ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 47 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.А. Таюрский

Математическое моделирование вращения стенок камеры стационарного плазменного двигателя для несжимаемой плазмы

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Таюрский А.А. Математическое моделирование вращения стенок камеры стационарного плазменного двигателя для несжимаемой плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 47. 20 с. EDN: YNYMII
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-47

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.А. Таюрский

Математическое моделирование вращения стенок камеры стационарного плазменного двигателя для несжимаемой плазмы

Москва — 2025

Таюрский А.А.

Математическое моделирование вращения стенок камеры стационарного плазменного двигателя для несжимаемой плазмы

Построена математическая модель, с помощью которой можно вычислить выходные параметры плазмы в стационарном плазменном двигателе (СПД) с учётом вращения боковых стенок камеры СПД и без расчёта основных плазменных процессов в СПД. Определяющими факторами, лежащими в основе предложенного подхода, являются двухжидкостная природа плазмы, в том числе полный учёт инерции электронов, и диссипативные процессы: магнитная и гидродинамические вязкости электронов и ионов, теплопроводность плазмы и релаксация температур. Расчёт выходных эпюр сведён к решению краевой задачи для некоторой линейной системы ОДУ 8-го порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Предложен метод численного решения полученной краевой задачи. Приведены результаты расчётов в зависимости от скоростей вращения боковых стенок камеры СПД, показывающие работоспособность математической модели.

Ключевые слова: СПД, математическое моделирование, несжимаемая плазма

Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Mathematical modeling of the rotation of the walls of a Stationary plasma thruster chamber for incompressible plasma

A mathematical model has been developed to calculate the output parameters of plasma in a stationary plasma thruster (SPT) taking into account the rotation of the side walls of the SPT chamber without calculating the main plasma processes in the SPT. The determining factors underlying the proposed approach are the two-fluid nature of the plasma, including full consideration of electron inertia, and dissipative processes: magnetic and hydrodynamic viscosities of electrons and ions, plasma thermal conductivity, and temperature relaxation. The calculation of output profiles is reduced to solving a boundary value problem for a certain linear system of 8th-order ODEs with variable coefficients on a segment. A method for the numerical solution of the obtained boundary value problem is proposed. The results of calculations depending on the rotation of the side walls of the SPT chamber are presented demonstrating the functionality of the mathematical model.

Key words: SPT, mathematical modeling, incompressible plasma

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Введение

Более пятидесяти лет насчитывает история исследования процессов в стационарных плазменных двигателях (СПД), предложенных А.И. Морозовым [1, 2]. Упрощённая схема СПД приведена на рис. 1. Согласно ей СПД представляет собой коаксиальную камеру длины L с керамическими боковыми стенками внутреннего радиуса R_1 и внешнего R_2, в торцах которой расположены анод и катод с подведённой к ним разностью потенциалов, приводящей к появлению в камере электрического поля **E**. Кроме того, система обмоток с постоянными токами создаёт в камере почти радиальное магнитное поле **H**. Нейтральный газ – ксенон Xe – подаётся в СПД со стороны анода, ионизуется посредством ударной ионизации электронами, и возникающие ионы ксенона ускоряются продольным электрическим полем и покидают камеру в сторону катода, нейтрализуясь на нём. В результате возникает реактивная сила тяги, на получение которой и направлена работа СПД.

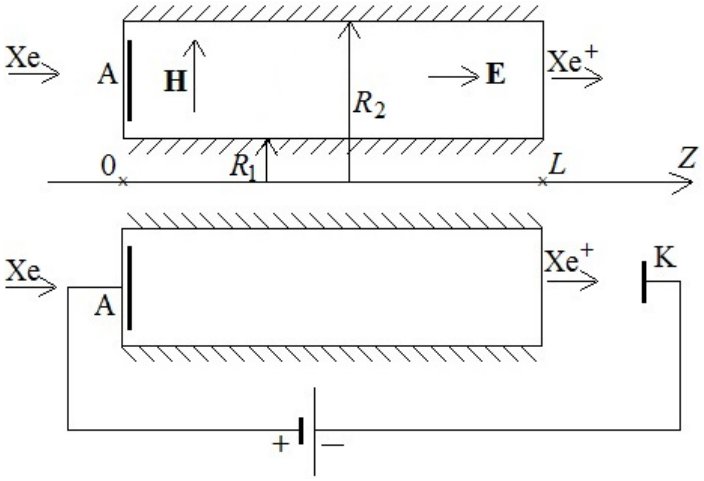

Рис. 1. Принципиальная схема СПД

В работе исследована математическая модель стационарного плазменного двигателя с вращающимися боковыми стенками, позволяющая вычислить распределения по радиусу выходных параметров плазменной среды (осевых и азимутальных скоростей и токов, температур и давлений электронов и ионов) и силу тяги СПД в зависимости от характеристик установки. К последним относятся продольное электрическое поле, радиальное магнитное поле, температуры боковых керамических стенок канала СПД.

При условии установления по оси установки параметров выходного потока плазмы эти параметры можно рассчитать без исследования основных процессов в СПД. Плазма предполагается полностью ионизованной, состоящей из электронов и ионов. Ниже ограничились случаем несжимаемой плазмы в СПД [3].

1. Основные уравнения

Динамика полностью ионизованной электрон-ионной плазмы в гидродинамическом приближении с несжимаемыми электронами и ионами задаётся системой уравнений [3]

$$\mathrm{div}\mathbf{v}_\pm = 0, \quad \rho_\pm = \mathrm{const},$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}_\pm}{\partial t} + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla \mathbf{v}_\pm + \frac{\nabla p_\pm}{\rho_\pm} = \pm \frac{e_\pm}{m_\pm}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\pm, \mathbf{H}]\right) \mp \frac{e_\pm}{m_\pm}\frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \frac{2\mu_\pm}{\rho_\pm}\mathrm{Div}\,\mathrm{def}\mathbf{v}_\pm, \tag{1}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{H}, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0,$$

где $\rho_\pm = m_\pm n_\pm$, плазма квазинейтральная ($e_+ n_+ = e_- n_-$), $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$, $\mathrm{def}\mathbf{v}_\pm$ – тензор (скоростей) деформации поля $\mathbf{v}_\pm$ (см. ниже). При этом возникает две проблемы: 1) для скоростей $\mathbf{v}_\pm$ имеем $v_- / v_+ \sim m_+ / m_-$, что для Xe имеет порядок $\sim 10^5$, и таким образом приходим к необходимости расчёта эволюции сильно разномасштабных величин $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$; 2) отсутствует уравнение для электрического поля $\mathbf{E}$. Эти проблемы исчезают, если от переменных $\mathbf{v}_\pm$, $\rho_\pm$ перейти к переменным $U = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-)/\rho$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$ путём сложения и вычитания (после умножения на подходящие множители) уравнений импульсов (см. [4]). В результате приходим к следующей системе [4]:

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \quad \rho = \mathrm{const},$$
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + \frac{\nabla p_\Sigma}{\rho} + \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}(\Pi^p + \Pi^c) = \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}(\Pi^{(U)} + \Pi_*^{(c)}),$$
$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}W - \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}(\Pi^{(c)} + \Pi_*^{(U)}), \tag{2}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{H}, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0,$$

где $\mathbf{U} = (\lambda_+ \mathbf{v}_+ + \lambda_- \mathbf{v}_-)/\lambda_\Sigma$ – массовая скорость, $\rho = \rho_+ + \rho_-$ – суммарная плотность, $\mathbf{v}_\pm$, $\rho_\pm$ – гидродинамические скорости и объёмные плотности электронов и ионов, $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $p_\pm$ – давления электронов и ионов, $\mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ - e_- n_- \mathbf{v}_-$, $n_\pm = \rho_\pm / m_\pm$, выполнено условие квазинейтральности $e_+ n_+ = e_- n_-$, Π^p, Π^c, W – тензоры.

$$\Pi^p = \frac{H^2}{8\pi}\mathrm{I}_3 - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi} \text{ (пондеромоторный тензор)}, \quad \mathrm{Div}\Pi^p = -\frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{H}],$$

$$\Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}{\rho} \text{ (токовый тензор)},$$

$$W = (\lambda_- - \lambda_+)(\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{U}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{U})$$

(тензор холловских напряжений).

