + 5 = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1. \end{aligned}$$

- $1 < b_1 \leq C_{n-1}^1, a_1 < C_{n-1}^1$, тогда $b'_1 = b_1 - 1, a'_1 = a_1 + 1$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i, a'_i = a_i$, построение

представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_1 < C_{n-1}^1$). Запишем формулу получившегося числа:

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (3(b_1 - 1) + 2(a_1 + 1)) \cdot 4 + \\ &+ 3 + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i - 4 + 5 = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1. \end{aligned}$$

- $1 < b_1 < C_{n-1}^1$, $a_1 = C_{n-1}^1$, тогда $b'_1 = b_1 + 1$, $a'_1 = a_1 - 2$, а для остальных $i > 1$ положим $b'_i = b_i$, $a'_i = a_i$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_1 < C_{n-1}^1$). Запишем формулу получившегося числа:

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (3(b_1 + 1) + 2(a_1 - 2)) \cdot 4 + \\ &+ 3 + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i - 4 + 5 = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1. \end{aligned}$$

Заметим, что случай, когда $b_1 = 0$ и $a_1 = 1$ не рассматривается сознательно, обоснование того, что не может быть такого представления числа, у которого $b_0 = 0$, $a_0 = 0$, $b_1 = 0$ и $a_1 = 1$, будет приведено далее.

- $b_0 = 1$, $a_0 = 1$, тогда $b'_0 = 0$, $a'_0 = 1$ и прибавляем единицу к 1-му разряду. Запишем формулу для произведенной операции:

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=0}^{n-1} (3b'_i + 2a'_i)4^i = \sum_{i=2}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + (3b_1 + 2a_1 + 1) \cdot 4 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 3 + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (3b_i + 2a_i)4^i + 1 = X + 1. \end{aligned}$$

Далее, в зависимости от того, что произошло на данном этапе, либо построение представления закончено, либо прибавляем 1 к 1-му разряду. Определим операцию прибавления к i -му разряду для $i \geq 1$.

2. Операцию прибавления 1 к i -му разряду ($0 < i < n - 1$) определим так:

- $0 \leq b_i < C_{n-1}^i - 1$, $a_i > 0$, тогда $b'_i = b_i + 1$, $a'_i = a_i - 1$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение

представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$).

- $b_i = C_{n-1}^i - 1$, $a_i > 1$, тогда $b'_i = b_i + 1$, $a'_i = a_i - 1$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_i < C_{n-1}^i$).

Для двух вышеприведенных случаев запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X' , соответствующей i -му разряду:

$$(3b'_i + 2a'_i)4^i = (3(b_i + 1) + 2(a_i - 1)) \cdot 4^i = (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i,$$

т. е. выполнение данного действия действительно позволяет добавить единицу к i -му разряду.

- $0 < b_i \leq C_{n-1}^i - 1$, $a_i = 0$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < a'_i < C_{n-1}^i$).
- $b_i = C_{n-1}^i - 1$, $a_i = 1$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$, $0 < a'_i \leq C_{n-1}^i$).
- $b_i = C_{n-1}^i$, $a_i = 0$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$, $0 < a'_i < C_{n-1}^i$).
- $b_i = C_{n-1}^i$, $0 < a_i < C_{n-1}^i - 1$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i + 2$, а для остальных $j > i$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$).

Для четырех вышеприведенных случаев запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X' , соответствующей i -му разряду:

$$(3b'_i + 2a'_i)4^i = (3(b_i - 1) + 2(a_i + 2)) \cdot 4^i = (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i,$$

т. е. выполнение данного действия действительно позволяет добавить единицу к i -му разряду.

- $b_i = C_{n-1}^i$, $a_i = C_{n-1}^i - 1$, $b_{i+1} \neq 0$ или $a_{i+1} \neq 0$ тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i$, прибавляем 1 к $(i+1)$ -му разряду (после этой операции $0 < a'_i < C_{n-1}^i$, $0 < b'_i < C_{n-1}^i$). Запишем формулу, показывающую,

что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X' , соответствующей i -му и $(i + 1)$ -му разрядам:

$$\begin{aligned} (3b'_{i+1} + 2a'_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + (3b'_i + 2a'_i) \cdot 4^i &= (3b_{i+1} + 2a_{i+1} + 1) \cdot 4^{i+1} + \\ &+ (3(b_i - 1) + 2a_i) \cdot 4^i = (3b_{i+1} + 2a_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + 4 \cdot 4^i + (3b_i + 2a_i - 3) \cdot 4^i = \\ &= (3b_{i+1} + 2a_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i. \end{aligned}$$

- $b_i = C_{n-1}^i$, $a_i = C_{n-1}^i - 1$, $b_{i+1} = 0$, $a_{i+1} = 0$, тогда $b'_i = b_i - 1$, $a'_i = a_i - 2$, $b'_{i+1} = 0$, $a'_{i+1} = 1$, а для остальных $j > i + 1$ положим $b'_j = b_j$, $a'_j = a_j$, построение представления для X' закончено (после этой операции $0 < b'_i < C_{n-1}^i$, $a'_{i+1} = 1$, $b'_{i+1} = 0$). Запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X' , соответствующей i -му и $(i + 1)$ -му разрядам:

$$\begin{aligned} (3b'_{i+1} + 2a'_{i+1}) \cdot 4^{i+1} + (3b'_i + 2a'_i) \cdot 4^i &= 2 \cdot 4^{i+1} + (3(b_i - 1) + 2(a_i - 2)) \cdot 4^i = \\ &= (3b_i + 2a_i - 3 - 4 + 8) \cdot 4^i = (3b_i + 2a_i + 1) \cdot 4^i. \end{aligned}$$

Таким образом, после добавления 1 к i -му разряду ($0 < i < n - 1$) свойство не перестает выполняться.

