ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.А. Забродина, Л.А. Плинер

Моделирование эволюции протопланетного диска при условии осевой симметрии

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Забродина Е.А., Плинер Л.А. Моделирование эволюции протопланетного диска при условии осевой симметрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 44. 34 с. EDN: ZGVEWP
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-44

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е.А. Забродина, Л.А. Плинер

Моделирование эволюции протопланетного диска при условии осевой симметрии

Москва — 2025

Забродина Е.А., Плинер Л.А.

Моделирование эволюции протопланетного диска при условии осевой симметрии

На основе численных расчётов исследуются газодинамические процессы в протопланетном облаке, близкие к стационарным. В рамках двумерной методики, основанной на схеме С.К. Годунова, предлагаются дополнения, касающиеся более точного учёта гравитационных и центробежных сил.

Ключевые слова: протопланетный диск, гравитация, вращение

Ekaterina Alekseevna Zabrodina, Ludmila Arkadyevna Pliner.

Simulation of proto-planetary disk evolution under condition of axial symmetry

On the base of numerical calculations quasi-stationary gas-dynamic processes in proto-planetary cloud are investigated. In the frame of 2D Godunov's method some additions are proposed for more accurate account of gravitational and centrifugal forces.

Key words: proto-planetary disk, gravity, rotation

Оглавление

1. Задача о протопланетном диске 3

2. Система уравнений 4

3. Разностная схема 6

4. Расчет «правых частей» в уравнениях для компонент скорости 13

5. Распад разрыва 15

6. Расчет без учета собственного гравитационного поля 23

7. Расчет с учетом собственного гравитационного поля 26

8. Заключение 33

Библиографический список 34

1. Задача о протопланетном диске

Данная работа посвящена совершенствованию методики моделирования эволюции протопланетного диска, описанного в обзоре [1] и предшествующих препринтах. Диск имеет форму тора, в центре которого находится звезда. Притяжение звезды частично уравновешивается центробежной силой за счёт вращения. Изучается влияние собственного гравитационного поля диска на распределение вещества внутри. Проверяется возможность образования колец, предшествующих появлению планет.

В основе постановки задачи лежат газодинамические уравнения Эйлера с учётом вращения и гравитации в двумерном осесимметричном приближении. Ось симметрии совпадает с осью вращения диска. В качестве теста взято начальное состояние диска, полученное аналитически из условия стационарности ([1], глава II). В нем учитывается только притяжение центрального точечного объекта (Солнца), но не учитывается собственный гравитационный потенциал диска.

При решении нестационарных уравнений заданное стационарное начальное состояние не должно изменяться со временем. Используемый численный метод, основанный на схеме Годунова с решением задачи о распаде разрыва [2], строго говоря, этого не позволяет. Речь идёт о том, чтобы минимизировать возникающие численные возмущения и не дать им развиваться как можно дольше во времени. Это делается для того, чтобы рассчитывать эволюцию действительно нестационарных моделей и отличать физические эффекты от численных.

Стационарное начальное состояние предполагает нулевые скорости в плоскости, перпендикулярной направлению вращения, но распределение давления, а также плотности и энергии, не является постоянным по пространству. Однако при решении задачи о распаде разрыва нулевые скорости могут получаться только при постоянном давлении. Так как вещество находится в силовом поле, со временем эти скорости будут нарастать, и стационарное состояние не сохранится. Чтобы этого избежать, предлагается уже на этапе распада разрыва учитывать ненулевые силы, которые компенсируют градиент давления. Однако полученные для этого новые формулы, хоть и значительно уменьшают скорость, сами по себе приводят к неустойчивости общей схемы. Поэтому потребовалось внести уточнения в расчёт интегральных представлений действующих сил. В частности замечено, что допустимая погрешность для скорости вращения не должна превышать десятой доли процента, чтобы направление ускорения не поменяло знак на противоположный. При этом разница скоростей вращения в соседних по радиусу ячейках сетки, как правило, в несколько раз больше. Более того, для вращательного уравнения нет адекватных граничных условий. Поэтому предлагаемые ниже формулы, возможно, не окончательны.

2. Система уравнений

Будем предполагать, что задача об эволюции протопланетного диска Солнца имеет осевую симметрию. В этом случае трехмерная задача сводится к двумерной, которая в цилиндрической системе координат (x,r,θ) описывается следующими уравнениями.

Ниже используются обозначения:

x – координата вдоль оси вращения (т.е., оси симметрии),

r – цилиндрический радиус,

θ – угол поворота,

t – время,

ρ – плотность,

компоненты скорости:

u – вдоль оси,

v – вдоль радиуса,

ω – вращательная угловая,

$w = \omega \cdot r$ – вращательная линейная,

$\vec{U}$ – полный вектор скорости, $|U|^2 = u^2 + v^2 + w^2$,

p – давление,

ε – удельная внутренняя энергия,

φ – гравитационный потенциал,

G – гравитационная постоянная.

Исходя из опыта предыдущих расчётов в запись исходных уравнений и численную методику были внесены некоторые изменения.

Уравнение неразрывности записывается так же, как и в работах [1], [2]:

$$\frac{\partial(\rho r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial r} = 0 \ . \qquad (1)$$

Уравнения для компонентов импульса записываем в другой, эквивалентной по смыслу, форме. Вместо

$$\frac{\partial(\rho u r)}{\partial t} + \frac{\partial\left(p + \rho u^2\right) r}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial r} = \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

пишем

$$\frac{\partial(\rho u r)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u^2 r\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial r} + r\frac{\partial p}{\partial x} = r\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ . \qquad (2)$$

Вместо

$$\frac{\partial(\rho v r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v r)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p + \rho v^2\right) r}{\partial r} = p + \rho w^2 + \rho r \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

пишем

$$\frac{\partial(\rho vr)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uvr)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2 r)}{\partial r}+r\frac{\partial p}{\partial r}=r\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{w^2}{r}\right). \qquad (3)$$

Вместо

$$\frac{\partial(\rho wr)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uwr)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vwr)}{\partial r}=-\rho vw$$

пишем

$$\frac{\partial(rw)}{\partial t}+u\frac{\partial(rw)}{\partial x}+v\frac{\partial(rw)}{\partial r}=0 \qquad (4)$$

или

$$\frac{\partial(rw)}{\partial t}+\frac{\partial(ruw)}{\partial x}-rw\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(rwv)}{\partial r}-rw\frac{\partial v}{\partial r}=0\ , \qquad (4а)$$

или

$$\frac{d(rw)}{dt}=0\ . \qquad (4б)$$

Уравнение сохранения энергии вместо

$$\frac{\partial(er)}{\partial t}+\frac{\partial[(e+p)ur]}{\partial x}+\frac{\partial[(e+p)vr]}{\partial r}=\frac{\partial(\rho ur\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vr\varphi)}{\partial r}+\varphi\frac{\partial(\rho r)}{\partial t}\ ,$$

где $e=\rho\cdot\left[\varepsilon+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right]$,

пишем в виде

$$\frac{\partial(\tilde{e}r)}{\partial t}+\frac{\partial[(\tilde{e}+p)ur]}{\partial x}+\frac{\partial[(\tilde{e}+p)vr]}{\partial r}=r\rho\left[u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{w^2}{r}\right)\right], \qquad (5)$$

где $\tilde{e}=\rho\cdot\left[\varepsilon+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]$.

Давление, плотность и удельная внутренняя энергия связаны уравнением состояния в форме двучлена [2]:

$$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon+(\rho-\rho_0)c_0^2=(\gamma-1)\rho\varepsilon+\rho c_0^2-\gamma p_0\ . \qquad (6)$$

Величины γ, c_0^2, ρ_0, $p_0=\rho_0 c_0^2/\gamma$, являющиеся параметрами двучлена, либо задаются, если являются константами, либо вычисляются приближенно в каждой точке на каждом шаге по времени исходя из реального уравнения состояния.

Гравитационный потенциал φ в точке с координатами (x,r) на момент времени t находится интегрированием по всей зоне влияния $V(t)$ для данной точки:

$$\varphi(x,r,t) = G \int\limits_{V(t)} \frac{\rho(x_T, r_T, t)}{R_\varphi} r_T dx_T dr_T d\theta_T \ , \qquad (7)$$

где

$$R_\varphi = \sqrt{(x - x_T)^2 + (r \cdot \cos\theta - r_T \cdot \cos\theta_T)^2 + (r \cdot \sin\theta - r_T \cdot \sin\theta_T)^2} \qquad (8)$$

и является суммой потенциала центральной звезды φ_S и собственного потенциала диска φ_d. В формулах (7) и (8) величины x_T, r_T, θ_T – текущие цилиндрические координаты, по которым ведётся интегрирование. В силу симметрии полагаем $\cos\theta = 1$, и может быть выполнено интегрирование по координате θ_T.

Внутри диска потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi G\rho \ , \qquad (9)$$

а вне его – уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0 \ . \qquad (10)$$

Система (1)-(10) дополняется граничными условиями разных типов, которые выбираются из существующего набора для каждой конкретной задачи.

3. Разностная схема

Для численного решения системы уравнений переходим в локальные криволинейные координаты ξ, η, связанные с конкретной ячейкой, как описано ранее в [1], [2]. Если направляющие косинусы и метрические параметры системы ξ, η определены как

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial x}{\partial \xi} \ , \quad \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial x}{\partial \eta} \ , \quad \beta' = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial r}{\partial \xi} \ , \quad \beta'' = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial r}{\partial \eta} \ ,$$

$$\alpha = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' \ , \quad \beta = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' \ ,$$

то новые компоненты скорости будут:

$$\mu = (u\beta'' - v\alpha'')/\beta \ , \quad \nu = (v\alpha' - u\beta'')/\beta \ ,$$

$$\mu^k = \mu + \alpha\nu \ , \quad \nu^n = \beta\nu \ ,$$

$$\nu^k = \nu + \alpha\mu \ , \quad \mu^n = \beta\mu \ .$$

Интегрируя (1)-(5) по объёму ячейки V в пространстве x, r, t с поверхностью S и переходя к локальным координатам ξ, η, имеем:

$$\iint\limits_S r\rho\sqrt{g}\,d\xi d\eta - \iint\limits_S r\rho\nu^n\sqrt{g_{11}}\,d\xi dt + \iint\limits_S r\rho\mu^n\sqrt{g_{22}}\,d\eta dt = 0 \ ,$$

– как и ранее в [1], [2];

$$\iint\limits_S \rho r \mu^k \sqrt{g} d\xi d\eta + \iint\limits_S \rho r \mu^k \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \iint\limits_S \rho r \mu^k \nu^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt -$$

$$- \iiint\limits_V \rho r \nu \left[\mu K_\eta + \nu \left(K_\xi + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \eta} \right) \right] \beta \sqrt{g} d\xi d\eta dt +$$

$$+ \iiint\limits_V r \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} \sqrt{g} d\xi d\eta dt = \iiint\limits_V \rho r \left[\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{w^2}{r} \beta' \right] \sqrt{g} d\xi d\eta dt ,$$

$$\iint\limits_S \rho r \nu^k \sqrt{g} d\xi d\eta + \iint\limits_S \rho r \nu^k \mu^n \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \iint\limits_S \rho r \nu^k \nu^n \sqrt{g_{11}} d\xi dt +$$

$$+ \iiint\limits_V \rho r \mu \beta \left[\mu \left(K_\eta - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial \xi} \right) + \nu K_\xi \right] \sqrt{g} d\xi d\eta dt +$$

$$+ \iiint\limits_V r \frac{\partial p}{\partial \eta} \sqrt{g_{11}} \beta d\xi d\eta dt = \iiint\limits_V \rho r \left[\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{w^2}{r} \beta'' \right] \sqrt{g} d\xi d\eta dt ,$$

$$\iint\limits_S rwr \sqrt{g} d\xi d\eta + \iiint\limits_V \frac{\partial \left(rw \mu^n \right)}{\partial \xi} \frac{r}{\beta \sqrt{g_{11}}} \sqrt{g} d\xi d\eta dt - \iiint\limits_V \frac{rwr}{\beta \sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \mu^n}{\partial \xi} \sqrt{g} d\xi d\eta dt +$$

$$+ \iiint\limits_V \frac{\partial \left(rw \nu^n \right)}{\partial \eta} \frac{r}{\beta \sqrt{g_{22}}} \sqrt{g} d\xi d\eta dt - \iiint\limits_V \frac{\partial \nu^n}{\partial \eta} \frac{rwr}{\beta \sqrt{g_{22}}} \sqrt{g} d\xi d\eta dt = 0 ,$$

$$\iint\limits_S \tilde{e} r \sqrt{g} d\xi d\eta + \iint\limits_S \left[r \mu^n \left(\tilde{e} + p \right) \right] \sqrt{g_{22}} d\eta dt - \iint\limits_S \left[r \nu^n \left(\tilde{e} + p \right) \right] \sqrt{g_{11}} d\xi dt =$$

$$= \iiint\limits_V \left[\mu \rho \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{w^2 \beta'}{r} \right) + \nu \rho \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{w^2 \beta''}{r} \right) \right] r \sqrt{g} d\xi d\eta dt .$$

Схема и нумерация вершин ячейки i, j приведены в [1] на стр. 36. На рис. 1 покажем упрощённую схему только в расчётной плоскости x, r.