I_3 – единичный трёхмерный тензор, $\Pi^{(U)}$, $\Pi^{(c)}$, $\Pi_*^{(U)}$, $\Pi_*^{(c)}$ – тензоры вязких напряжений, вычисляемые по формулам

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma \mathrm{def}\mathbf{U}, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* \rho^{-1} \mathrm{def}\mathbf{j}, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* \mathrm{def}\mathbf{U}, \quad \Pi_*^{(c)} = 2\mu_* \rho^{-1} \mathrm{def}\mathbf{j},$$

где для любого векторного поля $\mathbf{v}$ через $\mathrm{def}\mathbf{v}$ обозначен тензор (скоростей) деформации поля $\mathbf{v}$ [5] (см. ниже выражение для $\mathrm{def}\mathbf{v}$ в цилиндрических координатах). Система (2) является замкнутой и определённой относительно неизвестных $p_\pm$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$, из которой эти неизвестные в принципе могут быть найдены. Выше σ – проводимость плазмы, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$, $\mu_\pm$ – гидродинамические вязкости электронов и ионов. По решению системы (2) гидродинамические скорости и плотности плазменных компонент вычисляются по формулам $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \lambda_\mp \mathbf{j} / \rho$, $\rho_\pm = (\lambda_\pm / \lambda_\Sigma)\rho$, а температуры электронов и ионов ищутся из уравнений [6]

$$\rho_\pm c_p^\pm \left(\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla T_\pm \right) = \mathrm{div}(\chi_\pm \nabla T_\pm) + 2\mu_\pm \mathrm{tr}(D_\pm \cdot D_\pm) + \frac{m_\mp}{m_\Sigma} \frac{j^2}{\sigma} \pm b(T_- - T_+), \qquad (3)$$

где $D_\pm = \mathrm{def}\mathbf{v}_\pm$, $c_p = T\partial S / \partial T$ – теплоёмкость при постоянном давлении (для случая идеальных газов $c_p^\pm = k(\gamma - 1)^{-1} m_\pm^{-1} = \mathrm{const}$), $\chi_\pm$ – коэффициенты теплопроводности электронов и ионов, b – коэффициент релаксации температур. Проводимость плазмы σ и коэффициенты гидродинамических вязкостей электронов и ионов вычисляются по формуле Брагинского [3]:

$$\mu_+ = 0.96 \frac{3 m_+^{1/2} (kT_+)^{5/2}}{4\pi^{1/2} e^4 Z^4 L}, \mu_- = 0.733 \frac{3 m_+^{1/2} (kT_-)^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2} e^4 Z L}, \sigma = \frac{3(kT_-)^{3/2}}{4(2\pi m_-)^{1/2} e^2 Z L \cdot 0.5129}, \quad (4)$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг / К – постоянная Больцмана, $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ ед.СГСЭ – заряд электрона, $m_- = m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г – масса электрона, $m_+ = m_X = 0.9018 \cdot 10^{-22}$ г – масса иона ксенона, Z – кратность заряда иона (ниже $Z = 1$), L – кулоновский логарифм (ниже $L = 15$).

Коэффициенты теплопроводности $\chi_\pm$ и коэффициент релаксации температур вычисляются по формулам [7–10] (для случая $Z = 1$):

$$b = \frac{5 m_-^{1/2} e^4 Z^3 \rho^2 L}{m_+^3 k^{1/2} T_-^{3/2}}, \quad \chi_\pm = C_\pm (kT_\pm)^{5/2}, \quad C_- = 1.9 \frac{k}{m^{1/2} e^4 L}, \quad C_+ = C_- \left(\frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} \cdot 1.76. \quad (5)$$

Подчеркнём: в формулах (3)–(5) температуры $T_\pm$ измеряются в К.

С точки зрения приложений СПД для пользователя важны выходные характеристики установки: сила тяги, выходные скорости и токи, температуры и давления электронов и ионов. Оказывается, при определённых предположениях выходные параметры СПД приближённо можно вычислить из значительно более простых уравнений, чем (2), (3), минуя исследование

основных процессов в СПД. Указанные предположения сводятся к стационарности ($\partial/\partial t = 0$), наличию осевой симметрии у выходного потока плазмы $\partial/\partial\varphi = 0$ и гипотезе об установлении по оси установки выходных потоков плазмы и их параметров ($\partial/\partial z = 0$). С учётом этих предположений течение плазмы на выходе из СПД задаётся решениями системы (2) вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(r), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(r), \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(r), \quad p_{\pm} = p_{\pm}(r), \quad r_0 \le r \le r_1 \ (r_0 = R_1, r_1 = R_2). \qquad (6)$$

При этом для $\mathbf{U}(r)$, $\mathbf{j}(r)$ на стенках выполнены условия прилипания и непротекания. Если стенки покоятся, то $\mathbf{U}(r_0) = \mathbf{U}(r_1) = 0$, $\mathbf{j}(r_0) = \mathbf{j}(r_1) = 0$. Ниже рассматривается более общий случай, когда боковые стенки СПД могут равномерно вращаться с угловыми частотами ω_0 (для внутренней стенки $r = r_0$) и ω_1 (для внешней стенки $r = r_1$)

$$\begin{aligned} &U_\varphi(r_0) = \omega_0 r_0, \quad U_\varphi(r_1) = \omega_1 r_1, \quad U_z(r_0) = U_z(r_1) = 0, \quad U_r(r_0) = U_r(r_1) = 0, \\ &j_\varphi(r_0) = j_\varphi(r_1) = 0, \quad j_z(r_0) = j_z(r_1) = 0, \quad j_r(r_0) = j_r(r_1) = 0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Подставляя функции (6) в систему (2), получим из $\mathrm{div}\mathbf{U} = 0$, $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$ и граничных условий (7) $U_r = 0$, $j_r = 0$. Из $\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$, $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$ вытекает $H_r = \Phi_0 / r$, $E_r = \varphi_0 / r$, где, вообще говоря, $\Phi_0 \ne 0$, $\varphi_0 \ne 0$. Заметим, что вне канала СПД могут быть источники магнитного и электрического полей, реализуемые в виде системы токов (в частности, катушек) и зарядов. Из $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ следует $E_\varphi = \varphi_* / r$, но для стационарного осесимметричного случая из закона Фарадея, записанного в интегральном виде, легко следует $\varphi_* = 0$ и, значит, $E_\varphi \equiv 0$. Наконец, из $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ следует $E_z \equiv E_0 = \mathrm{const}$. Тензор деформаций $\mathrm{def}\mathbf{v}$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\mathrm{def}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \dfrac{v_\varphi}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ * & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \dfrac{v_r}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right) \\ * & * & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

где звёздочки означают симметрично расположенные относительно главной диагонали элементы, а вектор $\mathrm{Divdef}\mathbf{A}$ для векторного поля $\mathbf{A}$ с нулевой дивергенцией, $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, имеет вид

$$\mathrm{Divdef}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \Delta A_z\right),$$

где $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ – лапласиан f.

Итак, подстановка (6) в (2) приводит для нахождения функций U_φ, j_φ, U_z, j_z к следующей краевой задаче с граничными условиями (7):

$$
\begin{aligned}
&\mu_\Sigma L_1(D)U_\varphi + \frac{\mu_*}{\rho} L_1(D) j_\varphi + \frac{\Phi_0}{cr} j_z = 0,\\
&\frac{\mu_*}{\rho} L_1(D)U_\varphi + \frac{\mu^*}{\rho^2} L_1(D) j_\varphi - \frac{j_\varphi}{\sigma} + \frac{\Phi_0}{cr} U_z + \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\rho c}\frac{\Phi_0}{r} j_z = 0,\\
&\mu_\Sigma L_2(D)U_z + \frac{\mu_*}{\rho} L_2(D) j_z - \frac{\Phi_0}{cr} j_\varphi = 0,\\
&\frac{\mu_*}{\rho} L_2(D)U_z + \frac{\mu^*}{\rho^2} L_2(D) j_z - \frac{j_z}{\sigma} - \frac{\Phi_0}{cr} U_\varphi - \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\rho c}\frac{\Phi_0}{r} j_z + E_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $r_0 \le r \le r_1$, $L_1(D) = D^2 + \frac{D}{r} - \frac{1}{r^2}$, $L_2(D) = D^2 + \frac{D}{r}$, $D = \frac{d}{dr}$ – дифференциальные операторы, Φ_0, E_0 – заданные константы.