3. Проведем операцию прибавления 1 к $(n - 1)$ -му разряду:

- $b_{n-1} = 0$, $a_{n-1} = 1$, тогда после добавления единицы получаем, что $b'_{n-1} = 1$, $a'_{n-1} = 0$, построение представления для X' закончено. Запишем формулу, показывающую, что происходит в ходе данного преобразования с частью числа X' , соответствующей $(n - 1)$ -му разряду:

$$(3b'_{n-1} + 2a'_{n-1})4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} = (2+1) \cdot 4^{n-1} = (3b_{n-1} + 2a_{n-1} + 1) \cdot 4^{n-1},$$

т. е. выполнение данного действие действительно позволяет добавить единицу к $(n - 1)$ -му разряду.

- $b_{n-1} = 1$, $a_{n-1} = 0$, тогда не можем построить представление для числа X' , число X является максимально возможным для представления с n разрядами.

Очевидно, что после прибавления единицы к $(n - 1)$ -му разряду свойство не перестает выполняться.

Таким образом, по индукции можем построить представление для чисел начиная с 10 вплоть до максимального, при этом свойство будет выполняться.

Докажем, что в процессе построения представления для чисел, начиная с 10, не возникнет такая ситуация, что в первом и нулевом разряде будут содержаться 01 и 00, то есть ни для какого числа не возникнет представления вида $\dots 01.00$. Произведем доказательство от противного. Пусть у нас есть представление вида $\dots 01.00$, последовательно построенное согласно приведенному выше алгоритму, для какого-то числа. Обозначим число с подобным представлением как Y , поскольку все числа, как описано выше, могут быть получены путем последовательного прибавления 1 к представлению числа 10, рассмотрим, как выглядит представление для числа, равного $Y - 1$, из которого прибавлением 1 по приведенному выше алгоритму можно получить Y . Будем обозначать элементы представления числа Y как $b'_1 = 0, a'_1 = 1, b'_0 = 0, a'_0 = 0$. Очевидно, что $(b'_2 \neq 0) \vee (a'_2 \neq 0)$, иначе Y было бы меньше 10 или не выполнялось бы свойство представления. Пусть элементы числа $Y - 1$ будем обозначать как b_i, a_i , тогда очевидно, что для них справедливо $b_0 = 1, a_0 = 0$, посмотрим, каковы могут быть значения b_1, a_1 . Поскольку $b_0 = 1, a_0 = 0$, то после прибавления единицы к числу имеем $b'_0 = 0, a'_0 = 0$ и добавляем 1 к первому разряду. Запишем, какое соотношение должно выполняться для 1-го разряда: $(3b'_1 + 2a'_1) \cdot 4 = (3b_1 + 2a_1 + 1) \cdot 4$. Отсюда следует, что $(3b_1 + 2a_1) \cdot 4 = 4$, т. е. $3b_1 + 2a_1 = 1$, откуда не могут быть получены целые значения для b_1, a_1 . Таким образом, получили противоречие в том, что число Y может быть получено с помощью прибавления 1 из представления какого-то числа. Следовательно, Y не является представлением и, следовательно, не может быть ситуации, когда в первом и нулевом разрядах содержатся соответственно 01 и 00.

Посчитаем, какова будет величина X — максимального числа, для которого можем записать подобное представление с использованием только n разрядов. Согласно представленному алгоритму, это число будет равно:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} (3C_{n-1}^i + 2(C_{n-1}^i - 1))4^i = 5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1).$$

Таким образом, с помощью данного представления с помощью n разрядов можно выразить все числа в диапазоне от 10 до $5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$, при этом будет выполняться сформулированное свойство. $\square$

Следствие 3. С помощью представления можем для $n \geq 4$ выразить все числа от 10 до $5^n/2$.

Доказательство. Следует из теоремы 1 и того, что $5^n/2 \leq 5^n - 2/3 \cdot (4^n - 1)$ для $n \geq 4$. $\square$

Лемма 8. По представлению с помощью $n \geq 4$ разрядов для числа $X : 10 \leq X < 5^n/2$ можно построить семейство таких булевых функций, что каждая из этих функций индуцирует вероятностную функцию $\hat{f}$, для которой $\exists \hat{x}_i \in A(5) : \hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = X/5^n, i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Построенное представление для числа X будет соответствовать семейству булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, построенных следующим образом: каждый i -й разряд соответствует части СДНФ в следующей форме: b_i — число слагаемых, представимых в виде $\bar{x}_1 \underbrace{x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}}_{i \text{ отрицаний}}$,

где $\sigma_j \in \{0; 1\}$, $x_j^0 = \bar{x}_j$, $x_j^1 = x_j$, a_i — число слагаемых, представимых в виде $x_1 \underbrace{x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}}_{i \text{ отрицаний}}$, где $\sigma_j \in \{0; 1\}$, $x_j^0 = \bar{x}_j$, $x_j^1 = x_j$. Целиком булеву функцию

будем записывать как дизъюнкцию всех таких частей, записанных для каждого разряда. Очевидно, что подобный алгоритм с учетом свойств представления, сформулированных в теореме 1, позволяет построить не одну, а целое семейство булевых функций.

