ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 56 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Л.Ф. Юхно

# Некоторые свойства разностного метода для нелинейного параболического уравнения



***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Юхно Л.Ф. Некоторые свойства разностного метода для нелинейного параболического уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 56. 21 с. EDN: RPHCCZ
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-56

**О р д е н а  Л е н и н а**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В. Келдыша**
**Р о с с и й с к о й  а к а д е м и и  н а у к**

**Л.Ф. Юхно**

# Некоторые свойства разностного метода для нелинейного параболического уравнения

**Москва — 2025**

*Юхно Л.Ф.*

**Некоторые свойства разностного метода для нелинейного параболического уравнения**

Рассматриваются разностные схемы для квазилинейного уравнения параболического типа с различными граничными условиями. Предлагается метод исследования сходимости приближенных решений, а также их производных. Выводятся оценки скорости сходимости для решений и производных до некоторых порядков. Показывается, что все полученные этим методом оценки являются неулучшаемыми для исследуемых краевых задач в рассматриваемой ограниченной области.

***Ключевые слова:*** квазилинейное параболическое уравнение, разностный метод, скорость сходимости, точность.

*Ludmila Filippovna Yukhno*

**Some properties of the difference method for a nonlinear parabolic equation**

Difference schemes for a quasi-linear parabolic equation with various boundary conditions are considered. A method for studying the convergence of approximate solutions and their derivatives is proposed. Estimates of the rate of convergence for solutions and derivatives up to certain orders of magnitude are derived. It is shown that all estimates obtained by this method are unimprovable for the boundary value problems under study in the bounded domain under consideration.

***Keywords:*** quasi-linear parabolic equation, difference method, convergence rate, accuracy.

## Введение

В настоящей работе для случая одной пространственной переменной на примере квазилинейного параболического уравнения предложен способ исследования сходимости метода сеток, отличный от наиболее известных методов, в частности, от методов энергетических неравенств и априорных оценок (см. [1, 2]). С использованием этого метода для некоторых типов граничных условий были получены более точные результаты, чем уже имеющиеся. Изложенные в работе результаты дополняют существующие результаты исследований подобных задач (см., например, [1-10]).

Основное отличие от указанных работ в том, что здесь исследуется сходимость не только приближенных решений, но и их производных различных порядков; при этом показывается, что все полученные результаты для рассматриваемых задач являются окончательными для этого метода в том смысле, что нельзя доказать более высокие равномерные оценки скорости сходимости как для функции, так и для ее производных указанных порядков.

Результаты настоящей работы получены в основном путем адаптации схемы проведения исследования из [12] к методу сеток с соответствующими дополнениями и уточнениями. Главное, как и в работе [12], доказательство и определение скорости сходимости для функции и ее производных проводится поэтапно; при этом получаемые оценки последовательно уточняются. Важно подчеркнуть, что в доказательстве никаких ограничений на соотношение пространственного и временного шагов не накладывается.

В [13] среди прочих представлены результаты настоящей работы, но в силу регламента издания приведены лишь формулировки теорем без детального описания метода исследования и подробного обсуждения результатов, которые, на наш взгляд, представляют интерес для продолжения работы в этом направлении. Этим вопросам на примере рассмотрения наиболее простых из перечисленных в [13] задач (для сокращения изложения) посвящена представляемая работа.

## 1. Постановка задачи

Вначале рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть достаточно гладкая функция $P(x,t)$, определенная в прямоугольнике $\Omega:\{0\le x\le 1, 0\le t\le 1\}$, удовлетворяет в нем уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial t}=a\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+b, \tag{1.1}$$

а также начальным и граничным условиям

$$P(x,0)=0, \qquad P(0,t)=P(1,t)=0. \tag{1.2}$$

Здесь $a$ и $b$ – функции от $x,\ t,\ P,\ \partial P/\partial x$, определенные, ограниченные и имеющие ограниченные частные производные требуемых порядков при $x, t \in \Omega$ и для всех $P,\ \partial P/\partial x$; кроме того, $a \ge a^* > 0 \quad (a^* = const)$.

Для приближенного решения задачи (1.1), (1.2) введем сетки и обозначения сеточных величин следующим образом:

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1,2...,N-1,\ Nh = 1\},\ \overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,...,N,\ Nh = 1\},$$

$$\omega_h^* = \{x_i = (i+1/2)h,\ i = 0,1,...,N-1,\ Nh = 1\},\ \omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,...,n_0, n_0 = [1/\tau]\},$$

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \omega^*_{h\tau} = \omega^*_h \times \omega_\tau,$$

$$y = y_k^n = y(x_k, t_n), \quad \hat{y} = y_k^{n+1}, \quad \breve{y} = y_k^{n-1}, \quad \Delta_+ y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \Delta_- y_k = y_k - y_{k-1},$$

$$\Delta_0 y_k = 0.5(\Delta_+ y_k + \Delta_- y_k),\ \Delta^2 y_k = \Delta_+ y_k - \Delta_- y_k,\ f_k = f(y_k^n),\ \hat{f}_k = f(\hat{y}_k),\ \breve{f}_k = f(\breve{y}_k).$$

На сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ рассмотрим для задачи (1.1), (1.2) следующую линейную разностную схему:

$$\frac{\hat{p}_i - p_i}{\tau} = a_i \frac{\Delta^2 \hat{p}_i}{h^2} + b_i, \tag{1.3}$$

$$p_i^0 = 0, \quad \hat{p}_0 = \hat{p}_N = 0, \tag{1.4}$$

где $p_i$ – приближенное решение, $a_i$, $b_i$ – достаточно гладкие функции от $x_i$, $t_{n+1}$, $p_i$, $\frac{\Delta_+ p_i}{h}$, $\frac{\Delta_- p_i}{h}$, аппроксимирующие $a(x, t+\tau, P, \frac{\partial P}{\partial x})$ и $b(x, t+\tau, P, \frac{\partial P}{\partial x})$ с точностью $O(h^2)$. Для этого можно взять, например, $a_i = a(x_i, t_{n+1}, p_i, \frac{\Delta_0 p_i}{h})$ или $a_i = \frac{1}{2}\left[a(x_i, t_{n+1}, p_i, \frac{\Delta_+ p_i}{h}) + a(x_i, t_{n+1}, p_i, \frac{\Delta_- p_i}{h})\right]$; то же для $b_i$.

В силу предположения $a_i \ge a^* > 0$, последовательность алгебраических задач (1.3), (1.4) имеет единственное решение.

Для схемы (1.3), (1.4) проведем вывод оценок скорости сходимости самой функции и ее производных до некоторого порядка.

Это исследование сходимости будет проводиться поэтапно.