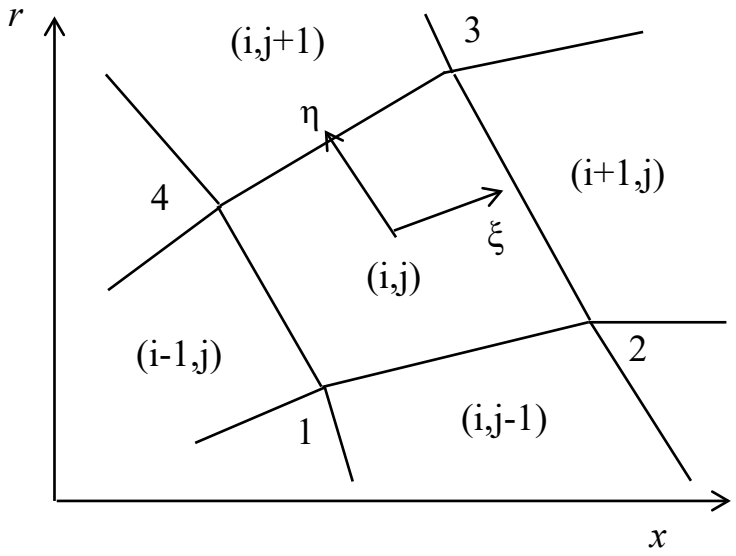

Рис. 1. Схема двумерной ячейки

Ниже (на примере величины плотности ρ) используются следующие обозначения.

ρ_0 – в центре ячейки на нижнем временном слое – известная величина,

$\overline{\overline{\rho}}_0$ – в центре ячейки на верхнем временном слое – искомая величина,

$\overline{\rho}_{ij}$ – на одной из 4 границ (i, j) ячейки на промежуточном временном слое, находится предварительно из решения задачи о распаде разрыва.

Если расчетная область является плоской, то ячейка, соответственно, будет четырехугольником, а граница между ячейками – ребром. Если область пространственная, то ячейка – тор, а граница – грань. В общем случае объем ячейки записывается в виде

$$J_0 = \iint r^\delta dr dx = \iint r^\delta \sqrt{g} d\xi d\eta ,$$

где $\delta = 0$ или 1 задается исходя из условия для расчетной модели. Так же – площади граней

$$\overline{J}_{12}, \overline{J}_{43} = \int r^\delta \sqrt{g_{11}} d\xi , \qquad \overline{J}_{14}, \overline{J}_{23} = \int r^\delta \sqrt{g_{22}} d\eta .$$

Далее везде полагается, что $\sqrt{g_{11}} = 1$ и $\sqrt{g_{22}} = 1$.

Так как внешние границы расчётной области могут быть подвижными, то и границы ячеек имеют скорости, соответствующие компоненты которых далее помечены верхним индексом (*).

Счётный шаг по времени обозначен $\tau = \overline{\overline{t}} - t$.

В разностном виде получаем приближенные решения в центрах ячеек на верхнем слое по времени – для плотности $\overline{\overline{\rho}}_0$:

$$\overline{\overline{J}}_0 \overline{\overline{\rho}}_0 = J_0 \rho_0 + \tau\left(\overline{A}^{(1)}_{12} \overline{J}_{12} - \overline{A}^{(1)}_{43} \overline{J}_{43} + \overline{A}^{(1)}_{14} \overline{J}_{14} - \overline{A}^{(1)}_{23} \overline{J}_{23}\right) ,$$

где

$$\overline{A}_{12}^{(1)} = \overline{\rho}_{12}\left(\overline{v}^{\,n} - \left(\overline{v}^{\,*}\right)^n\right)_{12}\ , \qquad \overline{A}_{23}^{(1)} = \overline{\rho}_{23}\left(\overline{\mu}^{\,n} - \left(\overline{\mu}^{\,*}\right)^n\right)_{23}\ ,$$
$$\overline{A}_{43}^{(1)} = \overline{\rho}_{43}\left(\overline{v}^{\,n} - \left(\overline{v}^{\,*}\right)^n\right)_{43}\ , \qquad \overline{A}_{14}^{(1)} = \overline{\rho}_{14}\left(\overline{\mu}^{\,n} - \left(\overline{\mu}^{\,*}\right)^n\right)_{14}\ ,$$

для компоненты скорости $\overline{\overline{\mu}}_0^{\,k}$:

$$\overline{\overline{J}}_0\overline{\overline{\rho}}_0\overline{\overline{\mu}}_0^{\,k} = J_0\rho_0\mu_0^k + \tau\left(\overline{A}_{12}^{(2)}\vec{J}_{12} - \overline{A}_{43}^{(2)}\vec{J}_{43} + \overline{A}_{14}^{(2)}\vec{J}_{14} - \overline{A}_{23}^{(2)}\vec{J}_{23} - \overline{A}_0^{(2)}\vec{J}_0\right)\ , \qquad (11)$$

где

$$\overline{A}_{12}^{(2)} = \overline{A}_{12}^{(1)}\overline{\mu}_{12}^{\,k}\ , \qquad \overline{A}_{14}^{(2)} = \overline{A}_{14}^{(1)}\left(\beta\overline{\mu}^{\,n} + \alpha\overline{v}^{\,k}\right)_{14}\ ,$$
$$\overline{A}_{43}^{(2)} = \overline{A}_{43}^{(1)}\overline{\mu}_{43}^{\,k}\ , \qquad \overline{A}_{23}^{(2)} = \overline{A}_{23}^{(1)}\left(\beta\overline{\mu}^{\,n} + \alpha\overline{v}^{\,k}\right)_{23}\ ,$$

$$\overline{A}_0^{(2)} = -\overline{\rho}_0\overline{v}_0\left[\left(\overline{\mu}_0 - \mu_0^*\right)K_{\eta 0} + \left(\overline{v}_0 - v_0^*\right)\left(K_{\xi 0} + \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\eta}\right)_0\right)\right]\beta_0 + \frac{\left(p_{23} - p_{14}\right)}{\Delta\xi} - A_4\ ,$$

для компоненты скорости $\overline{\overline{v}}_0^{\,k}$:

$$\overline{\overline{J}}_0\overline{\overline{\rho}}_0\overline{\overline{v}}_0^{\,k} = J_0\rho_0 v_0^k + \tau\left(\overline{A}_{12}^{(3)}\vec{J}_{12} - \overline{A}_{43}^{(3)}\vec{J}_{43} + \overline{A}_{14}^{(3)}\vec{J}_{14} - \overline{A}_{23}^{(3)}\vec{J}_{23} - \overline{A}_0^{(3)}\vec{J}_0\right)\ , \qquad (12)$$

где

$$\overline{A}_{12}^{(3)} = \overline{A}_{12}^{(1)}\left(\beta\overline{v}^{\,n} + \alpha\overline{\mu}^{\,k}\right)_{12}\ , \qquad \overline{A}_{14}^{(3)} = \overline{A}_{14}^{(1)}\overline{v}_{14}^{\,k}\ ,$$
$$\overline{A}_{43}^{(3)} = \overline{A}_{43}^{(1)}\left(\beta\overline{v}^{\,n} + \alpha\overline{\mu}^{\,k}\right)_{43}\ , \qquad \overline{A}_{23}^{(3)} = \overline{A}_{23}^{(1)}\overline{v}_{23}^{\,k}\ ,$$

$$\overline{A}_0^{(3)} = \overline{\rho}_0\overline{\mu}_0\left[\left(\overline{\mu}_0 - \mu_0^*\right)\left(K_{\eta 0} - \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial[\eta,\xi]}{\partial\xi}\right)_0\right) + \left(\overline{v}_0 - v_0^*\right)K_{\xi 0}\right]\beta_0 + \frac{\left(p_{43} - p_{12}\right)}{\Delta\eta} - A_5\ .$$

В исходной системе координат:

$$\overline{\overline{u}}_0 = \frac{\overline{\overline{\mu}}_0^{\,k}\beta'' - \overline{\overline{v}}_0^{\,k}\beta'}{\beta}, \qquad \overline{\overline{v}}_0 = \frac{\overline{\overline{\mu}}_0^{\,k}\alpha'' - \overline{\overline{v}}_0^{\,k}\alpha'}{-\beta}\ .$$

Для скорости вращения $\overline{\overline{w}}_0$ из формулы (4а):

$$\left(\overline{\overline{rw}}\right)_0 = (rw)_0\frac{J_0}{\overline{\overline{J}}_0} +$$
$$+\frac{\tau}{\overline{\overline{J}}_0}\left\{\left[(rw)_{14}\cdot\left(\mu_{14}^n - \mu_{14}^*\right) - (rw)_0\,\mu_{14}^n\right]\overline{J}_{14} - \left[(rw)_{23}\cdot\left(\mu_{23}^n - \mu_{23}^*\right) - (rw)_0\,\mu_{23}^n\right]\overline{J}_{23} + \right. \qquad (13)$$
$$\left. + \left[(rw)_{12}\cdot\left(v_{12}^n - v_{12}^*\right) - (rw)_0 v_{12}^n\right]\overline{J}_{12} - \left[(rw)_{43}\cdot\left(v_{43}^n - v_{43}^*\right) - (rw)_0 v_{43}^n\right]\overline{J}_{43}\right\}.$$

Величины $(rw)_{ij}$ на границах (рёбрах) ячеек находим линейной интерполяцией по соответствующим направлениям ξ или η на нижнем временном слое. Например,

$$(rw)_{14} = \frac{(rw)_{i0-1,j0}\cdot\Delta\xi_{i0,j0} + (rw)_{i0,j0}\cdot\Delta\xi_{i0-1,j0}}{\Delta\xi_{i0-1,j0} + \Delta\xi_{i0,j0}}$$

и т.д., где $\Delta\xi$ – ширина ячейки в плоскости x,r в направлении ξ, т.е. расстояние по дуге, проходящей через центр между серединами ребер (1,4) и (2,3);

$\Delta\eta$ – ширина ячейки в плоскости x,r в направлении η, аналогично между ребрами (1,2) и (4,3).