Запишем по СДНФ одной из построенных булевых функций индуцированную вероятностную функцию. Дизъюнкцию заменяем на сложение, конъюнкцию — на умножение. Вместо переменной x_i записываем $\hat{x}_i$, вместо переменной $\bar{x}_i$ записываем $1 - \hat{x}_i$. Рассмотрим значение полученной индуцированной функции $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ при подстановке $2/5$ вместо переменной $\hat{x}_1$, и значения $1/5$ вместо переменных $\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$.

В этом случае значение индуцированной функции будет равно:

$$\hat{f}(2/5, 1/5, \dots, 1/5) = \sum_{i=0}^{n-1} (3/5 \cdot b_i + 2/5 \cdot a_i) (4/5)^i (1/5)^{n-1-i} = X/5^n,$$

где X — число от 10 до $5^n/2$. Тем самым мы показали, как для любой дроби вида $X/5^n$, где $n \geq 4$, $10 \leq X < 5^n/2$ можно построить индуцированную функцию, которая позволяет выразить $X/5^n$, используя значения переменных из $A(5)$. $\square$

Пример 3. Покажем, как с помощью индуцированной функции можно получить дробь $311/5^4$. Представление, введенное в теореме 1, для числителя 311 выглядит как 01.21.32.10. Это соответствует семейству булевых функций, определяемых согласно лемме 8 следующим образом:

- один единичный набор вида $(1, 0, 0, 0)$, что соответствует элементарной конъюнкции $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ в СДНФ,
- два единичных набора вида $(0, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.

- один единичный набор вида $(1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.
- три единичных набора вида $(0, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.
- два единичных набора вида $(1, \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$.
- один единичный набор вида $(0, 1, 1, 1)$, что соответствует элементарной конъюнкции $\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$ в СДНФ функции.

Выберем, на каких конкретных наборах, удовлетворяющих записанному выражению, функция будет принимать единичное значение. Запишем СДНФ получившейся функции:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4.$$

Тогда индуцированная функция равна:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = & \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2)(1 - \hat{x}_3)(1 - \hat{x}_4) + (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)(1 - \hat{x}_3)\hat{x}_4 + \\ & + (1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2(1 - \hat{x}_3)(1 - \hat{x}_4) + \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2)(1 - \hat{x}_3)\hat{x}_4 + (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)\hat{x}_3\hat{x}_4 + \\ & + (1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2(1 - \hat{x}_3)\hat{x}_4 + (1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(1 - \hat{x}_4) + \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2)\hat{x}_3\hat{x}_4 + \hat{x}_1\hat{x}_2(1 - \hat{x}_3)\hat{x}_4 + \\ & + (1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2\hat{x}_3\hat{x}_4. \end{aligned}$$

Значение индуцированной функции после подстановки значений из $A(5)$ равно:

$$\hat{f}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 3}{5^4} = \frac{311}{5^4}.$$

Теорема 2. Класс булевых функций $\mathcal{N}_5$ является конечно порождающим в $\Gamma(5)$. В качестве начального множества можно взять $A(5^2)$.

Доказательство. Очевидно, что если дробь $X/5^n$ является несократимой, то в результате операции $1 - X/5^n = (5^n - X)/5^n$ также получим несократимую дробь. Возьмем произвольную правильную дробь $Y/5^{n_0} \in \Gamma[5]$, $n_0 \geq 1, n_0 \in \mathbb{N}$. Представим её в виде несократимой дроби $X/5^n \in \Gamma[5]$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Тогда для показателя степени знаменателя n возможны следующие варианты:

1. Если $n \leq 2$, то по определению $X/5^n \in A(5^2)$, т. е. $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

2. Если $n = 3$, то по доказанному в Лемме 7 получаем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.
3. Если $n \geq 4$ и $1 \leq X < 25$, то $X/5^n = \widehat{\&}(X/5^2, 1/5, \dots, 1/5) = X/5^n$, где $\&$ — $(n-1)$ -местная конъюнкция. Тогда получаем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.
4. Если $n \geq 4$ и $5^n - 25 < X \leq 5^n - 1$, то $X/5^n = (5^n - R)/5^n = 1 - R/5^n$, где $1 \leq R < 25$ и по доказанному выше выполнено $R/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$. Тогда согласно следствию 2 имеем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.
5. Если $n \geq 4$ и $25 < X < 5^n/2$, то по доказанному выше в теореме 1 и лемме 8 для числителя дроби $X/5^n$ можем записать представление, позволяющее построить n -местную булеву функцию f , чья индуцированная порождает указанную дробь из $A(5)$. Поскольку дробь $X/5^n$ — несократимая, а у булевой функции n переменных, то по лемме 5 у булевой функции f все переменные существенные и по лемме 2 выполнено $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{N}}_5$. Следовательно, $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.
6. Если $n \geq 4$ и $5^n/2 < X < 5^n - 25$, то $X/5^n = 1 - R/5^n$, где $25 < R < 5^n/2$, и по доказанному выше выполнено $R/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$. Тогда согласно следствию 2 имеем, что $X/5^n \in V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$.