На **I этапе** рассмотрим погрешности $z_i = P(x_i) - p_i$, которые удовлетворяют следующей задаче:

$$\frac{\hat{z} - z}{\tau} = a \frac{\Delta^2 \hat{z}}{h^2} + d_1 \frac{\Delta_+ z}{h} + d_2 \frac{\Delta_- z}{h} + d_3 z + \varepsilon,$$

$$z_i^0 = 0, \quad \hat{z}_0 = \hat{z}_N = 0,$$

где $\varepsilon = O(\tau + h^2)$ – погрешность аппроксимации, а коэффициенты $d_j$, $j = 1,2,3,$ равномерно ограничены в силу ограниченности частных производных функций $a$, $b$. Для этих погрешностей доказываются соотношения:

$$z = O(\tau + h^2) \ , \quad \frac{\Delta z}{h} = O(\sqrt{\tau + h^2}), \quad \frac{\Delta^2 z}{h^2} = O(1). \tag{1.5}$$

Оценки такого вида подразумеваются равномерными в $\Omega$.

Отсюда будет следовать, что

$$P(x_i) - p_i = O(\tau + h^2) \ , \quad \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x_{i\pm 1/2}} - \frac{\Delta_{\pm} p_i}{h} = O(\sqrt{\tau + h^2}), \quad \left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_{x=x_i} - \frac{\Delta^2 p_i}{h^2} = O(1).$$

Последующие этапы доказательства состоят в том, что на каждом из них формулируется задача для очередной производной искомой функции и строится для этой задачи разностная схема. Для соответствующей этому этапу погрешности $z$ также доказываются оценки (1.5). Таким образом, каждый последующий этап улучшает оценки, полученные на предыдущем этапе.

Для вывода оценок (1.5) нам понадобится, в частности, разностный аналог неравенства Ландау–Адамара (см.[11]) для отрезка $[0,1]$; докажем его.

Пусть на $\overline{\omega}_h$ задана функция $f$; обозначим

$$\mu_0 = \max_{\overline{\omega}_h} |f|, \quad \mu_1 = \max_{\omega_h} \frac{|\Delta f|}{h}, \quad \mu_2 = \max_{\omega_h} \frac{|\Delta^2 f|}{h^2}.$$

Тогда для любого $\theta, \quad 0 < \theta \le 1$, справедливо

$$\mu_1 \le \frac{2}{\theta}\mu_0 + \frac{\theta}{2}\mu_2. \tag{1.6}$$

**Доказательство**. Возьмем любое $k$, $0 \le k \le N-1$, и оценим $\frac{\Delta_+ f_k}{h}$. Выберем целое $m$, такое что $(m-1)h < \theta \le mh$; так как $0 < \theta \le 1$, то $1 \le m \le N$. Зафиксируем какой-либо отрезок $l$ длины $mh$ с концами в узлах сетки $\overline{\omega}_h$ и содержащий точки $kh$ и $(k+1)h$; $l = [nh, (n+m)h]$. Очевидно, для любого $s$, $n \le s \le n+m-1$, $\left|\frac{\Delta_+ f_s}{h} - \frac{\Delta_+ f_k}{h}\right| \le |s-k| h\mu_2$. Отсюда $\frac{\Delta_+ f_s}{h} \ge \frac{\Delta_+ f_k}{h} - |s-k| h\mu_2$. Так как $f_{n+m} - f_n = \sum_{s=n}^{n+m-1} \frac{\Delta_+ f_s}{h} h$, то $f_{n+m} - f_n \ge mh\frac{\Delta_+ f_k}{h} - h^2\mu_2 \sum_{s=n}^{n+m-1} |s-k| = mh\frac{\Delta_+ f_k}{h} -$

$-\frac{h^2\mu_2}{2}\left[(k-n)(k-n+1)+(n+m-k)(n+m-k-1)\right]$. Нетрудно получить, что максимум выражения в квадратной скобке при $n \le k \le n+m-1$ равен $m(m-1)$, поэтому $f_{n+m}-f_n \ge mh\frac{\Delta_+ f_k}{h}-\frac{\mu_2}{2}h^2 m(m-1)$. Так как $f_{n+m}-f_n \le 2\mu_0$, то $\frac{\Delta_+ f_k}{h} \le \frac{2}{mh}\mu_0+\frac{h(m-1)}{2}\mu_2$. Беря $-f$ вместо $f$, получим то же неравенство для $-\frac{\Delta_+ f_k}{h}$, а следовательно, оценку

$$\left|\frac{\Delta_+ f_k}{h}\right| \le \frac{2}{mh}\mu_0+\frac{h(m-1)}{2}\mu_2 .$$

Отсюда, в силу соотношений $mh \ge \theta$ и $(m-1)h < \theta$, а также с учетом того, что $k$ – любое, получается требуемое неравенство (1.6).

## 2. Задачи и разностные схемы на других этапах

В этом разделе рассмотрим формулировку задач для последующих этапов доказательства, получение разностных схем для производных искомой функции и установим общий вид уравнений, которым удовлетворяет соответствующая погрешность. Будет показано также, что для рассматриваемой задачи возможно проведение лишь трех подобных этапов доказательства.

На **II этапе** рассмотрим задачу для уравнения

$$\frac{\partial R}{\partial t}=a\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{da}{dx}\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{db}{dx}\ , \quad \text{где} \quad R=\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{2.1}$$

полученного дифференцированием уравнения (1.1), с начальным условием $R(x,0)=0$ и граничными условиями

$$a\frac{\partial R}{\partial x}+b=0, \quad x=0,1. \tag{2.2}$$

Разностную схему для уравнения (2.1) получим, беря правое разностное отношение для обеих частей схемы (1.3). Полученная схема будет аппроксимировать уравнение (2.1) в полуцелых точках (т.е на сетке $\omega^*_{h\tau}$) с точностью $O(\tau+h^2)$. Эта схема в разностях может быть записана различными способами. Будем представлять ее в виде, полученном при использовании следующей формулы разностного дифференцирования произведения:

$$\frac{\Delta_+(uv)}{h} = \frac{u_{k+1}+u_k}{2}\,\frac{\Delta_+ v_k}{h} + \frac{\Delta_+ u_k}{h}\,\frac{v_{k+1}+v_k}{2},$$

где $k$ – целые или полуцелые индексы. Обозначая $r_{i+1/2} = \dfrac{\Delta_+ p_i}{h}$, получим для уравнения (2.1) следующую схему:

$$\frac{\hat r_{i+1/2} - r_{i+1/2}}{\tau} = \frac{a_{i+1}+a_i}{2}\,\frac{\Delta^2\,\hat r_{i+1/2}}{h^2} + \frac{\Delta_+\,a_i}{h}\,\frac{\Delta_0\,\hat r_{i+1/2}}{h} + \frac{\Delta_+\,b_i}{h}. \qquad (2.3)$$

Для погрешности $z_{i+1/2} = R(x_{i+1/2}) - r_{i+1/2}$ на этом этапе также будут выведены оценки (1.5). Это будет означать, что имеют место уточненные соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\Delta p}{h} = O(\tau + h^2), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\Delta^2 p}{h^2} = O(\sqrt{\tau + h^2}), \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - \frac{\Delta^3 p}{h^3} = O(1)$$

на соответствующих сетках.

