



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 50 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.А. Волков, Ф.Н. Воронин,
О.С. Косарев, М.Б. Марков

О применении метода частиц
для моделирования дрейфа
электронов в
ионизированном воздухе

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О применении метода частиц для моделирования дрейфа электронов в ионизированном воздухе / Ю.А. Волков [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 50. 17 с. EDN: [BSVOTM](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-50)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-50>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю.А. Волков, Ф.Н. Воронин, О.С. Косарев, М.Б. Марков

**О применении метода частиц
для моделирования дрейфа электронов
в ионизированном воздухе**

Москва – 2025

Волков Ю.А., Воронин Ф.Н., Косарев О.С., Марков М.Б.

О применении метода частиц для моделирования дрейфа электронов в ионизированном воздухе

Рассмотрено развитие электрического разряда между заряженными электродами в воздушной среде. Представлена математическая модель процесса разряда, основанная на дрейфовых уравнениях для свободных электронов и ионов в электромагнитном поле. Уравнения рассмотрены в пространстве обобщенных функций. Построено обобщенное решение, которое может быть положено в основу алгоритма численного решения уравнений методом частиц.

Ключевые слова: электрон, ион, дрейф, кинетическое уравнение, обобщенное решение, метод частиц

Volkov Yu.A., Voronin F.N., Kosarev O.S., Markov M.B.

On the particle method application for electron drift modeling in ionized air

Development of an electric discharge between charged electrodes in an air environment is investigated. A mathematical model of the discharge process is presented, based on drift equations for free electrons and ions in an electromagnetic field. The equations are considered in the space of generalized functions. A generalized solution is constructed, that can be used as a basis for an algorithm for numerical solution of equations using the particle method.

Key words: electron, ion, drift, kinetic equation, generalized solution, particle method

Оглавление

Введение	3
1. Частоты столкновений электронов.....	3
2. Кинетические уравнения для заряженных частиц ионизованной среды и их гидродинамические следствия.....	5
3. Уравнения дрейфа заряженных частиц в электромагнитном поле.....	10
4. Баланс концентраций	13
Заключение.....	16
Библиографический список.....	16

Введение

Метод частиц [1] зарекомендовал себя как эффективный подход к численному решению кинетических уравнений [2-4] для многих задач моделирования разреженной плазмы, ионизованных сред и т.д. Основой метода является рассмотрение обобщенного решения кинетического уравнения [1]. В статье [5] авторы работы применили метод частиц для моделирования дрейфа ионов в нейтральном воздухе под действием самосогласованного электрического поля.

Большинство практических задач предполагает моделирование совместного дрейфа электронов и ионов в ионизованном воздухе под действием электрического поля. Это требует отдельного рассмотрения всех типов заряженных частиц с учетом их взаимодействия: процессов ионизации, рекомбинации и прилипания электронов к молекулам кислорода [6, 7]. Примером является пробой воздуха, который может развиваться, например, в линиях электропередач [8, 9].

Данная работа представляет математическую модель электрического разряда в воздушной среде, основанную на приближении дрейфа электронов и ионов в ионизованном воздухе под действием электрического поля. Особенность модели заключается в необходимости рассмотрения рекомбинации.

1. Частоты столкновений электронов

Рассмотрим два металлических электрода в воздухе. Между электродами током во внешней цепи создается электрическое поле. Ионизованная среда инициируется эмиссией электронов с поверхности электродов, а также внешними источниками ионизации, например, радиацией естественного фона. Если электрическое поле имеет достаточную напряженность, то свободные электроны набирают в нем энергию, превышающую порог ударной ионизации молекул, развивается лавинный процесс и электрический разряд между электродами. Электроны испытывают упругое рассеяние, возбуждение атомов среды, ударную ионизацию. Помимо этого, для них существенны процессы рекомбинации с положительными ионами с образованием нейтральных молекул, а также прилипания к молекулам кислорода с образованием отрицательных ионов.