Таким образом, для любой правильной дроби из $\Gamma[5]$ показали, что она принадлежит множеству $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2))$, т. е. $V_{\mathcal{N}_5}(A(5^2)) = \Gamma[5]$. $\square$

Лемма 9. Для любой булевой функции f , построенной по представлению числа X : $10 \leq X < 5^n/2$ с помощью $n \geq 4$ разрядов выполнено

$$\alpha(\widehat{f}) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\alpha_{2i} + \beta_{2i+1}) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\alpha_{2i+1} + \beta_{2i}).$$

Доказательство. Согласно лемме 3 имеем, что $\alpha(\widehat{f}) = \eta_e(f) - \eta_o(f)$. Из леммы 8 следует, что b_{2i} и a_{2i+1} будут соответствовать единичным наборам с нечетным числом нулей, а b_{2i+1} и a_{2i} будут соответствовать единичным наборам с четным числом нулей, где $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Отсюда непосредственно выводится требуемая формула. $\square$

Следствие 4. Если в формулировке леммы 9 величина X кратна пяти, то дополнительно выполнено

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\alpha_{2i} + \beta_{2i+1}) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\alpha_{2i+1} + \beta_{2i}) = 5B,$$

где $B \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Следует из леммы 9 и следствия 1. $\square$

Лемма 10. Для любой дроби $X/5^n$, у которой $20 \leq X < 5^n/2$, $n \geq 4$, $X \bmod 5 = 0$, можем построить n -местную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ без фиктивных переменных, которая индуцирует вероятностную функцию $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, для которой найдутся $\hat{x}_i \in A(5) : \hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = X/5^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Для числа X построим представление согласно определению 4. Напомним, что переменная x_i называется существенной [9], если найдутся такие два набора

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n),$$

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n),$$

что

$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n),$$

где $\sigma_j \in \{0; 1\}$.

Покажем, что можно так определить функцию по представлению (согласно описанному в лемме 8), что каждая из n переменных будет существенной.

Для 0-го разряда представления возможны следующие варианты:

1. $b_0 = 0, a_0 = 0$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \dots, 1, 1) = 0$, $f(1, 1, \dots, 1, 1) = 0$. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

- (a) $0 < a_1 < n - 1 = C_{n-1}^1, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где

$\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, в том числе выполнено $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Отсюда следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

- (b) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

$f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, в том числе $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Справедливость неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор,

на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Отсюда следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

- (с) $0 < a_1 < n - 1, b_1 = n - 1$. Равенство $b_1 = n - 1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено

$f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(0, 1, \dots, 0) = 1$. Поскольку $f(0, 1, \dots, 1) = 0$ (в силу $b_0 = 0$), следовательно, все переменные $x_2, \dots, x_n$ являются существенными. Поскольку $a_1 < n - 1$, то найдется хотя бы один набор вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

на котором функция равна нулю. Определим $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Соответственно, переменная x_1 тоже существенная. Таким образом, все n переменных являются существенными.

- (d) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = n - 1$. Из равенства $a_1 = n - 1$ следует, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено

$f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Поскольку $f(1, 1, \dots, 1) = 0$ (в силу $a_0 = 0$), следовательно, все переменные $x_2, \dots, x_n$ являются существенными. Поскольку $b_1 < n - 1$, то есть хотя бы один набор вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, на

котором функция равна нулю. Определим $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Соответственно, переменная x_1 тоже существенная. Таким образом, все n переменных являются существенными.

- (е) $0 < a_1 < n - 1, 0 < b_1 < n - 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где

$\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором

функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция

равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 , x_2 и x_n являются существенными.

2. $b_0 = 0, a_0 = 1$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \dots, 1, 1) = 0$, $f(1, 1, \dots, 1, 1) = 1$. Очевидно, что отсюда следует, что x_1 — существенная переменная. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

- (а) $0 < a_1 < n - 1, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.
- (б) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными, а значит, все n переменных существенные.
- (с) $0 < a_1 < n - 1, b_1 = n - 1$. Равенство $b_1 = n - 1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $f(0, 1, \dots, 1) = 0$, следовательно, все переменные $x_2, \dots, x_n$ являются существенными. Следовательно, все n переменных существенные.
- (д) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = n - 1$. Из равенства $a_1 = n - 1$ следует, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, справедливо $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Таким образом,

переменные x_1 и x_2 будут существенными.

- (е) $0 < a_1 < n - 1, 0 < b_1 < n - 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где

$\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1, f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором

функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1, f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1, x_2 и x_n являются существенными.

3. $b_0 = 1, a_0 = 0$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \dots, 1, 1) = 1, f(1, 1, \dots, 1, 1) = 0$. Очевидно, что отсюда следует существенность переменной x_1 . Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

- (а) $0 < a_1 < n - 1, b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными, а значит, все n переменных существенные.

- (б) $0 < a_1 < n - 1, b_1 = n - 1$. Равенство $b_1 = n - 1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено

$f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1, f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

- (с) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$. Выполнение неравенства $0 <$

$b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.