Рассмотрим нахождение по решению краевой задачи (8), (7) силы тяги, температур и давлений электронов и ионов.

Сила тяги F_T. Сначала вычислим суммарную силу трения, действующую на внешнюю и внутреннюю боковые стенки. По закону сохранения импульса сила тяги равна обратной величине суммарной силы трения. Пусть $\Pi_\pm = 2\mu_\pm \mathrm{def}\mathbf{v}_\pm$. Единичная нормаль к внешней стенке, обращённая в сторону плазмы, в цилиндрических координатах равна $(-1,0,0) = \mathbf{n}$. Значит, на единичную площадку внешней стенки действует сила трения

$$
\begin{aligned}
&-\Pi_+\mathbf{n} - \Pi_-\mathbf{n} = -(2\mu_+ \mathrm{def}\mathbf{v}_+\mathbf{n} + 2\mu_- \mathrm{def}\mathbf{v}_-\mathbf{n}) =\\
&= \mu_+\left(0, r\frac{d}{dr}\frac{v_\varphi^+}{r}\bigg|_{r=r_1}, \frac{dv_z^+}{dr}\bigg|_{r=r_1}\right) + \mu_-\left(0, r\frac{d}{dr}\frac{v_\varphi^-}{r}\bigg|_{r=r_1}, \frac{dv_z^-}{dr}\bigg|_{r=r_1}\right).
\end{aligned}
$$

Нас интересует z-я компонента. Грубая аппроксимация силы трения, действующей на всю внешнею стенку, сводится к умножению полученного выражения на площадь всей внешней стенки, т.е. на $2\pi r_1 \ell$. Итак,

$$
F_{\text{тр}}^{(1)} = \left(0, 2\pi r_1^2 \ell\left(\mu_+\left(\frac{v_\varphi^+}{r}\right)'(r_1) + \mu_-\left(\frac{v_\varphi^-}{r}\right)'(r_1)\right), 2\pi r_1 \ell\left(\mu_+(v_z^+)'(r_1) + \mu_-(v_z^-)'(r_1)\right)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{\text{тр,z}}^{(1)} = 2\pi r_1 \ell\left(\mu_+(v_z^+)'(r_1) + \mu_-(v_z^-)'(r_1)\right) = 2\pi r_1 \ell\left[\mu_+\left(U_z'(r_1) + \frac{\lambda_-}{\rho} j_z'(r_1)\right) + \right.\\
&\left. + \mu_-\left(U_z'(r_1) - \frac{\lambda_+}{\rho} j_z'(r_1)\right)\right] = 2\pi r_1 \ell\left[\mu_\Sigma U_z'(r_1) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_1)\right].
\end{aligned}
$$

Аналогичное вычисление для внутренней стенки, в котором вместо $\mathbf{n}$ надо взять $(-\mathbf{n})$, а вместо r_1 взять r_0, даёт

$$F_{\text{тр}}^{(0)} = -\left(0,2\pi r_0^2 \ell \left(\mu_+ \left(\frac{v_\varphi^+}{r} \right)' (r_0) + \mu_- \left(\frac{v_\varphi^-}{r} \right)' (r_0) \right), 2\pi r_0 \ell \left(\mu_+ (v_z^+)'(r_0) + \mu_- (v_z^-)'(r_0) \right) \right),$$

$$F_{\text{тр,z}}^{(0)} = -2\pi r_0 \ell \left[\mu_\Sigma U_z'(r_0) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_0) \right].$$

Окончательное выражение для силы тяги имеет вид

$$F_{\text{Т}} = -F_{\text{тр,z}}^{(1)} - F_{\text{тр,z}}^{(0)} = 2\pi\ell \left\{ -r_1 \left[\mu_\Sigma U_z'(r_1) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_1) \right] + r_0 \left[\mu_\Sigma U_z'(r_0) + \frac{\mu_*}{\rho} j_z'(r_0) \right] \right\}. \quad (9)$$

Вычисление температур электронов и ионов. Распределение температур электронов и ионов по радиусу ищется из системы (3):

$$k_\pm \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_\pm}{dr} \right) \pm b(T_- - T_+) + 2\mu_\pm \operatorname{tr}(D_\pm^2) + \frac{m_\mp}{m_\Sigma} \frac{j^2}{\sigma} = 0,$$

где $D_\pm = \operatorname{def} \mathbf{v}_\pm$ – тензор (скоростей) деформаций. Имеем

$$D_\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^\pm}{r} & \frac{dv_z^\pm}{dr} \\ r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^\pm}{r} & 0 & 0 \\ \frac{dv_z^\pm}{dr} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}(D_\pm^2) = \frac{1}{2} \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^\pm}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^\pm}{dr} \right)^2 \right].$$

Итак, для нахождения $T_\pm$ имеем систему

$$k_+ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_+}{dr} \right) + b(T_- - T_+) = f_+(r) \underset{\text{def}}{=} -\mu_+ \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^+}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^+}{dr} \right)^2 \right] - \frac{m_-}{m_\Sigma} \frac{(j_\varphi^2 + j_z^2)}{\sigma},$$

$$k_- \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_-}{dr} \right) - b(T_- - T_+) = f_0(r) \underset{\text{def}}{=} -\mu_- \left[\left(r \frac{d}{dr} \frac{v_\varphi^-}{r} \right)^2 + \left(\frac{dv_z^-}{dr} \right)^2 \right] - \frac{m_+}{m_\Sigma} \frac{(j_\varphi^2 + j_z^2)}{\sigma}, \quad r_0 \le r \le r_1 \quad (10)$$

с известными из решения системы (8) правыми частями (с учётом $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm (\lambda_\mp / \rho)\mathbf{j}$). Дополненная граничными условиями $T_\pm(r_0) = T_0$, $T_\pm(r_1) = T_1$,

где T_0, T_1 – температуры внутренней и внешней стенок, она позволяет найти $T_\pm(r)$.

Вычисление давлений электронов и ионов. Речь идёт о вычислении функций $p_\pm(r)$. Для этого надо записать *r*-е компоненты уравнения импульса и обобщённого закона Ома. Имеем

$$-\frac{U_\varphi^2}{r}+\frac{p'_+ + p'_-}{\rho}-\frac{1}{\rho c}(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi)-\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho}\frac{j_\varphi^2}{\rho r}=0,$$

$$\frac{\varphi_0}{r}=E_r=-\frac{1}{c}(U_\varphi H_z - U_z H_\varphi)+\frac{\lambda_- - \lambda_+}{\rho}\left[-\frac{1}{c}(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi)-\frac{\lambda_+\lambda_-}{\rho r}j_\varphi^2\right]+$$

$$+\frac{\lambda_- p'_+ - \lambda_+ p'_-}{\rho}-2\lambda_+\lambda_-\frac{j_\varphi U_\varphi}{r\rho}.$$

