



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 40 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.А. Карташев, Т. Цзян

Определение
пространственного
положения колесного
аппарата

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Карташев В.А., Цзян Т. Определение пространственного положения колесного аппарата // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 40. 16 с. EDN: [HVRMMM](https://doi.org/10.26907/2071-2898.2025.40)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-40>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.А. Карташев, Т. Цзян

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО
ПОЛОЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО АППАРАТА**

Москва, 2025

Карташев В.А., Цзян Т.

Определение пространственного положения колесного аппарата

Описывается алгоритм определения положения в пространстве многоколесного аппарата без поворотных колес при его перемещении по твердой неровной поверхности. Кинематическая схема шасси аналогична используемым в современных напланетных исследовательских аппаратах. Для определения положения достаточно задать точку контакта с поверхностью первого колеса и направление его движения. Углы наклона корпуса и точки контакта всех колес находятся путем решения геометрической задачи.

Алгоритм может использоваться при численном моделировании движения колесного аппарата по твердой неровной поверхности и в системах виртуальной реальности с высокой степенью реалистичности.

Ключевые слова: напланетный исследовательский аппарат, виртуальная реальность, моделирование движения, колесное транспортное средство

Kartashev V.A., Jiang T.

Determination of wheel vehicle spatial position

The paper describes an algorithm for determining the position in space of a multi-wheeled vehicle without rotating wheels when it is moving on a hard uneven surface. The kinematic scheme of the landing gear is similar to those used in modern alien research vehicles. To determine the position, it is enough to set the point of contact with the surface of the first wheel and the direction of its movement. The angles of inclination of the body and the contact points of all wheels are found by solving a geometric problem.

The algorithm can be used in numerical simulation of the movement of a wheeled vehicle on a hard uneven surface and in virtual reality systems with a high degree of realism.

Keywords: planetary research vehicle, virtual reality, simulating of motion, wheel vehicle

Оглавление

Введение.....	3
1. Кинематическая схема колесного аппарата.....	4
2. Определение пространственного положения аппарата на поверхности...	6
3. Задание рельефа поверхности и колеи колеса 1.....	7
4. Линия центра подвески колес.....,,,	9
5. Алгоритм определения угла наклона корпуса	10
6. Моделирование движения по неровному рельефу.....	13
Заключение.....	15
Литература.....	15

Введение

В настоящее время возрос интерес к исследованию поверхности Луны и ближайших планет с помощью напланетных аппаратов. Характеристики аппаратов должны соответствовать задачам, которые на них возлагаются. Это требование определяет необходимость большого объема работ по компьютерному и натурному моделированию.

Математическое моделирование используется для выработки технических требований к конструкции и ее элементам. Виртуальные модели позволяют выполнять тренировку экипажей для наработки навыков безопасного вождения, оценивать проходимость и вырабатывать принципы управления при движении по сложной поверхности [1-3].

При решении этих задач возникает необходимость в определении точного положения геометрического образа модели аппарата на рельефе поверхности.

В литературе можно найти примеры геометрических моделей движения двухосных транспортных средств, которые используются для исследования езды по ровной поверхности [4, 5].

В исследованиях движения по дороге с неровностями изучаются колебания подвески транспортного средства, оцениваются время успокоения при наезде на небольшое препятствие и частотные характеристики. При исследовании проходимости шасси рассматриваются силы, возникающие при наезде колесом на одиночное препятствие [6, 7].

Все перечисленные задачи не связаны с определением точного положения колесного аппарата на поверхности, что существенно упрощает их решение и позволяет получить соотношения, пригодные для аналитического анализа.

Полученные результаты используются в тренажерах и компьютерных играх для создания у человека ощущения езды по дороге с небольшими неровностями. При этом система моделирования воспроизводит не геометрическое движение кузова, а колебания с заданной частотой и амплитудой, которые изменяются в зависимости от скорости езды [8-10].

Для математического моделирования движения напланетных аппаратов на этапе их проектирования необходима достаточно высокая точность определения положения корпуса в пространстве и точек контакта колес для того, чтобы учесть нагрузки на конструкцию и оценить проходимость по сложному рельефу поверхности.

В работе [11] предложено точное решение задачи для транспортного средства с двумя рычажными подвесками без поворотных колес при его движении в вертикальной плоскости. В трехмерной постановке такое движение можно рассматривать как езду вдоль образующей цилиндрической поверхности.

Трехмерная задача описания взаимодействия колесного транспортного средства с поверхностью является существенно более сложной, чем двумерная.

Например, в ней могут иметь место случаи отсутствия контакта колес с поверхностью.

В настоящей работе описание алгоритма решения трехмерной задачи определения пространственного положения ведется для аппарата с двумя рычажными подвесками без поворотных колес. Расстояние между колесами подвески неизменно. Подвески могут свободно поворачиваться в одной плоскости.

Если положение точки контакта первого колеса и направление его движения известны, то угол тангажа корпуса получается решением двумерной задачи, которое изложено в работе [11].

Угол наклона корпуса находится с помощью решения итерационной задачи. Условием завершения итераций является такое положение аппарата, в котором поверхности касаются все колеса, за исключением, может быть, пары колес одной из подвесок.