Для удельной внутренней энергии $\overline{\overline{\varepsilon}}_0$:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{J}}_0\overline{\overline{\rho}}_0\left(\overline{\overline{\varepsilon}}_0+\frac{1}{2}\left(\overline{\overline{u}}_0^2+\overline{\overline{v}}_0^2\right)\right)=J_0\rho_0\left(\varepsilon_0+\frac{1}{2}\left(u_0^2+v_0^2\right)\right)+\\ +\tau\left[\overline{A}_{12}^{(4)}\overline{J}_{12}-\overline{A}_{43}^{(4)}\overline{J}_{43}+\overline{A}_{14}^{(4)}\overline{J}_{14}-\overline{A}_{23}^{(4)}\overline{J}_{23}+\left(\mu_0A_4+\nu_0A_5\right)J_0\right],\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\overline{A}_{12}^{(4)}=\overline{A}_{12}^{(1)}\left[\overline{\varepsilon}+\frac{1}{2}\left(\left(\overline{v}^n\right)^2+\left(\overline{\mu}^k\right)^2\right)\right]_{12}+\overline{v}_{12}^n\overline{p}_{12},$$

$$\overline{A}_{43}^{(4)}=\overline{A}_{43}^{(1)}\left[\overline{\varepsilon}+\frac{1}{2}\left(\left(\overline{v}^n\right)^2+\left(\overline{\mu}^k\right)^2\right)\right]_{43}+\overline{v}_{43}^n\overline{p}_{43},$$

$$\overline{A}_{23}^{(4)}=\overline{A}_{23}^{(1)}\left[\overline{\varepsilon}+\frac{1}{2}\left(\left(\overline{\mu}^n\right)^2+\left(\overline{v}^k\right)^2\right)\right]_{23}+\overline{\mu}_{23}^n\overline{p}_{23},$$

$$\overline{A}_{14}^{(4)}=\overline{A}_{14}^{(1)}\left[\overline{\varepsilon}+\frac{1}{2}\left(\left(\overline{\mu}^n\right)^2+\left(\overline{v}^k\right)^2\right)\right]_{14}+\overline{\mu}_{14}^n\overline{p}_{14}\ .$$

При такой росписи в уравнении (14) присутствуют те же интегралы, что и в (11)–(12) от «правых частей» исходных уравнений (2), (3), (5):

$$A_4=\frac{1}{\Delta\xi}\int_{\Delta\xi}\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{w^2}{r}\beta'\right)d\xi,\qquad A_5=\frac{1}{\Delta\eta}\int_{\Delta\eta}\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{w^2}{r}\beta''\right)d\eta\ . \tag{15}$$

Заметим, что уравнение (4) для скорости вращения и его разностный аналог (13) имеют смысл только в цилиндрической модели. Если модель плоская, например, круглое сечение $x=0$ (т.е. «вид с торца»), то роль скорости вращения будет выполнять локальная компонента скорости μ^k. В этом случае в уравнении (11) скорости на рёбрах ячеек $\overline{\mu}_{12}^k$ и $\overline{\mu}_{43}^k$ обычно берутся из центров соответствующих ячеек с нижнего временного слоя. Для рассматриваемой задачи это будет слишком грубым приближением, и потребуется дополнительная модернизация схемы.

Альтернативный способ расчета скорости вращения

При больших радиальных скоростях численное решение уравнения (4а), как и (4), для скорости вращения (13) оказывается неустойчивым. В этом случае можно воспользоваться формулой (4б). Решаем уравнение $d\left(rw\right)/dt=0$ для материальной точки L, находящейся в центре текущей ячейки i_0,j_0. На

верхнем слое по времени есть ее координаты $\overline{\overline{x}}_0, \overline{\overline{r}}_0$ и компоненты скорости в плоскости x, r – $\overline{\overline{u}}_0, \overline{\overline{v}}_0$, вычисленные ранее.

Находим координаты этой материальной точки на предыдущем временном слое:

$$x_L = \overline{\overline{x}}_0 - \overline{\overline{u}}_0 \tau\,, \qquad r_L = \overline{\overline{r}}_0 - \overline{\overline{v}}_0 \tau\ .$$

В соответствии с (4б) полагаем, что $\left(\overline{\overline{rw}}\right)_0 = (rw)_L$. Величину $(rw)_L$ находим приближённо методом наименьших квадратов на шаблоне нижнего временного слоя. Положим, что эта величина распределена линейно в окрестности ячейки i_0, j_0, которую ограничим девятью ячейками 2-мерной сетки (*i*,*j*) с номерами $i = i_0 - 1, i_0, i_0 + 1$ и $j = j_0 - 1, j_0, j_0 + 1$. Точка с координатами x_L, r_L наверняка окажется внутри этой окрестности в силу выбора малого шага по времени. Если ячейка i_0, j_0 окажется вблизи границы счетной подобласти («яруса»), то делаем отступ для шаблона вглубь яруса на 1 ячейку по тому или другому (или обоим) индексу. Для каждой точки x_L, r_L записываем условие:

$$\sum_{k=1}^{9} q_k \left(c_1 + c_2 \Delta x_k + c_3 \Delta r_k - (wr)_k\right)^2 = \min\,,$$

где $\Delta x_k = x_k - x_L$, $\Delta r_k = r_k - r_L$,

веса $q_k = \left(\Delta x_k{}^2 + \Delta r_k{}^2\right)^{-0.5}$ – обратные расстояния до точки *L*.

Получаем систему уравнений для коэффициентов c_1, c_2, c_3:

$$a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + a_{13} \cdot c_3 = f_1\ ,$$
$$a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + a_{23} \cdot c_3 = f_2\ ,$$
$$a_{31} \cdot c_1 + a_{32} \cdot c_2 + a_{33} \cdot c_3 = f_3\,,$$

где

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{9} q_k\ , \quad a_{12} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta x_k\ , \quad a_{13} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta r_k\ , \quad f_1 = \sum_{k=1}^{9} q_k (wr)_k\ ,$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta x_k\ , \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta x_k{}^2\ , \quad a_{23} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta r_k \Delta x_k\ , \quad f_2 = \sum_{k=1}^{9} q_k (wr)_k \Delta x_k\ ,$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta r_k\ , \quad a_{32} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta x_k \Delta r_k\ , \quad a_{33} = \sum_{k=1}^{9} q_k \Delta r_k{}^2\ , \quad f_3 = \sum_{k=1}^{9} q_k (wr)_k \Delta r_k\ .$$

Находим

$$c_1 = \frac{(a_{23} f_1 - a_{13} f_2)(a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) - (a_{33} f_1 - a_{13} f_3)(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13})}{(a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13})(a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) - (a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13})(a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13})}\ .$$

Искомая скорость вращения равна:

$$\overline{\overline{w_0}} = \frac{(wr)_L}{\overline{\overline{r_0}}} = \frac{c_1}{\overline{\overline{r_0}}} \ . \qquad (16)$$

Расчеты показали, что разумно использовать оба варианта формул для скорости вращения. Основной – по формуле (13). Если он приводит к пространственной неустойчивости, т.е. если окажется, что

$$[(wr)_{43} - (wr)_0] \cdot [(wr)_0 - (wr)_{12}] < -\Delta\eta_0{}^2$$

или

$$[(wr)_{23} - (wr)_0] \cdot [(wr)_0 - (wr)_{14}] < -\Delta\xi_0{}^2 \ ,$$

то переходим на второй способ – по формуле (16).

Расчет потенциала

Как уже было замечено, полный гравитационный потенциал складывается из двух источников:

$$\varphi = \varphi_S + \varphi_d \ .$$

Потенциал в точке x, r от удаленного точечного объекта (например, Солнца) находим по формуле

$$\varphi_S = \frac{GM_S}{\sqrt{(x - x_c)^2 + (r - r_c)^2}} \ ,$$

где M_S – масса Солнца, x_c , r_c – его координаты, обычно полагаемые нулями.

Собственный потенциал диска находим из уравнения Пуассона (9)

$$\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial x^2} + \frac{\partial}{r \partial r}\left(r \frac{\partial \varphi_d}{\partial r} \right) = -4\pi G\rho$$

итерационным методом, описанным в [1], п. 4.8. Отметим, что в формуле (4.8.3) в [1] на странице 42 в качестве базисных функций берутся только линейные $\psi(q,s) = 1, q, s$. А шаблон – 6-точечный – посредством назначения весов: $\delta_1 = \delta_4 = \delta_5 = \delta_8 = \delta_9 = \delta_{12} = 0$ (для дальних от текущего ребра ячеек), $\delta_2 = \delta_3 = \delta_{10} = \delta_{11} = 0.01$ (для ячеек по краям ребра), $\delta_6 = \delta_7 = 1$ (для ячеек, прилегающих к ребру). Вблизи внешних границ делается сдвиг шаблона на 1 ячейку вглубь области.

В качестве граничного условия для уравнения Пуассона вычисляется потенциал φ_B во всех точках внешних границ и границ между ярусами по формуле (7). Так как расчетная область состоит из ячеек i, то φ_B будет суммой элементарных интегралов $\varphi_B = \sum_i \varphi_{Bi}$:

$$\varphi_B = G \sum_i \int_{V_i} \frac{\rho_i dV}{\sqrt{(r_B \cdot \cos\theta_B - r_i \cdot \cos\theta_i)^2 + (r_B \cdot \sin\theta_B - r_i \cdot \sin\theta_i)^2 + (x_B - x_i)^2}} \ .$$

Здесь V_i – полный объём кольцевой ячейки i, $dV = dx \cdot rd\theta \cdot dr = V_i /(2\pi) \cdot d\theta$.
В цилиндрически симметричном случае точка границы B лежит в плоскости $\theta = 0$. Плотность ρ_i считается постоянной в пределах ячейки и относится к её центру с координатами x_i, r_i. Тогда потенциал в точке границы, создаваемый одной i-й ячейкой, приблизительно равен

$$\varphi_{Bi}(x_B, r_B) = G\rho_i \widetilde{V}_i \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x_B - x_i)^2 + r_B{}^2 + r_i{}^2 - 2r_B r_i \cdot \cos\theta}} , \qquad (17)$$

где $\widetilde{V}_i = V_i /(2\pi)$. С помощью замены переменных $\theta = 2\alpha$, $d\theta = 2d\alpha$, $0 < \alpha < \pi$ и $\alpha = \beta + \pi/2$ формулу (30) можно преобразовать в эллиптический интеграл:

$$K(\chi^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \chi^2 \sin^2 \beta}},$$

где

$$\chi_i^2 = \frac{4r_B r_i}{(x_B - x_i)^2 + (r_B + r_i)^2} .$$

Из справочника [3] используем приближённое решение:

$$K(m) \approx a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1{}^2 + a_3 m_1{}^3 + a_4 m_1{}^4 +$$

$$+ \left(b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1{}^2 + b_3 m_1{}^3 + b_4 m_1{}^4\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{m_1}\right), \qquad m = \chi^2, \quad m_1 = 1 - m,$$

$a_0 = 1{,}38629436112$, $a_1 = 0{,}09666344259$, $a_2 = 0{,}03590092383$,
$a_3 = 0{,}03742563713$, $a_4 = 0{,}01451196212$, $b_0 = 0{,}5$, $b_1 = 0{,}12498593597$,
$b_2 = 0{,}06880248576$, $b_3 = 0{,}03328355346$, $b_4 = 0{,}00441787012$.

Таким образом,

$$\varphi_B(x_B, r_B) = 4G \sum_i \left[\frac{\rho_i \widetilde{V}_i}{\sqrt{(x_B - x_i)^2 + (r_B + r_i)^2}} \cdot K_i\left(\chi_i{}^2\right) \right] . \qquad (18)$$

Потенциал, как на границах, так и в ячейках, вычисляется в конце расчёта временного шага по значениям координат и плотности, полученных ранее на верхнем временном слое. Поэтому его значения будут использоваться при расчете следующего шага как значения на нижнем слое.

4. Расчет «правых частей» в уравнениях для компонент скорости

В уравнениях для импульса и энергии «правые части»

$$\Phi_\xi = \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{w^2}{r}\beta'\right), \quad \Phi_\eta = \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{w^2}{r}\beta''\right)$$

и интегралы от них

$$F_\xi = \int_{\Delta\xi} \Phi_\xi d\xi \ , \qquad F_\eta = \int_{\Delta\eta} \Phi_\eta d\eta$$

вычисляются на каждом шаге в каждой ячейке по величинам плотности, потенциала, скорости вращения в центрах ячеек и координатам сетки нижнего временного слоя. На каждую ячейку приходится 4 интеграла в пределах от центра ячейки до середины каждого ребра (границы) ячейки.

F_1 – от центра ячейки до середины ребра (2,3),

F_2 – от центра ячейки до середины ребра (4,3),

F_3 – от середины ребра (1,4) до центра ячейки,

F_4 – от середины ребра (1,2) до центра ячейки.

Тогда в формулах (11)-(15):

$$A_4 = \frac{F_3 + F_1}{\Delta\xi} \ , \quad A_5 = \frac{F_4 + F_2}{\Delta\eta} \ .$$

Функции Φ_ξ и Φ_η на каждом интервале аппроксимируем аналитическими функциями. По выбору можно использовать 4 варианта:

1) константа,
2) прямая линия,
3) кубический полином,
4) степенная функция, которая используется только вблизи внешних границ.