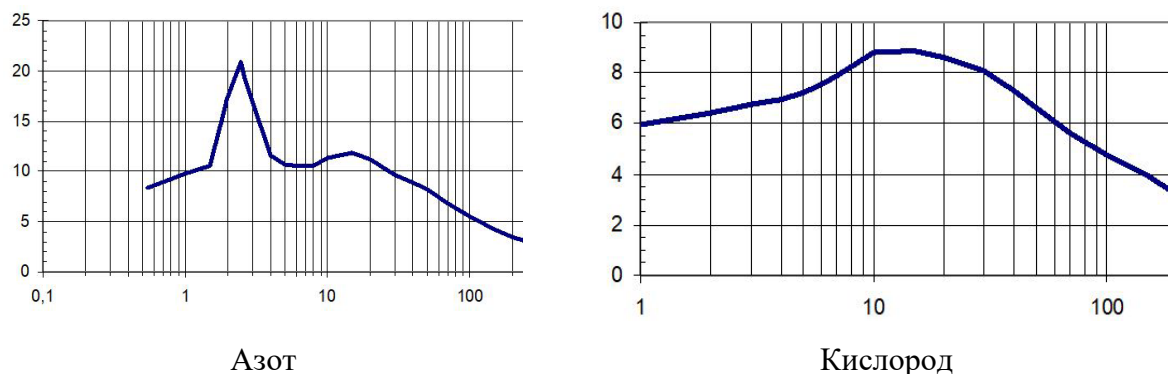


Рис. 1. Зависимость полного сечения упругого рассеяния вторичного электрона на молекуле (10^{-16} cm^2) от энергии (эВ)

Сечения столкновений электронов включены в базу данных программы Радиационное и ЭлектроМагнитное Поле (РЭМП), разрабатываемой в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Они также собраны в работах [10, 11]. Зависимость полного сечения упругого рассеяния электронов от энергии иллюстрирует рис. 1. Далее представлена зависимость полного сечения ударной ионизации вторичных электронов от энергии (рис. 2).

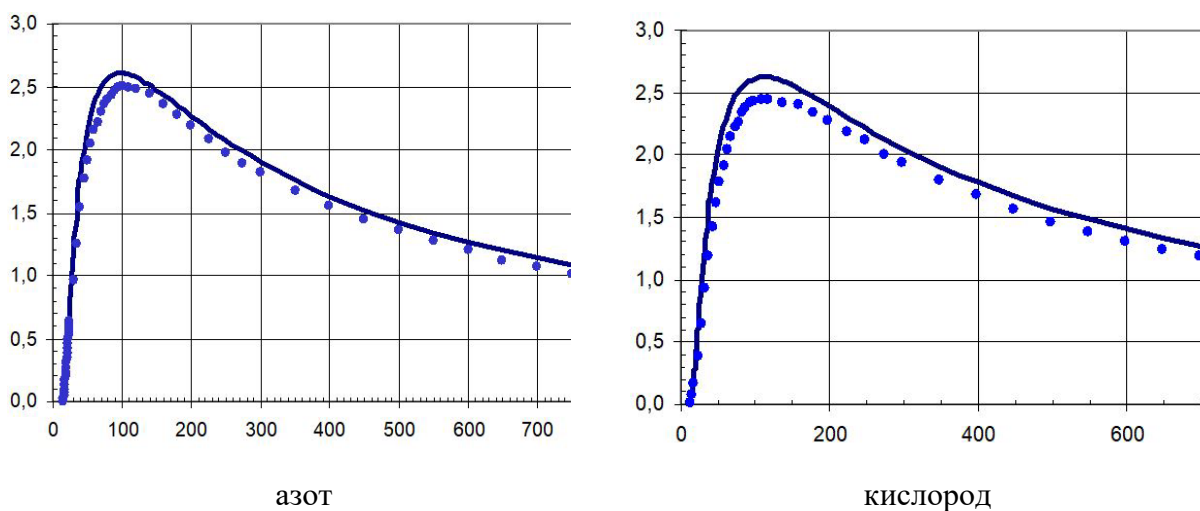


Рис. 2. Зависимость полного сечения ионизации молекуле (10^{-16} cm^2) от энергии (эВ) вторичного электрона

