ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 59 за 2025 г.


ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.А. Лапик

# Векторные задачи равновесия на пересекающихся компактах



***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Лапик М.А. Векторные задачи равновесия на пересекающихся компактах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 59. 12 с.
EDN: TZNEXW
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-59

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.А. Лапик

# ВЕКТОРНЫЕ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ НА ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КОМПАКТАХ

Москва, 2025

**М.А. Лапик** E-mail: mashalapik@gmail.com
*Векторные задачи равновесия на пересекающихся компактах*

**Аннотация**. В работе рассмотрена векторная задача равновесия на пересекающихся компактах с неположительными членами вне главной диагонали матрицы взаимодействия. Для таких задач доказаны результаты, аналогичные результатам для задач на непересекающихся компактах. Стр.~12, библ. назв.~10

**Ключевые слова**: векторная задача равновесия логарифмического потенциала.

**M.A. Lapik** E-mail: mashalapik@gmail.com
*Vector equilibrium problems on intersecting compacts.*

**Abstract** In this paper we consider the vector equilibrium problems on intersecting compacts with nonpositive members outside main diagonal in matrix of interaction. We shall prove same resembling results we got in the previous papers for nonintersecting case. Pages~12, Bibl.~10

**Key words**: vector logarithmic potential problem.

# 1 Введение

В настоящей работе будет рассмотрена векторная задача равновесия логарифмического потенциала на отрезках с непустым пересечением. Такие примеры часто встречались в приложениях, но не подходили под требования теорем, для решения прямой и обратной задач, изложенных в [6], [7], [1]. Напомним основные понятия теории логарифмического потенциала в векторном и скалярном случаях, подробное введение читатель найдет в классических книгах [8], [10].

Пусть $\mathcal{M}^x(\Delta)$ – множество конечных положительных борелевских мер $\mu$ массы $x$ с носителями $S_\mu$ на замкнутом множестве $\Delta \subset \mathbb{R}$. Для интересующих нас приложений достаточно рассматривать непрерывные внешние поля $Q : \Delta \to \mathbb{R}$. В случае неограниченного $\Delta \subset \mathbb{R}$ дополнительно потребуем, чтобы поле росло на бесконечности достаточно быстро:

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\Delta} \frac{Q(z)}{\log|z|} = +\infty.$$

Это обеспечит компактность носителя равновесной меры. *Логарифмическим потенциалом* меры $\mu \in \mathcal{M}^x$ с компактным носителем называют функцию

$$U^\mu(z) = \int \log\frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y),$$

где интегралы понимают в смысле Лебега, он всегда определен, но может принимать значение $+\infty$. Эта функция супергармоническая в $\mathbb{C}$ и гармоническая вне носителя меры ([8], гл. 4, Теорема 1.2 ):

$$U^\mu \in SpH(\mathbb{C}) \bigcap H(\mathbb{C}\backslash S_\mu)\,. \tag{1}$$

Нам понадобятся два факта о логарифмическом потенциале меры, для удобства читателя мы приведем их.

**Теорема 1.** *Принцип непрерывности.([8], гл. 4, Теорема 1.2 ) Пусть $\mu$ – мера с компактным носителем $S_\mu$. Если $U^\mu$ непрерывен на $S_\mu$, то он непрерывен на $\mathbb{C}$.*

Определим *энергию меры $\mu$ во внешнем поле $Q$* выражением

$$I_Q(\mu) = \int\int \log\frac{1}{|z-y|}\, d\mu(y)\, d\mu(z) + 2\int Q\, d\mu. \tag{2}$$

**Теорема 2.** *Принцип ограниченности.([10], Теорема II.3.2) Пусть $\mu$, $\nu$ – меры с компактными носителями в $\mathbb{C}$ и масса меры $\nu$ не превосходит массу $\mu$, которая имеет конечную энергию (при $Q \equiv 0$). Если неравенство*

$$U^{\mu}(z) \leq U^{\nu}(z) + c$$

*имеет место $\mu$-почти всюду для некоторой константы $c$, то оно верно и на всем $\mathbb{C}$.*

*Равновесной* или *экстремальной* мерой в поле $Q$ называют меру $\lambda = \lambda_Q^x$ с минимальной энергией в своем классе:

$$I_Q(\lambda_Q^x) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}^x(\Delta)} I_Q(\mu). \tag{3}$$

Экстремальная мера существует и единственна (в случае конечных энергий). Отметим существование условий равновесия, которые однозначно характеризуют равновесную меру:

$$U^{\lambda} + Q \begin{cases} = w & \text{на } S_{\lambda_Q^x}, \\ \geq w & \text{на } \Delta, \end{cases} \tag{4}$$

где $w$ есть некоторая константа.