- (d) $0 < b_1 < n - 1$, $a_1 = n - 1$. Из равенства $a_1 = n - 1$ следует, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, справедливо

$f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Из такого определения функции следует, что существенными являются переменные с x_2 по x_n , а значит, все n переменных будут существенными.

- (e) $0 < a_1 < n - 1$, $0 < b_1 < n - 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где

$\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором

функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Определим $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Таким образом, можем доопределить функцию f так, что переменные x_1, x_2 и x_n станут существенными.

4. $b_0 = 1$, $a_0 = 1$. Это соответствует тому, что $f(0, 1, \dots, 1, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 1) = 1$. Для 1-го разряда представления возможны следующие варианты:

- (a) $0 < a_1 < n - 1$, $b_1 = 0$. Справедливость равенства $b_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, в том числе $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными. Поскольку $a_1 > 0$, то найдется хотя бы один набор вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, на котором функция

равна единице, тогда можем доопределить $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Отсюда следует, что x_1 — существенная. Таким образом, все n

переменных являются существенными.

- (b) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = 0$. Выполнение соотношения $a_1 = 0$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$. в том числе $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Из этого следует, что переменные с x_2 по x_n являются существенными. Поскольку $b_1 > 0$, то найдется хотя бы один набор вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, на котором функция равна единице, тогда можем доопределить $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Отсюда следует, что x_1 — существенная, а значит, все n переменных являются существенными.
- (c) $0 < a_1 < n - 1, b_1 = n - 1$. Равенство $b_1 = n - 1$ означает, что на любом наборе вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(1, 0, 1, \dots, 1, 1) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.
- (d) $0 < b_1 < n - 1, a_1 = n - 1$. Равенство $a_1 = n - 1$ означает, что на любом наборе вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, в том числе $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 1) = 0$, $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1 и x_2 являются существенными.
- (e) $0 < a_1 < n - 1, 0 < b_1 < n - 1$. Выполнение неравенства $0 < b_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один набор, на котором функция равна нулю, и ещё хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) =$

0. Выполнение неравенства $0 < a_1 < n - 1$ означает, что среди наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, есть хотя бы один, на котором функция равна нулю, и хотя бы один, на котором функция равна единице. Тогда определим $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Из такого определения функции следует, что переменные x_1, x_2 и x_n являются существенными.

Таким образом, для возможных значений в 0-м и 1-м разрядах представления в случаях 1а, 1б, 1е, 2а, 2д, 2е, 3б, 3с, 3е, 4с, 4д и 4е не все переменные получится сделать существенными. Как следует из предыдущих рассуждений, для всех случаев 1е, 2е, 3е, 4е при переходе от 0-го к 1-му разряду представления получается определить функцию f так, чтобы сделать существенными переменные x_1, x_2, x_n . Таким образом, остается показать, что для этих случаев также и переменные с x_3 по x_{n-1} можно сделать существенными. Для остальных случаев удастся сделать существенными переменные x_1, x_2 . Соответственно, остается показать, что переменные с x_3 по x_n можно сделать существенными.

Рассмотрим, как доопределить функцию f при переходе от 1-го к 2-му разряду, чтобы все переменные стали существенными. Возможны два варианта. Первый вариант, когда хотя бы одно из значений b_2, a_2 не равно нулю, второй — когда $b_2 = a_2 = 0$.

Рассмотрим первый вариант. Для случаев 1е, 2е, 3е и 4е выполнено $1 \leq b_1 \leq n - 2$ и $1 \leq a_1 \leq n - 2$. Тогда поскольку хотя бы одно из значений b_2, a_2 не равно нулю и выполняется свойство представления, то хотя бы одно из этих значений больше нуля и меньше максимального значения, равного C_{n-1}^2 . Тогда:

I. если $n - 3 \leq b_2 < C_{n-1}^2$,

- для случаев 1е, 2е и 4е уже определили, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 1)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $b_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.
- для случая 3е ранее уже определили, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов

$n - 3$, а $b_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.

II. если $1 \leq b_2 < n - 3$ (это возможно только в случае $n \geq 5$),

- для случаев 1е, 2е и 4е уже определили, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ нуль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 3$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.
- для случая 3е ранее уже определили, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ нуль}}, 1)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 3$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

III. если $n - 3 \leq a_2 < C_{n-1}^2$,

- для случаев 1е, 3е и 4е уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ нуль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $a_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.
- для случая 2е ранее уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ нуль}}, 1)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $a_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными.

IV. если $1 \leq a_2 < n - 3$ (это возможно только в случае $n \geq 5$),

- для случаев 1е, 3е и 4е уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 1)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 1) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 3$ для $n \geq 5$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.
- для случая 2е ранее уже определили, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 3$ для $n \geq 5$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

Таким образом, полностью показали, как надо определить функцию f , чтобы для случаев 1е, 2е, 3е и 4е все n переменных были существенными.

Рассмотрим случай 1а. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$.

Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 3 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим, что $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $a_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} будут существенными. Также положим, что $f(1, 0, 1, \dots, 0) = 0$, тогда переменная x_n также будет существенной.
- $1 \leq a_2 < n - 3$ (это возможно только для $n \geq 5$). Доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 2$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_n являются существенными.
- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда по свойству представления $1 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Из $a_2 = C_{n-1}^2$ следует, что на всех наборах вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где

$\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, в том числе на всех наборах вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, из равенства $b_1 = 0$ следует, в частности, что $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$, а из того, что $b_2 \geq 1$ следует, что можем доопределить функцию так: $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Тогда переменная x_n будет также существенной.