Электрон с энергией 10 эВ, соответствующей порогу ионизации верхних уровней молекул, имеет скорость v между столкновениями порядка 10^8 cm/s . Из графиков (рис. 1 и рис. 2) следует, что время жизни электрона относительно упругого рассеяния составляет

$$1/(\sigma_{el} N_L v) \sim 10^{13} \text{ 1/c},$$

где $N_L = 2.87 \cdot 10^{20} \text{ 1/cm}^3$ – число Лошмидта; σ_{el} – сечение упругого рассеяния.

Время жизни электрона между столкновениями с ударной ионизацией по меньшей мере на порядок больше.

2. Кинетические уравнения для заряженных частиц ионизированной среды и их гидродинамические следствия

Распределения заряженных частиц описываются кинетическими уравнениями для функций распределения:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \text{div}(vf_e) - e \text{div}_p(\mathbf{E}f_e) + I[f_e] + I_{att}[f_e] + I_{rec}[f_e, f_i^+] = Q_e; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i^+}{\partial t} + \text{div}(vf_i^+) + e \text{div}_p(\mathbf{E}f_i^+) + \\ + I[f_i^+] + I_{rec}[f_e, f_i^+] + I_{rec}[f_i^-, f_i^+] = Q_i^+ \end{aligned}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i^-}{\partial t} + \text{div}(vf_i^-) - e \text{div}_p(\mathbf{E}f_i^-) + \\ + I[f_i^-] + I_{rec}[f_i^-, f_i^+] = I_{att}[f_e] \end{aligned}, \quad (3)$$

где $f_e = f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, $f_i^+ = f_i^+(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, $f_i^- = f_i^-(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – функции распределения вторичных электронов, положительных и отрицательных ионов соответственно; $Q_e = Q_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ и $Q_i^+ = Q_i^+(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ – источники электронов и положительных ионов в фазовом пространстве координат и импульсов, обусловленные эмиссией электронов с электродов, естественной радиацией и т.д.

Рассмотрим интегралы столкновений в кинетических уравнениях. Интеграл столкновений $I[f_e]$ есть сумма интегралов упругого и ионизационного рассеяния, а также возбуждения. Интегралы столкновений $I_{rec}[f_e, f_i^+]$ и $I_{rec}[f_e, f_i^-]$ описывают процессы электрон-ионной и ион-ионной рекомбинации [6, 7, 12].

Приведем вывод уравнения дрейфа заряженных частиц из кинетических уравнений. Для этого рассмотрим квазилинейное уравнение типа Больцмана относительно функции распределения $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ частиц массы m , движущихся в поле сил $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} + I[f] = Q. \quad (4)$$

Данное уравнение по структуре соответствует кинетическим уравнениям (1-3). Индексные обозначения скорости $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m = (v_1, v_2, v_3)$ и координаты $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ введены для удобства выкладок. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Квазилинейность уравнения (4) состоит в том, что поле сил $\mathbf{F}$ может линейно зависеть от функции распределения $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$.

Рассмотрим систему нейтральных молекул воздуха как максвелловский газ. При рассмотрении слабоионизованного газа это означает следующее. Билинейное уравнение Больцмана для функции распределения молекул имеет стационарную точку f_0 , обращающую в ноль интеграл столкновений молекул. H -функция Больцмана здесь достигает минимума, что означает единственность стационарного состояния [13]. Будем считать, что функция f_0 является максвелловским распределением, соответствующим идеальному газу [13]. Упругое рассеяние электронов на молекулах газа превалирует над всеми остальными видами столкновений. Будем считать, что их функция распределения $f_e = f_e(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ стремится к равновесию с газом и также достигает максвелловского распределения. После этого на существенно больших временах свободные электроны вступают в реакции прилипания и рекомбинации. Эти факты имеют место и для функций распределения ионов.