Для каждого ребра выбираем максимальный шаблон из 4 ячеек – по 2 с каждой стороны в направлении поперек ребра – ξ или η. Аппроксимирующая функция будет опираться на ее значения в центрах ячеек шаблона. При этом плотность и скорость вращения известны как величины с нижнего временного слоя. Кроме того, известны значения потенциала, а производные от них считаются по следующим формулам.

$$\frac{\partial\varphi_S}{\partial x} = -\frac{GM_S\left(x - x_c\right)}{\left[\left(x - x_c\right)^2 + \left(r - r_c\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \ , \qquad \frac{\partial\varphi_S}{\partial r} = -\frac{GM_S\left(r - r_c\right)}{\left[\left(x - x_c\right)^2 + \left(r - r_c\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \ ,$$

$$\frac{\partial\varphi_S}{\partial\xi} = \sqrt{g_{11}}\left(\alpha'\frac{\partial\varphi_S}{\partial x} + \beta'\frac{\partial\varphi_S}{\partial r}\right) , \qquad \frac{\partial\varphi_S}{\partial\eta} = \sqrt{g_{22}}\left(\alpha''\frac{\partial\varphi_S}{\partial x} + \beta''\frac{\partial\varphi_S}{\partial r}\right) .$$

Значения собственного потенциала на ребрах ячеек находим линейной интерполяцией между центрами ячеек по направлениям ξ или η. Значения на внешних границах к этому моменту уже вычислены – см. предыдущий раздел, формула (18). Поэтому производные по направлениям рассчитываем как:

$$\frac{\partial \varphi_d}{\partial \xi} = \frac{\varphi_{d,23} - \varphi_{d,14}}{\Delta \xi}, \qquad \frac{\partial \varphi_d}{\partial \eta} = \frac{\varphi_{d,43} - \varphi_{d,12}}{\Delta \eta},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_S}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_d}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_S}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_d}{\partial \eta}.$$

По значениям Ф в ячейках шаблона находим коэффициенты для аппроксимирующей функции. Затем вычисляем интеграл от нее с каждой стороны от текущего ребра – от центра «левой» ячейки до середины ребра и от середины этого ребра до центра «правой» ячейки.

Точки внешних границ могут входить в шаблон, и в них могут быть заданы специальные условия в зависимости от физического смысла.

5. Распад разрыва

Чтобы найти значения газодинамических величин на ребрах ячеек, нужно решить аналогичную (1)-(5) систему уравнений только в 1-мерном приближении. Обычно, когда ее решают методом распада разрыва, то правые части в уравнениях для импульса и энергии не учитывают. В данной работе предлагается приближенный метод их учета. Как обычно, для текущего ребра в расчете будут участвовать 2 ячейки – слева (I) и справа (II) от него. Будем считать, что координатная линия l проходит от центра левой ячейки к середине ребра и до центра правой ячейки, как показано на рис. 2. Ее участки слева и справа совпадают с координатными линиями ξ (или η – в зависимости от ориентации) каждой из ячеек.

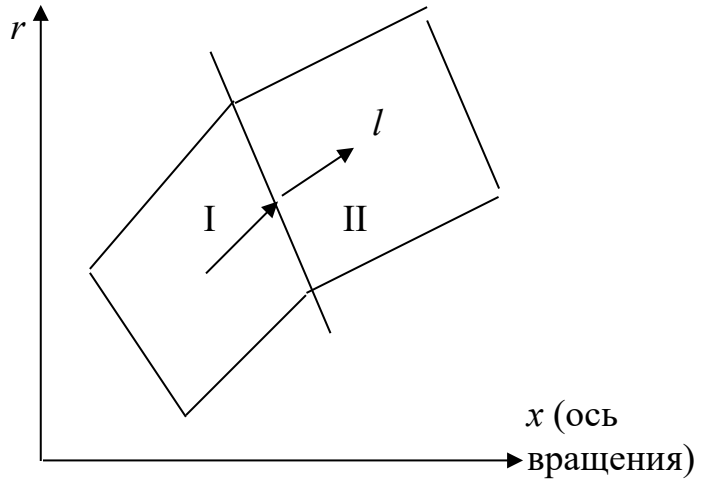

Рис. 2. Схема расположения ячеек в задаче о распаде разрыва

Ударная волна **(А)**

Для каждой из ячеек записываем систему уравнений газовой динамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial l} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(p+\rho u^2\right)}{\partial l}=\Phi\ , \tag{20}$$

$$\frac{\partial\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)\right]}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho u\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)+pu\right]}{\partial l}=u\Phi\ . \tag{21}$$

Здесь u обозначает нормальную к ребру (т.е. к линии разрыва) компоненту скорости в плоскости x, r;

$g=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}+\frac{w^2}{r}\cos\left[\vec{r},\vec{l}\right]\right)$ – ускорение в направлении $\vec{l}$;

$\Phi=\rho\cdot g$ – сила, действующая в направлении $\vec{l}$.

Введем функции f_2 и f_3, такие, что

$$f_2=\int_0^l\Phi dl\ ,\quad f_3=\int_0^l u\Phi dl\ ,$$

где $l=0$ – условное начало координаты l, которое не имеет значения для нашей задачи.

Тогда уравнения (20) и (21) можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(p+\rho u^2-f_2\right)}{\partial l}=0\ ,$$

$$\frac{\partial\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)\right]}{\partial t}+\frac{\partial\left[\rho u\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)+pu-f_3\right]}{\partial l}=0\ ,$$

+ уравнение состояния, связывающее энергию и давление в виде двучлена:

$$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon+c_0^2\rho-\gamma p_0\ ,$$

где $c_0^2,\ \gamma,\ p_0$ – локальные параметры.

Проводя интегрирование через поверхность разрыва для случая ударной волны по аналогии с работой [2] на стр. 102, получаем

$$[\rho]D-[\rho u]=0\ ,$$

$$[\rho u]D-\left[p+\rho u^2-f_2\right]=0\ ,$$

$$\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)\right]D-\left[\rho u\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)+pu-f_3\right]=0\ .$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность величин с двух сторон от разрыва, (обозначаемых далее большими и малыми буквами,) $D=dl/dt$ – скорость движения разрыва, $[f_2]=F_2-f_2$, $[f_3]=F_3-f_3$. Или, раскрывая скобки:

$$(R-\rho)D-(RU-\rho u)=0\ , \tag{22}$$

$$(RU-\rho u)D-\left[\left(P+RU^2\right)-\left(p+\rho u^2\right)\right]+\left(F_2-f_2\right)=0\ , \tag{23}$$

$$\left[R\left(E+\frac{1}{2}U^2\right)-\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)\right]D-$$
$$-\left\{\left[RU\left(E+\frac{1}{2}U^2\right)+PU\right]-\left[\rho u\left(\varepsilon+\frac{1}{2}u^2\right)+pu\right]\right\}+\left(F_3-f_3\right)=0\,, \tag{24}$$

причем

$$P=(\gamma-1)RE+Rc_0^2-\gamma p_0\,,$$

поэтому

$$E-\varepsilon=\frac{1}{(\gamma-1)}\left[\frac{\left(P+\gamma p_0\right)}{R}-\frac{\left(p+\gamma p_0\right)}{\rho}\right]\,. \tag{25}$$

Будем считать, что величины f_2, f_3 относятся к центру ячейки i с координатой l_i, в которой находятся «малые» величины ρ, u, p, ε, а F_2, F_3 – к границе между ячейками с координатой l_b, где нужно найти «большие» величины R, U, P, E. Тогда

$$\left(F_2-f_2\right)=\int_0^{l_b}\frac{\partial f_2}{\partial l}dl-\int_0^{l_i}\frac{\partial f_2}{\partial l}dl=\int_{l_i}^{l_b}\frac{\partial f_2}{\partial l}dl=\int_{l_i}^{l_b}\Phi dl\equiv\widetilde{F}_2\ ,$$

$$\left(F_3-f_3\right)=\int_0^{l_b}\frac{\partial f_3}{\partial l}dl-\int_0^{l_i}\frac{\partial f_3}{\partial l}dl=\int_{l_i}^{l_b}\frac{\partial f_3}{\partial l}dl=\int_{l_i}^{l_b}u\Phi dl\equiv\widetilde{F}_3\ .$$

Способ вычисления интеграла $\widetilde{F}_2=\int_{l_i}^{l_b}\Phi dl$ приведен в разделе 4. Интеграл

$$\widetilde{F}_3=\int_{l_i}^{l_b}u\Phi dl\approx\left(\overline{u}\,\overline{\Phi}\right)\cdot\left(l_b-l_i\right)$$

далее во все формулы будет входить только в сочетании с $\widetilde{F}_2$ как $\left(\widetilde{F}_2u-\widetilde{F}_3\right)$, которое в большинстве случаев можно положить равным нулю.

Система (22)-(25) записана для одной ячейки (I). Чтобы ее решить, запишем аналогичную систему для соседней ячейки (II). Обратим внимание, что направление интегрирования в $\widetilde{F}_2$ и $\widetilde{F}_3$ для соседней ячейки будет противоположным, так как направление координаты l не меняется. Поэтому если в двух соседних ячейках действующая сила направлена в одну сторону, то интегралы от нее будут иметь разные знаки. Полагая, что неизвестные величины U и P для обеих ячеек общие, а R_I, R_{II}, D_I, D_{II}, E_I, E_{II} – различны, получаем систему из 8 уравнений с 8-ю неизвестными.

Выразим через давление P остальные искомые величины. Введём обозначения, опуская номер ячейки *i*:

$$\Psi = \left(\widetilde{F}_2 u - \widetilde{F}_3\right)(\gamma - 1)\rho \ ,$$

$$\Omega = \left(2\gamma\left(p + p_0\right) + (\gamma - 1)\widetilde{F}_2\right) ,$$

$$\Delta P = P - p \ ,$$

$$X_{A,B} = \frac{R}{\rho} \ ,$$

$$S^2 = \Psi^2 + 2\Delta P\rho\left[(\gamma + 1)\Delta P + \Omega\right]\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right) ,$$

$$S = \sqrt{S^2} \ , \qquad S_{\Psi=0} = \sqrt{2\Delta P\rho\left[(\gamma + 1)\Delta P + \Omega\right]\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)} \ ,$$

$$i_S = \begin{cases} -1 & для\ волны\ налево\ (i = I) \\ +1 & для\ волны\ направо\ (i = II) \end{cases} ,$$

$$f_A = \frac{2\Delta P\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)}{\left(i_S\Psi + S\right)} ,$$

если $\Psi = 0$, то $f_{A,\Psi=0} = \sqrt{\dfrac{2\Delta P\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)}{\rho\left[(\gamma + 1)\Delta P + \Omega\right]}}$.

Основное уравнение:

$$U - u = i_S f_A \ .$$

$$\left(D_A - u\right) = i_S\frac{\left(i_S\Psi + S\right)}{2\rho\Delta P} \ , \qquad \left(D_A - u\right)_{\Psi=0} = i_S\sqrt{\frac{\left[(\gamma + 1)\Delta P + \Omega\right]\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)}{2\rho\Delta P}} \ ,$$

$$X_A = \frac{\left(i_S\Psi + S\right)^2}{\left[\left(i_S\Psi + S\right)^2 - 4\rho\Delta P^2\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)\right]} = \frac{\rho\left(D_A - u\right)^2}{\left[\rho\left(D_A - u\right)^2 - \left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)\right]} ,$$

$$X_{A,\Psi=0} = \frac{\left[(\gamma + 1)\Delta P + \Omega\right]}{\left[(\gamma - 1)\Delta P + \Omega\right]} ,$$

$$\frac{dS}{dP} = \frac{\rho}{S}\left\{(\gamma + 1)\Delta P\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right) + \left[\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right) + \Delta P\right]\left[(\gamma + 1)\Delta P + \Omega\right]\right\} ,$$

$$\frac{df_A}{dP} = \frac{2}{\left(i_S\Psi + S\right)}\left[\left(2\Delta P - \widetilde{F}_2\right) - \frac{\Delta P\left(\Delta P - \widetilde{F}_2\right)}{\left(i_S\Psi + S\right)}\frac{dS}{dP}\right] .$$

Заметим, что приведённые функции для ударной волны (А) имеют положительные и ограниченные значения не при любых положительных давлениях P. Поэтому для их применения требуется дополнительный анализ. Если кратко, то для функции $f_A(P)$ находим минимальное давление, при котором она сама и ее производная положительны, а также непрерывна и положительна плотность. Кроме того, желательно, чтобы производная от плотности по давлению была положительной. Если таких давлений нет и

$\frac{dX_A}{dP} < 0$ правее точки разрыва функции X_A, то чтобы избежать слишком большого значения X_A, ограничиваем его величиной, полученной из условия сохранения энтропии. Находим такое давление $P_{AB} > P_{X=\infty}$, при котором $X_A = X_B$. (X_B см. в следующем разделе.)

$$P_{cr} = \max\left\{ \begin{array}{l} P_{f\geq 0},\ P_{df\,/\,dP>0},\ P_{X=\infty},\ P_{X\geq 0}, \\ \left[P_{dXa\,/\,dP=0} \text{ , если } \frac{dP}{dX_A} > 0, \quad \text{или } P_{Xa=Xb} \text{ , если } \frac{dP}{dX_A} < 0 \right] \end{array} \right\}. \qquad (26)$$

Полагаем, что ударная волна существует только с давлением $P \geq P_{cr}$.