Разработанный алгоритм может использоваться для компьютерного моделирования движения колесного аппарата по твердой неровной поверхности при численном моделировании и в системах виртуальной реальности с высокой степенью реалистичности.

Программная реализация алгоритма осуществляет визуализацию его движения и получаемых в результате моделирования данных в масштабе реального времени.

1. Кинематическая схема колесного аппарата

Исследуемый аппарат состоит из корпуса в виде прямоугольного

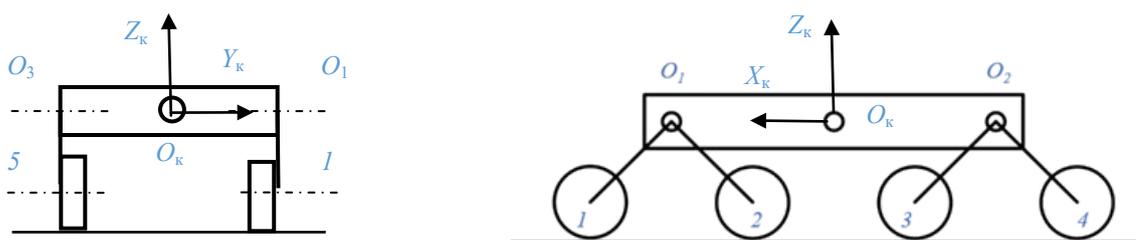


Рис. 1

параллелепипеда. К корпусу с каждой стороны подвешены по две независимые рычажные подвески (рис. 1). Каждая подвеска состоит из двух рычагов, угол между которыми постоянен. В нижней части каждого рычага прикреплено колесо. Подвескам левых колес присвоены номера 1-2. Подвескам правых – номера 3-4.

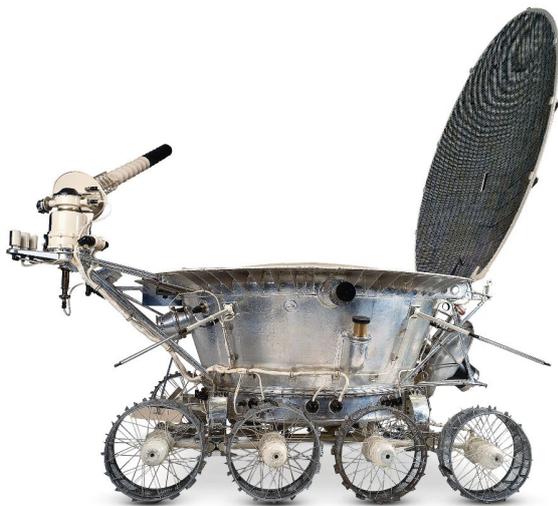
С левой части корпуса находятся колеса с номерами 1-4. Колесо с номером 1 является первым по ходу движения. Колеса правой стороны имеют номера 5-8.

Подвеска каждой пары колес одной стороны свободно вращается относительно своей оси. Плоскость подвески совпадает с боковой гранью параллелепипеда корпуса и плоскостью колес (рис. 1).

В устойчивом положении аппарат опирается на поверхность не менее чем тремя парами колес. Колеса одной пары могут не доставать до рельефа, т.е. находиться в воздухе.

Центр масс корпуса O совпадает с его геометрическим центром.

С корпусом жестко связана подвижная система координат $O_k X_k Y_k Z_k$. Ось $O_k X_k$ направлена вдоль оси параллелепипеда вперед по ходу движения. Ось $O_k Z_k$ направлена вертикально вверх. $O_k Y_k$ дополняет оси до правой тройки.



а) Луноход-1

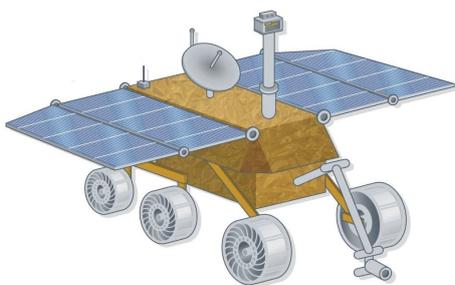


б) Подвеска колес

Рис. 2

Исследуемая кинематическая схема аппарата имеет общие элементы с кинематической схемой шасси советских Луноходов (рис. 2) [12], лунным ровером Китая Yutu (рис. 3а)[13]. Все они имеют рычажную подвеску, не содержащую поворотных колес.

У марсоходов США Curiosity и Opportunity (рис. 3б) [14] передние и



а) Лунный ровер Yutu



б) Марсоход Curiosity

Рис. 3

задние колеса поворотные. Полученные в работе результаты могут быть применены при моделировании прямолинейного движения этих аппаратов.

2. Определение пространственного положения аппарата на поверхности

Предполагается, что поверхность, по которой передвигается колесный аппарат, является абсолютно твердой и ее рельеф состоит из многоугольников. Принимается также, что колесо 1 всегда находится в контакте с поверхностью, перемещаясь по заданной колее.