Таким образом, распределение f_0 описывает локальное равновесие в рамках уравнения (4). Стационарное состояние устойчиво. Малые отклонения от равновесия затухают со временем, если удалить источники возмущений.

Пусть некоторая физическая величина $\psi(\mathbf{v})$ ассоциирована с заряженной частицей. Макроскопическое среднее значение величины $\langle \psi \rangle$ есть среднее по характеристикам отдельных частиц, т.е.

$$\langle \psi \rangle = \int \psi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} / \int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{1}{n} \int \psi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (5)$$

Здесь n – концентрация, т.е. число частиц в единице объема. Умножим обе части уравнения (4) на $\psi(\mathbf{v})$ и проинтегрируем по $\mathbf{v}$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \psi \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_k} (n \langle \psi v_k \rangle) - \frac{n F_k}{m} \langle \frac{\partial \psi}{\partial v_k} \rangle = \int I[f] \psi d\mathbf{v}. \quad (6)$$

Частные случаи $\psi = 1$, $\psi = mv_i$, $\psi = mv^2/2$ определяют плотность числа частиц n , среднюю скорость $\mathbf{u}$ и плотность энергии ε :

$$\begin{aligned} \psi = 1: n &= \int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, & \psi = mv_i: nu_i &= \int v_i f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \\ \psi = mv^2/2: n\varepsilon &= \int \frac{mv^2}{2} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим правую часть (6), полагая, что упругое рассеяние сохраняет число частиц, импульс и энергию, то есть система представляет собой идеальный газ Максвелла. Тогда

$$I_0 = \int I[f] d\mathbf{v} = -\frac{1}{\tau} \left[\int f d\mathbf{v} - \int f_0 d\mathbf{v} \right] = 0; \quad (8)$$

$$I_1 = \int m\mathbf{v} I[f] d\mathbf{v} = -\frac{m}{\tau} \left[\int \mathbf{v} f d\mathbf{v} - \int \mathbf{v} f_0 d\mathbf{v} \right] = 0; \quad (9)$$

$$I_2 = \int \frac{mv^2}{2} I[f] d\mathbf{v} = -\frac{m}{\tau} \left[\int v^2 f d\mathbf{v} - \int v^2 f_0 d\mathbf{v} \right] = 0. \quad (10)$$

Выбор равновесной функции распределения в виде

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\kappa_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2\kappa_B T} \right] \quad (11)$$

превращает соотношения (8-10) для I_0 , I_1 , I_2 в тождества. Использование формулы (11) фактически эквивалентно пятимоментному приближению Грэда [14-16]. В левой части (6) имеем следующее.

Сохранение числа частиц $\psi = 1$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (nu_k) = 0. \quad (12)$$

Сохранение импульса $\psi = mv_i$:

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n \langle v_i \rangle) + m \frac{\partial}{\partial x_k} (n \langle v_i v_k \rangle) = n F_i. \quad (13)$$

Сохранение энергии $\psi = mv^2/2$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mn \langle v^2 \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (mn \langle v^2 v_k \rangle) = n F_k \langle v_k \rangle \quad (14)$$

Векторы и тензоры в левых частях (12-14) вычислим, используя (11). Введем хаотическую скорость $\mathbf{c}$, полагая

$$v_i = u_i + c_i, \quad (15)$$

где, по определению, $\langle v_i \rangle = u_i$, $\langle c_i \rangle = 0$. Тогда входящие в уравнение (13) члены преобразуются следующим образом:

$$mn \langle v_i v_k \rangle = mn u_i u_k + mn \langle c_i c_k \rangle = mn u_i u_k + P_{ik}, \quad (16)$$

где P_{ik} – тензор внутренних напряжений $P_{ik} = \delta_{ik} P_0$, P_0 – давление идеального газа. Используя (11), получим

$$P_0 = n \kappa_B T \quad (17)$$

Подставляя (16-17) в уравнение (13), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (n u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (n u_i u_k) = - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} P_0 + \frac{n F_i}{m} \quad (18)$$

