ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 63 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

К.Е. Городничев, Е.М. Урвачев, С.Е. Куратов

Нелинейное взаимодействие ударной волны с анизотропным энтропийным полем возмущений

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Городничев К.Е., Урвачев Е.М., Куратов С.Е. Нелинейное взаимодействие ударной волны с анизотропным энтропийным полем возмущений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 63. 22 с. EDN: UINHVK
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-63

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К.Е. Городничев, Е.М. Урвачев, С.Е. Куратов

Нелинейное взаимодействие ударной волны с анизотропным энтропийным полем возмущений

Москва — 2025

Городничев К.Е., Урвачев Е.М., Куратов С.Е.

Нелинейное взаимодействие ударной волны с анизотропным энтропийным полем возмущений

С учётом квадратичных поправок к гидродинамическим величинам решена задача о взаимодействии ударной волны с анизотропным энтропийным полем возмущения. Показано, что нелинейные взаимодействия между звуковыми волнами приводят к локализации звуковых возмущений за фронтом ударной волны. Указанный эффект наблюдается в условиях, когда в линейном приближении затухание звука отсутствует. Предложен аналитический подход, позволяющий избежать возникновения секулярных слагаемых при описании взаимодействия звуковых волн с учетом квадратичных поправок.

Ключевые слова: нелинейное взаимодействие, звуковые волны, ударные волны, метод дополнительной фазы

Gorodnichev K.E., Urvachev E.M., Kuratov S.E.

Nonlinear interaction of a shock wave with an anisotropic entropy disturbance field

The nonlinear interaction between a shock wave and an anisotropic entropy disturbance field is investigated with second-order corrections to the hydrodynamic variables taken into account. It is demonstrated that nonlinear coupling between acoustic modes leads to the localization of sound perturbations behind the shock front. This effect occurs under conditions where, in the linear approximation, no acoustic attenuation is present. An analytical framework is developed that eliminates secular terms in the description of acoustic–acoustic interactions when second-order effects are included.

Key words: nonlinear interaction, acoustic modes, shock waves, additional phase method

1. Введение

Исследованию взаимодействия плоских ударных волн с различными полями возмущений в среде за последние пятьдесят лет посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]). В частности, в линейном приближении было рассмотрено взаимодействие ударной волны с звуковыми волнами [2, 11], изотропными полями турбулентной завихренности [8] и возмущениями плотности [9, 12]. Во всех перечисленных случаях за фронтом ударной волны возникают дополнительные к первоначальным полям звуковые и энтропийно-вихревые возмущения.

В цикле работ [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] рассмотрены задачи о временной эволюции различных систем, обладающих возмущениями плотности, при протекании ударно-волновых процессов или наличии ускоренного движения. В линейном приближении было показано, что режим распространения звука в зафронтовой области зависит от угла между осью анизотропии поля возмущения и вектором скорости ударной волны. В случае относительно малых углов θ_0 между осью анизотропии и внутренней нормалью к фронту ударной волны $\mathbf{n}_0$ проекция скорости звуковой волны c_x на ось $Ox \parallel \mathbf{n}_0$ положительная. С ростом θ_0 проекция c_x уменьшается и при $\theta_0 = \theta_0^{**}$ (θ_0^{**} определяется параметрами среды за и перед фронтом ударной волны [13]) становится равной скорости среды. В интервале углов $\theta^{**} < \theta_0$ звуковая волна двигается вслед за ударной. Когда угол θ_0 достигает пороговой величины θ_0^*, проекция скорости c_x сравнивается со скоростью ударной волны. При дальнейшем увеличении угла θ_0 ($\theta_0 > \theta_0^*$) звуковые возмущения за ударной волной описываются поверхностными звуковыми волнами [2]. Как следует из перечисленных результатов, в случае $\theta_0 = \theta_0^*$ скорость звука равна скорости ударной волны и пространственное затухание звуковых возмущений отсутствует. Поэтому амплитуда этих возмущений за фронтом ударной волны должна равняться нулю. Для корректного описания пространственной структуры звукового поля в рассматриваемых условиях необходимо выйти за рамки линейного приближения.