Под колеей подразумевается след, который оставляет при движении колесо. Если поверхность представлена многоугольниками, то колея состоит из множества элементов, лежащих внутри многоугольников, по которым проехало колесо. Они могут не иметь общих точек, например, при движении колеса через внутренний угол.

Будем предполагать, что элемент колеи, который лежит внутри многоугольника, представляет собой участок ломаной. Каждое ее звено принадлежит линии пересечения плоскости колеса с поверхностью многогранника.

В дальнейшем колеей колеса будем называть непрерывную ломаную линию, которая получается пересечением плоскости колеса с поверхностью, не принимая во внимание то обстоятельство, что некоторые ее вершины недоступны для колеса.

Покажем, что в сделанных предположениях положение аппарата в пространстве однозначно определяется точкой контакта колеса 1 с рельефом и направлением движения колеса 1.

Для этого достаточно узнать углы наклона корпуса и точки контакта всех колес.

Угол рысканья определяется направлением отрезка ломаной колеи колеса 1 ввиду того, что плоскость колес всегда параллельна плоскости $O_k X_k Z_k$, которая жестко связана с корпусом. По этой же причине угол наклона плоскости P_l колес левой стороны совпадет с креном корпуса.

Если угол крена известен, то колею колес левой стороны в плоскости P_l можно найти пересечением ее с поверхностью, по которой перемещается колесный аппарат. Для нахождения точек контакта достаточно воспользоваться алгоритмом, описанным в работе [11]. В результате определятся угол тангажа и положение колес левой стороны аппарата в плоскости P_l .

Затем надо построить плоскость правых колес P_r и вычислить их положение на поверхности.

Если угол крена выбран неудачно, то при вычислении положения правых колес окажется, что либо они находятся в воздухе, либо ниже поверхности.

Для нахождения нужного значения угла крена можно использовать алгоритм, который описан в настоящей работе.

3. Задание рельефа поверхности и колеи колеса 1

Перед проведением численных экспериментов необходимо задать поверхность, по которой перемещается аппарат. Это удобно делать с помощью разработанного редактора. В нем поверхность задается двумя рядами плоских

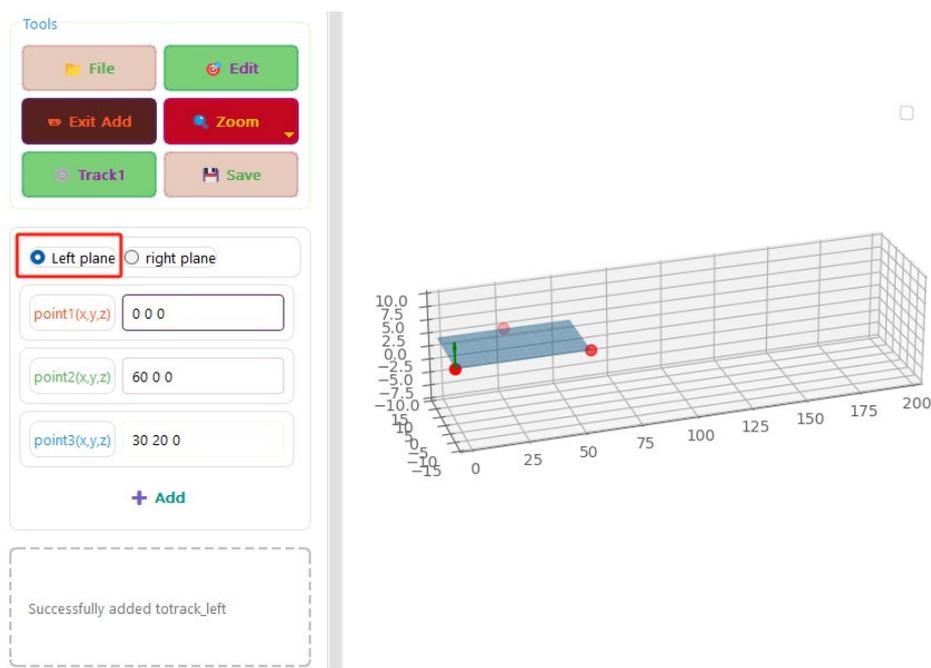


Рис. 4

четыреугольников, лежащими по разные стороны относительно направления движения.

Диалоговое окно редактора показано на рис. 4.

Нажатие кнопки **Add** делает доступным ввод параметров участка рельефа.

Пользователь должен указать сторону, на которой расположен вводимый участок. Это делается нажатием кнопок `left_plane` и `right_plane`.

В окна ввода надо ввести координаты трех точек плоскости участка и нажать кнопку `Add` под окнами ввода. Координаты точек указываются через пробел. Точки определяют вершины прямоугольника и середину противоположной стороны.

Введенные точки являются общими для смежных участков и используются при вводе очередного участка поверхности.

После того, как четырехугольник задан, редактор вычисляет коэффициенты уравнений плоскости, на которой он лежит, и координаты направляющих векторов сторон четырехугольника.

Участок закрашивается в один из заранее заданных цветов.

Завершение задания участка осуществляется нажатием кнопки +Add. При этом редактор автоматически рассчитает вектор нормали.