- $a_2 = 0$, поэтому на всех наборах вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, в том числе на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 1а показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 1б. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 3 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим, что $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $b_2 \geq n - 3$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Также определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, тогда переменная x_n также будет существенной.
- $1 \leq b_2 < n - 3$ (возможно только для $b \geq 5$). Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение не меньше, чем $C_{n-1}^2 - (n - 4) \geq n - 3$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_n являются существенными.
- $b_2 = C_{n-1}^2$, тогда по свойству представления $1 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Из $b_2 = C_{n-1}^2$ следует, что на всех наборах вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, в том числе на всех наборах вида

$(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Из того, что $a_2 \geq 1$, следует, что мы можем доопределить $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, отсюда в силу того, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$ (так как $a_1 = 0$), следует, что x_n будет существенной.

- $b_2 = 0$, тогда по свойству представления $1 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Из $b_2 = 0$ следует, что на всех наборах вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$,

выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, в том числе на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 1b показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 2a. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим

$f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку число подобных единичных наборов $n - 2$, а $a_2 \geq n - 2$, то переменные с x_3 по x_n являются существенными.

- $1 \leq a_2 < n - 2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, по-

ложим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 3) > n - 3$ для $n \geq 4$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Так как $a_2 \geq 1$, тогда определим $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, тогда x_n является существенной.

- $a_2 = 0$, тогда $1 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$,

где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Так как $b_2 \geq 1$, тогда определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, тогда x_n является существенной, так как $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$ (поскольку $b_1 = 0$).

- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 2a показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 2d. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 3 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $b_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} существенные. Далее положим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, тогда x_n является существенной.
- $1 \leq b_2 < n - 3$ (возможно для $n \geq 5$). Доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 2$ для $n \geq 5$, тогда переменные с x_3 по x_n являются существенными.
- $b_2 = 0$, тогда на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.
- $b_2 = C_{n-1}^2$, тогда $1 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Так как $a_2 < C_{n-1}^2$, тогда определим $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, тогда x_n является существенной, так как $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$ (в силу $a_1 = n - 1$).

Таким образом, для случая 2d показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 3b. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$, $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 0$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 3 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 3$, а $a_2 \geq n - 3$, то все переменные с x_3 по x_{n-1} — существенные. Кроме этого, положим $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, тогда x_n станет существенной.
- $1 \leq a_2 < n - 3$ (возможно для $n \geq 5$). Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 4) > n - 2$ для $n \geq 5$, то переменные с x_3 по x_n являются существенными.
- $a_2 = 0$, тогда на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Переменные с x_3 по x_n являются существенными.
- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда $1 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 1$. Тогда все переменные с x_3 по x_{n-1} существенные. Дополнительно, так как $b_2 < C_{n-1}^2$, определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$ (заметим, что $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$ в силу $b_1 = n - 1$). Тогда все переменные с x_3 по x_n станут существенными.

Таким образом, для случая 3b показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 3с. Напомним, что среди прочего мы определили для функции f ранее, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 0$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 2$, а $b_2 \geq n - 2$, то все переменные с x_3 по x_n будут существенными.
- $1 \leq b_2 < n - 2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим

$f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 3) > n - 3$ для $n \geq 4$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Дополнительно определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, тогда x_n станет существенной переменной.

- $b_2 = 0$, тогда $1 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, поскольку $a_2 \geq 1$, определим $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, соответственно, в силу того, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, переменная x_n станет существенной.
- $b_2 = C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 3с показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 4с. Напомним, что, среди прочего, мы определили для функции f ранее, что $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(1, 0, 1, \dots, 1, 1) = 0$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 2$, а $a_2 \geq n - 2$, то все переменные с x_3 по x_n будут существенными.
- $1 \leq a_2 < n - 2$. Дополнительно определим f следующим образом: на всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 3) > n - 3$ для $n \geq 4$, то переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, определим $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, тогда x_n станет существенной.
- $a_2 = 0$, тогда $1 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Поскольку $b_2 < C_{n-1}^2$, то

определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, а поскольку $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$ (в силу $b_1 = n - 1$), то x_n станет существенной.

- $a_2 = C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Тогда все переменные с x_3 по x_n будут существенными.

Таким образом, для случая 4с показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим случай 4d. Напомним, что среди прочего, мы определили для функции f ранее, что $f(0, 0, 1, \dots, 1, 1) = 0$, $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Тогда возможны следующие варианты:

- $n - 2 \leq b_2 < C_{n-1}^2$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку таких единичных наборов $n - 2$, а $b_2 \geq n - 2$, то все переменные с x_3 по x_n будут существенными.
- $1 \leq b_2 < n - 2$. Тогда доопределим f следующим образом: на всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, положим $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Поскольку число подобных наборов, на которых f принимает нулевое значение, не меньше $C_{n-1}^2 - (n - 3) > n - 3$ для $n \geq 4$, тогда переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Также определим $f(0, 0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, тогда x_n является существенной.
- $b_2 = 0$, тогда $1 \leq a_2 < C_{n-1}^2$. На всех наборах вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными. Кроме того, определим $f(1, 0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, соответственно, в силу того, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$ (поскольку $a_1 = n - 1$), переменная x_n станет существенной.
- $b_2 = C_{n-1}^2$, тогда на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 1$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для случая 4d показали, как определить функцию f так, что все n переменных будут существенными.