Ниже задача о взаимодействии ударной волны с анизотропным полем возмущения плотности решена с учётом квадратичных поправок к гидродинамическим величинам. В этом приближении гидродинамические величины подчиняются неоднородным волновым уравнениям [21]. Использование стандартной теории возмущений при решении уравнения для давления приводит к возникновению секулярных слагаемых. В работе предложен новый аналитический метод решения уравнений подобного типа. Он основан на обобщении подхода, используемого в теории обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [22], и заключается во введении дополнительной фазы в линейном решении. Используя этот метод, показано, что при $\theta_0 = \theta_0^*$ за фронтом ударной волны существуют затухающие звуковые возмущения.

2. Взаимодействие ударной волны с полем возмущения плотности. Линейное приближение

Рассмотрим столкновение двух полубесконечных пластин, одна из которых покоится (см. рис. 1). В налетающей пластине (ударнике) изначально присутствует пространственно-анизотропное поле возмущения плотности. В результате столкновения в обеих пластинах возникают расходящиеся от контактного разрыва ударные волны.

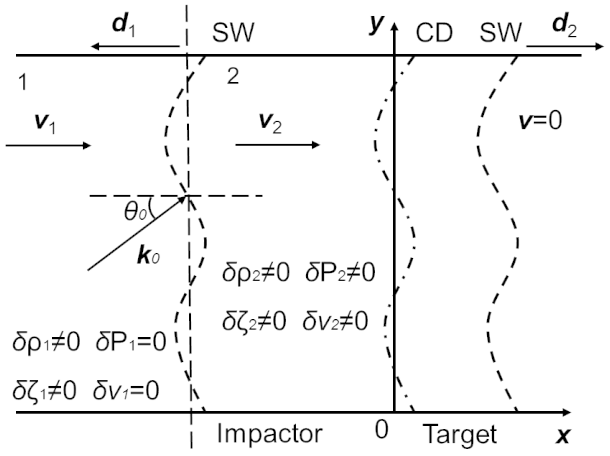

Рис. 1. Постановка задачи

Скорость ударника предполагается достаточно большой (порядка 5 км/с). Поэтому упруго-пластическими свойствами сталкивающихся пластин можно пренебречь и взаимодействие ударной волны с полем возмущения плотности в ударнике описывать с помощью уравнений гидродинамики:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla P=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\mathbf{v}\right)=0, \tag{2}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) предполагает, что движение среды изоэнтропное.

Систему (1)-(3) надо дополнить условиями Рэнкина–Гюгонио на фронте ударной волны [23]:

$$v_{1\tau}=v_{2\tau},\qquad v_{1n}-v_{2n}=\sqrt{\left(P_2-P_1\right)\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)}, \tag{4}$$

$$j^2=\rho_1\rho_2\frac{P_2-P_1}{\rho_2-\rho_1},\qquad \varepsilon_1-\varepsilon_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(P_1+P_2\right), \tag{5}$$

где $v_{1\tau}$, v_{1n} и $v_{2\tau}$, v_{2n} – тангенциальные и нормальные компоненты скорости перед и за фронтом, $j = v_1\rho_1 = v_2\rho_2$ и ε_1, ε_2 – поток вещества и удельная внутренняя энергия по разные стороны ударной волны.

Следуя [24], представим удельную внутреннюю энергию ε в виде суммы $\varepsilon = \varepsilon_{\text{el}} + \zeta$, где ε_{el} – упругая составляющая внутренней энергии, ζ – удельная тепловая энергия. В этом случае уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} - \frac{\Gamma\zeta}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{6}$$

В качестве уравнения состояния среды будем использовать уравнение Ми-Грюнайзена [24] с холодной частью в форме Тэйта-Мурнагана [25]:

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right) + \Gamma\rho\zeta, \tag{7}$$

где ρ_0, c_0 – плотность и скорость звука несжатого («холодного») вещества; ρ – текущая плотность; Γ – коэффициент Грюнайзена; n – константа.