На **III этапе** будет рассматриваться полученная аналогично предыдущему задача

$$\frac{\partial S}{\partial t} = a\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2\frac{da}{dx}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{d^2 a}{dx^2}S + \frac{d^2 b}{dx^2}, \qquad S = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \qquad (2.4)$$

$$a\,S + b = 0, \quad x = 0,1; \quad S(x,0) = 0. \qquad (2.5)$$

Разностную схему для уравнения (2.4) получим, беря левое разностное отношение для обеих частей схемы (2.3). Она будет аппроксимировать уравнение (2.4) в целых точках с порядком $O(\tau + h^2)$. Обозначая $s_i = \dfrac{\Delta_- r_{i+1/2}}{h} = \dfrac{\Delta^2 p_i}{h^2}$, представим эту схему в виде

$$\frac{\hat s_i - s_i}{\tau} = \frac{a_{i+1} + 2a_i + a_{i-1}}{4}\,\frac{\Delta^2\,\hat s_i}{h^2} + 2\frac{\Delta_0\,a_i}{h}\,\frac{\Delta_0 \hat s_i}{h} + \frac{\Delta^2 a_i}{h^2}\,\frac{\hat s_{i+1} + 2\hat s_i + \hat s_{i-1}}{4} + \frac{\Delta^2 b_i}{h^2}. \qquad (2.6)$$

Из оценок (1.5), полученных на этом этапе для погрешности $z_i = S(x_i) - s_i$ на сетке $\omega_{h\tau}$, будет следовать, что

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\Delta^2 p}{h^2} = O(\tau + h^2), \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - \frac{\Delta^3 p}{h^3} = O(\sqrt{\tau + h^2}), \quad \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} - \frac{\Delta^4 p}{h^4} = O(1).$$

Из этих оценок, как следствие соответствующих уравнений, получаются оценки для производных по $t$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\hat{p} - p}{\tau} = O(\tau + h^2),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t\, \partial x} - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\Delta \hat{p}}{h} - \frac{\Delta p}{h}\right) = O(\sqrt{\tau + h^2}),$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial t\, \partial x^2} - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\Delta^2 \hat{p}}{h^2} - \frac{\Delta^2 p}{h^2}\right) = O(1).$$

Как упомянуто выше, все перечисленные оценки выполняются на соответствующих сетках.

Перейдем к рассмотрению общего вида уравнения для погрешности на каждом этапе. Предварительно сделаем замечания.

Согласно построению разностной схемы (1.3), имеем $a_i = \varphi_{1i}\left(x_i, t_{n+1}, p_i, \frac{\Delta_+ p_i}{h}, \frac{\Delta_- p_i}{h}\right)$, где функция $\varphi_{1i}$ обладает требуемыми для аппроксимации свойствами. Можно показать, что разностные отношения для $a_i$ представляются в виде:

$$\frac{\Delta_+ a_i}{h} = \varphi_{2i}\left(x_i, t_{n+1}, p_i, r_{i+1/2}, \frac{\Delta_+ r_{i+1/2}}{h}, \frac{\Delta_- r_{i+1/2}}{h}\right), \quad \frac{\Delta^2 a_i}{h^2} = \varphi_{3i}\left(x_i, t_{n+1}, p_i, r_{i+1/2}, s_i, \frac{\Delta_+ s_i}{h}, \frac{\Delta_- s_i}{h}\right),$$

где функции $\varphi_{2i}$, $\varphi_{3i}$ также достаточно гладкие. Аналогично можно представить разности от $b_i$.

Действительно, нетрудно видеть, что

$$\frac{\Delta_+ a_i}{h} = \frac{1}{h}\left[\varphi_{1i}\left(x_{i+1}, t_{n+1}, p_{i+1}, \frac{\Delta_+ p_{i+1}}{h}, \frac{\Delta_- p_{i+1}}{h}\right) - \varphi_{1i}\left(x_i, t_{n+1}, p_i, \frac{\Delta_+ p_i}{h}, \frac{\Delta_- p_i}{h}\right)\right]$$

– это функция, линейная относительно величин

$$\frac{p_{i+1} - p_i}{h} = r_{i+1/2}, \quad \frac{\Delta_+ p_{i+1} - \Delta_+ p_i}{h^2} = \frac{\Delta_+ r_{i+1/2}}{h}, \quad \frac{\Delta_- p_{i+1} - \Delta_- p_i}{h^2} = \frac{\Delta_- r_{i+1/2}}{h}$$

с ограниченными коэффициентами, зависящими от соответствующих частных производных функции $\varphi_{1i}$.

Аналогично, выражение

$$\frac{\Delta^2 a_i}{h^2} = \frac{1}{h}\left[\varphi_{2i}\left(x_i, t_{n+1}, p_i, r_{i+1/2}, \frac{\Delta_+ r_{i+1/2}}{h}, \frac{\Delta_- r_{i+1/2}}{h}\right) - \varphi_{2i}\left(x_{i-1}, t_{n+1}, p_{i-1}, r_{i-1/2}, \frac{\Delta_+ r_{i-1/2}}{h}, \frac{\Delta_- r_{i-1/2}}{h}\right)\right]$$

дополнительно зависит также линейно от величин

$$\frac{r_{i+1/2}-r_{i-1/2}}{h}=s_i,\quad \frac{\Delta_+ r_{i+1/2}-\Delta_+ r_{i-1/2}}{h^2}=\frac{\Delta_+ s_i}{h},\quad \frac{\Delta_- r_{i+1/2}-\Delta_- r_{i-1/2}}{h^2}=\frac{\Delta_- s_i}{h}.$$

Используя эти замечания и вид соответствующих разностных схем, можно показать, что уравнения для погрешностей на каждом этапе будут иметь следующий вид:

$$\frac{\hat z-z}{\tau}=c_1\frac{\Delta^2\hat z}{h^2}+c_2\frac{\Delta_+\hat z}{h}+c_3\frac{\Delta_-\hat z}{h}+c_4\hat z+c_5\frac{\Delta_+ z}{h}+c_6\frac{\Delta_- z}{h}+c_7 z+\varepsilon,\qquad (2.7)$$

где коэффициенты $c_j$, с учетом уже доказанных оценок на предыдущих этапах, ограничены константами, не зависящими от $h$ и $\tau$, а $\varepsilon=O(\tau+h^2)$, т.е. $|c_j|\le C_j$ , $j=1,2,...7$, $|\varepsilon|\le E(\tau+h^2)$; кроме того, $c_1\ge a^*>0$. Отметим, что на I этапе погрешность удовлетворяет уравнению вида (2.7) при $c_1=a$ и $c_2=c_3=c_4=0$.

Граничные условия пока не учитываем; они будут рассмотрены ниже.