Рассмотрим второй вариант, когда $b_2 = 0$ и $a_2 = 0$. Из следствия 4 и свойства представления следует справедливость соотношения:

$$a_0 + b_1 - a_1 - b_0 = 5B, \quad (2)$$

где $B \in \mathbb{Z}$.

Разберем, как доопределить функцию так, чтобы все переменные стали существенными, для всех девяти случаев.

Случай 1а. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.0a_1.00.$$

Из соотношения 2 следует, что $a_1 = 5l$, где $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, $a_1 \geq 5$.

Ранее для этого случая было получено в том числе, что выполнено $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 1б. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.b_10.00.$$

Из соотношения 2 следует, что $b_1 = 5l$, где $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, $b_1 \geq 5$. Ранее для этого случая определили, что $f(0, 0, 1, \dots, 1) = 1$, в силу того, что $b_2 = 0$, на всех наборах вида $(0, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 1е. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.b_1a_1.00.$$

Из соотношения 2 следует, что $b_1 - a_1 = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$. Ранее для этого случая определили, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$. В силу того, что $b_2 = 0$, для всех наборов вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} существенные.

Случай 2а. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.0a_1.01.$$

Из соотношения 2 следует, что $1 - a_1 = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$.

Если $B = 0$, то это соответствует представлению для числа $X = 10$, этот случай не рассматриваем в рамках данной леммы. Если $B \neq 0$, то получаем, что $a_1 \geq 6$. Ранее для этого случая было в том числе определено, что $f(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 0$, доопределим $f(1, 1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 2d. Представление числа выглядит так:

$$00. \underbrace{\dots}_{\text{нули}}. 00. b_1 C_{n-1}^1. 01.$$

В силу того, что $a_1 = C_{n-1}^1 = n-1$, для всех наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 2e. Представление числа выглядит так:

$$00. \underbrace{\dots}_{\text{нули}}. 00. b_1 a_1. 01.$$

Для данного случая справедливо, что $1 \leq b_1, a_1 < C_{n-1}^1$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_{n-1} являются существенными.

Случай 3b. Представление числа выглядит так:

$$00. \underbrace{\dots}_{\text{нули}}. 00. C_{n-1}^1 a_1. 10.$$

В силу того, что $b_1 = C_{n-1}^1 = n-1$, для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 3с. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.b_10.10.$$

Из соотношения 2 следует, что $b_1 - 1 = 5B$, где $B \in \mathbb{Z}$. Если $B = 0$, то это соответствует представлению для числа $X = 15$, этот случай не рассматриваем в рамках данной леммы. Если $B \neq 0$, то получаем, что $b_1 \geq 6$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1, \dots, 1, 1) = 0$. Поскольку $b_1 \geq 6$, тогда доопределим $f(0, 1, \dots, 1, 0, 1) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для наборов вида $(0, 1, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}}_{1 \text{ ноль}}, 0)$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, 1, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, 0) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 3е. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.b_1a_1.10.$$

Для данного случая справедливо, что $1 \leq b_1, a_1 < C_{n-1}^1$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 4с. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.C_{n-1}^1a_1.11.$$

В силу того, что $b_1 = C_{n-1}^1 = n - 1$, для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(0, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $b_2 = 0$, то для всех наборов вида $(0, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 4d. Представление числа выглядит так:

$$00.\underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.b_1C_{n-1}^1.11.$$

В силу того, что $a_1 = C_{n-1}^1 = n - 1$, для всех наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех

наборов вида $(1, \underbrace{\sigma_2, \dots, \sigma_n}_{2 \text{ нуля}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполнено $f(1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Случай 4е. Представление числа выглядит так:

$$00. \underbrace{\dots}_{\text{нули}}.00.b_1a_1.11.$$

Для данного случая справедливо, что $1 \leq b_1, a_1 < C_{n-1}^1$. Ранее для этого случая, в частности, было определено, что $f(1, 0, 1, \dots, 1) = 1$. Поскольку $a_2 = 0$, то для всех наборов вида $(1, 0, \underbrace{\sigma_3, \dots, \sigma_n}_{1 \text{ ноль}})$, где $\sigma_i \in \{0; 1\}$, выполне-

но $f(1, 0, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = 0$. Следовательно, переменные с x_3 по x_n являются существенными.

Таким образом, для второго варианта также показали, как можно определить функцию f для того, чтобы все n переменных были существенными.

Следует заметить, что при указании на то, как определить функцию f , только для части наборов задано жестко, будет на них функция равна нулю или единице. Соответственно, на оставшейся части наборов при определении функции руководствуемся алгоритмом, описанным в лемме 8. Это доопределение не будет влиять на существенность переменных, и, следовательно, для некоторых чисел по представлению можно построить несколько функций без фиктивных переменных.