Предположим, что начальное поле возмущения плотности в ударнике описывается выражением

$$\delta\rho_1 = A_{\delta\rho_1}\cos\left(k_{0x}x + k_{0y}y\right), \tag{8}$$

причём $A_{\delta\rho_1}/\rho_1 \equiv \varepsilon \ll 1$. Ось анизотропии для такого возмущения направлена вдоль вектора $\mathbf{k_0}$ (см. рис. 1). Справа на возмущение со скоростью $(\mathbf{d_1} - \mathbf{v_1})$, направленной против оси x ($d_1 - v_1 < 0$), набегает ударная волна. Угол между вектором $\mathbf{k_0}$ и осью Ox равен θ_0 ($\operatorname{tg}\theta_0 = k_{0y}/k_{0x}$). Решение задачи будем искать с использованием разложения в ряд по малости ε:

$$f = f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + ..., \tag{9}$$

где f – любая гидродинамическая функция.

В линейном приближении система (1) – (3) за фронтом ударной волны приобретает вид (см., например, [13])

$$\frac{\partial\delta v_{2x}}{\partial t} + v_2\frac{\partial\delta v_{2x}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\delta P_2}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\delta v_{2y}}{\partial t} + v_2\frac{\partial\delta v_{2y}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\delta P_2}{\partial y}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\delta\rho_2}{\partial t} + v_2\frac{\partial\delta\rho_2}{\partial x} + \rho_2\left(\frac{\partial\delta v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial\delta v_{2y}}{\partial y}\right) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\delta\zeta_2}{\partial t} + v_2\frac{\partial\delta\zeta_2}{\partial x} - \frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial\delta\rho_2}{\partial t} + v_2\frac{\partial\delta\rho_2}{\partial x}\right) = 0, \tag{13}$$

где $\delta\mathbf{v}_2$, δP_2 и $\delta\zeta_2$ – линейные поправки к начальным значениям скорости, давления и внутренней энергии соответственно. Для нахождения возмущений гидродинамических величин в зафронтовой области систему (10) – (13) надо дополнить записанными в линейном приближении условиями Рэнкина–Гюгонио (4), (5) и УРС (7) (подробнее, см., например, [13]).

Решение полученной системы ищется в виде гармонической функции

$$\delta f = A_{\delta f} \cos\left(k_x x + k_y y - \omega t\right), \tag{14}$$

где f – любая гидродинамическая функция. В дальнейшем для удобства будем использовать обозначение

$$\varphi = k_x x + k_y y - \omega t. \tag{15}$$

Согласно [23] решение представимо в виде совокупности звуковых и энтропийно-вихревых волн. После подстановки (14) в (4), (5), (7), (10) – (13) мы получим систему алгебраических уравнений. Аналитические выражения для её решений достаточно громоздки, поэтому в данной работе мы их не приводим.

Наибольший интерес для исследования представляет зависимость проекции волнового вектора звуковой волны в зафронтовой области от начального угла падения. Из (10) – (13) следует, что x-проекция волнового вектора звуковых волн равна:

$$\left(k_x^{(s)}\right)_{\pm} = \frac{k_{0x}(d_1 - v_1)(v_2 - d_1) \pm c_2\sqrt{k_{0x}^2(v_1 - d_1)^2 - \left(c_2^2 - (v_2 - d_1)^2\right)k_{0y}^2}}{c_2^2 - (v_2 - d_1)^2}, \tag{16}$$

а соответствущая частота:

$$\omega^{(s)} = k_x^{(s)} v_2 + c_2\sqrt{(k_x^{(s)})^2 + k_{0y}^2}. \tag{17}$$

Тогда проекция скорости звука на ось x

$$c_{2x} = \frac{d\omega^{(s)}}{dk_x^{(s)}} = v_2 + \frac{k_x^{(s)} c_2}{\sqrt{(k_x^{(s)})^2 + k_{0y}^2}}. \tag{18}$$

Согласно (16) при углах падения, принадлежащих интервалу

$$0 < \theta_0 < \theta_0^{**},\ \theta_0^{**} = \text{arctg}\left(\frac{v_1 - d_1}{c_2}\right), \tag{19}$$

решение $\left(k_x^{(s)}\right)_-$ соответствует «падению» звуковых волн справа на фронт ударной волны для любых значений k_{0x}. Источники звука за фронтом ударной волны, ответственные за возникновение таких волн, отсутствуют. Поэтому

в дальнейшем будем рассматривать звуковое поле с проекцией волнового вектора $\left(k_x^{(s)}\right)_+ \equiv k_x^{(s)}$. В случае $\theta_0 = \theta_0^{**}$ проекция $k_x^{(s)} = 0$ и звуковые волны распространяются параллельно фронту ударной волны.