Далее остановимся на решении следующей формальной задачи. Будем рассматривать уравнение (2.7) на сетке $\omega_{h\tau}$, полагая $z(x,0)=0$. Проведем для него доказательство оценок (1.5), считая, что $\max\limits_{x\in\bar\omega_h}|z|$ достигается на $\omega_h$ (т.е. внутри отрезка). К такой задаче сводится доказательство этих оценок на каждом этапе. Действительно, на I и III этапах возникает аналог первой краевой задачи для соответствующих схем, так что погрешность на границах $x=0,1$ равна нулю на I этапе и есть величина $O(\tau+h^2)$ на III этапе; поэтому достаточно рассмотрения случая, когда функция $|z|$ достигает максимума на $\omega_h$. При рассмотрении на II этапе аналога второй краевой задачи будут вводиться вспомогательные функции, удовлетворяющие уравнениям вида (2.7) и достигающие нужных экстремумов на $\omega_h^*$, поэтому для них также возникает поставленная задача.

Итак, перепишем уравнение (2.7) в виде

$$\frac{\hat z-\tau c_2\frac{\Delta_+\hat z}{h}-\tau c_3\frac{\Delta_-\hat z}{h}-\tau c_1\frac{\Delta^2\hat z}{h^2}}{\tau+h^2}=\frac{z+\tau c_5\frac{\Delta_+ z}{h}+\tau c_6\frac{\Delta_- z}{h}}{\tau+h^2}+\frac{\tau}{\tau+h^2}(c_4\hat z+c_7 z+\varepsilon).\qquad (2.8)$$

Введем обозначения:

$$Q_n=\frac{1}{\tau+h^2}\max_{x\in\omega_h}\left|z-\tau\breve c_2\frac{\Delta_+ z}{h}-\tau\breve c_3\frac{\Delta_- z}{h}-\tau\breve c_1\frac{\Delta^2 z}{h^2}\right|,$$

$$\overline{\overline{Q}}_n=\frac{\tau}{\tau+h^2}\max_{x\in\omega_h}\frac{|\Delta^2 z|}{h^2},\quad n=1,2,...,n_0,\quad Q_0=0,\quad \overline{\overline{Q}}_0=0.$$

Докажем, что при достаточно малых $h$ имеет место оценка

$$\max_{x\in\omega_h}\frac{|z|}{\tau+h^2}\le Q_n, \tag{2.9}$$

Обозначим

$$M=-\tau\breve{c}_2\frac{\Delta_+ z}{h}-\tau\breve{c}_3\frac{\Delta_- z}{h}-\tau\breve{c}_1\frac{\Delta^2 z}{h^2}$$

и покажем, что в точке максимума функции $z$ имеет место $M\ge 0$, а в точке минимума этой функции $M\le 0$ для достаточно малых $h$. Действительно, пусть $z$ достигает максимума в точке $x_k$. Тогда $z_k-z_{k+1}\ge 0$, $z_k-z_{k-1}\ge 0$.

Представим $M_k$ (значение $M$ в точке $x_k$) в виде

$$M_k=\frac{\tau}{h}\left[(\frac{\breve{c}_{1k}}{h}+\breve{c}_{2k})(z_k-z_{k+1})+(\frac{\breve{c}_{1k}}{h}-\breve{c}_{3k})(z_k-z_{k-1})\right].$$

Так как $c_1\ge a^*>0$, то при $h\le h_0$, где $h_0=\min\left\{\frac{a^*}{C_2},\frac{a^*}{C_3}\right\}$, будет иметь место $M_k\ge 0$. Аналогично, в точке минимума функции $z$ при $h\le h_0$ выполняется неравенство $M\le 0$, так что оценка (2.9) справедлива.

Наша задача – доказать равномерную ограниченность величин $Q_n$ и $\overline{\overline{Q}}_n$ при $h,\tau\to 0$. Тогда из оценки (2.9) будет следовать, что $z=O(\tau+h^2)$. Из ограниченности $\overline{\overline{Q}}_n$ следует, что $\frac{\Delta^2 z}{h^2}=O(1+\frac{h^2}{\tau})$. С другой стороны, так как $\frac{\Delta^2 z_i}{h^2}=\frac{z_{i+1}-2z_i+z_{i+1}}{h^2}$, то с учетом оценки для $z$ будет следовать $\frac{\Delta^2 z}{h^2}=O(1+\frac{\tau}{h^2})$. Так что при любых соотношениях $h$ и $\tau$ имеет место $\frac{\Delta^2 z}{h^2}=O(1)$. Из этих оценок по неравенству Ландау–Адамара, если в (1.6) взять $\theta=\sqrt{\tau+h^2}$, получается оценка $\frac{\Delta z}{h}=O(\sqrt{\tau+h^2})$.

Таким образом, если будет доказана равномерная ограниченность величин $Q_n$ и $\overline{\overline{Q}}_n$, то будут доказаны оценки (1.5).

Для этого доказательства нам потребуется следующая

**Лемма.** Пусть на отрезке $\alpha\le x\le\beta$ задана равномерная сетка с шагом $h$ и непрерывная функция $f(x)$, линейная между соседними узлами сетки. Пусть

для некоторого узла $x_i$ этой сетки и некоторого числа $\gamma$ значение $x_i + \gamma$ принадлежит $[\alpha, \beta]$. Тогда имеют место следующие соотношения:

1) если $\gamma \geq 0$, то $f(x_i) + \gamma \dfrac{\Delta_+ f_i}{h} = f(x_i + \gamma) + s$;

2) если $\gamma \leq 0$, то $f(x_i) + \gamma \dfrac{\Delta_- f_i}{h} = f(x_i + \gamma) + s$,

где $|s| \leq \dfrac{\gamma^2}{2} \max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2}$.

Докажем, например, первое утверждение. Будем считать, что $\max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2} > 0$, так как в противном случае $f(x)$ линейна и равенство очевидно.

Введем функцию $g(z) = \dfrac{z^2}{2} \max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2} - f(x_i) - z \dfrac{\Delta_+ f_i}{h} + f(x_i + z)$ при $0 \leq z \leq \beta - x_i$ и покажем, что $g(z) \geq 0$. Очевидно, при $0 \leq z \leq h$ имеет место равенство $f(x_i + z) = f(x_i) + z \dfrac{\Delta_+ f_i}{h}$, так что при $0 < z \leq h$ выполняется неравенство $g(z) = \dfrac{z^2}{2} \max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2} > 0$.

Предположим теперь, что для некоторого $z_0$, $h < z_0 \leq \beta - x_i$, значение $g(z_0) \leq 0$. Тогда функция $g(z)$ достигает максимума между $z = h$ и $z = z_0$. Пусть $z = z_1$ – точка самого левого максимума, $h \leq z_1 \leq z_0$. Точка $x_i + z_1$ совпадает с одним из узлов сетки, так как между узлами функция $f(z)$ линейна и $g''(z) = \max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2} > 0$. В точке $z_1$ должно выполняться неравенство $\dfrac{\Delta^2 g(z_1)}{h^2} < 0$, т.е. $\max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2} - \dfrac{\Delta^2 f(x_i + z_1)}{h^2} < 0$, что невозможно.