***Волна разрежения* (B).**

В области давлений, где не существует функций (A) для ударной волны, используются функции (B) для волны разрежения. В этом случае, как и в [2], уравнения (40-41) переписываются с условием сохранения энтропии σ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial l} + u\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial l} = 0 \ , \qquad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} + u\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\Phi}{\rho} = g \ . \qquad (28)$$

$p = p(\rho, \sigma)$, $\left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_{\sigma=const} = \frac{1}{c^2}$ – подставим в (27):

Умножая уравнение (27) на $(-i_S)\frac{c}{\rho}$ и складывая с (28), как и в [4], получим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + (-i_S)c\right)\frac{\partial u}{\partial l}\right) + (-i_S)\frac{1}{\rho c}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \left(u + (-i_S)c\right)\frac{\partial p}{\partial l}\right) = g \ .$$

Интегрируя и учитывая, что скорость звука равна

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(p + p_0)}{\rho}} = \sqrt{\gamma\sigma\rho^{\gamma-1}} \ , \quad C = \sqrt{\frac{\gamma(P + p_0)}{R}} = \sqrt{\gamma\sigma R^{\gamma-1}} \ ,$$

получаем

$$(U - u) = i_S \frac{2}{(\gamma - 1)}(C - c) + \widetilde{F}_{23} \ ,$$

где

$$\widetilde{F}_{23} \approx \int_{\Delta l} \frac{g}{\left(u + (-i_S)c\right)} dl \approx \frac{\overline{g}\Delta l}{\left(\overline{u} + (-i_S)\overline{c}\right)} \ ,$$

$\Delta l = l_b - l_i$ – полуширина ячейки i, с учетом знака, из которой берутся все «малые» величины.

Таким образом, как и для ударной волны, получаем основное уравнение вида

$$U - u = i_S f_B \ ,$$

где

$$f_B = \frac{2c}{(\gamma - 1)}\left[\left(\frac{P + p_0}{p + p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right] + i_S \widetilde{F}_{23} \ .$$

Предлагаем находить $\widetilde{F}_{23}$ из условия стыковки функций f_A и f_B в точке $P = p + \widetilde{F}_2$, где $f_A = 0$, полагая, что $f_B\left(P = p + \widetilde{F}\right) = 0$:

$$\widetilde{F}_{23} = -i_S\left[\left(1 + \frac{\widetilde{F}_2}{p + p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right]\frac{2c}{(\gamma - 1)}.$$

Если выражение $1 + \dfrac{\widetilde{F}_2}{p + p_0} < 0$, то заменяем его нулем.

Если обозначить

$$f_{B0} = \frac{2c}{(\gamma - 1)}\left[\left(\frac{P + p_0}{p + p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right],$$

то

$$f_B = f_{B0} + i_S \widetilde{F}_{23} \ ,$$

$$\frac{df_B}{dP} = \frac{1}{\gamma(P + p_0)}\left[\frac{(\gamma - 1)}{2} f_{B0} + c\right] .$$

Отношение плотностей:

$$X_B = \frac{R}{\rho} = \left(\frac{P + p_0}{p + p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

скорость волны разрежения:

$$D = U + i_S C \, .$$

Решение системы уравнений

Как и в классическом случае [2], полагая, что скорость U и давление P непрерывны на контактном разрыве, систему сводим к 2 уравнениям:

$$U - u_I = -f_I \ ,$$

$$U - u_{II} = f_{II} \ ,$$

где $f_i = f_{A,i}(P)$ или $f_{B,i}(P)$. Обозначим $\Delta u = u_I - u_{II}$. Вычитая первое из второго, исключаем U, и остается одно уравнение относительно P:

$$f_I + f_{II} - \Delta u = 0,$$

которое решаем итерациями (k):

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \frac{\left(f_I + f_{II}\right)^{(k)} - \Delta u}{\left(\frac{df_I}{dP} + \frac{df_{II}}{dP}\right)^{(k)}} \qquad (29)$$

до сходимости с заданной точностью.

Выбор варианта расчета.

В расчете участвуют 2 ячейки: «левая» и «правая», каждая со своим набором газодинамических величин. При этом локальная координата *l* имеет положительное направление слева направо. Формально возможны 4 конфигурации:

1) 2 ударные волны (A+A),
2) ударная волна налево + волна разрежения направо (A+B),
3) волна разрежения налево + ударная волна направо (B+A),
4) 2 волны разрежения (B+B).

Прежде чем перейти к итерационному процессу, необходимо определить, с каким из этих 4 случаев мы будем работать – т.е. какую из функций нужно подставить в уравнение для каждой стороны. Поэтому, согласно (26), предварительно вычисляем минимально допустимые давления для случая ударной волны как налево, так и направо – $P_{cr,I}$ и $P_{cr,II}$. Заметим, что функции $f_{A,i}$ являются монотонно возрастающими и не имеют разрывов при $P > P_{cr,i}$, а функции $f_{B,i}$ – при $P > -p_{0,i}$ (в случае идеального газа $p_{0,i} = 0$). Поэтому $P_{cr} = \max\{P_{cr,I}, P_{cr,II}\}$ будет минимальным давлением для случая 2 ударных волн. Таким образом, вычисляем:

1) $U_{уд} = f_{A,I}(P_{cr}) + f_{A,II}(P_{cr})$.

Индекс I или II обозначает, с какой стороны берутся «малые» величины.

Проверяем: если $U_{уд} - \Delta u \le 0$, то в качестве рабочего выбираем вариант 2 ударных волн (A+A). В противном случае переходим к следующему пункту.

2) Если $P_{cr,I} \le P_{cr,II}$, то $U_{раз} = f_{A,I}(P_{cr,I}) + f_{B,II}(P_{cr,I})$.

Проверяем: если $U_{раз} - \Delta u \le 0$, то выбираем вариант (A+B): $f_{A,I} + f_{B,II}$.

Иначе переходим к пункту (3).

3) Если $P_{cr,I} > P_{cr,II}$, то $U_{раз} = f_{B,I}(P_{cr,II}) + f_{A,II}(P_{cr,II})$.

Проверяем: если $U_{раз} - \Delta u \le 0$, то выбираем вариант (В+А): $f_{B,I} + f_{A,II}$.
Иначе переходим к пункту (4).

4) Вариант (В+В) $f_{B,I} + f_{B,II}$ выбираем, когда предыдущие варианты (1-3) не могут обеспечить решение уравнения (29). Здесь есть только единственное ограничение – результирующее давление должно быть положительным, вернее $P \ge P_{\min} = \max\{0, -p_{0,I}, -p_{0,II}\} + \varepsilon_8$, $0 < \varepsilon_8 << 1$ (задаваемая точность).
Поэтому, если $U_{вак} = f_{B,I}(P_{\min}) + f_{B,II}(P_{\min}) > \Delta u$, то в качестве приближенного решения назначаем $P = P_{\min}$.

Чтобы исключить вариант (В+А), можно в случае $P_{cr,I} > P_{cr,II}$ на предварительном этапе поменять местами номера ячеек I и II. Если оказалось, что ячейкой I стала правая, а ячейкой II – левая, то при такой перестановке меняется знак у всех векторных величин, включая координату *l*. Тогда после окончания расчёта полученные величины с номерами I и II нужно будет снова поменять местами с учетом знаков.

В результате итерационного процесса по найденному давлению P досчитываются и все остальные газодинамические величины.

Аналогичный подход используется при расчете внешних границ – траекторий с заданной скоростью U или заданным давлением P. Только здесь итераций не требуется.

Окончательно «большие величины» на ребрах ячеек находим из процедуры отбора случаев, как и ранее, с учетом возможного движения самих ребер. Дополнительно учитывается, что ребро может оказаться между невозмущенной областью и областью разрыва не только в случае волны разрежения, но и ударной волны.

Замечание

Есть более простой (но менее точный) способ учета гравитационного поля с вращением при расчете «больших величин». Для этого перед обращением к процедуре традиционного распада разрыва делаются добавки к давлению с каждой стороны от ребра:

$$\widetilde{p}_i = p_i + \widetilde{F}_{2,i} \ .$$

Чтобы новые давления $\widetilde{p}_i$ удовлетворяли тем же уравнениям состояния, соответствующие добавки делаются к плотности и энергии.

$$\widetilde{\rho}_i = \rho_i \left(\frac{\widetilde{p}_i}{p_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i}}, \qquad \widetilde{c}_i = \sqrt{\frac{\gamma_i \left(\widetilde{p}_i + p_{0,i} \right)}{\widetilde{\rho}_i}}, \qquad \widetilde{\varepsilon}_i = \frac{\widetilde{p}_i - \widetilde{\rho}_i c_{0,i}^2 + \gamma_i p_{0,i}}{(\gamma_i - 1)\widetilde{\rho}_i} \ .$$

Все описанные дополнения для более точного учета гравитации, необходимые для моделирования процессов, близких к стационарным, внесены

в программный 2-мерный комплекс НЗТ. Приведенные ниже результаты расчетов получены на суперкомпьютере К100.

6. Расчет без учета собственного гравитационного поля

Для тестового расчёта в качестве начальных данных было выбрано стационарное состояние протопланетного диска с одним из рассмотренных ранее законов вращения. Его параметры приведены в работе [1] на странице 61. Угловая скорость ω в цилиндрической системе координат задана формулой

$$\omega^2 = \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in})}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \frac{GM_S}{r^{3+\alpha}}$$

с теми же значениями $r_{ex} = 1$, $r_{in} = 0{,}7597293 \cdot 10^{-2}$, $K = 0{,}26779376 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 1{,}43$, $\alpha = 0{,}005$, $G = 1/(4\pi)$, $M_S = 4\pi$, выраженными в рабочей системе единиц ([1], страница 31): $[r] = 0{,}591 \cdot 10^{15}$ см, $[t] \approx 1{,}247 \cdot 10^{9}$ с, $[m] = m_0/(4\pi) = 1{,}989 \cdot 10^{33}$ г$/(4\pi) \approx 0{,}158 \cdot 10^{33}$ г, $[\rho] \approx 7{,}6677 \cdot 10^{-13}$ г/см^3, $[K] \approx 3{,}638845 \cdot 10^{16}$ см$^{3{,}29}$ /(г$^{0{,}43} \cdot$ с^2), $[v] \approx 4{,}47 \cdot 10^{5}$ см/с, $[p] \approx 0{,}172$ дин/см^2, $[G] = 4\pi \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ см^3 /(г $\cdot$ с^2) $\approx 8{,}3855 \cdot 10^{-8}$ см^3 /(г $\cdot$ с^2), $[\varepsilon] \approx 2{,}25 \cdot 10^{11}$ эрг/г, при условии сохранения нулевых скоростей в плоскости x, r даёт распределение плотности вещества в протопланетном диске:

$$\frac{\gamma K}{\gamma - 1} \rho^{\gamma - 1} = F_0, \tag{30}$$

где

$$F_0 = GM_S \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) + GM_S \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right).$$

Из условия, что газ является идеальным – формула (6) с $c_0 = 0$, $p_0 = 0$ – с постоянной по пространству энтропией $K = const$, находим начальное распределение удельной внутренней энергии

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma} F_0$$

и давления

$$p = K\rho^{\gamma}.$$

Координаты точек внешней границы получаются из условия $\rho(x_B, r_B) = 0$:

$$x_B = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{r_{ex}} - \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left(\frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r_B^{1+\alpha}} \right) \right]^{-2} - r_B^2}, \qquad r_{in} \le r_B \le r_{ex}. \tag{31}$$

Расчётная область – это двумерное сечение трехмерного диска в плоскости x, r, находящееся внутри границы (31) и разделенное на 6 подобластей прозрачными (эйлеровыми) границами. В приведенных расчетах все границы и сетка заданы неподвижными. Внешние границы – жесткие стенки с нулевой нормальной скоростью. Для удобства построения сетки из четырехугольных ячеек в нижней части вблизи r_{in} был срезан острый угол и задана горизонтальная, также неподвижная, внешняя граница на радиусе $r_B = 0{,}0125$. Полное количество ячеек в модели равнялось 124800.