Чтобы найти носитель $S_\lambda$, оказалось полезно рассмотреть функционал $F_Q(K)$ на регулярных компактах $K \subseteq \Delta$, введенный Машкаром и Саффом в [9]. Пусть $\omega_K$ - мера Робена компакта $K$ (т.е. $\omega_K = \lambda_0$, где $\lambda_0$ есть равновесная мера задачи (3) при $Q(y) = 0$ и $\Delta = K$) и через $cap(K)$ обозначена логарифмическая емкость компакта $K$ (т.е. $cap(K) = \exp(-w)$ из (4) при $Q(y) = 0$ и $\Delta = K$). По определению

$$F_Q(K) := -\log cap(K) + \int Q(y)\, d\omega_K(y). \tag{5}$$

Оказывается (см. [9], [10], [3]), что носитель равновесной меры $S_\lambda$ минимизирует этот функционал, точнее, для любого компакта $K$ справедливо

$$F(K) \geq F_Q(S_\lambda) = w. \tag{6}$$

В [1], [6] предложен аналог этого функционала для векторных задач равновесия логарифмического потенциала с непересекающимися пластинами конденсатора. Целью настоящей работы является рассмотрение задач на пластинах с непустым пересечением, что очень часто имеет место в различных приложениях, и обобщение результатов работ [1], [6], [7] на этот случай.

## 2 Постановка экстремальной задачи для векторного потенциала во внешнем поле на пересекающихся компактах

Для простоты изложения мы ограничимся случаем размерности $d = 2$. Пусть $\mathbf{\Delta} = \{\Delta_1, \Delta_2\}$ суть замкнутые множества в $\mathbb{R}$, обозначим $\mathcal{M}^x$ множество ограниченных векторных (в смысле прямого произведения) борелевских мер $\overline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ с носителями $S_{\mu_i} \subseteq \Delta_i$, $i = 1, 2$ и компонентами веса $x$, т.е. $\mu_i(\Delta_i) = x > 0$. Обозначим $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$ непрерывную вектор-функцию

$$Q_i : \Delta_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

В качестве *матрицы взаимодействия* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ рассмотрим вещественнозначную симметричную невырожденную матрицу с неположительными величинами вне главной диагонали, удовлетворяющую (2.2) в [6]. Учитывая нормировку, максимально общий вид для такой матрицы есть

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}, \quad a \geq 1, \quad b \geq 1, \quad ab \neq 1. \tag{7}$$

Вектор-функцию $\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^{\overline{\mu}} = (W_{\mathbf{Q},1}^{\overline{\mu}}, W_{\mathbf{Q},2}^{\overline{\mu}})$:

$$W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\mu}}(z) = \sum_{j=1}^{2} c_{ij} U^{\mu_j}(z) + Q_i(z) \tag{8}$$

называют *векторным логарифмическим потенциалом* меры $\overline{\mu} \in \mathcal{M}$ во *внешнем поле* $\mathbf{Q}$ с *матрицей взаимодействия* $\mathbf{C}$. Соответственно, *энергия во внешнем поле* для векторных мер $\overline{\mu} \in \mathcal{M}$ задается функционалом

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = I_1^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) + I_2^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}), \tag{9}$$

где

$$I_i^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}) = \int \Big( W_{\mathbf{Q},i}^{\overline{\mu}}(z) + Q_i(z) \Big) d\mu_i(z) = \sum_{j=1}^{2} c_{ij} I_{ij} + 2 \int Q_i(z)\, d\mu_i(z).$$