При больших углах «падения»

$$\theta_0^* < \theta_0 < \frac{\pi}{2}, \tag{20}$$

проекция волнового вектора $k_x^{(s)}$ имеет положительную мнимую часть и, согласно (18), $|c_{2x}| > |d_1|$, из чего следует, что звуковые возмущения описываются поверхностными волнами [2].

Наиболее интересной является область углов

$$\theta_0^{**} < \theta_0 < \theta_0^*,\ \theta_0^* = \text{arctg}\left(\frac{v_1 - d_1}{\sqrt{c_2^2 - (v_2 - d_1)^2}}\right). \tag{21}$$

В этом интервале проекция $k_x^{(s)}$ является отрицательной действительной величиной, мнимая часть $k_x^{(s)}$ равна нулю, и звуковая волна, в отличие от углов падения (19), должна распространяться в сторону фронта ударной волны [13]. В следующем разделе решение системы (1), (2), (4) – (6) найдено в квадратичном приближении, учитывающем взаимодействие звуковых волн между собой. Показано, что учёт нелинейных эффектов приводит к качественному изменению поведения решения в зафронтовой области.

3. Нелинейное взаимодействие звуковых волн

Неоднородные уравнения для квадратичных поправок к гидродинамическим величинам можно получить из системы (1), (2), (4) – (6) с помощью стандартной теории возмущений [21]. Аналогично рассмотрению первого порядка будем предполагать, что возмущения гидродинамических величин в зафронтовой области ударника являются гармоническими функциями, тогда можно записать:

$$\delta f = A_{\delta f} \cos\left(k_x x + k_y y - \omega t\right) + A_{\delta'' f^{(i)}} \cos\left(k_x'' x + k_y'' y - \omega'' t\right), \tag{22}$$

где под f подразумевается любая гидродинамическая переменная, соответствующая звуковым или энтропийно-вихревым волнам. Символом δ обозначаются величины первого порядка малости, δ'' – второго. Величины k_x'', k_y'' и ω'' являются x и y проекциями волнового вектора и частотой для квадратичной поправки соответственно. Отметим, что они не являются малыми величинами.

Тогда во втором порядке разложения по малости система уравнений гидродинамики (1) – (3) запишется в виде

$$C_{11} + C_{12} + C_{13} = 0, \tag{23}$$
$$C_{21} + C_{22} + C_{23} = 0, \tag{24}$$
$$C_{31} + C_{32} + C_{33} = 0, \tag{25}$$
$$C_{41} + C_{42} = 0. \tag{26}$$

Явный вид для коэффициентов C_{ik} представлен в приложении А. Уравнение (23) следует из (1). Уравнение (24) получено из *x*-компоненты уравнения (2) , а (25) – из его *y*-компоненты. Уравнение (26) следует из (3). Слагаемые C_{11}, C_{21}, C_{31}, C_{41} отвечают за взаимодействие звуковых волн между собой, и соответствующие гидродинамические величины второго порядка обозначаются верхним индексом (1). Слагаемые C_{12}, C_{22}, C_{32}, C_{42} отвечают за взаимодействие звуковых волн с энтропийно-вихревыми, и соответствующие гидродинамические величины второго порядка обозначаются верхним индексом (2). Слагаемые C_{13}, C_{23}, C_{33} соответствуют взаимодействию энтропийно-вихревых волн между собой, и соответствующие гидродинамические величины второго порядка обозначаются верхним индексом (3). При записи (26) учтено, что слагаемые, соответствующие самодействию энтропийной волны, сократятся.

Из анализа уравнений, представленных в приложении А, следует, что учёт источников второго (звук–энтропия) и третьего (энтропия–энтропия) типов не приводит к качественному изменению в решении. Для источника первого (звук–звук) типа ситуация отличается. Как следует из дальнейшего рассмотрения, учёт взаимодействия звуковой волны с самой собой может приводить к качественному изменению решения (появлению затухания) при определённых значениях углов θ_0.