Отсюда вычисляются в явном виде $p'_\pm$:

$$p'_+=\frac{\lambda_+}{\lambda_\Sigma}\frac{\rho U_\varphi^2}{r}+\frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma}\left[\frac{1}{c}(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi)+\frac{\lambda_+\lambda_- j_\varphi^2}{\rho r}\right]+\frac{2\lambda_+\lambda_-}{\lambda_\Sigma}\frac{j_\varphi U_\varphi}{r}+$$

$$+\frac{\rho}{c\lambda_\Sigma}(U_\varphi H_z - U_z H_\varphi)+\frac{E_r\rho}{\lambda_\Sigma},$$

$$p'_-=\frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma}\frac{\rho U_\varphi^2}{r}+\frac{\lambda_+}{\lambda_\Sigma}\left[\frac{1}{c}(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi)+\frac{\lambda_+\lambda_- j_\varphi^2}{\rho r}\right]-\frac{2\lambda_+\lambda_-}{\lambda_\Sigma}\frac{j_\varphi U_\varphi}{r}- \qquad (11)$$

$$-\frac{\rho}{c\lambda_\Sigma}(U_\varphi H_z - U_z H_\varphi)-\frac{E_r\rho}{\lambda_\Sigma}.$$

Магнитные поля H_z, H_φ ищутся из уравнений $j_\varphi=-\frac{c}{4\pi}\frac{dH_z}{dr}$, $j_z=\frac{c}{4\pi r}\frac{drH_\varphi}{dr}$ решением задач Коши:

$$\frac{dH_z}{dr}=-\frac{4\pi}{c}j_\varphi,\ H_z(r_0)-\text{известное},\ \frac{dH_\varphi}{dr}=-\frac{H_\varphi}{r}+\frac{4\pi}{c}j_z,\ H_\varphi(r_0)-\text{известное}. \qquad (12)$$

Безразмерный вид основных уравнений. Пусть

$$[U_\varphi]=[U_z]=U_0,[j_\varphi]=[j_z]=j_0=\frac{c}{4\pi}\frac{H_0}{L_0},v_\text{A}=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}},[\Phi_0]=H_0L_0,[E_z]=\frac{U_0H_0}{c}.$$

Введём безразмерные комбинации (числа подобия):

$$\kappa=\frac{v_\text{A}}{U_0},\quad \xi=\frac{c\sqrt{\lambda_+\lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho}L_0},\quad \nu_m=\frac{c^2}{4\pi\sigma L_0U_0},\quad R_\pm=\frac{\rho U_0L_0}{\mu_\pm},\quad M=\frac{U_0}{c_s},\quad c_s^2=\frac{kT_0}{m_+}.$$

Тогда система (8) в безразмерном виде запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_+}+\frac{1}{R_-}\right)L_1(D)U_\varphi+\xi\kappa\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\frac{1}{R_+}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\frac{1}{R_-}\right)L_1(D)j_\varphi+\kappa^2\frac{\Phi_0 j_z}{r}=0, \\ \xi\kappa\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\frac{1}{R_+}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\frac{1}{R_-}\right)L_1(D)U_\varphi+\kappa^2\xi^2\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\frac{1}{R_+}+\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\frac{1}{R_-}\right)L_1(D)j_\varphi- \\ -\kappa^2\nu_m j_\varphi+\kappa^2\frac{\Phi_0 U_z}{r}+\kappa^3\xi\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\right)\frac{\Phi_0 j_z}{r}=0, \\ \left(\frac{1}{R_+}+\frac{1}{R_-}\right)L_2(D)U_z+\xi\kappa\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\frac{1}{R_+}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\frac{1}{R_-}\right)L_2(D)j_z-\kappa^2\frac{\Phi_0 j_\varphi}{r}=0, \\ \xi\kappa\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\frac{1}{R_+}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\frac{1}{R_-}\right)L_2(D)U_z+\kappa^2\xi^2\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\frac{1}{R_+}+\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\frac{1}{R_-}\right)L_2(D)j_z- \\ -\kappa^2\nu_m j_z-\frac{\kappa^2\Phi_0 U_\varphi}{r}-\kappa^3\xi\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\right)\frac{\Phi_0 j_\varphi}{r}=-\kappa^2 E_0. \end{cases} \tag{13}$$

Формула (9) в безразмерном виде даёт

$$\begin{aligned} F_{\text{Т}}=(2\pi L_0^2U_0^2\rho)\ell\Bigg\{&-r_1\left[\left(\frac{1}{R_+}+\frac{1}{R_-}\right)U_z'(r_1)+\kappa\xi\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\frac{1}{R_+}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\frac{1}{R_-}\right)j_z'(r_1)\right]+ \\ &+r_0\left[\left(\frac{1}{R_+}+\frac{1}{R_-}\right)U_z'(r_0)+\kappa\xi\left(\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\frac{1}{R_+}-\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}\frac{1}{R_-}\right)j_z'(r_0)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Для $L_0=1\text{см}$, $U_0=1.5\cdot10^6\,\text{см}\cdot\text{с}^{-1}$, $\rho=[m_+][n]=0.9018\cdot10^{-22}\,\text{г}\cdot10^{12}\,\text{см}^{-3}$ получим $2\pi L_0^2U_0^2\rho=1.27\cdot10^3\,\text{г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^{-2}$.

Рассмотрим безразмерную запись системы (10). Учитывая, что в безразмерном виде $\mathbf{v}_\pm=\mathbf{U}\pm\kappa\xi\sqrt{\lambda_\mp/\lambda_\pm}\,\mathbf{j}$, получим

$$\begin{cases} \kappa_+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_+}{dr}\right)+\hat{b}(T_--T_+)=f_+(r)=-\frac{1}{R_+}\left[\left(r\frac{d}{dr}\frac{v_\varphi^+}{r}\right)^2+\left(\frac{dv_z^+}{dr}\right)^2\right]- \\ \qquad -\frac{m_-}{m_\Sigma}\kappa^2\nu_m(j_\varphi^2+j_z^2), \\ \kappa_-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_-}{dr}\right)-\hat{b}(T_--T_+)=f_-(r)=-\frac{1}{R_-}\left[\left(r\frac{d}{dr}\frac{v_\varphi^-}{r}\right)^2+\left(\frac{dv_z^-}{dr}\right)^2\right]- \\ \qquad -\frac{m_+}{m_\Sigma}\kappa^2\nu_m(j_\varphi^2+j_z^2), \end{cases} \tag{15}$$

$\kappa_{\pm} = \dfrac{k_{\pm} T_0}{\rho U_0^3 L_0}$, $\hat{b} = \dfrac{b T_0 L_0}{\rho U_0^3}$, где $T_0 = 20$эв, $L_0 = 1$см, $U_0 = 1.5 \cdot 10^6$ см$\cdot$с$^{-1}$, $\rho = m_X \cdot 10^{12}$ см$^{-3}$.

Наконец, формулы (11) в безразмерном виде запишутся так:

$$\frac{1}{M_A^2} p'_+ = \frac{\lambda_+}{\lambda_\Sigma} \frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma} \kappa^2 \left[(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi) + \xi^2 \frac{j_\varphi^2}{r} \right] + \frac{2\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} \xi \kappa \frac{j_\varphi U_\varphi}{r} +$$
$$+ \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} (U_\varphi H_z - U_z H_\varphi) + \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} E_r,$$

$$\frac{1}{M_A^2} p'_- = \frac{\lambda_-}{\lambda_\Sigma} \frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{\lambda_+}{\lambda_\Sigma} \kappa^2 \left[(j_\varphi H_z - j_z H_\varphi) + \xi^2 \frac{j_\varphi^2}{r} \right] - \frac{2\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} \xi \kappa \frac{j_\varphi U_\varphi}{r} -$$
$$- \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} (U_\varphi H_z - U_z H_\varphi) - \frac{\kappa}{\xi} \frac{\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\lambda_\Sigma} E_r, \qquad (16)$$

где $M_A = \dfrac{U_0}{c_s}$, $c_s^2 = \dfrac{p_0}{\rho}$, $p_0 = k n_0 T_0$.