Формирование левой и правой частей рельефа может осуществляться в произвольной последовательности (рис. 5).



Рис. 5

Для задания колеи колеса 1 необходимо нажать кнопку Track1 (рис. 6). Если колея задается в первый раз, то автоматически генерируется ломаная, узлы которой находятся на линии пересечения плоскостей рельефа. Пользователю достаточно произвести коррекцию координат узлов.

Траектория колеи представляет собой набор вершин и векторов нормалей поверхности. Справа от узлов ломаной линии колеи выводятся их координаты и рисуются векторы нормали к поверхности.

При задании вершин ломаной следует иметь в виду, что они должны находиться в левой части поверхности.

Изменение положения узлов колеи осуществляется следующим образом.

При нажатии кнопки Update узел, координаты которого будут изменяться, окажется выделен звездочкой, его координаты появятся в окнах ввода.

Для коррекции положения узла достаточно задать одну из координат. Остальные координаты рассчитываются автоматически в силу того, что узел лежит на линии пересечения плоскостей.

Ввод координат завершается нажатием кнопки Update. После этого будет возможна коррекция следующего узла траектории.

Нажатие кнопки Save приводит к сохранению информации о рельефе и колеи на внешнем носителе.

Для того чтобы считать подготовленную ранее структуру с данными рельефа, следует нажать кнопку File.

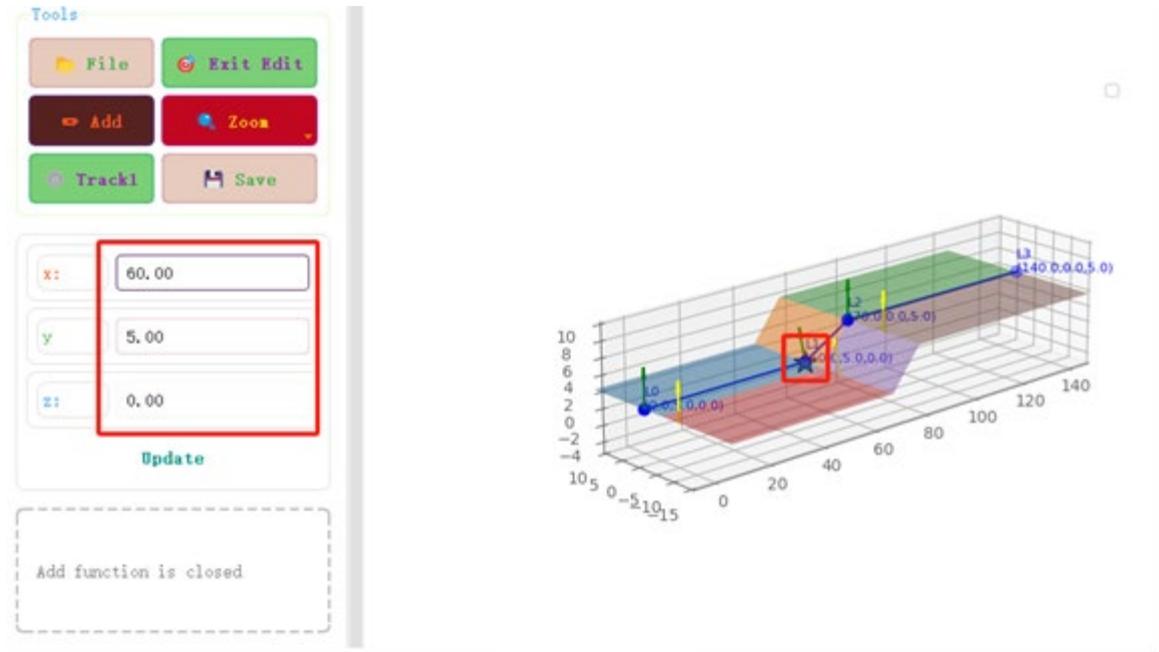


Рис. 6

4. Линия центра подвески колес

При нахождении угла крена корпуса необходимо определить, достижима ли поверхность для колес правой стороны.

Решение этой задачи осуществляется в два этапа.

Согласно сделанному предположению, рельеф представляет собой многогранную поверхность. Поэтому колея колес представляет собой ломаную

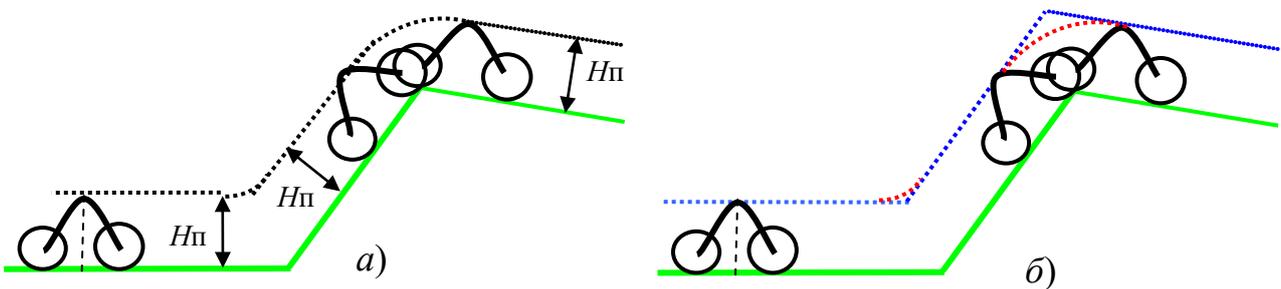


Рис. 7

линию, которая отражает пересечение плоскости колес с рельефом. На рис. 7 колея отмечена зеленым цветом.