Пользуясь уравнением непрерывности (12), уравнение (18) можно привести к уравнению Эйлера:

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla (n \kappa_B T) + n \mathbf{F} \quad (19)$$

Преобразование уравнения (14) для энергии идеального газа сложнее. Используя (11, 15), получим, что энергия единицы объема газа

$$\varepsilon = mn \frac{\langle v^2 \rangle}{2} = mn \frac{\langle u^2 + c^2 \rangle}{2} = mn \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2} n \kappa_B T \quad (20)$$

состоит из динамической части, обусловленной движением газа как целого, и внутренней энергии $C_V T$, где теплоемкость $C_V = (3/2) n \kappa_B$. Далее преобразуем поток энергии

$$\begin{aligned}
J_i &= \frac{1}{2} mn \langle v^2 v_i \rangle = \frac{mn}{2} \langle (u^2 + c^2 + 2u_k c_k)(u_i + c_i) \rangle = \\
&= \frac{mn}{2} \langle (u^2 + c^2) u_i \rangle + \frac{mn}{2} \langle c^2 c_i \rangle + mn \langle c_i c_k \rangle u_k.
\end{aligned} \tag{21}$$

Второй член в правой части (21) представляет собой тепловой поток, т.е. составляющую потока энергии, которая связана с градиентом температуры и термической проводимостью газа. Вычисления термической проводимости проводятся в тринадцатимоментном приближении Грэда. В пятимоментном приближении (11) тепловой поток равен нулю. Третий член, согласно (15) и (17), отличен от нуля только при $i = k$ и равен $mn \langle c_i c_k \rangle u_k = P_0 \delta_{ik} u_k$. Учитывая (20), для потока энергии в газе без вязкости и термической проводимости окончательно получим формулу

$$\mathbf{J} = \mathbf{u} \left(mn \frac{u^2}{2} + \frac{3}{2} n \kappa_B T + n \kappa_B T \right) = \varepsilon \mathbf{u} + n \kappa_B T \mathbf{u} \tag{22}$$

Подставляя выражения для энергии и потока энергии (20), (22) в (14), получим

$$\begin{aligned}
&m \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nu^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{nu^2 u_k}{2} \right) \right\} + \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (C_V T) + \frac{\partial}{\partial x_k} (C_V T u_k) \right\} = F_k u_k - \frac{\partial}{\partial x_k} (P_0 u_k)
\end{aligned} \tag{23}$$

Исключим из уравнения (23) кинетическую энергию. Используем соотношение

$$u_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (nu_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (nu_i u_k) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (nu^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (nu_i u^2). \tag{24}$$

Умножим (18) на u_i :

$$u_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (nu_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} (nu_i u_k) \right] = -\frac{u_i}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} P_0 + \frac{n F_i}{m} u_i. \tag{25}$$

Сравнивая (23-25), получим уравнение для кинетической энергии газа

$$m \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (nu^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (nu_i u^2) \right] = -u_i \frac{\partial}{\partial x_i} P_0 + n F_i u_i. \quad (26)$$

После исключения из (23) уравнения (24) с учетом термической проводимости $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ получим для внутренней энергии:

$$C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - P_0 \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (27)$$

Термическая проводимость классического электронного газа определяется законом Видемана–Франца [17]

$$\lambda = L \xi T,$$

где ξ – электропроводность газа, а L – константа Лоренца. В невырожденном электронном газе с максвелловским распределением по скоростям $L = 3(\kappa_B/e)^2$. Соответственно, температуропроводность невырожденного электронного газа

$$a_e = \lambda_e / C_e = 2D_e, \quad D_e = \mu_e (\kappa_B T_e / e). \quad (28)$$

Уравнение (28) можно теперь переписать в более удобном виде:

$$\frac{\partial \kappa_B T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \kappa_B T = -\frac{2}{3} \kappa_B T \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (a \nabla \kappa_B T). \quad (29)$$