Наконец, H_z, H_φ ищутся из решения задач Коши (12), которые в безразмерном виде запишутся так:

$$\frac{dH_z}{dr} = -j_\varphi, \quad \frac{dH_\varphi}{dr} = -\frac{H_\varphi}{r} + j_z, \quad H_z(r_0), H_\varphi(r_0) - \text{заданы}. \qquad (17)$$

Рассмотрим вычисление коэффициентов переноса и чисел подобия для типичных значений параметров плазмы в СПД:

$$H_0 = 200\text{гс}, n_0 = 10^{-12}\text{см}^{-3}, T_0 = T_i = T_e = 20\text{эв} = 20 \cdot 11600\text{K} =$$
$$= 20 \cdot 11600 \cdot 1.38 \cdot 10^{-16}\text{эрг} = 0.336 \cdot 10^{-10}\text{эрг}, m_{Xe} = 0.9018 \cdot 10^{-22}\text{г},$$
$$U_0 = 1.5 \cdot 10^6 \text{см} \cdot \text{с}^{-1}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}\text{г}, e = 4.8 \cdot 10^{-10}\text{ед.СГСЭ}.$$

Расчёт μ_+, μ_-, σ по формулам Брагинского (4) даёт

$$\mu_+ = 0.0106, \quad \mu_- = 0.5444 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma = 1.12 \cdot 10^{15}\text{с}^{-1}.$$

Отсюда

$$R_+^{-1} = \frac{10^8 \cdot 1.175}{U_0} = 78.3, \quad R_-^{-1} = \frac{10^6 \cdot 0.6}{U_0} = 0.4, \quad \nu_m = \frac{0.6398 \cdot 10^5}{U_0} = 0.4265 \cdot 10^{-1},$$
$$\kappa = \frac{v_A}{U_0} = \frac{H_0}{U_0 \sqrt{4\pi\rho}} = 4, \quad v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} = 6 \cdot 10^6 \text{см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \xi = 0.53.$$

Наконец, имеем

$$\kappa_+ = 2.8\cdot 10^2,\quad \kappa_- = 0.5\cdot 10^5,\quad \hat{b} = 2.5\cdot 10^2,\quad \frac{m_-}{m_+} = 1.01\cdot 10^{-5},\quad \frac{m_+}{m_-} = 0.99\cdot 10^5,$$

$$\sqrt{\frac{m_+}{m_-}} = 3.146\cdot 10^2, \sqrt{\frac{m_-}{m_+}} = 0.3178\cdot 10^{-2}, c_s = \sqrt{\frac{kT_0}{m_+}} = 0.61\cdot 10^6 \text{см/с}, M = \frac{U}{c_s} = 2.45.$$

2. Численное решение уравнений

Рассмотрим численное решение краевых задач для уравнений (13), (15), задач Коши для уравнений (17) и вычисление силы тяги и распределений давлений электронов и ионов по формулам (14) и (15). Наибольшие проблемы представляет система (13), которую перепишем в матричном операторном виде:

$$\mathscr{A}(D)\begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & ArL_2(D) \\ ArL_1(D) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} = \Phi_* \mathrm{B}\begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rf_* \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_0 \\ \mathrm{I}_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\quad \mathrm{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$u_\varphi = (U_\varphi, j_\varphi)^{\mathrm{T}},\quad u_z = (U_z, j_z)^{\mathrm{T}},\quad f_* = (0, \kappa^2 E_0)^{\mathrm{T}},$$

$$L_2(D) = D^2 + D/r,\quad L_1(D) = L_2(D) - 1/r^2,\quad D = d/dr, \quad (19)$$

$$a_{11} = R_+^{-1} + R_-^{-1},\quad a_{22} = \kappa^2\xi^2(R_+^{-1}\lambda_-/\lambda_+ + R_-^{-1}\lambda_+/\lambda_-),$$

$$a_{12} = a_{21} = \kappa\xi(R_+^{-1}(\lambda_-/\lambda_+)^{1/2} - R_-^{-1}(\lambda_+/\lambda_-)^{1/2}),\quad a = \kappa^2\nu_m$$

$$b_{11} = 0,\quad b_{12} = b_{21} = \kappa^2,\quad b_{22} = \kappa^3\xi(\sqrt{\lambda_-/\lambda_+} - \sqrt{\lambda_+/\lambda_-}),\quad \Phi_* = \kappa^2\Phi_0.$$

Уравнение (18) равносильно паре уравнений

$$\begin{cases} (ArL_2(D) - r\mathrm{I}_0)u_z = \Phi_* B u_\varphi + rf_*, \\ (ArL_1(D) - r\mathrm{I}_0)u_\varphi = -\Phi_* B u_z. \end{cases} \quad (20)$$

В обозначениях (20) используем следующий метод приближённого решения краевых задач для (18) и (20). Задаём $u_\varphi^{(0)}$ произвольно, а $u_z^{(0)}$ находим из решения краевой задачи для уравнения $(ArL_2(D) - r\mathrm{I}_0)u_z^{(0)} = \Phi_* B u_\varphi^{(0)} + rf_*$. После этого переход $u_\varphi^{(n)}, u_z^{(n)} \to u_\varphi^{(n+1)}, u_z^{(n+1)}$ происходит в два этапа. Сначала находим $u_\varphi^{(n+1)}$, а затем $u_z^{(n+1)}$ из решения краевых задач для уравнений

$$(ArL_1(D) - r\mathrm{I}_0)u_\varphi^{(n+1)} = -\Phi_* B u_z^{(n)}, (ArL_2(D) - r\mathrm{I}_0)u_z^{(n+1)} = \Phi_* B u_\varphi^{(n+1)} + rf_*, n = 0,1,2,\ldots$$

Процесс итераций останавливается при выполнении условий

$$\left\| u_\varphi^{(n+1)} - u_\varphi^{(n)} \right\| \le \varepsilon \left\| u_\varphi^{(n)} \right\| + \varepsilon_0,\quad \left\| u_z^{(n+1)} - u_z^{(n)} \right\| \le \varepsilon \left\| u_z^{(n)} \right\| + \varepsilon_0, \quad (21)$$

где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малые константы, подбираемые экспериментально, а $\|\cdot\|$ – максимум модуля. А в качестве $u_\varphi^{(0)}(r) = (U_\varphi^{(0)}(r), j_\varphi^{(0)}(r))$ удобно взять гидродинамическое решение:

$$j_\varphi^{(0)}(r) \equiv 0, \quad U_\varphi^{(0)}(r) = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} r + \frac{r_0^2 r_1^2 (\omega_0 - \omega_1)}{r_1^2 - r_0^2} \frac{1}{r}, \quad r_0 \le r \le r_1.$$

Преимущество метода в том, что краевые задачи для уравнений

$$\begin{aligned} &(ArL_1(D) - rI_0)u = f, \quad u = (U, j)^{\mathrm{T}}, \\ &(ArL_2(D) - rI_0)u = f, \quad f = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{22}$$

решаются методом исключений, так что нет необходимости в использовании итерационных процедур. Перепишем, например, первую задачу (22) в виде

$$(rL_1(D)\mathrm{I}_2 - rA^{-1}\mathrm{I}_0)u = A^{-1} f$$

или

$$\begin{cases} rL_1(D)U - r\overline{a}_{12} aj = \overline{a}_{11} f_1 + \overline{a}_{12} f_2, & (a) \\ rL_1(D) j - r\overline{a}_{22} aj = \overline{a}_{21} f_1 + \overline{a}_{22} f_2, & (б) \end{cases} \tag{23}$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка и

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \frac{\kappa^2 \xi^2}{R_+ R_-} \frac{\lambda_\Sigma^2}{\lambda_+ \lambda_-} > 0.$$

Из второго уравнения (23) находим (и исключаем из числа неизвестных) j:

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dj}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + a\overline{a}_{22} \right) j = \frac{\overline{a}_{21} f_1 + \overline{a}_{22} f_2}{r}. \quad (б)$$

После этого, зная j, из первого уравнения (23) находим U, рассматривая найденное j как слагаемое в правой части уравнения:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r^2} = \overline{a}_{12} aj + \frac{\overline{a}_{11} f_1 + \overline{a}_{12} f_2}{r}. \quad (a)$$