При движении колес по колее центр подвески описывает кривую, которая в дальнейшем называется линией центра подвески. На рис. 7а она показана пунктиром.

Если размеры многоугольников, из которых составлен рельеф поверхности, больше расстояния между осями колес, то линия центра содержит прямолинейные участки. Они удалены от поверхности на величину $H_{\text{п}}$, равную расстоянию от центра подвески до поверхности.

В проведенном исследовании линия центра подвески заменялась ломаной. На рис. 7б она показана синим цветом. Основанием для такой замены являются малые отклонения ломаной от криволинейных участков (на рисунке они отмечены красным цветом). Непосредственно из приведенного рисунка можно заключить, что величина отклонений в рассматриваемом примере кратно меньше $H_{\text{п}}$.

Перечислим свойства линии центра подвески колес, которые используются в алгоритме определения угла наклона корпуса.

Свойство 1. Линии центров подвески передних и задних колес одной стороны совпадают.

Действительно, подвески колес одинаковы, они находятся в одной плоскости, передние и задние колеса перемещаются по одной колее, которая лежит в плоскости колес.

Свойство 2. Колеса подвески касаются поверхности тогда и только тогда, когда линия центра подвески проходит через центры шарниров подвески на корпусе аппарата.

Достаточность утверждения непосредственно следует из определения линии центра подвески колес.

Перейдем к доказательству необходимости.

Пусть шарнир подвески на корпусе лежит выше линии центра подвески колес. В этом случае колеса не касаются поверхности. В противном случае линия колеи проходила бы через шарнир подвески на корпусе.

Для абсолютно твердой поверхности шарнир подвески не может располагаться ниже линии центра подвески колес. Если бы такое имело место, то расстояние между осью и рельефом в плоскости колес оказалось бы меньше $H_{\text{п}}$.

Из свойства 2 следует, что если шарнир подвески на корпусе находится на линии центра подвески, то колеса касаются поверхности. Если центр шарнира находится выше линии центра, то аппарат не опирается на эту пару колес и они находятся в воздухе.

5. Алгоритм определения угла наклона корпуса

Для определения угла наклона корпуса используется алгоритм, блок-схема которого приведена на рис. 8.

В блоке 1 задается величина угла наклона корпуса. При первом обращении к алгоритму используется значение, которое было получено на предыдущем шаге моделирования.