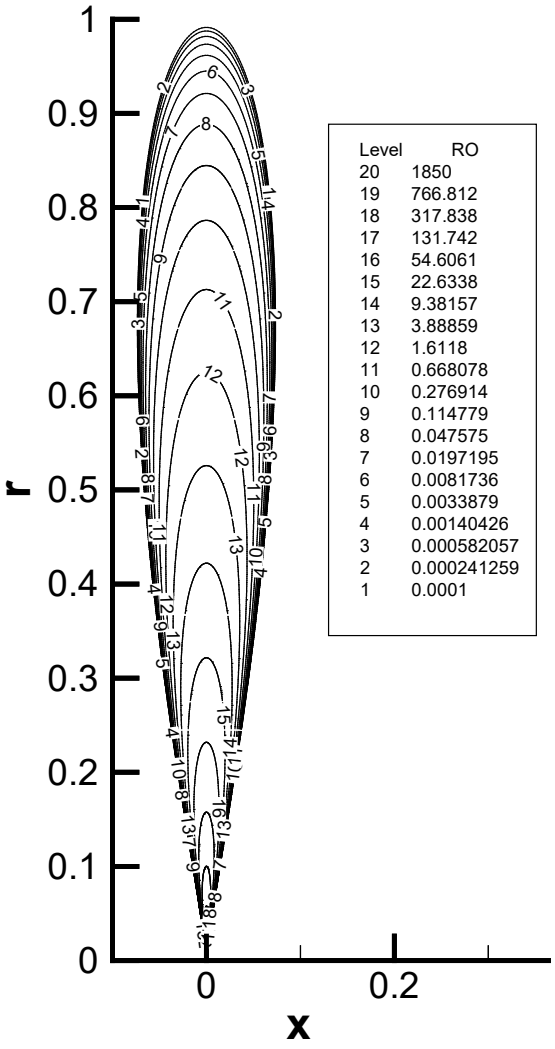

Рис. 3. Изолинии плотности на начальный момент времени

На рис. 3 показано начальное распределение плотности в соответствии с (30). Максимальное значение $\rho_{\max} \approx 1851$ находится в точке $x = 0, r \approx 0{,}02$. Далее производился численный расчет системы нестационарных уравнений (1)-(10). Особое внимание обращалось на проявление нестационарности. Вариант, описанный в [1], сравнивался с расчетом по усовершенствованной методике, представленной выше. Заметим, что и в [1] расчёт энергии производился согласно уравнению относительно $\tilde{e}$, где скорость вращения целиком вынесена в правую часть, так как уравнение относительно полной энергии e приводит к появлению отрицательных величин. Основное отличие нового расчета – учёт «правых частей» в задаче о распаде разрыва и счёт скорости вращения по формуле (4а) вместо формулы для момента импульса.

На рисунках 4 и 5 приведено сравнение результатов – «по-старому», штриховые линии, и «по-новому» – сплошные линии.

На рис. 4 показано изменение во времени максимальной по модулю скорости $\sqrt{u^2 + v^2}$, выбранной по всем ячейкам. Преобладает радиальная составляющая скорости, осевая – на порядок меньше. Наибольшая скорость развивается вблизи внешней границы в районе максимальной «толщины» диска при радиусе $r \approx 0{,}7$. Можно заметить, что во втором, «сплошном» варианте максимальная скорость примерно в 10 раз меньше, чем в «штриховом».

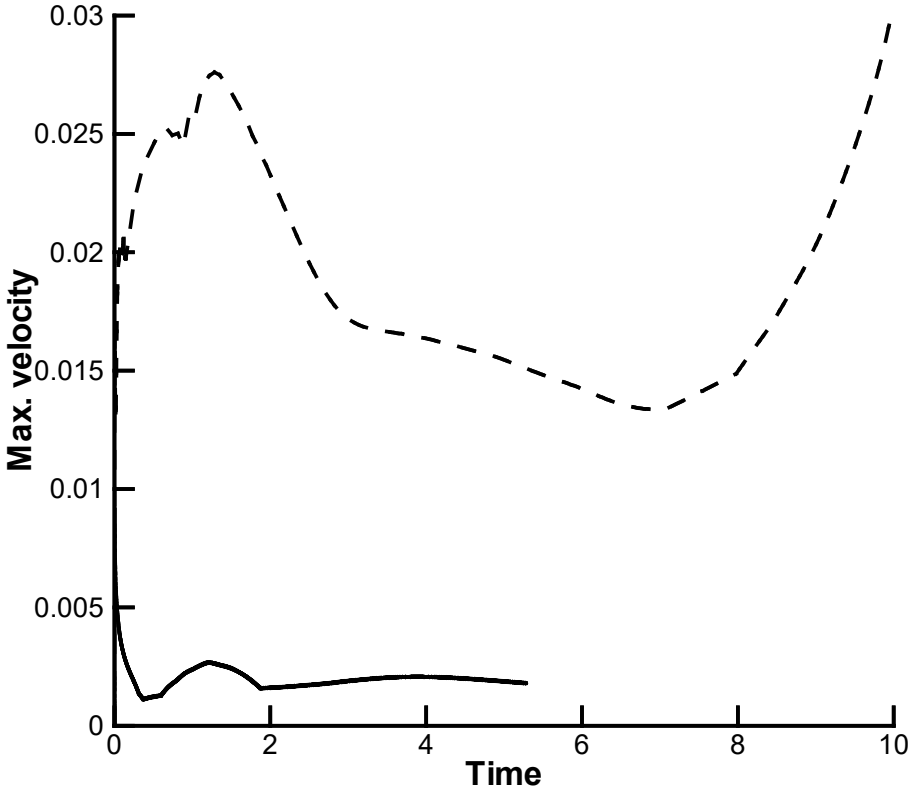

Рис. 4. Максимальная скорость: штриховая линия – вариант [1], сплошная – новый

На рис. 5 отслеживается во времени поведение пика плотности в ячейке вблизи экваториальной плоскости на радиусе $r \approx 0{,}02$, заданного в начале. В «штриховом» варианте максимум плотности, а вместе с ней энергии и давления, падает, особенно после момента времени $t \approx 2$. По-видимому, старая схема со временем переводит всю расчётную область в новое стационарное, устойчивое состояние, а именно: постоянное по пространству распределение давления и кеплеровский закон вращения. Одновременно происходит рост внутренней энергии в ячейках, находящихся «ниже» точки максимума. Так как по ним выбирается допустимый шаг по времени, то размазывание максимума приводит к уменьшению счётного шага примерно в 3 раза. В «сплошном» варианте такого эффекта не наблюдается.

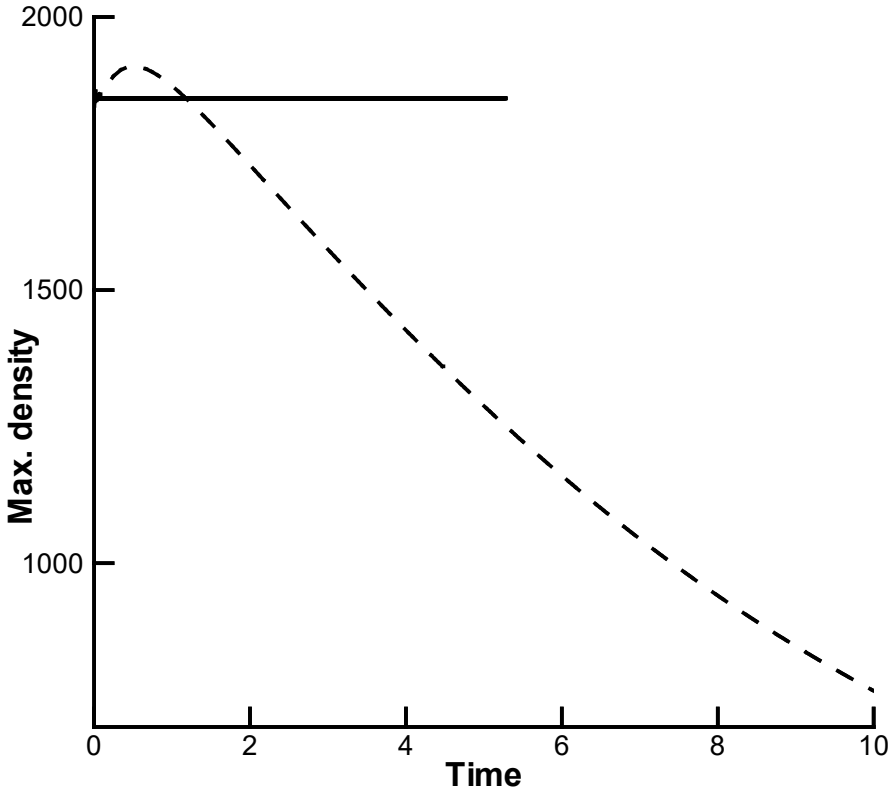

Рис. 5. Максимальная плотность в двух вариантах

7. Расчет с учетом собственного гравитационного поля

Хотя величина собственного потенциала диска в 10–100 раз меньше солнечного, его влияние на поведение вещества диска не является ничтожным. На рис. 6 линиями разного типа показаны радиальные распределения функций в экваториальной плоскости (в начальный момент времени), из которых складывается ускорение в диске. Сплошная линия – суммарное влияние Солнца, из него штриховая – это производная $\partial\varphi_S / \partial r$, а штрихпунктирная – центробежное ускорение w^2 / r, имеющее противоположный знак. Точечная линия – производная собственного потенциала диска $\partial\varphi_d / \partial r$. А штриховая с двумя точками – суммарное ускорение.

Аналогичные функции, определяющие ускорение вдоль оси вращения показаны на рис. 7 для двух радиусов: $r = 0{,}02$ и $r = 0{,}08$. Здесь сплошные линии – от притяжения Солнца $\partial\varphi_S / \partial x$, точечные – от собственного поля $\partial\varphi_d / \partial x$ (в данном масштабе 2 линии неразличимы), штриховые с двумя точками – их суммы (из-за малости производной от потенциала диска суммарные линии практически сливаются с «солнечными»). Вращение на движение вдоль оси в начальный момент не влияет, так как зависит только от радиуса.