При этом важно, что $a\overline{a}_{22} > 0$, ибо $a > 0$ и $\overline{a}_{22} = a_{11} / \Delta > 0$. Аналогично вторая задача в (22) сводится к паре краевых задач, которая получится, если в (23) заменить $L_1(D)$ на $L_2(D)$:

$$\begin{cases} rL_2(D)U - r\overline{a}_{12} aj = \overline{a}_{11} f_1 + \overline{a}_{12} f_2, & (a) \\ rL_2(D) j - r\overline{a}_{22} aj = \overline{a}_{21} f_1 + \overline{a}_{22} f_2. & (б) \end{cases} \tag{24}$$

Тогда из второго уравнения (24) находим j:

$$\frac{d^2 j}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dj}{dr}-\overline{a}_{22}aj=\frac{\overline{a}_{21}f_1+\overline{a}_{22}f_2}{r}, \quad (б)$$

а затем из первого уравнения (24) находим U, рассматривая найденное j как слагаемое в правой части:

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}=\overline{a}_{12}aj+\frac{\overline{a}_{11}f_1+\overline{a}_{12}f_2}{r}. \quad (a)$$

Если $f_1(r)$, $f_2(r)$, $r_0 \le r \le r_1$ заданы аналитически, то решение краевых задач для уравнений (23) и (24) можно записать аналитически в интегральном виде через правые части и функции Бесселя мнимого аргумента и Макдональда индекса 0 (для (24)) и 1 (для (23)). Однако для практического нахождения эпюр выходных скоростей и токов краевые задачи для уравнений (23), (24) проще решить разностным методом. Для этого фиксируем равномерную сетку $r^k = r_0 + kh$, $0 \le k \le N$, $h=(r_1-r_0)/N$. Все функции аппроксимируются сеточными, заданными в узлах указанной сетки. Тогда вторая краевая задача (23) сводится к решению линейной системы:

$$\frac{j_{k+1}-2j_k+j_{k-1}}{h^2}+\frac{1}{r^k}\frac{j_{k+1}-j_{k-1}}{2h}-\left(\frac{1}{(r^k)^2}+a\overline{a}_{22}\right)j_k=f_k, \quad 0<k<N,$$
$$j_0=j^{(0)}, \quad j_N=j^{(1)}, \tag{25}$$

где $f_k=\dfrac{\overline{a}_{21}f_{1k}+\overline{a}_{22}f_{2k}}{r^k}$, $j^{(0)}$, $j^{(1)}$ – заданные значения j на концах $[r_0,r_1]$.

Первая задача (23) сводится к решению линейной системы

$$\frac{U_{k+1}-2U_k+U_{k-1}}{h^2}+\frac{1}{r^k}\frac{U_{k+1}-U_{k-1}}{2h}-\frac{U_k}{(r^k)^2}=g_k, \quad 0<k<N,$$
$$U_0=U^{(0)}, \quad U_N=U^{(1)}, \tag{26}$$

где $g_k=\overline{a}_{12}aj_k+\dfrac{\overline{a}_{11}f_{1k}+\overline{a}_{12}f_{2k}}{r^k}$, $U^{(0)}$, $U^{(1)}$ – заданные значения U на концах отрезка $[r_0,r_1]$.

Аналогично вторая краевая задача (24) сводится к решению линейной системы:

$$\frac{j_{k+1}-2j_k+j_{k-1}}{h^2}+\frac{1}{r^k}\frac{j_{k+1}-j_{k-1}}{2h}-\overline{a}_{22}aj_k=f_k, \quad 0<k<N, j_0=j^{(0)}, j_N=j^{(1)}, \tag{27}$$

а решение первой краевой задачи (24) сводится к решению линейной системы

$$\frac{U_{k+1}-2U_k+U_{k-1}}{h^2}+\frac{1}{r^k}\frac{U_{k+1}-U_{k-1}}{2h}=g_k, \quad 0<k<N, U_0=U^{(0)}, U_N=U^{(1)}, \tag{28}$$

где f_k, g_k, $0<k<N$, определены выше. Матрицы линейных систем (25), (26), (27), (28) имеют вид соответственно:

$$j_{k-1}\left(1-\frac{h}{2r^k}\right)-j_k\left(2+\frac{h^2}{(r^k)^2}+h^2\overline{a}_{22}a\right)+j_{k+1}\left(1+\frac{h}{2r^k}\right)=h^2f_k,\,0<k<N,$$

$$j_0=j^{(0)},\quad j_N=j^{(1)},$$

$$U_{k-1}\left(1-\frac{h}{2r^k}\right)-U_k\left(2+\frac{h^2}{(r^k)^2}\right)+U_{k+1}\left(1+\frac{h}{2r^k}\right)=h^2g_k,\,0<k<N,$$

$$U_0=U^{(0)},\quad U_N=U^{(1)},$$

$$j_{k-1}\left(1-\frac{h}{2r^k}\right)-j_k\left(2+h^2\overline{a}_{22}a\right)+j_{k+1}\left(1+\frac{h}{2r^k}\right)=h^2f_k,\,0<k<N,$$

$$j_0=j^{(0)},\quad j_N=j^{(1)},$$

$$U_{k-1}\left(1-\frac{h}{2r^k}\right)-2U_k+U_{k+1}\left(1+\frac{h}{2r^k}\right)=h^2g_k,\,0<k<N,$$

$$U_0=U^{(0)},\quad U_N=U^{(1)}.$$

Перечисленные матрицы имеют диагональное преобладание по строкам. Поэтому, обращая их прогонкой, приходим к алгоритмам решения краевых задач (23) и (24), каждый из которых сводится к двум прогонкам, а значит, экономичен (количество потребных арифметических операций имеет порядок N при $N\to+\infty$) и вычислительно устойчив (более того, не накапливает ошибки округления).

Перейдём к численному нахождению температур из системы (15). При этом граничные условия полагаем вида $T_+(r_0)=T_-(r_0)=T^{(0)}$, $T_+(r_1)=T_-(r_1)=T^{(1)}$. Численное решение системы (15) распадается на два этапа.

I этап. Находим вспомогательную «температуру» $T=\kappa_+T_++\kappa_-T_-$ из краевой задачи

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=f(r)\underset{\text{def}}{=}f_+(r)+f_-(r),\quad T(r_0)=(\kappa_++\kappa_-)T^{(0)},T(r_1)=(\kappa_++\kappa_-)T^{(1)}.$$

Это делается решением линейной системы прогонкой

$$\frac{T_{k+1}-2T_k+T_{k-1}}{h^2}+\frac{T_{k+1}-T_{k-1}}{2hr^k}=f(r_k),\,0<k<N,\,T_0=(\kappa_0+\kappa_1)T^{(0)},\,T_N=(\kappa_0+\kappa_1)T^{(1)}.$$

II этап. Ищем $T_\pm$, используя равенства $T_-=\frac{1}{\kappa_-}T-\frac{\kappa_+}{\kappa_-}T_+$, $T_+=\frac{1}{\kappa_+}T-\frac{\kappa_-}{\kappa_+}T_-$, причём первое подставляется в верхнее равенство (15), а второе – в нижнее. Тогда для нахождения T_k^+, $0\le k\le N$ и T_k^-, $0\le k\le N$ получим две системы линейных уравнений

$$\kappa_+ \frac{T_{k+1}^+ - 2T_k^+ + T_{k-1}^+}{h^2} + \kappa_+ \frac{T_{k+1}^+ - T_{k-1}^+}{2hr^k} - T_k^+ \left(1 + \frac{\kappa_+}{\kappa_-}\right)\hat{b} = f_+(r^k) - \frac{T_k}{\kappa_-}, 0 < k < N,$$

$$T_0^+ = T^{(0)}, \quad T_N^+ = T^{(1)},$$

$$\kappa_- \frac{T_{k+1}^- - 2T_k^- + T_{k-1}^-}{h^2} + \kappa_- \frac{T_{k+1}^- - T_{k-1}^-}{2hr^k} - T_k^- \left(1 + \frac{\kappa_-}{\kappa_+}\right)\hat{b} = f_-(r^k) - \frac{T_k}{\kappa_+}, 0 < k < N,$$

$$T_0^- = T^{(0)}, \quad T_N^- = T^{(1)}.$$

Очевидно, матрицы возникающих линейных систем имеют диагональное преобладание по строкам и поэтому обращаются прогонкой. Можно предложить разные сценарии вычисления $f_\pm(r^k)$ и $f(r^k)$. Например, такой. Сначала вычисляем

$$p_{1k} = \left(r\frac{d}{dr}\frac{U_\varphi}{r}\right)_k \sim \frac{U_{\varphi,k+1} - U_{\varphi,k-1}}{2h} - \frac{U_{\varphi,k}}{r^k}, \; p_{2k} = \left(r\frac{d}{dr}\frac{j_\varphi}{r}\right)_k \sim \frac{j_{\varphi,k+1} - j_{\varphi,k-1}}{2h} - \frac{j_{\varphi,k}}{r^k},$$

$$q_{1k} = \left(\frac{dU_z}{dr}\right)_k \sim \frac{U_{z,k+1} - U_{z,k-1}}{2h}, \; q_{2k} = \left(\frac{dj_z}{dr}\right)_k \sim \frac{j_{z,k+1} - j_{z,k-1}}{2h}.$$