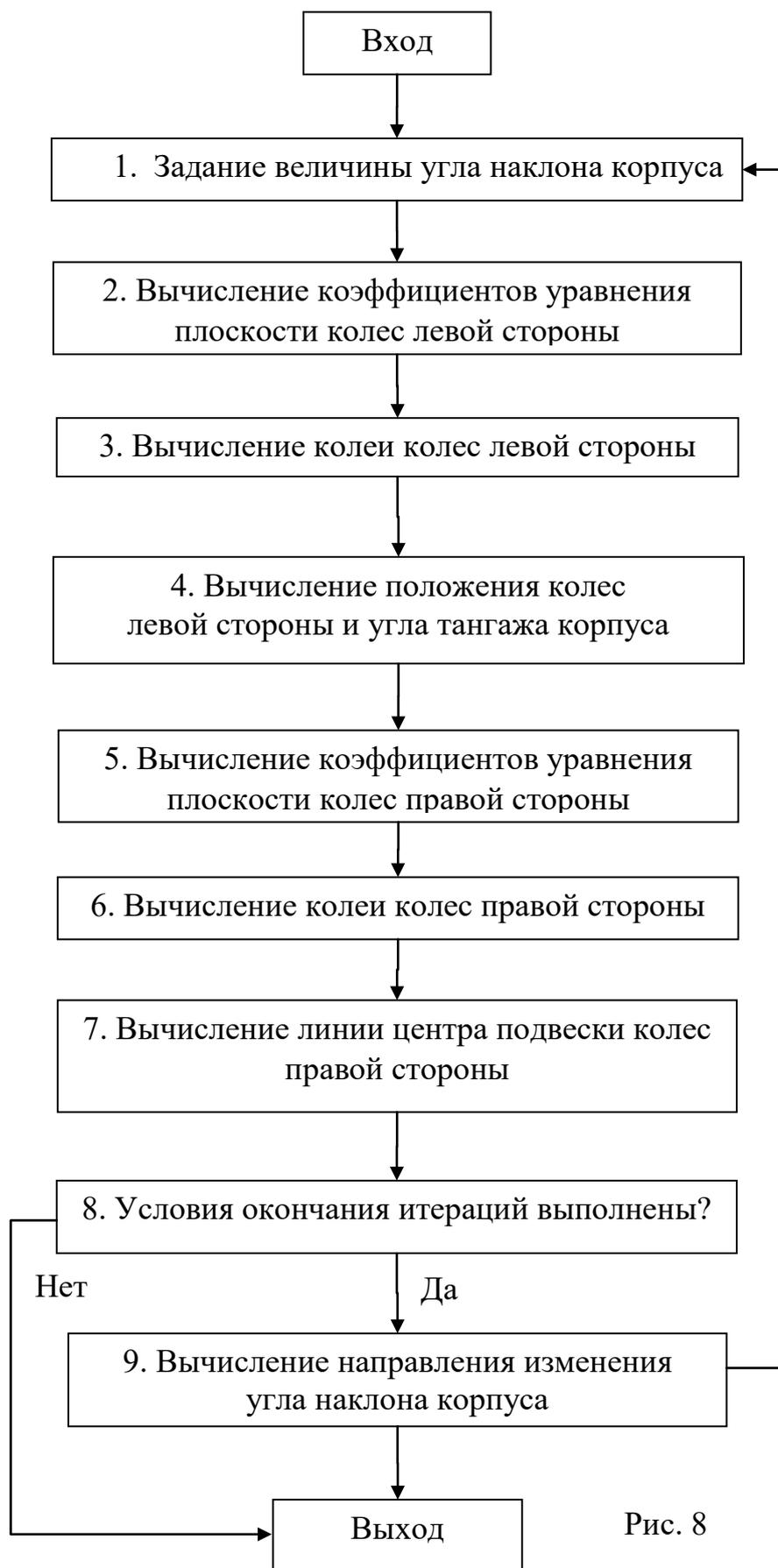


Рис. 8

На последующих шагах знак изменения угла наклона выбирается с учетом результата работы блока 9. Величина изменения учитывает требуемую точность решения задачи. При необходимости она может быть уменьшена.

В блоке 2 вычисляются коэффициенты уравнений плоскости левых колес. Для этого используются угол наклона корпуса, точка контакта колеса 1 с поверхностью и направление его колеи в точке контакта. Колея колеса 1 задается в начале моделирования.

Можно считать, что при определении угла наклона корпуса плоскость левых колес вращается относительно оси вектора направления колеи. Угол поворота равен углу наклона корпуса.