4. Метод дополнительной фазы

Из уравнений (23) – (26) следует, что для первого типа взаимодействия (звук–звук) уравнения в зафронтовой области имеют вид

$$\frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(1)}}{\partial x}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(1)}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(1)}}{\partial y}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial x} + \rho_2\left(\frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(1)}}{\partial y}\right) =$$
$$= A_{\delta\rho_2}^2\left(\omega^{(s)} - v_2 k_x^{(s)}\right)\sin 2\varphi, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \delta'' \zeta_2^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \zeta_2^{(1)}}{\partial x} - \frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{A_{\delta\rho_2}^2 \Gamma\zeta_2}{2\rho_2^2}\left(\omega^{(s)} - v_{2x}k_x^{(s)}\right)(1-\Gamma)\sin 2\varphi, \tag{30}$$

где $\delta''\mathbf{v}_2$, $\delta''\rho_2$, $\delta''\zeta_2$ – квадратичные поправки к скорости, плотности и удельной внутренней энергии соответственно. Правые части уравнений (29) и (30) соответствуют квадрату возмущений гидродинамических величин линейного приближении.

Согласно (27) – (30) уравнение для квадратичной поправки к давлению $\delta'' P_2$ выглядит следующим образом:

$$\hat{F}_1 \delta'' P_2 = \psi\left(\frac{A_{\delta\rho_2}}{\rho_2}\right)^2 \cos 2\varphi, \tag{31}$$

где

$$\psi = -\frac{\left(\omega^{(s)} - k_x^{(s)} v_2\right)^2}{c_2^2}\left[nc_0^2\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^{n-1} + \Gamma(\Gamma+1)^2\zeta_2\right]\rho_2,$$
$$\hat{F}_1 = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 - \left(\frac{v_2}{c_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{v_2}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Поскольку значение удельной внутренней энергии и константы n и Γ – неотрицательные величины, то из выражения (31) для ψ следует, что $\psi > 0$.

Если, следуя стандартной теории возмущений [21], искать решение уравнения (31) в виде плоской волны, то в $\delta'' P_2$ возникнут секулярные (растущие со временем) слагаемые [21]. Аналогичная проблема может возникать при использовании стандартной теории возмущений для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [22]. Метод, позволяющий избежать появления секулярных слагаемых в таких уравнениях, давно известен (см., например, [22]). Обобщим этот метод для решения уравнения (31).

Представим возмущение давления за фронтом ударной волны ΔP_2 в виде суммы

$$\Delta P_2 = \delta\tilde{P}_2 + \delta''\tilde{P}_2. \tag{32}$$

Первое слагаемое в (32) отличается от поправки первого порядка к давлению δP_2,

$$\hat{F}_1 \delta P_2 = 0,\ \delta P_2 = A_{\delta P_2} \cos\left(\varphi(x,y,t)\right),\ \varphi(x,y,t) = k_x^{(s)} x + k_{0y} y - \omega^{(s)} t, \quad (33)$$

фазовой поправкой

$$\delta \tilde{P}_2 = A_{\delta P_2} \cos\left(\varphi + g(x,y,t)\right). \quad (34)$$

Частота $\omega^{(s)}$ в (33) подчиняется дисперсионному уравнению (17), а амплитуда $A_{\delta P_2}$ определяется из решения системы (10) – (13), дополненной линеаризованными граничными условиями (4), (5) и УРС (7), с начальным условием (14) [18]. Величина g выбирается таким образом, чтобы функция $\delta \tilde{P}_2$ удовлетворяла неоднородному уравнению (31)

$$\hat{F}_1 \delta \tilde{P}_2 = \psi \left(\frac{A_{\delta \rho_2}}{\rho_2} \right)^2 \cos 2\varphi. \quad (35)$$

Функция $\delta'' \tilde{P}_2$ в этом случае подчиняется однородному волновому уравнению

$$\hat{F}_1 \delta'' \tilde{P}_2 = 0 \quad (36)$$

и секулярных слагаемых в квадратичной поправке к давлению не возникает.