3. Уравнения дрейфа заряженных частиц в электромагнитном поле

Рассмотрим гидродинамические уравнения для заряженных частиц в слабоионизованном воздухе как следствия кинетических уравнений (1-3). Сохраним эффект их дрейфа под действием электрического поля, пренебрегая нагревом среды. Усредняя времена жизни по равновесным распределениям, получим:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu_e \mathbf{E} n_e) + \nu_{att} n_e + \sigma_{ei} \bar{n}_i^+ n_e = q + \nu_{ion} n_e, \quad (30)$$

$$\frac{\partial n_i^+}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu_i^+ \mathbf{E} n_i^+) + \sigma_{ei} \bar{n}_e n_i^+ + \sigma_{ii} \bar{n}_i^- n_i^+ = q + \nu_{ion} n_e, \quad (31)$$

$$\frac{\partial n_i^-}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu_i^- \mathbf{E} n_i^-) + \sigma_{ii} \bar{n}_i^+ n_i^- = \nu_{att} n_e \quad (32)$$

с однородными начальными условиями.

Будем рассматривать решения уравнений (30-32) в пространстве финитных обобщенных функций [18-19] переменной $\mathbf{r}$ аналогично [5].

Принципиальное отличие уравнений (30-32) от рассмотренных в [5] заключается в слагаемых, содержащих произведения искомых функций. Поэтому во избежание перемножения обобщенных функций $n_e = n_e(t, \mathbf{r})$, $n_i^- = n_i^-(t, \mathbf{r})$ и $n_i^+ = n_i^+(t, \mathbf{r})$ в уравнения (30-32) введены бесконечно-дифференцируемые функции

$$\bar{n}_e(t, \mathbf{r}) = \langle \bar{n}_e(t, \mathbf{a}), W(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \rangle; \quad (33)$$

$$\bar{n}_i^+(t, \mathbf{r}) = \langle \bar{n}_i^+(t, \mathbf{a}), W(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \rangle; \quad (34)$$

$$\bar{n}_i^-(t, \mathbf{r}) = \langle \bar{n}_i^-(t, \mathbf{a}), W(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \rangle, \quad (35)$$

полученные как действия обобщенных решений уравнений (30-32) на интерполяционную функцию $W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta)$, $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}_r^3$, $\Delta > 0$ из основного пространства. Данная функция удовлетворяет условиям

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_r^3} d\mathbf{r} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta) \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}),$$

$$\int_{\mathbb{R}_r^3} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \Delta) d\mathbf{r}' = 1$$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(\mathbf{r})$ из основного пространства.

Обобщенные решения уравнений (30-32) имеют вид

$$\begin{aligned} n_e(t, \mathbf{r}) = & \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) \times \\ & \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)); \end{aligned} \quad (36)$$

$$n_i^+(t, \mathbf{r}) = \int_0^t d\tau \int d\xi (q(\tau, \xi) + v_{ion} n_e) \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e + \sigma_{ii} \bar{n}_i^+) (\tau', \mathbf{r}_i^+(\tau', \tau, \xi)) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^+(t, \tau, \xi)); \quad (37)$$

$$n_i^-(t, \mathbf{r}) = \int_0^t d\tau \int d\xi v_{att} n_e(\tau, \xi) \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' \sigma_{ii} \bar{n}_i^+ (\tau', \mathbf{r}_i^-(\tau', \tau, \xi)) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^-(t, \tau, \xi)), \quad (38)$$

где функции $\mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)$, $\mathbf{r}_i^+(t, \tau, \xi)$ и $\mathbf{r}_i^-(t, \tau, \xi)$ являются решениями следующих задач Коши для уравнений движения:

$$\frac{d\mathbf{r}_e}{dt} = -\mu_e \mathbf{E}(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{r}_e \Big|_{t=\tau} = \xi; \quad (39)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_i^+}{dt} = \mu_i^+ \mathbf{E}(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{r}_i^+ \Big|_{t=\tau} = \xi; \quad (40)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_i^-}{dt} = -\mu_i^- \mathbf{E}(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{r}_i^- \Big|_{t=\tau} = \xi. \quad (41)$$

Электроны и ионы захватываются электрическим полем и создают дрейфовый ток. Сторонний ток они создать не могут, поскольку низкоэнергетические электроны и ионы при образовании не имеют выделенного направления движения. Их направленное движение обусловлено только электрическим полем.