Таким образом, лемма доказана, показали, что для любой дроби $X/5^n$, у которой $10 \leq X \leq 5^n/2$, $n \geq 4$, сможем построить n -местную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ со всеми существенными переменными, которая индуцирует вероятностную функцию $\hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, для которой $\exists x_i \in A(5), i \in \{1, \dots, n\} : \hat{f}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = X/5^n$. $\square$

Теорема 3. Класс булевых функций $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ является конечно порождающим в $\Gamma[5]$. В качестве начального множества можно взять $A(5)$.

Доказательство. Пусть $X/5^n$ — произвольная правильная дробь, $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $X/5^n$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Будем проводить доказательство по индукции. Пусть $n = 1$, очевидно, что $X/5$ принадлежит $A(5)$, а значит, $X/5$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Пусть для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выполняется, что всякая правильная дробь $X/5^i$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Докажем, что для $i + 1$ всякая правильная дробь $Y/5^{i+1}$ также принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Обозначим как $f_u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$ универсальную функцию и $\hat{f}_u(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{x}_3 - \hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{x}_1\hat{x}_2 = \hat{x}_3 + \hat{x}_1(\hat{x}_2 - \hat{x}_3)$ — индуцированную ей вероятностную функцию. Очевидно, что $f_u(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{Z}$.

Рассмотрим дробь $Y/5^{i+1}$. Для неё возможно несколько вариантов.

1. Если $Y \bmod 5 = 0$, то числитель дроби Y может быть представлен как $Y = 5^m D$, где $m \in \mathbb{N}$, $D \bmod 5 \neq 0$. Тогда $Y/5^{i+1} = 5^{m-1} D/5^i$, отсюда следует, что дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.
2. Если $5^i < Y < 4 \cdot 5^i$, то используем способ построения дроби $Y/5^{i+1}$, изложенный Ф. И. Салимовым в [2]. Представим $Y = a \cdot 5^i + b$, где $1 \leq a \leq 3$, $0 < b < 5^i$. Тогда очевидно, что таким образом можем выразить все числители, кроме $2 \cdot 5^i, 3 \cdot 5^i$, которые кратны 5. Дробь $Y/5^{i+1}$ можем получить следующим образом:

$$\begin{aligned} Y/5^{i+1} &= \widehat{f}_u(b/5^i, (a+1)/5, a/5) = a/5 + b/5^i((a+1)/5 - a/5) = \\ &= a/5 + b/5^i \cdot 1/5 = (5^i \cdot a + b)/5^{i+1}, \end{aligned}$$

при этом $b/5^i, (a+1)/5, a/5$ принадлежат $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Таким образом, дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

3. Если $0 < Y < 5^i$, то запишем $Y/5^{i+1}$ следующим образом $Y/5^{i+1} = (Y \cdot 5^2)/5^{i+3}$. Очевидно, что выполнено $20 < 25 \leq Y \cdot 5^2 < 5^{i+2} < 5^{i+3}/2$. Тогда для числителя $Y \cdot 5^2$ согласно теореме 1 по определению 4 можем построить представление с использованием $i+3$ разрядов, а по представлению согласно леммам 8 и 10 — построить функцию f с $(i+3)$ -мя существенными переменными, чья индуцированная функция позволяет выразить дробь $(Y \cdot 5^2)/5^{i+3}$, используя значения переменных из множества $A(5)$. Поскольку $Y \cdot 5^2$ кратно 5, то по лемме 2 получаем, что $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{R}}_5 \cup \widehat{\mathcal{Z}}$, следовательно, $f \in \mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$, и дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.
4. Если $4 \cdot 5^i < Y < 5^{i+1}$, то имеем, что по доказанному ранее $1 - Y/5^{i+1}$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Тогда согласно следствию 2 дробь $Y/5^{i+1}$ с числителем в указанном диапазоне тоже принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$.

Таким образом, по индукции имеем, что любая правильная дробь $X/5^n$ принадлежит $V_{\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}}(A(5))$. Следовательно, класс булевых функций $\mathcal{R}_5 \cup \mathcal{Z}$ является конечно порождающим в $\Gamma[5]$. $\square$

Список литературы

- [1] Схиртладзе Р.Л. О синтезе p -схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН ГрузССР. 1961. Т. 26. №2 С. 181–186.
- [2] Салимов Ф.И. Об одном семействе алгебр распределений // Изв. вузов. Математика. 1988. №7. С. 64–72.
- [3] Колпаков Р.М. Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π -сетями // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1992. №6. С. 62–65.
- [4] Яшунский А.Д. Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах // Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 320–335.
- [5] Трифонова Е.Е. О бесконечной порожденности пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей // Изв. высш. учебн. завед. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2021. №1. С. 39–48.
- [6] Трифонова Е.Е. О некоторых свойствах конечно порождающих систем преобразователей p -ичных дробей // Дискретный анализ и исследование операций. 2022. Т. 29. №4. С. 124–135.
- [7] Трифонова Е.Е. О числе p -сократимых индуцированных вероятностных функций // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2023. Т. 27. №1. С. 134–142.
- [8] Трифонова Е.Е. О неповторно замкнутых классах булевых функций, индуцирующих некоторые преобразования рациональных вероятностей // Дискретная математика. 2025. Т. 37. №1. С. 119–129.
- [9] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб.пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовниченко. 4-е изд., стер. М.: Высш шк. 2003. 384 с.