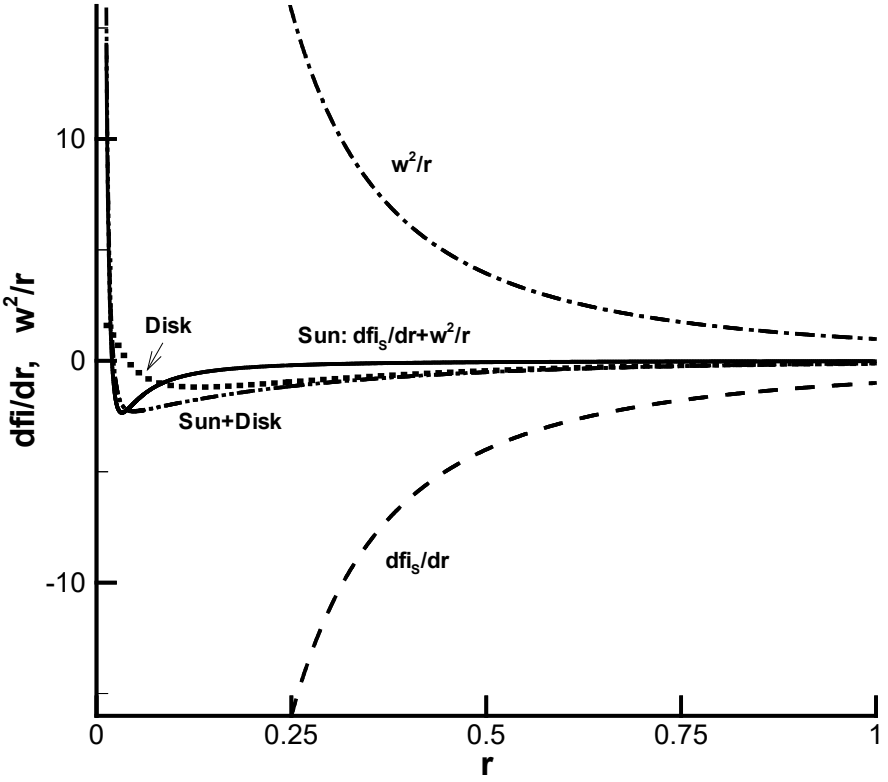

Рис. 6. Ускорение вдоль радиуса, $x = 0$

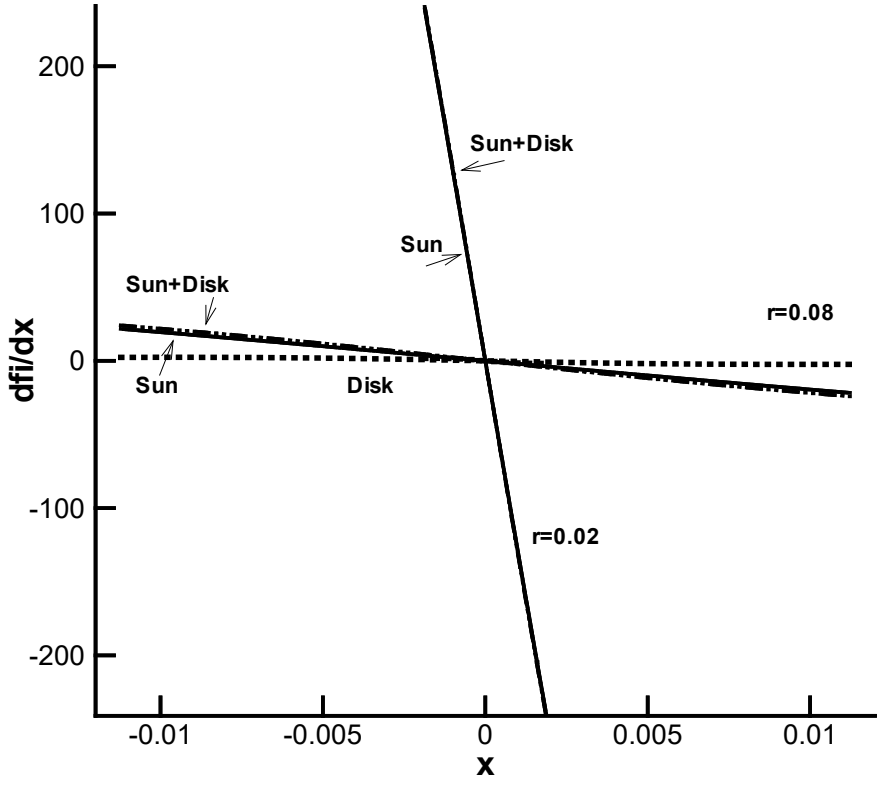

Рис. 7. Ускорение вдоль оси вращения, $r = 0{,}02;\ 0{,}08$

Так как сумма $\partial\varphi_S / \partial r + w^2 / r$, а также $\partial\varphi_S / \partial x$ скомпенсированы распределением давления, то движение вещества, по крайней мере, на первом этапе будет определяться только собственным гравитационным полем. Заметим, что $\partial\varphi_d / \partial x << \partial\varphi_S / \partial x$, поэтому основное движение должно быть радиальным, а не осевым.

Кроме того, если $\partial\varphi_S / \partial r + w^2 / r = 0$ при $r = 0{,}02$, то $\partial\varphi_d / \partial r = 0$ при $r = 0{,}04$, а их сумма обращается в ноль примерно на радиусе $r = 0{,}022$. То есть центр притяжения с учётом собственного поля почти не меняется.

Основной целью данной работы, кроме тестирования кода, являлась проверка существования стационарного состояния диска при учёте собственного гравитационного потенциала. Был произведён расчёт с теми же начальными и граничными условиями, как и в 6-м разделе. В отличие от более раннего, описанного в работе [1] (стр. 69-71), проведённого до времени $t = 1{,}757$, расчёт по усовершенствованной методике удалось довести до времени $t = 25{,}826$. Ниже на рисунках 8-12 приводятся некоторые результаты. На рис. 8 показано распределение радиальной скорости в плоскости $x = 0$ на несколько моментов времени. Штриховые линии (или обозначенные треугольниками) относятся к старому варианту [1]. Сплошные (или обозначенные квадратами) – к сегодняшнему варианту. Видно, что на одинаковые моменты времени (0,63; 1,44 и 1,76) оба расчёта дают схожий

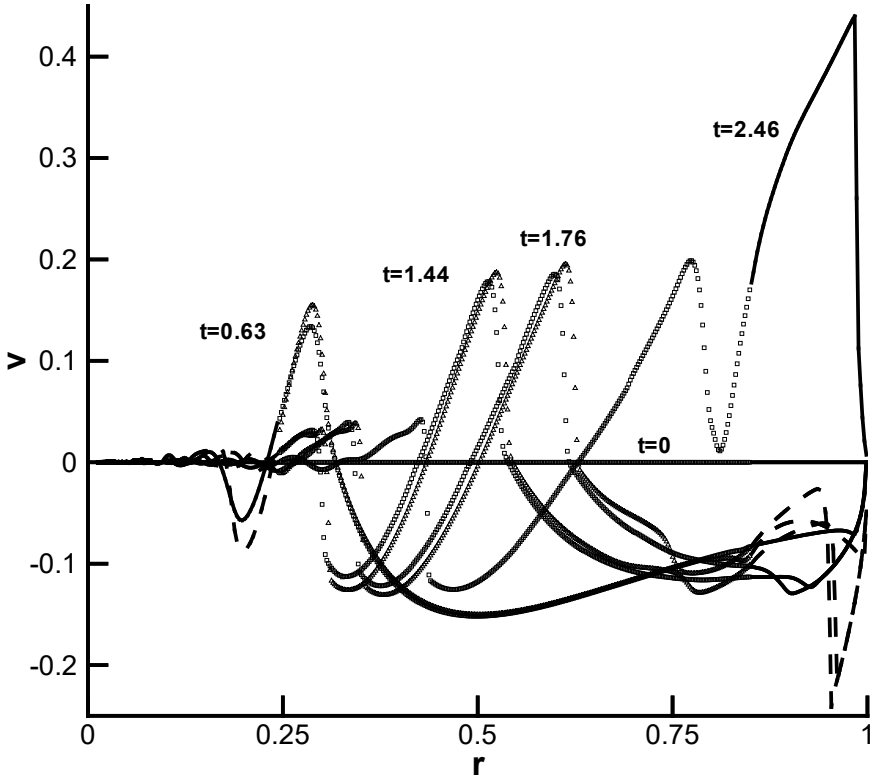

Рис. 8. Радиальная скорость на разные моменты времени, $x = 0$

результат. А именно – распространение ударной волны вдоль радиуса от точки максимальной плотности до внешней границы диска $r = 1$. Образованию этой волны предшествовало сжатие собственным полем к точке $x = 0, r = 0{,}022$ с превышением первоначального давления. Из-за того, что на внешней границе задана жёсткая стенка, волна отражается от неё и появляется обратное движение. Хотя такой расчёт не вполне корректен, со временем получается, что обратная волна затухает, не доходя до основной части диска, примерно на радиусе 0,6.

Если посмотреть на радиальное распределение плотности на рис. 9 на разные моменты времени в течение всего расчёта, то её колебания относительно начального состояния едва заметны. Поэтому на рис. 10 приведены только отклонения плотности от её начальных значений на те же моменты времени. Они показывают, что профиль плотности не меняется примерно с момента $t = 5$. Максимальное приращение наблюдается на радиусе 0,08, а начальный максимум вырос на 7 единиц.

Изменение во времени более заметно на распределении удельной внутренней энергии (рис.11). На радиусах $r > 0{,}7$ происходит значительный нагрев. Из-за него повышается и давление, как видно из рис. 12.

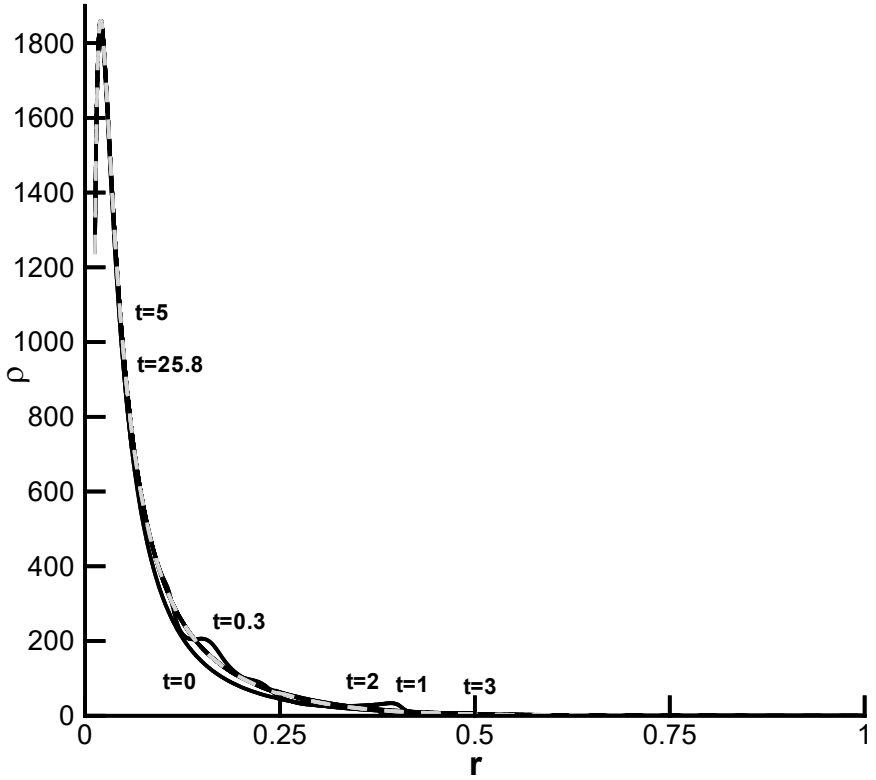

Рис. 9. Плотность в экваториальной плоскости $x = 0$
на разные моменты времени

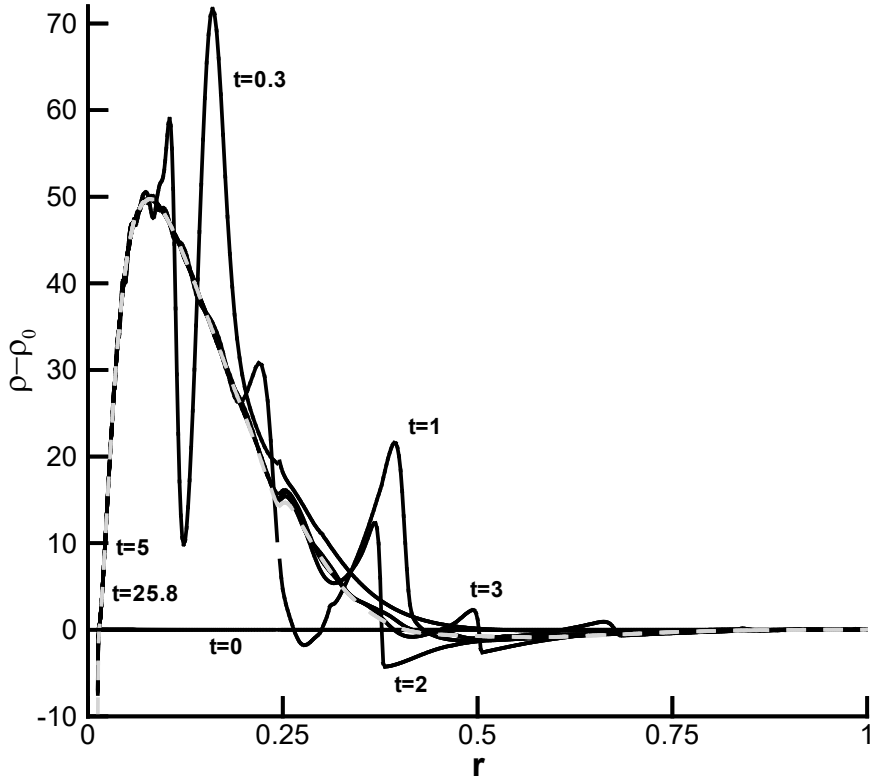

Рис. 10. Приращение плотности в экваториальной плоскости $x = 0$ на разные моменты времени