Аналогично можно показать, что $\dfrac{z^2}{2} \max\limits_j \dfrac{|\Delta^2 f_j|}{h^2} + f(x_i) + z \dfrac{\Delta_+ f_i}{h} - f(x_i + z) \geq 0$ для всех $0 \leq z \leq \beta - x_i$. Отсюда следует первое соотношение леммы. Так же доказывается второе утверждение леммы.

Покажем теперь, что выражение $L = z + \tau c_5 \dfrac{\Delta_+ z}{h} + \tau c_6 \dfrac{\Delta_- z}{h}$ из (2.8) для достаточно малых $h$ можно представить в виде

$$L = \alpha_1 z + \tau \alpha_2 \frac{\Delta_+ z}{h} + \tau \alpha_3 \frac{\Delta_- z}{h} + \alpha_4 \left(z - \tau \breve{c}_2 \frac{\Delta_+ z}{h} - \tau \breve{c}_3 \frac{\Delta_- z}{h} - \tau \breve{c}_1 \frac{\Delta^2 z}{h^2}\right), \quad (2.10)$$

где $\alpha_1 \ge \frac{1}{2}$, $\alpha_2 \ge 0$, $\alpha_3 \le 0$, $\alpha_4 > 0$ и, кроме того, $\alpha_2 \le \alpha_2^*$, $|\alpha_3| \le \alpha_3^*$ ($\alpha_2^*$, $\alpha_3^*$ – некоторые константы, не зависящие от $h$ и $\tau$). Это представление понадобится, чтобы применить лемму для оценки $L$.

Величины $\alpha_i$, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_1 + \alpha_4 = 1, \quad \alpha_2 - \alpha_4(\breve{c}_2 + \frac{\breve{c}_1}{h}) = c_5, \quad \alpha_3 - \alpha_4(\breve{c}_3 - \frac{\breve{c}_1}{h}) = c_6.$$

Пусть $\alpha_4 = \beta h$, $\beta > 0$. Тогда $\alpha_2 = \beta(\breve{c}_1 + \breve{c}_2 h) + c_5$, $\alpha_3 = -\beta(\breve{c}_1 - \breve{c}_3 h) + c_6$. Выберем $\beta$ так, чтобы $\beta\breve{c}_1 + c_5 \ge \breve{c}_1$ и $\beta\breve{c}_1 - c_6 \ge \breve{c}_1$, а именно, возьмем $\beta = 1 + \frac{1}{a^*}(C_5 + C_6)$. Очевидно, что при этом $|\alpha_2|$ и $|\alpha_3|$ равномерно ограничены. Тогда при $h \le \frac{a^*}{\beta C_2}$ будет $\alpha_2 \ge 0$, а при $h \le \frac{a^*}{\beta C_3}$ будет $\alpha_2 \le 0$. Кроме того, $h$ должно быть таким, чтобы $\beta h \le 1/2$ .Таким образом, при $h \le h_0$, где $h_0 = \min\left\{\frac{1}{2\beta}, \frac{a^*}{\beta C_2}, \frac{a^*}{\beta C_3}\right\}$, все $\alpha_i$ удовлетворяют нужным требованиям.

Рассмотрим далее выражение (см. (2.10)

$$L_1 = \alpha_1 z + \tau\alpha_2 \frac{\Delta_+ z}{h} + \tau\alpha_3 \frac{\Delta_- z}{h} = \frac{\alpha_1}{2}(z + 2\tau \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\Delta_+ z}{h}) + \frac{\alpha_1}{2}(z + 2\tau \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\frac{\Delta_- z}{h}).$$

Здесь $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \ge 0$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \le 0$. Применяя доказанную лемму, каждое из выражений в круглых скобках представим в виде $z(x + 2\tau\frac{\alpha_j}{\alpha_1}) + s$, $j = 2, 3$, где $|s| \le \tau^2 C^* \max\limits_{x\in\omega_h} \frac{|\Delta^2 z|}{h^2}$, $C^* = 8\alpha_0^2$, $\alpha_0 = \max\left\{\alpha_2^*, \alpha_3^*\right\}$. При этом будем считать, что функция $z$ продолжена на отрезок $[-4\alpha_0\tau, 1 + 4\alpha_0\tau]$ точками, лежащими на следующих прямых:

$$z \in \begin{cases} x\frac{\Delta_- z_1}{h}, & x < 0, \\ (x-1)\frac{\Delta_- z_N}{h}, & x > 1. \end{cases}$$

Предполагая здесь, что максимум модуля продолженной функции $z$ достигается на $\omega_h$, получим оценку для $L_1$:

$$\frac{|L_1|}{\tau+h^2} \le \alpha_1 Q_n + \tau\alpha_1 C^* \overline{\overline{Q}}_n .$$

Тогда из (2.10) следует оценка для $L$ вида:

$$\frac{|L|}{\tau+h^2} \le (\alpha_1+\alpha_4)Q_n + \tau\alpha_1 C^* \overline{\overline{Q}}_n \le Q_n + \tau C^* \overline{\overline{Q}}_n . \qquad (2.11)$$

Вернемся к уравнению (2.8). Используя оценки (2.9), (2.11), получим из него следующее рекуррентное соотношение для $Q_{n+1}$:

$$Q_{n+1} \le Q_n + \tau(C_4 Q_{n+1} + C_7 Q_n + C^* \overline{\overline{Q}}_n + E) . \qquad (2.12)$$

Рекуррентную оценку для $\overline{\overline{Q}}_{n+1}$ на II и III этапах получим, учитывая доказанную на соответственно предыдущем этапе равномерную ограниченность величин $\frac{\Delta z}{h}$. Пусть

$$\frac{\tau}{\tau+h^2}\left(C_2 \max_{x\in\omega_h}\frac{|\Delta_+ \hat{z}|}{h} + C_3 \max_{x\in\omega_h}\frac{|\Delta_- \hat{z}|}{h} + C_5 \max_{x\in\omega_h}\frac{|\Delta_+ z|}{h} + C_6 \max_{x\in\omega_h}\frac{|\Delta_- z|}{h}\right) \le C^{**} .$$

Тогда из (2.8) получим

$$\overline{\overline{Q}}_{n+1} \le \frac{1}{a^*}[Q_{n+1} + Q_n + C^{**} + \tau(C_4 Q_{n+1} + C_7 Q_n + E)] . \qquad (2.13)$$

При использовании оценок (2.12), (2.13), доказывается равномерная ограниченность величин $Q_n$, $\overline{\overline{Q}}_n$ при $0 \le n\tau \le 1$, откуда следуют оценки (1.5) для $z$ из уравнения (2.7). Таким образом решение поставленной формальной задачи завершено.

Сделаем теперь ряд уточнений и дополнений приведенного доказательства применительно к конкретным этапам.