В соответствии с гидродинамической моделью ионизованной среды плотность дрейфового тока выражается следующим образом:

$$\mathbf{j}_c = e(\mu_i^+ \bar{n}_i^+ - \mu_i^- \bar{n}_i^- - \mu_e \bar{n}_e) \mathbf{E}. \quad (42)$$

Величина

$$\xi(t, \mathbf{r}) = e(\mu_i^+ \bar{n}_i^+ - \mu_i^- \bar{n}_i^- - \mu_e \bar{n}_e) \quad (43)$$

представляет собой радиационную проводимость газовой среды.

Электромагнитное поле с компонентами $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ определяется уравнениями Максвелла [20]:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial(\epsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\xi \mathbf{E} + \xi_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_{ext}), \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\epsilon \equiv \epsilon(\mathbf{r})$ – диэлектрическая проницаемость, $\mu \equiv \mu(\mathbf{r})$ – магнитная проницаемость.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости в газовой среде, в том числе ионизированной, равны единице. Нетривиальные значения эти электрофизические величины могут иметь в конструкциях электродов и внешней цепи. Там же отлична от нуля функция $\xi_0 = \xi_0(\mathbf{r})$ – распределение исходной проводимости среды.

4. Баланс концентраций

Рассмотрим прямую подстановку решений (36-38) в уравнения (30-32) с учетом уравнений движения (33-35). Для этого учтем следующие промежуточные выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} &= q(t, \mathbf{r}) - \\ &- \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ - \nu_e)(t, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_\tau^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) - \\ &- \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) \exp \left\{ - \int_\tau^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \times \\ &\times \mu_e \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\mu_e \mathbf{E} n_e) &= \\ &= \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) \exp \left\{ - \int_\tau^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \times \\ &\times \text{div}(\mu_e \mathbf{E} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi))). \end{aligned} \quad (46)$$

Рассмотрим действие обобщенных функций (45), (46) на функцию из основного пространства:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial n_e}{\partial t}, \varphi(\mathbf{r}) \right\rangle &= \langle q(t, \mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r}) \rangle - \\
&- \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(t, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \times \\
&\times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \varphi(\mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) - \\
&- \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \times \\
&\times \mu_e \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \\
&\left\langle \text{div}(\mu_e \mathbf{E} n_e), \varphi(\mathbf{r}) \right\rangle = \\
&= \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\} \times \\
&\times \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \text{div}(\mu_e \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi))).
\end{aligned}$$

Выполним интегрирование по частям

$$\begin{aligned}
&\int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \text{div}(\mu_e \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi))) = \\
&= - \int d\mathbf{r} \mu_e \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}); \\
&\int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \text{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) = \\
&= - \int d\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\int d\mathbf{r} \mu_e (\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) - \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi))) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \text{grad} \varphi(\mathbf{r}) = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \varphi(\mathbf{r}), (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e) n_e(t, \mathbf{r}) \right\rangle = \\
& = \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) \varphi(\mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(t, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \times \\
& \quad \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\},
\end{aligned}$$

обобщенная функция (36) является обобщенным решением уравнения (30).

Аналогичные выкладки подтверждают, что обобщенные функции (37) и (38) являются обобщенными решениями уравнений (31) и (32) соответственно.