Тогда

$$f(r^k) = -(p_{1k}, p_{2k})A\begin{pmatrix} p_{1k} \\ p_{2k} \end{pmatrix} - (q_{1k}, q_{2k})A\begin{pmatrix} q_{1k} \\ q_{2k} \end{pmatrix} - \kappa^2 \nu_m (j_{zk}^2 + j_{\varphi k}^2),$$

$$f_\pm(r^k) = -\frac{1}{R_\pm}\left[\left(p_{1k} \pm \kappa\xi\sqrt{\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}}p_{2k}\right)^2 + \left(q_{1k} \pm \kappa\xi\sqrt{\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}}q_{2k}\right)^2\right] - \frac{m_\mp}{m_\Sigma}\kappa^2\nu_m(j_{zk}^2 + j_{\varphi k}^2),$$

где использована формула $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \kappa\xi\sqrt{\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}}\mathbf{j}$. При этом из трёх величин $f_\pm(r^k)$, $f(r^k)$ достаточно подсчитать только любые две.

Рассмотрим решение задачи Коши (17). Вычислим их по схеме Эйлера с пересчётом. Для первого уравнения это даёт

$$\frac{H_{z,k+1} - H_{z,k}}{h} = -\frac{j_{\varphi,k} + j_{\varphi,k+1}}{2}, \quad k \ge 0, H_{z,0} = H_z^0 \text{ – начальное условие,}$$

или

$$H_{z,k+1} = H_{z,k} - \frac{h}{2}(j_{\varphi,k} + j_{\varphi,k+1}), \quad k \ge 0, H_{z,0} = H_z^0.$$

Второе уравнение решим заменой переменных $H_\varphi(r) = C(r)/r$, тогда $C(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $C'(r) = rj_z(r)$. Тогда, применяя схему Эйлера с пересчётом, получим

$$\frac{C_{k+1}-C_k}{h}=\frac{1}{2}(r^k j_{z,k}+r^{k+1}j_{z,k+1}),\, k\ge 0,\, C_0=r_0H_\varphi^0,\, H_{\varphi,k}=\frac{C_k}{r^k},\, k\ge 0.$$

Наконец, производные в формуле (14) вычисляются по конечным разностям

$$U_z'(r_0)=\frac{U_{z,1}-U_{z,0}}{h},\quad j_z'(r_0)=\frac{j_{z,1}-j_{z,0}}{h},$$

$$U_z'(r_1)=-\frac{U_{z,N-1}-U_{z,N}}{h},\quad j_z'(r_1)=-\frac{j_{z,N-1}-j_{z,N}}{h}.$$

3. Результаты численных расчётов

Ниже приведены результаты численного решения с использованием п. 1 краевых задач для уравнений (13) (рис. 2, 3), (15) (рис. 4), задач Коши для уравнений (17) (рис. 5) и вычисления силы тяги и распределений градиентов давлений электронов и ионов по формулам (14) и (15) (рис. 6). Для уравнения (13) использовался численный метод из п. 2. В условии остановки процесса итераций предполагалось $\varepsilon=10^{-3}$, $\varepsilon_0=10^{-6}$. В разделе приведены результаты расчётов для характерных безразмерных параметров $r_0=1$, $r_1=2$, $L=2.5$, $\xi=0.53$, $\kappa=4$, $\nu_m=0.04265$, $\kappa_+=280$, $\kappa_-=5\cdot 10^4$, $b=250$, $T_0=1$, $T_1=1$, $j_0=0$, $j_1=0$, $\Phi_*=5$, $E_0=4\cdot 10^4$.