**I этап.** Поскольку на I этапе ограниченность величин $\frac{\Delta z}{h}$ еще не доказана, то величину $C^{**}$ мы определить не можем; в этом случае оценку для $\overline{\overline{Q}}_{n+1}$ получим из (2.8) с учетом (2.11) и того, что на I этапе в уравнениях (2.7), (2.8) $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Она имеет вид

$$\overline{\overline{Q}}_{n+1} \le \frac{1}{a^*}[Q_{n+1} + Q_n + \tau(C_7 Q_n + C^* \overline{\overline{Q}}_n + E)] .$$

Подставляя сюда оценку (2.12), получим

$$\overline{\overline{Q}}_{n+1} \le \frac{2}{a^*}[Q_n + \tau(C_7 Q_n + C^* \overline{\overline{Q}}_n + E)]. \qquad (2.14)$$

Из (2.12), (2.14) следует равномерная ограниченность величин $Q_n$, $\overline{\overline{Q}}_n$, так как эти соотношения практически совпадают с полученными в [11] оценками для I этапа схемы Роте. Не повторяя приведенного там подробного доказательства, отметим лишь основные его ступени. Вводятся величины $Q_n^*$, $\overline{\overline{Q}}_n^*$, для которых соотношения (2.12), (2.14) – равенства. Составляя из этих величин вектор $q_n$, полученные равенства можно представить в виде матричного рекуррентного соотношения вида $q_{n+1} = H_1 q_n + \tau H_2 q_n + \tau H$, где матрица $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/a^* & 0 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения 0 и 1 и приводима к диагональному виду; этого, как известно (см., например, [6]), достаточно для равномерной ограниченности величин $Q_n^*$, $\overline{\overline{Q}}^*{}_n$ при $0 \le n\tau \le 1$. Затем по индукции доказывается, что эти величины мажорируют величины $Q_n$, $\overline{\overline{Q}}_n$; при этом дополнительно рассматривается случай, когда максимум модуля продолженной указанным образом функции $z$ достигается вне $\overline{\omega}_h$. По этой же схеме доказывается ограниченность величин $Q_n$, $\overline{\overline{Q}}_n$, удовлетворяющих соотношениям (2.12), (2.13).

**II этап.** Отличия доказательства от п. 2.2 состоят в следующем. В силу условий (2.2) погрешность $z = R - r$ на этом этапе удовлетворяет аналогу граничных условий второго рода и потому может достигать экстремумов в граничных точках. В этом случае, аналогично [11], вводятся вспомогательные функции вида

$$_{\pm}z = z \pm m_n(\tau + h^2)\psi(x). \qquad (2.15)$$

Здесь величины $m_n$ представляют собой некоторую оценку модуля разностной первой производной в граничных точках, получаемую из граничных условий (см. формулу (3.4)). Функция $\psi(x)$ – неотрицательная, линейная между узлами сетки $\omega_h^*$ и ограниченная сверху некоторым числом $\sigma$, определяемым в процессе доказательства; кроме того, $\psi'(0) > 1$, $\psi'(1) < -1$. Очевидно, что эти свойства обеспечивают достижение функциями $_{\pm}z$ одного из своих экстремумов во внутренних узлах, а именно – максимума $_{+}z$ и минимума $_{-}z$.

При подстановке (2.15) в (2.7) получаются уравнения для $_{\pm}z$, в которые будет входить, кроме того, $m_n$.

Вместо $Q_n$ определяются величины

$$ {}_{+}Q_n = \frac{1}{\tau + h^2} \max_{1\le i\le n} \max_{x\in\omega_h^*} \left( {}_{+}z^i - \tau c_2^{i-1} \frac{\Delta_+ ({}_{+}z^i)}{h} - \tau c_3^{i-1} \frac{\Delta_- ({}_{+}z^i)}{h} - \tau c_1^{i-1} \frac{\Delta^2 ({}_{+}z^i)}{h^2} \right), $$

$$ {}_{-}Q_n = \frac{1}{\tau + h^2} \max_{1\le i\le n} \max_{x\in\omega_h^*} - \left( {}_{-}z^i + \tau c_2^{i-1} \frac{\Delta_+ ({}_{-}z^i)}{h} + \tau c_3^{i-1} \frac{\Delta_- ({}_{-}z^i)}{h} + \tau c_1^{i-1} \frac{\Delta^2 ({}_{-}z^i)}{h^2} \right), $$

$$ {}_{\pm}Q_0 = 0 . $$

Все величины ${}_{\pm}Q_n$ неотрицательны и не убывают с ростом $n$. Величины $\overline{\overline{Q}}_n$ определяются как и раньше.

Для достаточно малых $h$ доказывается оценка

$$ \max_{x\in\omega_h^*} \frac{|z|}{\tau + h^2} \le {}_{+}Q_n + {}_{-}Q_n . \qquad (2.16) $$

Таким образом, чтобы получить оценку $z = O(\tau + h^2)$, достаточно доказать ограниченность ${}_{\pm}Q_N$ при $\tau \to 0$. Тогда из ограниченности $\overline{\overline{Q}}_N$ и неравенства Ландау–Адамара будут следовать оценки (1.5) внутри отрезка.

Величины $m_n$ в (2.15) определяются равенствами

$$ m_{n+1} = \eta({}_{+}Q_n + {}_{-}Q_n) + \nu , \quad m_0 = 0 , \qquad (2.17) $$

где константы $\eta$ и $\nu$ – это оценки коффициентов в граничных условиях для погрешности на этом этапе (см. (3.4)), полученные с учетом доказанных оценок на I этапе. Следовательно, $m_n$ также не убывают с ростом $n$. Из ограниченности $m_N$ будут следовать соответствующие оценки для функции $z$ и ее разностных производных в граничных точках $\omega_h^*$.

Ограниченность перечисленных величин исследуется подобным п.2 образом. Из полученных для функций ${}_{\pm}z$ уравнений вида (2.7) с учетом (2.17) для величин ${}_{+}Q_n$, ${}_{-}Q_n$, $\overline{\overline{Q}}_n$, $m_n$ выводятся рекуррентные оценки того же типа, что и (2.12), (2.13). При этом используется то, что возникающие в преобразованиях продолженные вовне области указанным в п.2.2 образом функции ${}_{\pm}z$ достигают нужных экстремумов внутри $\omega_h^*$.

Доказательство ограниченности ${}_{\pm}Q_N$, $m_N$ аналогично описанному выше для I этапа. Вводятся величины ${}_{\pm}Q_N^*$, $m_N^*$, для которых соответствующие оценки и (2.17) – равенства. Полученные рекуррентные соотношения записываются в матричном виде. Находятся собственные значения матрицы $H_1$ для этого случая и показывается, что она приводима к диагональному виду. Ее собственные значения зависят от $\sigma$ (верхняя граница функции $\psi(x)$), поэтому

из условия, что для ограниченности этих величин собственные значения $H_1$ не должны превосходить единицу, возникает ограничение на величину $\sigma$. Далее показывается как раньше по индукции, что величины со звездочкой мажорируют требуемые величины, которые поэтому также ограничены.

## 3. Граничные условия

В этом разделе более подробно рассмотрим окрестность границы для схем, соответствующих каждому этапу.