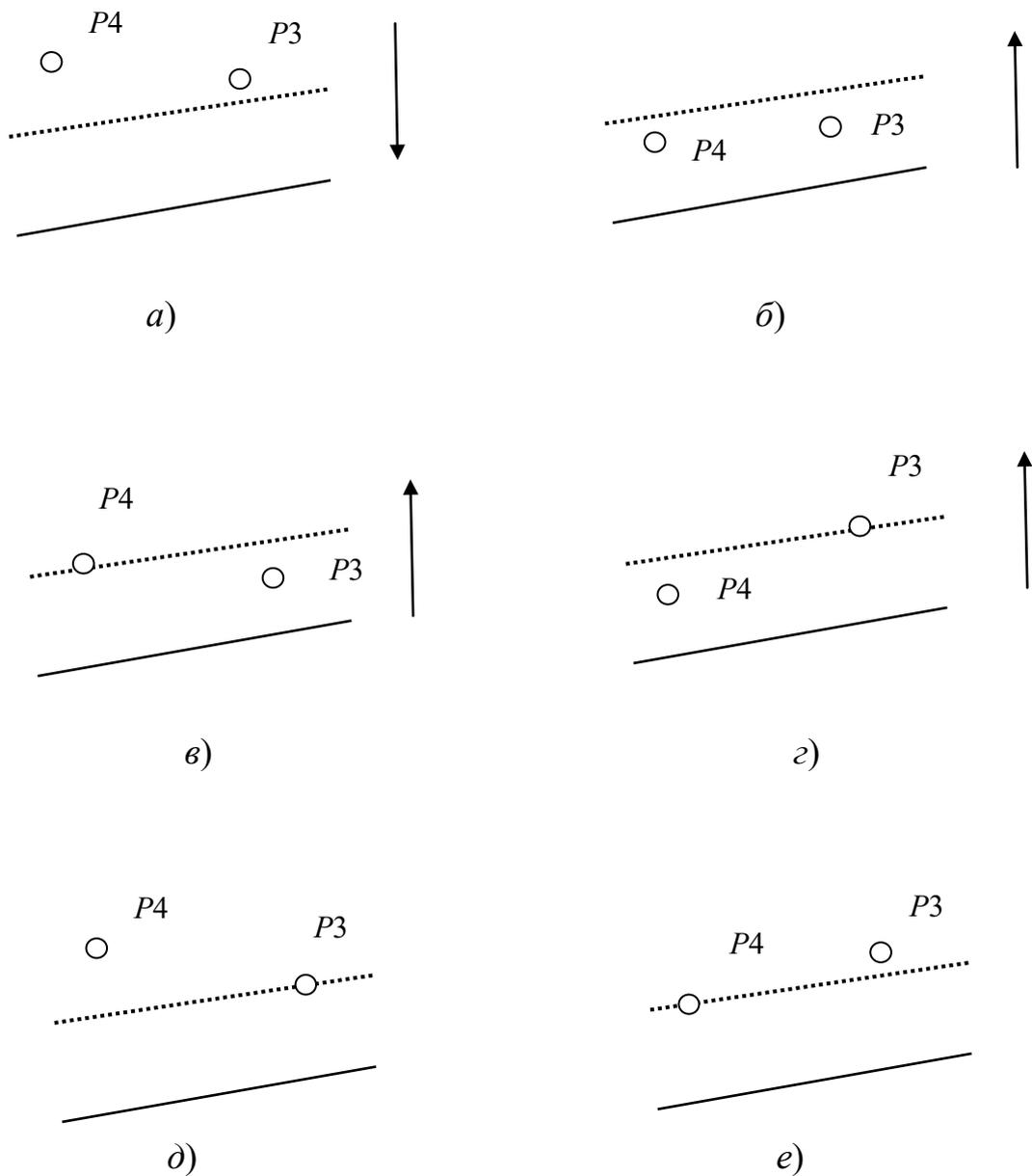


Рис. 9

В блоке 3 вычисляется колея колес левой стороны. Колея определяется пересечением плоскости левых колес с рельефом.

После того, как колея левых колес найдена, используется алгоритм, разработанный в работе [11], для вычисления положения точек контакта колес левой стороны и угла тангажа корпуса аппарата. Эта задача решается в блоке 4.

В блоке 5 вычисляются коэффициенты уравнения плоскости колес правой стороны.

Плоскость правых колес получается сдвигом плоскости левых колес на вектор, который соединяет центры шарниров разных сторон на корпусе. Указанный вектор постоянен в осях $O_K X_K Y_K Z_K$. Поэтому неизвестной константой в уравнении плоскости правых колес является только свободный член.

Его величину можно найти, подставив в качестве неизвестных координаты точки одной из двух подвесок правой стороны.

После того, как уравнение плоскости правых колес найдено, в блоке 6 определяется колея правых колес. Эта задача решается пересечением плоскости правых колес с поверхностью.

Колея представляет собой ломаную, каждый узел которой является точкой пересечений трех плоскостей: плоскости колес и плоскостей двух смежных многоугольников поверхности. Координаты узлов находятся путем решения системы линейных уравнений соответствующих плоскостей.

В блоке 7 строится линия центра подвески колес правой стороны. Построение осуществляется способом, описанным в разделе 3.

В блоке 8 проверяются условия окончания работы алгоритма.

Для этого оценивается положение центров шарниров подвесок с правой стороны корпуса относительно линии центра подвесок колес, построенной в блоке 7.

Все возможные случаи взаимного положения центра одного шарнира перечислены в следствии к свойству 2 в предыдущем разделе. На рис. 9 показаны все возможные варианты расположения двух шарниров корпуса.

Сплошная линия означает поверхность, пунктирная – линию центра подвески колес. Окружности $P3$ и $P4$ обозначают положение центров шарниров подвесок 3 и 4. Стрелка указывает направление изменения угла наклона корпуса, которое необходимо для решения задачи.

Если обе точки находятся выше линии центра подвески (рис. 9а), то угол наклона надо изменить в таком направлении, чтобы центры шарниров приблизились к линии.

Если хотя бы одна точка находится ниже линии центра подвески (рис. 9б-г), то угол наклона корпуса надо изменить таким образом, чтобы центр соответствующего шарнира переместился в сторону линии.

Окончанием итераций является случай, в котором одна из точек ($P3$ или $P4$) находится на линии центра подвески или на расстоянии, не превышающем некоторой величины (заданной пользователем в условии прекращения

итераций), при этом вторая точка лежит на линии либо расположена выше нее (рис. 9д и 9е).

6. Моделирование движения по неровному рельефу

На рис. 10-11 показаны результаты моделирования движения колесного аппарата по неровной поверхности. Рельеф поверхности содержит 8 участков.

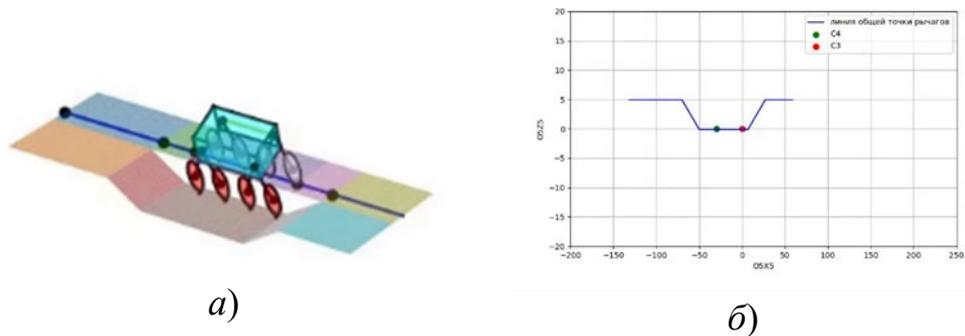


Рис. 10

Каждый из них выделен отдельным цветом.