*Экстремальная задача во внешнем поле* : найти меру $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^x(\mathbf{\Delta})$:

$$I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}) = \mathcal{I}_{\mathbf{Q}} = \inf_{\overline{\mu} \in \mathcal{M}^x} I^{\mathbf{Q}}(\overline{\mu}). \tag{10}$$

В [2] рассматриваются задачи минимизации энергии для векторных мер с менее строгими условиями на матрицы взаимодействия, веса и

геометрию множеств $\mathbf{\Delta}$, чем рассматривались до сих пор. В настоящей работе нас интересуют задачи с пересекающимися интервалами и отрицательными соответствующими членами в матрице взаимодействия:

$$\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset, \quad c_{ij} < 0, \quad i \neq j.$$

В [2] доказано, что если $\mathcal{I}_{\mathbf{Q}} < +\infty$, то существует единственная мера $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^x(\mathbf{\Delta})$, такая что $I^{\mathbf{Q}}(\overline{\lambda}) = \mathcal{I}_{\mathbf{Q}}$. Там же приведены условия равновесия для векторной задачи во внешнем поле, а именно: существуют и единственны такие константы $w_i$, $i = 1, 2$, что

$$\begin{cases} aU^{\lambda_1}(z) - U^{\lambda_2}(z) + Q_1(z) & \begin{cases} \leq w_1 & \lambda_1\text{-почти всюду на} \quad \Delta_1, \\ \geq w_1 & \text{квази-всюду на} \quad \Delta_1, \end{cases} \\ -U^{\lambda_1}(z) + bU^{\lambda_2}(z) + Q_2(z) & \begin{cases} \leq w_2 & \lambda_2\text{-почти всюду на} \quad \Delta_2, \\ \geq w_2 & \text{квази-всюду на} \quad \Delta_2. \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

для экстремальной меры $\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}} = (\lambda_1, \lambda_2)$. И обратно, если для некоторой меры имеют место условия (11) то это экстремальная мера для задачи (10).

## 3 Равновесие векторных логарифмических потенциалов во внешнем поле на пересекающихся компактах

Введем обозначение $\overline{\omega}(\mathbf{K}) = (\omega_1(\mathbf{K}), \omega_2(\mathbf{K})) := \overline{\lambda}_{\mathbf{0}}$ для вероятностной равновесной меры векторного компакта $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ в отсутствие внешнего поля.

**Утверждение 1.** *Носитель равновесной меры $\overline{\omega}(\mathbf{K}) = (\omega_1(\mathbf{K}), \omega_2(\mathbf{K}))$ компакта $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ совпадает с $\mathbf{K}$ с точностью до множества нулевой емкости. Если $\mathbf{K}$ есть регулярный компакт, то он совпадает с носителем $(S_{\omega_1}, S_{\omega_2}) = (K_1, K_2)$.*

*Доказательство.* Запишем условия равновесия (11) для констант равновесия $\gamma_i$, $i = 1, 2$. Используем одновременно принцип ограниченности логарифмического потенциала (Теорему 2) и условия на матрицу взаи-

модействия (7)

$$\begin{cases} aU^{\omega_1(\mathbf{K})}(z) - U^{\omega_2(\mathbf{K})}(z) & \begin{cases} \leq \gamma_1 & \text{на} & \mathbb{C}, \\ = \gamma_1 & \text{квази-всюду на} & K_1, \end{cases} \\ -U^{\omega_1(\mathbf{K})}(z) + bU^{\omega_2(\mathbf{K})}(z) & \begin{cases} \leq \gamma_2 & \text{на} & \mathbb{C}, \\ = \gamma_2 & \text{квази-всюду на} & K_2. \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

По свойству (1) логарифмического потенциала

$$aU^{\omega_1(\mathbf{K})} - U^{\omega_2(\mathbf{K})} \in SbH(\mathbb{C}\backslash S_{\omega_1}),$$

следовательно, на этом множестве можно применить принцип максимума для субгармонических функций.