Предположим, что мы провели I этап, т.е. доказали оценки (1.5) для $x,t \in \omega_{h\tau}$, где $z = P - p$. Для перехода к последующим этапам введем дополнительные узлы $x_{-1} = -h$, $x_{N+1} = 1 + h$. Доопределим в них функцию $P$ следующим образом:

$$\frac{\Delta^2 P_0}{h^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}|_{x=0}, \quad \frac{\Delta^2 P_N}{h^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}|_{x=1}.$$

Для краткости возьмем только один (например, левый) конец. В силу граничных условий для $P$ имеем $P_{-1} = -P_1 + h^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}|_{x=0}$. Покажем, что при таком определении $P_{-1}$ имеет место $\frac{\Delta_0 P_0}{h} = \frac{\partial P}{\partial x}|_{x=0} + O(h^2)$.

Действительно,

$$\frac{\Delta_0 P_0}{h} = \frac{P_1}{h} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{1}{h}(h\frac{\partial P}{\partial x}|_{x=0} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}|_{x=0} + O(h^3)) - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{\partial P}{\partial x}|_{x=0} + O(h^2).$$

Определим значения $p_{-1}$ так, чтобы уравнение (1.3) выполнялось также при $i = 0$, т.е.

$$\frac{\hat{p}_0 - p_0}{\tau} = a_0 \frac{\Delta^2 \hat{p}_0}{h^2} + b_0, \tag{3.1}$$

где $a_0, b_0$ – функции от $t_{n+1}, p_0, \frac{\Delta_+ p_0}{h}, \frac{\Delta_- p_0}{h}$, аппроксимирующие с точностью $O(h^2)$ функции $a$ и $b$, зависящие от $0, t+\tau, 0, \frac{\partial P}{\partial x}$. Учитывая граничные условия (1.4), получим для определения $p_{-1}$ рекуррентную формулу $\hat{p}_{-1} = -\hat{p}_1 - h^2 \frac{b_0}{a_0}$. Согласно способу определения $P_{-1}$ положим $P(-h,0) = 0$.

Обозначим $z_{-1} = P_{-1} - p_{-1}$ и покажем, что имеют место оценки

$$z_{-1} = O(\tau + h^2), \quad \frac{\Delta_- z_0}{h} = O(\sqrt{\tau + h^2}), \quad \frac{\Delta^2 z_0}{h^2} = O(1). \tag{3.2}$$

Действительно, из (3.1) видно, что $\frac{\Delta^2 p_0}{h^2}$ равномерно ограничено при $h, \tau \to 0$, так как $\frac{\Delta^2 \hat{p}_0}{h^2} = -\frac{b_0}{a_0}$. Следовательно, $\frac{\Delta^2 z_0}{h^2}$ также ограничено, т.е. $\frac{z_{-1} + z_1}{h^2} = O(1)$. Отсюда, в силу оценки $z_1 = O(\tau + h^2)$ имеет место $z_{-1} = -z_1 + O(h^2) = O(\tau + h^2)$. Как и прежде, из неравенства Ландау–Адамара получается оценка $\frac{\Delta_- z_0}{h} = O(\sqrt{\tau + h^2})$.

Перейдем ко II этапу доказательства. Поскольку, определив $p_{-1}$, $p_{N+1}$, мы определили $r_{-1/2}$, $r_{N+1/2}$, то уравнение (2.3) рассматривается на сетке $\omega^*_{h\tau}$, а граничное условие для него на левом конце получается из (3.1), (1.4). Оно имеет вид:

$$a_0 \frac{\Delta_- \hat{r}_{1/2}}{h} + b_0 = 0. \tag{3.3}$$

Введем $R_{-1/2} = \frac{\Delta_- P_0}{h}$. Для погрешности $\hat{z}_{i+1/2} = \hat{R}_{i+1/2} - \hat{r}_{i+1/2}$ на этом конце получается условие

$$a_0 \frac{\Delta_- \hat{z}_{1/2}}{h} + d(z_{1/2} + z_{-1/2}) + \varepsilon = 0, \tag{3.4}$$

где $d$ равномерно ограничено при $h, \tau \to 0$, а $\varepsilon = O(\tau + h^2)$ ввиду оценок (3.2). Граничные условия такого вида позволяют провести II этап доказательства на сетке $\omega^*_{h\tau}$, как это описано в пп. 2.2, 2.3.

На III этапе уравнение (2.6) относительно $s$ рассматривается на сетке $\omega_{h\tau}$. Граничное условие на левом конце получается из (3.3). Поскольку $s_i = \frac{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}}{h}$, то это граничное условие имеет вид $a_0 \hat{s}_0 + b_0 = 0$. Так как $S_0 = \frac{\Delta^2 P_0}{h^2}$, то условие для погрешности $\hat{z}_i = \hat{S}_i - \hat{s}_i$ на этом конце выглядит следующим образом:

$$a_0 \hat{z}_0 + \varepsilon = 0, \tag{3.5}$$

где $\varepsilon = O(\tau + h^2)$, как следует из оценок, полученных на предыдущих этапах. Таким образом, здесь, как и на I этапе, достаточно рассмотреть случай, когда $\max\limits_{x\in\overline{\omega}_h} |z|$ достигается на $\omega_h$, т.е. во внутренней точке.

Доказательство оценок (1.5) для уравнения (2.7) при таком граничном условии проводится как показано в п. 2.2.

Таким образом, в результате проведения трех описанных этапов доказана

**Теорема 1.** При $h, \tau \to 0$ разностная схема (1.3), (1.4) для задачи (1.1), (1.2) сходится, причем

$$P - p,\ \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\Delta p}{h},\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\Delta^2 p}{h^2},\ \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\hat{p} - p}{\tau} \text{ – величины } O(\tau + h^2);$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} - \frac{\Delta^3 p}{h^3},\quad \frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial x} - \frac{1}{\tau}\left(\frac{\Delta \hat{p}}{h} - \frac{\Delta p}{h}\right) \text{ – величины } O(\sqrt{\tau + h^2});$$

$$\frac{\Delta^4 p}{h^4},\quad \frac{1}{\tau}\left(\frac{\Delta^2 \hat{p}}{h^2} - \frac{\Delta^2 p}{h^2}\right),\quad \frac{\hat{p} - 2p + \breve{p}}{\tau^2} \text{ – ограничены.}$$

Приведенные здесь оценки для производных по t являются следствием оценок для производных по x и рассматриваемых на каждом этапе уравнений.