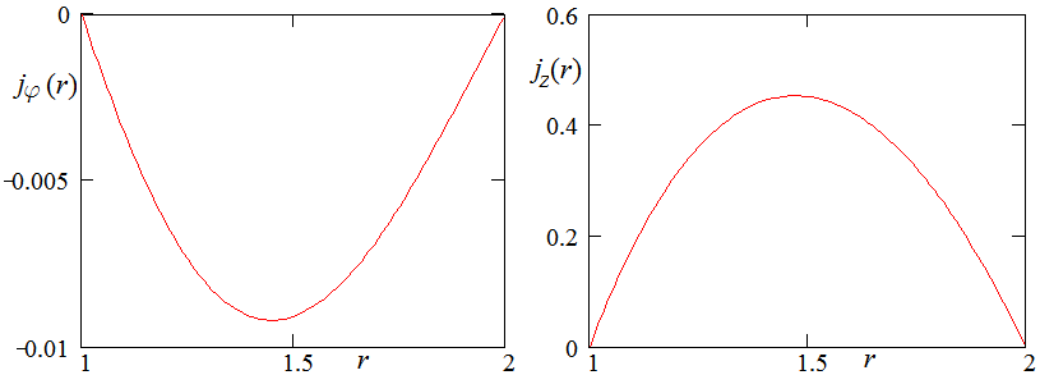

Рис. 2. Зависимость плотности тока от радиуса r

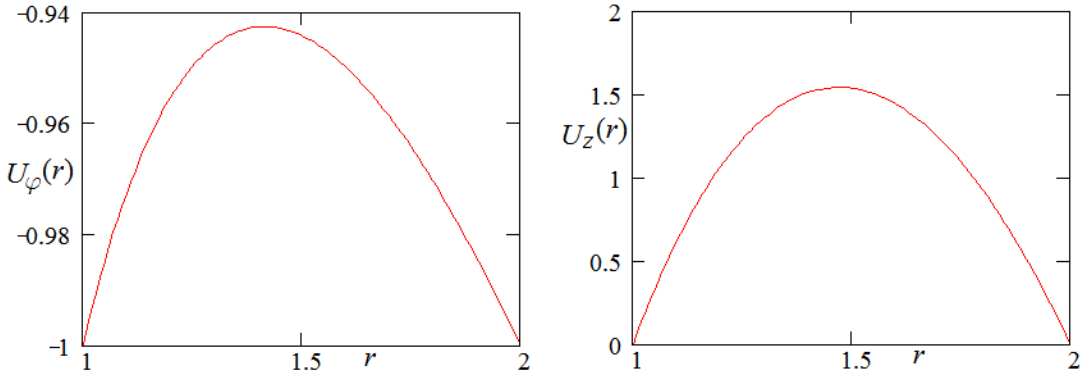

Рис. 3. Зависимость массовой скорости от радиуса r

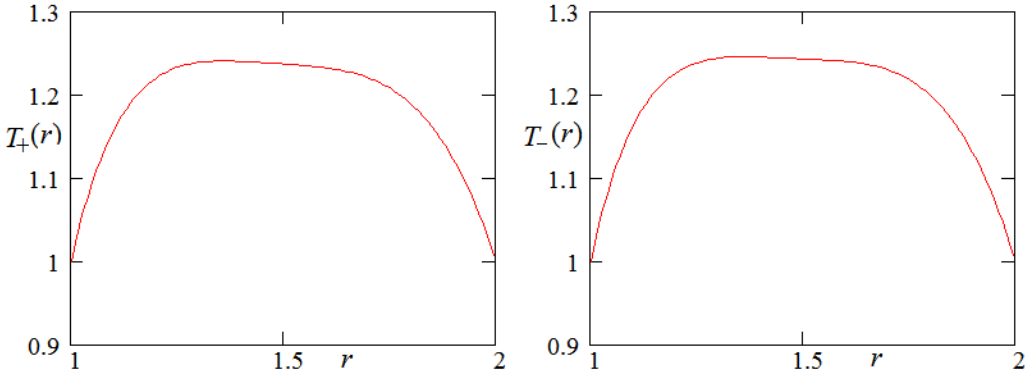

Рис. 4. Зависимость температуры электронов T_- и ионов T_+ от радиуса r

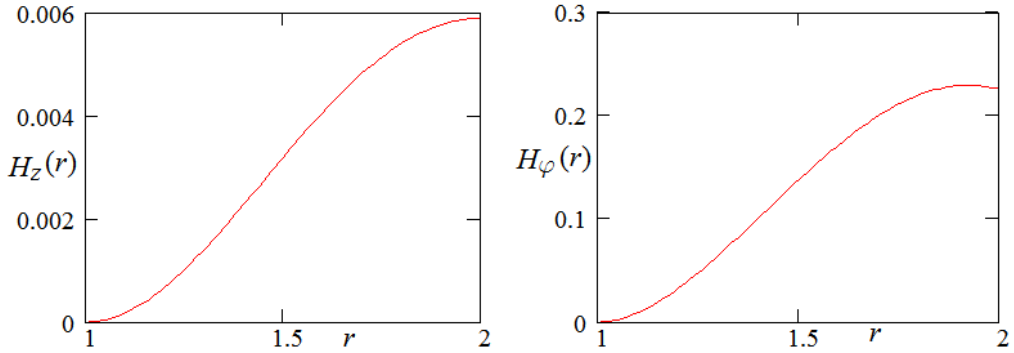

Рис. 5. Зависимость напряжённости магнитного поля от радиуса r

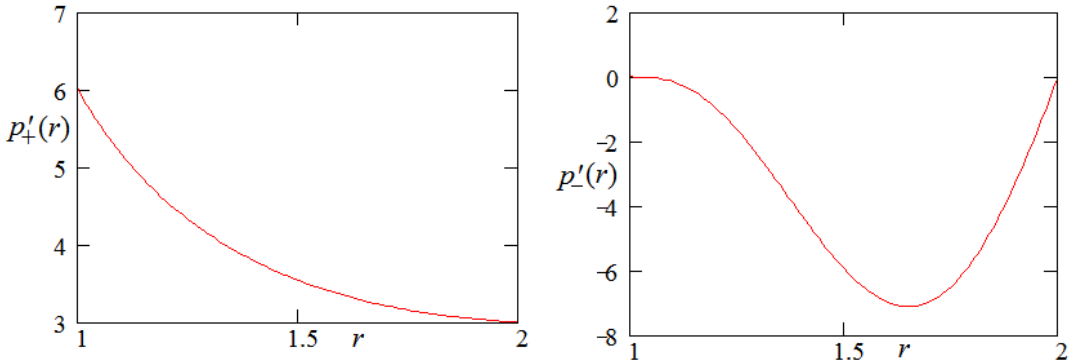

Рис. 6. Зависимость градиентов давления ионов p'_+ и электронов p'_- от радиуса r

Исследования проводились при варьировании угловых скорости вращения боковых стенок камеры СПД. Положительные значения скоростей вращения соответствуют направлению против часовой скорости, отрицательные – направлению по часовой стрелке. На рис. 2–6 приведены результаты, соответствующие угловым скоростям вращения $\omega_0 = -1$, $\omega_1 = -0.5$. Для $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.5$ отличие в основном будет только в противоположном знаке азимутальной скорости. Скажем больше: данные результаты будут соответствовать значениям $|\omega_0| \le 1$, $|\omega_1| \le 1$. Что соответствует значениям порядка 100000 об/с. Отличаться будут только азимутальная скорость и ионное давление. Соответственно, сила тяги не меняется, а остаётся равной $F_{\text{Т}} = 1.1764$, что соответствует значению ~10 мН. Продольная скорость

соответствует значению 15 км/с. Профили продольных скоростей U_z, тока j_z будут иметь следующую азимутальную закрутку: $|U_\varphi / U_z| \sim 10^{-1}$, $|j_\varphi / j_z| \sim 10^{-2}$. Это говорит о том, что плазма будет покидать камеру под углом несколько градусов к оси установки, в отличие от случая отсутствия вращения боковых стенок, когда плазма покидает камеру практически вдоль оси установки.

Дальнейшие исследования показывают (табл. 1), что при значительном увеличении угловой скорости вращения по модулю происходит значительный рост ионного давления, температуры ионов, по модулю азимутальной скорости. Остальные параметры относительно указанных величин меняются медленнее. Соответственно, для того чтобы добиться каких-либо значимых увеличений силы тяги, необходимо брать очень большие по модулю отрицательные угловые скорости вращения ω_0, ω_1 (табл. 1). При увеличении положительных значений скоростей вращения сила тяги будет уменьшаться, поэтому данные результаты в работе не приводятся. Отметим также, что рост азимутальной скорости при малом изменении продольной скорости приводит к росту угла азимутальной закрутки [12], что приводит к выбросу ионов почти под прямым углом к оси установки.

Таблица 1

Зависимость максимальных значений параметров потока плазмы на выходе от угловых скоростей вращения стенок камеры СПД

$\omega_0;\omega_1$	-1000;-500	-100;-50	-10;-5	-1;-0.5	-0.1;-0.05	0;0
$\max\|U_\varphi\|$	1000	100	10	1	0.1	$2\cdot10^{-4}$
$\max U_z$	1.665	1.553	1.542	1.541	1.541	1.541
$F_\text{Т}$	1.272	1.186	1.177	1.176	1.176	1.176
$\max T_+$	$1.45\cdot10^4$	146.1	2.675	1.24	1.226	1.226
$\max p'_+$	$6\cdot10^6$	$6\cdot10^4$	600	6	0.06	0.036

Заключение

Построена рабочая математическая модель с учётом вращения боковых стенок камеры СПД, позволяющая вычислять параметры плазменной струи на выходе СПД, минуя расчёт основных плазменных процессов в двигателе. Оказывается, при условии установления выходных параметров на оси установки и несжимаемости плазмы это возможно.

Из результатов данной модели без практических исследований следует, что для достижения больших значений силы тяги необходимо значительно увеличивать по модулю отрицательную скорость вращения боковых стенок камеры СПД, при этом ещё более значительно увеличиваются температура и давление ионов, что может привести к быстрому изнашиванию устройства. Также это приводит к сильной азимутальной закрутке по скорости, и плазменная струя будет выбрасываться практически под прямым углом к оси установки, что также нас не устраивает. Для того чтобы добиться выброса

вдоль оси установки, необходимо уменьшать скорость вращения боковых стенок камеры СПД, но тогда сила тяги стабилизируется и соответствует случаю отсутствия вращения боковых стенок камеры СПД.

Список литературы

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
2. Kim V., Kozubsky K.N., Murashko V.M., Semenkin A.V. History of the Hall Thrusters Development in USSR // Paper IEPC-2007-142. 30th International Electric Propulsion Conference. September 17–20, 2007. Florence. Italy.
3. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272.
4. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. – Москва: КРАСАНД, 2018. – 584 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.:Наука, 1978.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
7. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937. Т. 7. № 2. С. 203-209.
8. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965. – 212 с.
9. Имшенник В.С. О теплопроводности плазмы // Астрономический журнал, 1961. Т. 38. № 4. С. 652-655.
10. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
12. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
13. Духопельников Д. В., Ивахненко С. Г. Влияние азимутального отклонения ионов на форму пучка двигателя с анодным слоем // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. № 12. С. 157–164.

Оглавление

Введение 3
1. Основные уравнения 4
2. Численное решение уравнений 12
3. Результаты численных расчётов 17
Заключение 19
Список литературы 20