Если $a > 1$, то для $z \in \mathbb{C}\backslash S_{\omega_1}$

$$aU^{\omega_1(\mathbf{K})}(z) - U^{\omega_2(\mathbf{K})}(z) < \sup_{\mathbb{C}\backslash S_{\omega_1}} \left( aU^{\omega_1(\mathbf{K})} - U^{\omega_2(\mathbf{K})} \right) \leq \gamma_1.$$

Следовательно, принимая во внимание (12), $cap(K_1\backslash S_{\omega_1}) = 0$. Аналогично для второй пластины $cap(K_2\backslash S_{\omega_2}) = 0$.

Если $a = 1$, то на бесконечности векторный потенциал равен константе. Применим принцип максимума к области $\{z, |z| < R\} \bigcap \mathbb{C}\backslash S_{\omega_1}$. Для достаточно больших $R$ верно следующее

$$aU^{\omega_1(\mathbf{K})}(z) - U^{\omega_2(\mathbf{K})}(z) < \sup_{\{z,|z|<R\} \bigcap \mathbb{C}\backslash S_{\omega_1}} aU^{\omega_1(\mathbf{K})} - U^{\omega_2(\mathbf{K})} \leq \gamma_1.$$

Как и выше, получаем требуемое утверждение; аналогично для второй пластины, если $b = 1$. □

**Утверждение 2.** *Мера Робена* $\overline{\omega}(\mathbf{K}) = (\omega_1(\mathbf{K}), \omega_2(\mathbf{K}))$ *регулярного компакта* $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ *однозначно характеризуется условиями равновесия, причем* $(S_{\omega_1}, S_{\omega_2}) = (K_1, K_2)$*:*

$$\begin{cases} aU^{\omega_1(\mathbf{K})}(z) - U^{\omega_2(\mathbf{K})}(z) & \begin{cases} \leq \gamma_1 & \textit{на} & \mathbb{C} \\ < \gamma_1 & \textit{на} & \mathbb{C} \setminus K_1, \\ = \gamma_1 & \textit{на} & K_1 \setminus K_2, \\ = \gamma_1 & \textit{квази-всюду на} & K_1 \cap K_2, \end{cases} \\ -U^{\omega_1(\mathbf{K})}(z) + bU^{\omega_2(\mathbf{K})}(z) & \begin{cases} \leq \gamma_2 & \textit{на} & \mathbb{C} \\ < \gamma_2 & \textit{на} & \mathbb{C} \setminus K_2, \\ = \gamma_2 & \textit{на} & K_2 \setminus K_1, \\ = \gamma_2 & \textit{квази-всюду на} & K_1 \cap K_2. \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

*Доказательство.* При доказательстве предыдущего утверждения мы получили все неравенства . Для доказательства равенства на $K_1 \setminus K_2$ рассмотрим произвольную точку $x_0 \in K_1 \setminus K_2$. По теореме отделимости существует отрезок $\Delta$ содержащий $x_0$: $\Delta \cap K_2 = \emptyset$. Отрезок $\Delta$ можно выбрать каким образом, чтобы $\Delta \cap K_1$ было регулярным компактом. На $\Delta \cap K_1$ потенциал второй меры непрерывен, следовательно, мы можем применить Теорему 4.1, главы 5 монографии [8]. Получим равенство

$$aU^{\omega_1(\mathbf{K})}(x_0) - U^{\omega_2(\mathbf{K})}(x_0) = \gamma_1$$

в произвольной точке $x_0$, что доказывает требуемое. Аналогично для второй пластины. □

**Утверждение 3.** *Экстремальная мера* $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}} \in \mathcal{M}^x(\mathbf{\Delta})$ *удовлетворяет условиям равновесия:*

$$\begin{cases} aU^{\lambda_1}(z) - U^{\lambda_2}(z) + Q_1(z) & \begin{cases} = w_1 & \text{на} & S_{\lambda_1} \setminus \Delta_2, \\ = w_1 & \text{квази-всюду на} & S_{\lambda_1} \cap \Delta_2, \\ \geq w_1 & \text{на} & \Delta_1 \setminus \Delta_2, \\ \geq w_1 & \text{квази-всюду на} & \Delta_1 \cap \Delta_2, \end{cases} \\ -U^{\lambda_1}(z) + bU^{\lambda_2}(z) + Q_2(z) & \begin{cases} = w_2 & \text{на} & S_{\lambda_2} \setminus \Delta_1, \\ = w_1 & \text{квази-всюду на} & S_{\lambda_2} \cap \Delta_1, \\ \geq w_1 & \text{на} & \Delta_2 \setminus \Delta_1, \\ \geq w_2 & \text{квази-всюду на} & \Delta_1 \cap \Delta_2. \end{cases} \end{cases} \tag{14}$$