Покажем, что дальнейшее улучшение полученных таким путем оценок гарантировать невозможно. Действительно, рассматриваемые на III этапе для левого конца величины $\frac{\hat{s}_0 - s_0}{\tau}$, где $\hat{s}_0 = -\frac{b_0}{a_0}$, и $\frac{\hat{S}_0 - S_0}{\tau}$ ограничены в силу свойств задачи (1.1), (1.2). Следовательно, величины $\frac{\hat{z}_0 - z_0}{\tau}$ также ограничены. Из условия (3.5) вытекает, что может быть $\frac{z_0^1}{\tau + h^2} \sim 1$. А отсюда, поскольку величина $\frac{z_0^1 - z_0^0}{\tau} = \frac{z_0^1}{\tau} > \frac{z_0^1}{\tau + h^2}$ и ограничена, следует $\frac{z_0^1 - z_0^0}{\tau} \sim 1$. То же самое имеет место для правого конца. Если это так, то из уравнения (2.7) для погрешности на III этапе видно, что оценки $\frac{\Delta^2 z_0^1}{h^2} \sim 1$ и $\frac{\Delta^2 z_N^1}{h^2} \sim 1$ будут выполняться независимо от способа продолжения функций S и s за границу области, чтобы задать $\frac{\Delta^4 P}{h^4}$, $\frac{\Delta^4 p}{h^4}$ на границах. Таким образом, оценка $\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} - \frac{\Delta^4 p}{h^4} = O(1)$ может быть достигнута в нижних углах сетки, т.е. ее дальнейшее улучшение гарантировать невозможно. Поэтому расширение сетки

еще на шаг влево и вправо и способы продолжения решения в дополнительные узлы мы не рассматриваем.

На этом описанный алгоритм рассуждений прекращается, так что все перечисленные в теореме оценки, полученные предложенным методом, являются гарантированно наилучшими для рассматриваемой краевой задачи.

# 4. Общая краевая задача

Рассмотрим для уравнения (1.1) граничные условия более общего вида

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \varphi_1(t,P)\,|_{x=0} = 0\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \varphi_2(t,P)\,|_{x=1} = 0. \tag{4.1}$$

Функции $\varphi_i$, $i = 1, 2$, ограничены и имеют ограниченные частные производные нужного порядка при $0 \le t \le 1$ и всех $P(x,t)$, $x = 0, 1$.

Аппроксимируем условия (4.1) следующим образом. Введем значения $P_{-1/2}$, $P_{N+1/2}$ так, чтобы

$$\frac{P_{1/2} - P_{-1/2}}{h} = \frac{\partial P}{\partial x}\,|_{x=0}\,, \quad \frac{P_{N+1/2} - P_{N-1/2}}{h} = \frac{\partial P}{\partial x}\,|_{x=1}\,.$$

Для краткости опять возьмем только левый конец. Рассмотрим на нем разностное соотношение вида

$$\frac{\hat{p}_{1/2} - \hat{p}_{-1/2}}{h} + \varphi_1(t_{n+1}, \frac{p_{1/2} + p_{-1/2}}{2}) = 0\,. \tag{4.2}$$

Задачу (1.1), (4.1) будем аппроксимировать на сетке $\omega^*_{h\tau}$. Для уравнения (1.1) рассмотрим следующую схему:

$$\frac{\hat{p}_{i+1/2} - p_{i+1/2}}{\tau} = \frac{a_{i+1} + a_i}{2}\,\frac{\Delta^2 \hat{p}_{i+1/2}}{h^2} + \frac{b_{i+1} + b_i}{2} = 0\,. \tag{4.3}$$

Тогда погрешность на I этапе будет удовлетворять уравнению (2.7) (напомним, в котором $c_2 = c_3 = c_4 = 0$) с граничным условием на левом конце вида

$$\frac{\Delta_- \hat{z}_{1/2}}{h} + d(z_{1/2} + z_{-1/2}) + \varepsilon = 0\,, \tag{4.4}$$

где $d$ ограничено, а $\varepsilon = O(\tau + h^2)$ . Для схемы (4.2), (4.3) I этап доказательства сходимости проводится аналогично II этапу для первой краевой задачи. Отличие состоит лишь в получении оценки для $\overline{\overline{Q}}_{n+1}$. Она получается, как на I этапе (см. описание в п. 2.3). На II этапе для погрешности возникает первая

краевая задача. Доказательство проводится на сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ аналогично III этапу для схемы (1.3), (1.4). Таким образом, в результате проведения двух этапов доказана

**Теорема 2.** При $h, \tau \to 0$, разностная схема (4.2), (4.3) для задачи (1.1), (4.1) сходится, причем имеют место равномерные в $\Omega$ оценки:

$P - p$, $\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\Delta p}{h}$ – величины $O(\tau + h^2)$;

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \dfrac{\Delta^2 p}{h^2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial t} - \dfrac{\hat{p} - p}{\tau}$ – величины $O(\sqrt{\tau + h^2})$;

$\dfrac{\Delta^3 p}{h^3}$, $\dfrac{1}{\tau}\left(\dfrac{\Delta \hat{p} - \Delta p}{h}\right)$ – ограничены.

Как и в теореме 1, эти оценки невозможно далее улучшать равномерно во всей области $\Omega$, поскольку они могут быть достигнуты в точках ее границы.

В заключение отметим, что описанный метод исследования в принципе может быть распространен на ряд более общих эволюционных задач, таких как нелинейные уравнения параболического и гиперболического типов с нелинейными граничными условиями самого общего вида, а также на системы таких уравнений. При этом для всех перечисленных задач, как и в рассмотренном здесь случае, будет требоваться предположение существования достаточно гладких решений; единственность этих решений будет следовать из сходимости приближенных методов.

## Список литературы


1. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики. Москва: Научный мир, 2000.
2. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. Москва: Едиториал УРСС, 2003.
3. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. Москва: Физматлит, 2008.
4. *Morton K.W, Mayers D.* Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, UK, 2005.
5. *Gustafsson B., Kreiss H.-O, Oliger J.* Time-dependent Problems and Difference Methods. Wiley, Hoboken, NJ, 2013.
6. *Le Dret H., Lucquin D.* Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation. Springer Int. Publishing, Cham, Switzerland, 2016.

7. *Абрашин В.Н., Лис В.И.* О разностных схемах для квазилинейных нестационарных задач // *Дифференц. уравнения*, **10**:7 (1974), с.1303–1311.
8. *Матус П.П., Хиеу Л.М., Пылак Д.* Разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений со смешанными производными // *Докл. НАН Беларуси*, **63**: 3 (2019), с.263–269.
9. *Кузнецов Г.В., Шеремет М.А.* Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2007.
10. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений переноса тепла, массы, импульса. Москва: ЛЕНАНД, 2017.
11. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. Москва: Изд-во иностр. лит., 1948.
12. *Юхно Л.Ф.* О сходимости схемы Роте для некоторых нелинейных эволюционных уравнений // *Ж. вычислит. матем. и матем. физики*, **15**:5 (1975), с.1168–1182.
13. *Юхно Л.Ф.* О характере сходимости метода сеток при решении нелинейных эволюционных задач // *ДАН СССР,* **228:** 2 (1976), с.325–328.

# Оглавление

Введение ..... 3
1. Постановка задачи ..... 3
2. Задачи и разностные схемы на других этапах ..... 6
3. Граничные условия ..... 16
4. Общая краевая задача ..... 19
Список литературы ..... 20