Вычислим основные функции (33-35):

$$\begin{aligned}
\bar{n}_e(t, \mathbf{r}) &= \int_0^t d\tau \int d\xi q(\tau, \xi) W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e(t, \tau, \xi)) \times \\
& \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e^+ + \nu_{att} - \nu_e)(\tau', \mathbf{r}_e(\tau', \tau, \xi)) \right\};
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
n_i^+(t, \mathbf{r}) &= \int_0^t d\tau \int d\xi (q(\tau, \xi) + \nu_{ion} n_e) W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i^+(t, \tau, \xi)) \\
& \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' (\sigma_{ei} \bar{n}_e + \sigma_{ii} \bar{n}_i^+)(\tau', \mathbf{r}_i^+(\tau', \tau, \xi)) \right\};
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
n_i^-(t, \mathbf{r}) &= \int_0^t d\tau \int d\xi \nu_{att} n_e(\tau, \xi) W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i^-(t, \tau, \xi)) \times \\
& \times \exp \left\{ - \int_{\tau}^t d\tau' \sigma_{ii} \bar{n}_i^+(\tau', \mathbf{r}_i^-(\tau', \tau, \xi)) \right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Проверим баланс. Обобщенные функции, выражающие уход электронов и положительных ионов за счет электрон-ионной рекомбинации в уравнениях (30) и (31), должны быть равны. Для доказательства этого факта рассмотрим следующее вычисление:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{n}_i^+(t, \mathbf{r}) n_e(t, \mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r}) \rangle &= \langle \langle n_i^+(t, \mathbf{a}), W(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \rangle n_e(t, \mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r}) \rangle \\
&= \int d\mathbf{r} n_e(t, \mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \int d\mathbf{a} n_i^+(t, \mathbf{a}) W(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \\
&= \int d\mathbf{a} n_i^+(t, \mathbf{a}) \int d\mathbf{r} n_e(t, \mathbf{r}) W(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \varphi(\mathbf{r}) = \\
&= \int d\mathbf{a} n_i^+(t, \mathbf{a}) \bar{n}_e(t, \mathbf{a}) \varphi(\mathbf{a}) = \langle \bar{n}_e(t, \mathbf{r}) n_i^+(t, \mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r}) \rangle.
\end{aligned} \tag{50}$$

Соотношение (50) подтверждает баланс электрон-ионной рекомбинации.

Заключение

Задача Коши для уравнений дрейфа электронов и ионов в слабоионизованной среде под действием самосогласованного электромагнитного поля допускает решение в обобщенных функциях. Для этого необходимо рассматривать «сглаженные» представления компонент решения для коэффициентов уравнений для слагаемых, моделирующих электрон-ионную и ион-ионную рекомбинацию.

Представление решения в виде финитных обобщенных функций позволяет использовать для численного решения уравнений дрейфа метод частиц. Дальнейшая работа в этом направлении нацелена на построение и реализацию эффективного численного алгоритма и его отладку на задачах моделирования электрического разряда в воздухе.

Библиографический список

1. Braun W., Hepp K. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the 1/N Limit of Interacting Classical Particles // Commun. Math. Phys. 1977. №56.
2. Власов А.А. Теория многих частиц. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Власов А.А. Макроскопическая электродинамика. М.: ГИТТЛ, 1955.
4. Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966.
5. Воронин Ф.Н., Марков М.Б., Паротькин С.В. Релаксация заряда потока электронов в воздушной среде // Математическое моделирование. 2022. № 34:4. С. 83-99.
6. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа: В задачах с решениями. М.: Наука, 1985.
7. Мак Даниэль И. Процессы столкновений в ионизированных газах. М.: Мир, 1964.
8. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. М.: Физматлит, 2001.
9. Александров Г.Н., Иванов В.Л., Кизеветтер В.Е. Электрическая прочность наружной высоковольтной изоляции. Ленинград: Энергия, 1967.

- 10.Березин А.В., Воронцов А.С., Духанин А.С., Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Электронно-фотонный каскад в газе. Часть 2. Сечения столкновений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 7. 24 с.
- 11.Воронин Ф.Н., Марков М.Б., Паротькин С.В. Релаксация объемного заряда, создаваемого потоком электронов в воздушной среде // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. №102. 20 с.
- 12.Мэсси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. М.: МИР, 1958.
- 13.Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.
- 14.Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Либроком, 2019. 344 с.
- 15.Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
- 16.Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
- 17.Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.
- 18.Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Добросвет, 2000.
- 19.Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- 20.Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х т. М.: Наука, 1989.