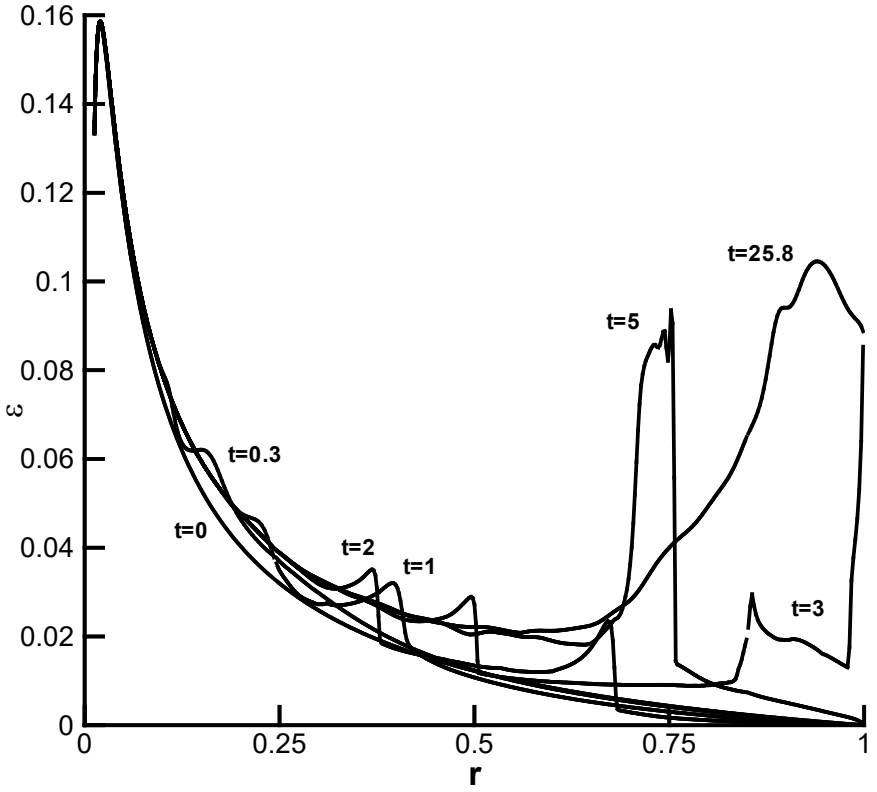

Рис. 11. Распределение удельной внутренней энергии вдоль радиуса, $x = 0$

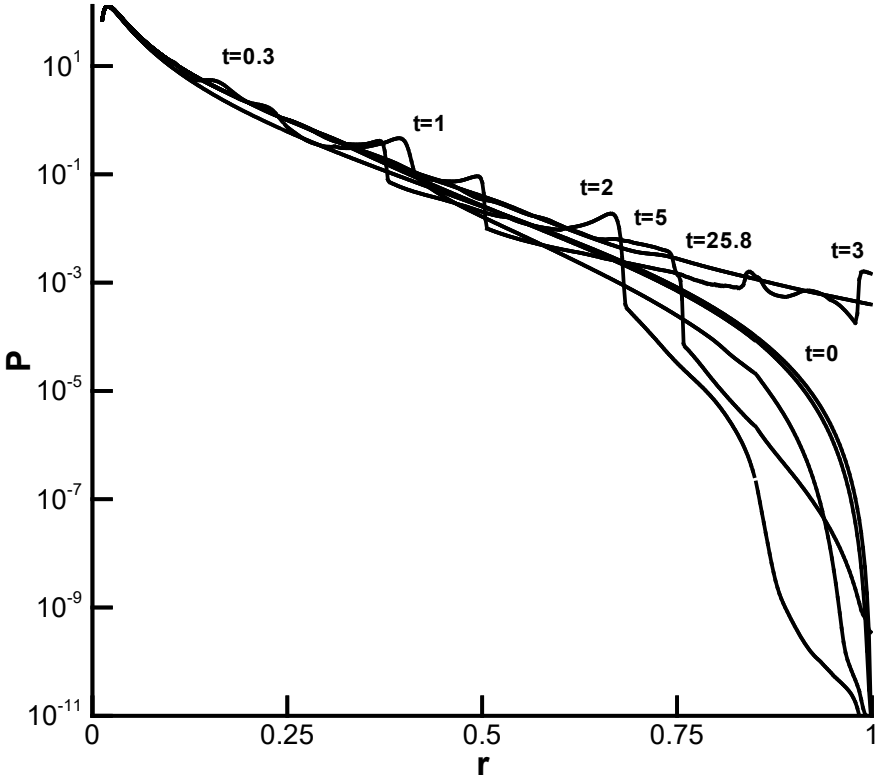

Рис. 12. Распределение давления вдоль радиуса, $x = 0$

На рис. 13 и 14 показаны изолинии плотности во всей расчётной области на момент выхода волны на верхнюю границу (примерно $t \approx 2{,}459$) и последний шаг, полученный в расчёте, $t \approx 25{,}826$ (1020 лет). Номера изолиний соответствуют начальным, изображенным на рис. 3.

Заметим, что в процессе расчёта по времени примерно с момента $t \approx 4$ начинает нарушаться симметрия решения относительно плоскости $x = 0$. Это особенно заметно на распределении скоростей и может быть обусловлено неустойчивостью и численной схемы, и физических процессов под влиянием самогравитации. Проявляется оно на радиусах $r > 0{,}6$, что видно также из изолиний плотности на рис. 14. В этой части расчетной области нарушается условие устойчивости для скорости вращения, и в некоторых точках получается $\partial(rw)/\partial r < 0$. Поэтому дальнейший расчёт в настоящий момент не имеет смысла.

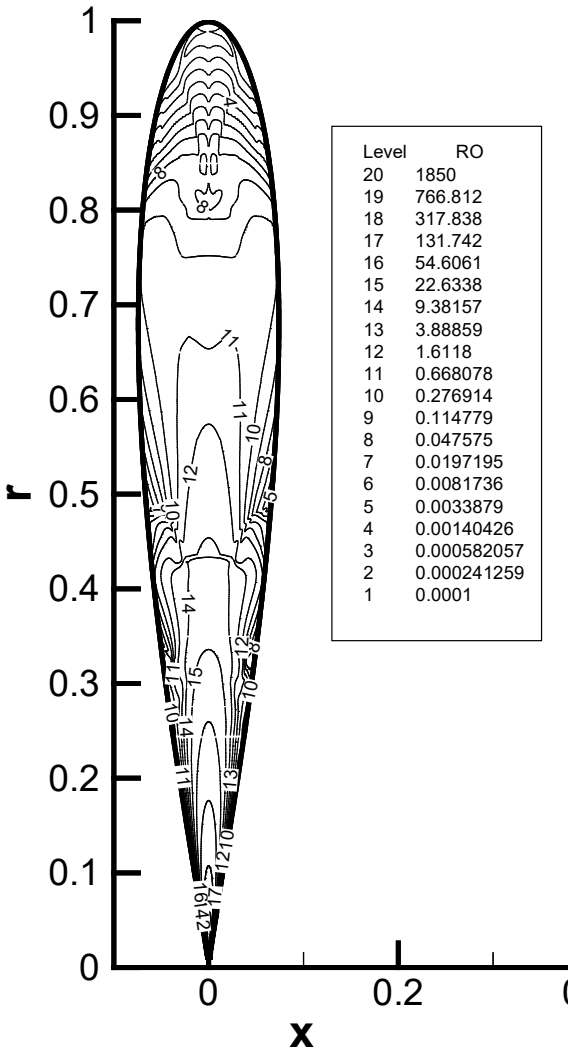

Рис. 13. Изолинии плотности на момент времени t = 2,459

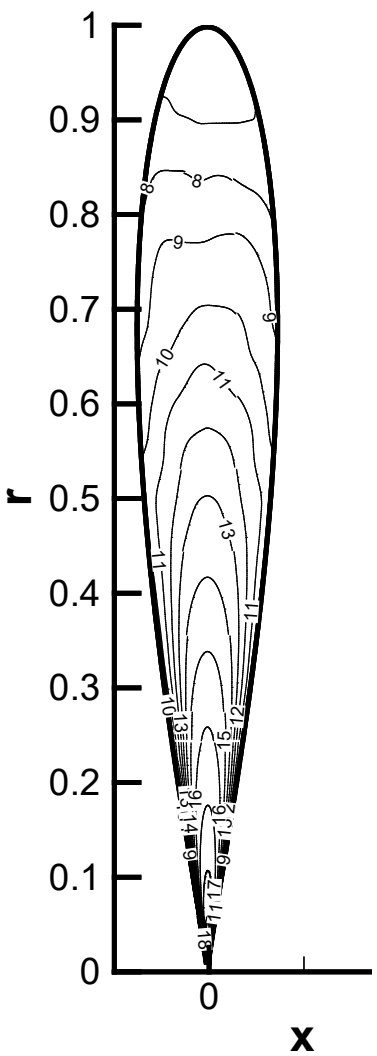

Рис. 14. Изолинии плотности на момент времени t = 25,826

Максимальная скорость (рис. 15) со временем уменьшается и остаётся на уровне около 0,1 по модулю.

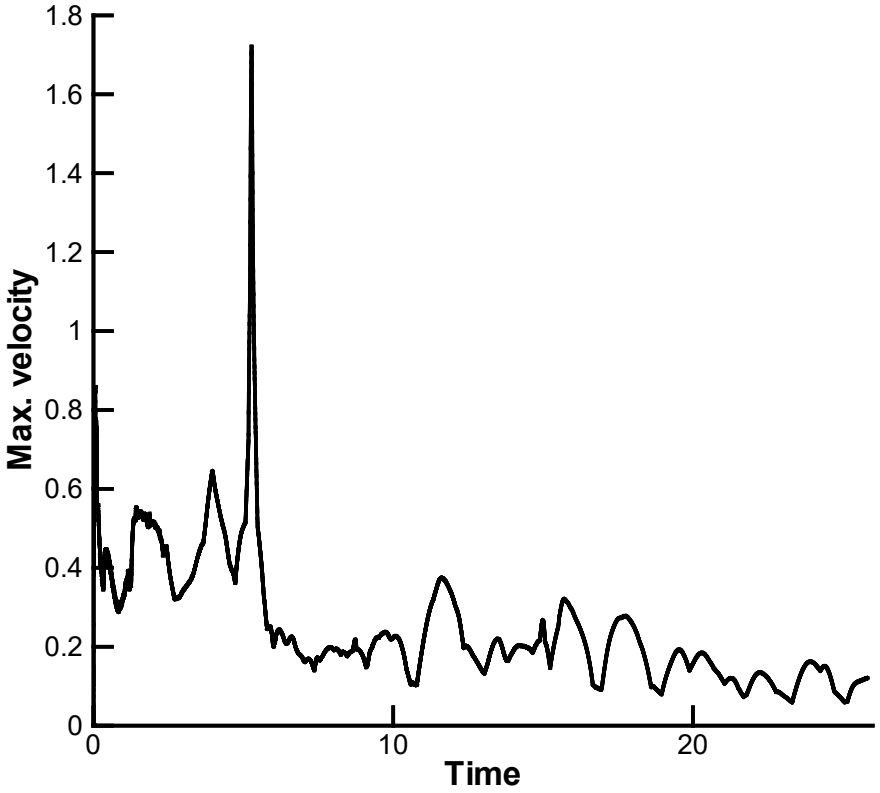

Рис. 15. Максимальная скорость

8. Заключение

Локальное изменение двумерной методики в рамках общей схемы Годунова позволяет производить расчёт стационарной модели с источником с лучшей точностью и большим шагом по времени.

Расчёт нестационарной модели, доведённый до более дальнего времени, продемонстрировал новое установившееся распределение газодинамических величин в газовом диске под влиянием собственного гравитационного поля. Но в данной модели на конец расчёта никаких ярко выраженных структур в диске вроде колец не наблюдается.

Можно предположить, что все нововведения применимы не только для гравитации, но и для расчёта моделей с другими силовыми функциями.

Основным недостатком усложнённой задачи о распаде разрыва является появление дополнительных разветвлений алгоритма, что может приводить к нарушению симметрии решения. Также до конца не решена проблема расчёта скорости вращения.

Библиографический список

1. В.Т. Жуков, Е.А. Забродина, М.С. Легкоступов, К.В. Мануковский, И.С. Меньшов, Л.А. Плинер, Л.Г. Страховская. Гравитационная неустойчивость и образование планетных систем звезд солнечного типа. Аналитический обзор избранных трудов. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2023. 220 с.
2. С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.М. Крайко, Г.П. Прокопов. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука. 1976.
3. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., 1953.