Левая часть поверхности горизонтальная. Правая имеет впадину. На рис. 10а изображен аппарат в момент движения по впадине. Диски колес левой стороны прозрачные, колеса правой стороны выделены красным.

Корпус аппарата наклонен в сторону впадины.

На рис. 10б синим цветом отмечена линия центра подвески правых колес. Красная точка показывает положение центра шарнира подвески колес 5 и 6. Зеленая точка – положение шарнира подвески колес 7 и 8.

Обе точки находятся на линии центра подвески. Это означает, что все колеса правой стороны касаются поверхности.

На рис. 11а показан аппарат при его подъеме по склону. На рис. 11б изображено положение центров шарниров на корпусе относительно линии центров подвесок.

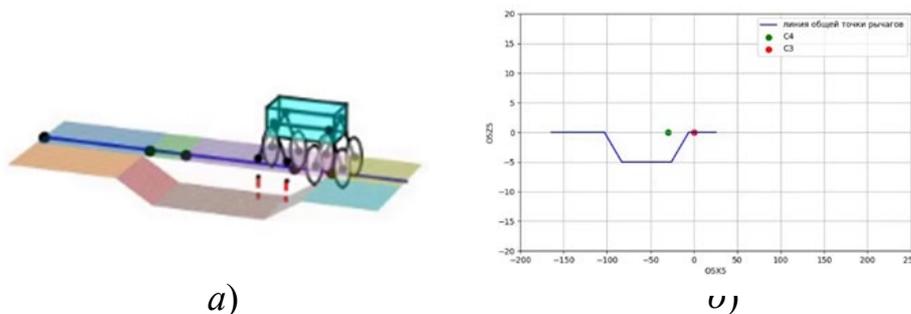


Рис. 11

На рисунке можно заметить, что на линии центров подвесок находится только красная точка. Из этого следует, что поверхности касаются колеса 5 и 6. Колеса 7 и 8 не достают до поверхности и находятся в воздухе. Они не участвуют в движении, поэтому на рис. 11а не изображены.

Заключение

В работе описан алгоритм определения пространственного положения колесного транспортного средства с двумя рычажными подвесками на каждой оси без поворотных колес. Рассматриваемая кинематическая схема аналогична применяемой в напланетных исследовательских аппаратах, поэтому полученные результаты могут быть использованы для исследования их прямолинейного движения.

При движении по неровной поверхности часть колес может не иметь контакта с поверхностью. Такое состояние уменьшает тяговые возможности аппарата.

Предложенный алгоритм позволяет определить возможность возникновения такого состояния аппарата на этапе планирования траектории перемещения путем геометрического моделирования.

Определение точного пространственного положения колесного аппарата на неровной поверхности может использоваться в системах виртуальной реальности для создания высокой степени реалистичности движения.

Литература

1. Alhajeri Majid, Ceriotti Matteo, Worrall Kevin. Model-based systems engineering simulation tool for the design and performance analysis of modular Lunar rovers. 74 International Astronautical Congress (IAC), 2023.
2. Gao Haibo, Deng Zongquan, Li Weihua. Advances in Simulation of Planetary Wheeled Mobile Robots. Mobile Robot: Current Trends, 2011, DOI:10.5772/25548/
3. Hellerer Matthias, Schuster Martin, Lichtenheldt Roy. Software-In-The-Loop Simulation Of A Planetary Rover. Conference SAPAS, 2016.
4. Локтионова О.Г., Яцун С.Ф., Рублев С.Б., Волкова Л.Ю., Наумов Г.С. Моделирование движения трехзвенного робота с управляемыми силами трения по абсолютно гладкой горизонтальной поверхности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета, № 91, 2013, С. 679-689.
5. Толстолуцкий В.А. Методология моделирования функционирования многоэлементных мобильных машин на плоской горизонтальной поверхности Молодой ученый. Молодой ученый № 11 (58), 2013, С. 186-191.
6. Вольская Н.С. Оценка проходимости колесных машин при движении по неровной грунтовой поверхности. Издательство МГИУ, 2007. 215 с.

7. Чичекин И.В., Агейкин Я.С., Вольская Н.С. Моделирование взаимодействия колесной машины с неровной грунтовой поверхностью // «Проектирование колесных машин», доклады на конференции. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 10 с.

8. Иванников С.В., Родионов Г.Л., Сидоренко А.С. О построении математической модели движения автомобиля // Труды МАИ, № 18, 2005. 7 с.

9. Лянденбургский В.В., Родионов Ю.В., Пылайкин Ю.А., Шаронов Г.И., Ильина И.Е. Тренажер для обучения курсантов вождению автомобиля и контроля корректирующих действий инструктора. Патент РФ на полезную модель RU 152219 U1 от 15.07.2014.

10. Радионов А.А., Чернышев А.Д. Математическая модель движения автомобиля // Инновационный транспорт, № 4(18), 2015. С. 69-73.

11. Карташев В.А., Цзян Т. Модель движения колесного аппарата по неровной поверхности // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2023. № 73. 14 с.

12. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Луноход-1>

13. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Yutu>.

14. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Кьюриосити>