*где* $w_i$, $i = 1, 2$ *суть некоторые константы.*

*Доказательство.* Нестрогое неравенство на $\Delta_1 \setminus \Delta_2$ получаем с помощью Теоремы 4.1, гл. 5 [8] и рассуждений, аналогичных оным, использованным в доказательстве предыдущего Утверждения. Следовательно,

$$aU^{\lambda_1}(z) - U^{\lambda_2}(z) + Q_1(z) = w_1 \quad \lambda_1 - \text{почти всюду на } \Delta_1 \setminus \Delta_2.$$

Вне носителя $\lambda_2$ это выражение не может быть строго большим $w_1$ из-за непрерывности снизу логарифмического потенциала $U^{\lambda_1}$. Это дает нам требуемые равенства. Для компакта $\Delta_2$ рассуждения аналогичны. □

# 4 Экстремальное свойство векторного функционала Машкара-Саффа

В этом пункте мы дадим определение векторного аналога функционала (5) и докажем, что он обладает аналогичными экстремальными свой-

ствами.

**Определение 1.** *Векторным функционалом Машкара-Саффа называется функционал $F(\mathbf{K})$ на регулярных векторных компактах $\mathbf{K}$, определенный выражением*

$$F(\mathbf{K}) = x\gamma_1 + x\gamma_2 + \int Q_1\, d\omega_1(\mathbf{K}) + \int Q_2\, d\omega_2(\mathbf{K}), \tag{15}$$

*где $\overline{\omega}(\mathbf{K}) = \overline{\lambda}_{\mathbf{0}}$ есть равновесная мера без поля для векторной задачи на компакте $\mathbf{K}$, $\gamma_i$, $i = 1, 2$ суть константы равновесия для $\overline{\omega}$.*

Напомним, что носитель векторной меры $\overline{\mu}$ в этой работе обозначается $S_{\overline{\mu}} = (S_{\mu_1}, S_{\mu_2})$. Для равновесной меры $\overline{\lambda}$ векторное множество равновесия будем обозначить $S^{\overline{\lambda}}$, т.е множество, где в условиях равновесия имеет место равенство (14). Очевидно, что $S_{\overline{\lambda}} \subseteq S^{\overline{\lambda}}$ с точностью до множества нулевой емкости.

**Теорема 3.** *Для любого регулярного векторного компакта $\mathbf{K} \subset \mathbf{\Delta}$ справедливо*

$$F(\mathbf{K}) \geq F(S_{\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}}) = w_1 + w_2,$$

*где $w_i$ $i = 1, 2$ – константы равновесия для экстремальной меры $\overline{\lambda}_{\mathbf{Q}}$ массы $x$. Равенство достигается, только если верно $S_{\overline{\lambda}} \subseteq \mathbf{K} \subseteq S^{\overline{\lambda}}$ с точностью до множества нулевой емкости.*

*Доказательство.* Мы пользуемся тем фактом, что интеграл по множеству нулевой емкости меры, имеющей конечную энергию, равен нулю.

Интегрируя каждое из выражений (14) по мере $\omega_1(\mathbf{K})$ и $\omega_2(\mathbf{K})$, соответственно получаем

$$\int \Big(aU^{\lambda_1}(z) - U^{\lambda_2}(z) + Q_1(z)\Big)\, d\omega_1(\mathbf{K}) \begin{cases} = w_1 & \text{если} \quad S^{\lambda_1} \supset K_1, \\ > w_1 & \text{иначе, при} \quad K_1 \subset \Delta_1, \end{cases}$$

$$\int \Big(-U^{\lambda_1}(z) + bU^{\lambda_2}(z) + Q_2(z)\Big)\, d\omega_2(\mathbf{K}) \begin{cases} = w_2 & \text{если} \quad S^{\lambda_2} \supset K_2, \\ > w_2 & \text{иначе, при} \quad K_2 \subset \Delta_2. \end{cases}$$

Далее складываем полученные выражения для i=1,2. Используя тео-

рему Фубини, получаем

$$w_1 + w_2 \leq$$
$$\int \Big( aU^{\omega_1}(z) - U^{\omega_2}(z) \pm \gamma_1 \Big)\, d\lambda_1 + \int \Big( -U^{\omega_1}(z) + U^{\omega_2}(z) \pm \gamma_2 \Big)\, d\lambda_2$$
$$+ \int Q_1\, d\omega_1(\mathbf{K}) + \int Q_2\, d\omega_2(\mathbf{K}) =$$
$$\int \Big( aU^{\omega_1}(z) - U^{\omega_2}(z) - \gamma_1 \Big)\, d\lambda_1 + \int \Big( -U^{\omega_1}(z) + bU^{\omega_2}(z) - \gamma_2 \Big)\, d\lambda_2 +$$
$$+ F(\mathbf{K}) \leq F(\mathbf{K}). \tag{16}$$

В первом неравенстве в (16) равенство достигается тогда и только тогда, когда с точностью до множества нулевой емкости $S_{\overline{\omega}(\mathbf{K})} \subseteq S^{\overline{\lambda}}$ (так как $\omega_i(\mathbb{C} \setminus S^{\lambda_i}) = 0 \iff S_{\omega_i(\mathbf{K})} \subseteq S^{\lambda_i}$), а во втором – тогда и только тогда, когда

$$\int \Big( aU^{\omega_1}(z) - U^{\omega_2}(z) - \gamma_1 \Big)\, d\lambda_1 + \int \Big( -U^{\omega_1}(z) + bU^{\omega_2}(z) - \gamma_2 \Big)\, d\lambda_2 = 0. \tag{17}$$

Все интегралы в (17) меньше либо равны нулю, рассмотрим только первый из них

$$0 = \int \Big( aU^{\omega_1}(z) - U^{\omega_2}(z) - \gamma_1 \Big)\, d\lambda_1 =$$
$$= \int_{S_{\omega_1}(\mathbf{K})} \Big( aU^{\omega_1}(z) - U^{\omega_2}(z) - \gamma_1 \Big)\, d\lambda_1 + \int_{\mathbb{C} \setminus S_{\omega_1}(\mathbf{K})} \Big( aU^{\omega_1}(z) - U^{\omega_2}(z) - \gamma_1 \Big)\, d\lambda_1.$$

Первый интеграл в последнем равенстве равен нулю, второй равен нулю только если $S_{\lambda_1} \subseteq K_1$. Теорема доказана. $\square$

# Список литературы


[1] A.I. Aptekarev, M.A. Lapik, V.G. Lysov *Direct and inverse problems for vector logarithmic potentials with e[ternal fields*, Anal. Math. Phys.,9:3 (2019), 919-935.

[2] B. Beckermann, V. Kalyagin, A. Matos, F. Wielonsky *Equilibrium problems for Vector Potentials with Semidefinite Interaction Matrices and Constraind Masses*, Constr. Approx.,37, (2013), 101-134.

[3] *В.С. Буяров, Е А. Рахманов*, *О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси*, Мат. сб. N5 190(1999), 11-22.

[4] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов*, *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов*, Мат. сб. 1984 Т.125(167), N1, с.117-127.

[5] *А.А. Гончар, Е.А. Рахманов*, *О задаче равновесия для векторных потенциалов,* УМН, Том 40, вып. 4, 1985.

[6] М.А. Лапик, *О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия*, Матем. сб.,197:8, (2006), 101-118.

[7] М.А. Лапик, *О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле*, Матем. сб.,206:2, (2015), 101-118.

[8] *Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин*, *Рациональные аппроксимации и ортогональность,* Москва "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. 1988.

[9] *H.N. Maskar, E.B. Saff*, *Where does the sup norm of a weighted polynomial live?* Constr. Approx(1985), 1, 71-91.

[10] *E.B. Saff, V. Totik*, *Logarithmic Potentials with External Fields.* Grundlehren Math. Wiss. 316, Springer, Berlin, 1997.

# Содержание