Следуя [22], предполагаем, что дополнительная фаза g мала по сравнению с величиной φ (34), $|g| \ll |\varphi|$. Граничное условие к уравнению (35) на фронте ударной волны имеет вид

$$g(d_1 t, y, t) = 0. \quad (37)$$

Для нахождения квадратичных поправок к скорости, плотности и удельной энергии (а также величины $\delta'' \tilde{P}_2$) к системе (27) – (30) надо добавить уравнения, учитывающие взаимодействие энтропийно-вихревых волн между собой и с звуковыми волнами (см. приложение А). Решения этих неоднородных уравнений не содержат секулярных слагаемых. Поэтому искомые гидродинамические величины удаётся вычислить в рамках стандартной теории возмущений [21].

5. Стандартное определение дополнительной фазы

Используя регулярный способ поиска решения уравнения (35), получим следующее решение, содержащее секулярные слагаемые:

$$\Delta P_2 = A_{\delta P_2} \left[\cos\varphi + \alpha \left(x - d_1 t \right) \cos\varphi \sin\varphi \right] + A_{\delta'' P_2} \cos 2\varphi. \quad (38)$$

Поскольку при поиске решения используется разложение по малости, то полученный секулярный член является не чем иным, как первым слагаемым при

разложении в ряд Тейлора некоторой функции. Тогда согласно [22] для поправки к фазе можем использовать выражение

$$g(x,y,t) = -\alpha(x - d_1 t)\cos\varphi,$$
$$\alpha = \frac{\psi}{2\rho_2\left[(\omega - k_x v_2)(v_2 - d_1) + k_x c_2^2\right]}\frac{A_{\delta\rho_2}}{\rho_2}. \qquad (39)$$

Отметим, что подобное выражение для фазы звуковой волны при учёте нелинейных взаимодействий для звуковых волн представлено в [26].

Следовательно, взаимодействие звуковой волны с самой собой приводит к появлению поправки в её фазе:

$$\delta\tilde{P}_2 = A_{\delta P_2}\cos\left(\varphi - \alpha\,(x - d_1 t)\cos\varphi\right). \qquad (40)$$

Ситуация изменяется, если $\theta_0 \to \theta_0^*$. В этом случае выражение в квадратных скобках в знаменателе (39) стремится к нулю.

6. Дополнительная фаза вблизи порога возникновения поверхностных волн

Исследуем пространственную структуру поля возмущений давления за фронтом ударной волны вблизи порога возникновения поверхностных волн, т.е. при $|\theta_0^* - \theta_0| \ll \theta_0^*$. Будем предполагать, что вариация угла θ_0 происходит только за счёт увеличения x-проекции начального волнового вектора k_{0x} ($k_{0y} = \mathrm{const}$).

В рассматриваемом случае из регулярного способа поиска решения для уравнения (35) следует

$$\Delta\tilde{P}_2 = \tilde{A}_{\delta P_2}\left[\cos\varphi + \chi\,(x - d_1 t)\cos\varphi\sin\varphi + \mu\,(x - d_1 t)^2\cos 2\varphi\right] +$$
$$+\tilde{A}_{\delta'' P_2}\cos 2\varphi. \qquad (41)$$

Появление дополнительного слагаемого в (41) относительно выражения (39) объясняется следующими соображениями. Поскольку при $\theta_0 \to \theta_0^*$ выражение в знаменателе (39) стремится к нулю, то при подстановке (41) в (35) вклад от всех слагаемых, пропорциональных $(x - d_1 t)$, будет также стремиться к нулю. Следовательно, для того чтобы (41) было решением (35), необходимо учесть также слагаемое, пропорциональное $(x - d_1 t)^2$ с коэффициентом $\mu \sim \varepsilon$. Более высокие степени для $(x - d_1 t)$ нет необходимости рассматривать, т.к. в исследуемое уравнение входят производные не выше второго порядка.

В рассматриваемой области для значения x-проекции волнового вектора

звуковой волны в зафронтовой области и поправки к нему справедливо

$$\kappa \equiv k_x^{(s)}(\theta_0^*) = -\frac{v_2 - d_1}{\sqrt{c_2^2 - (d_1 - v_2)^2}} k_{0y},$$
$$\delta\kappa = k_x^{(s)} - \kappa = c_2 \sqrt{2\frac{v_1 - d_1}{\left(c_2^2 - (v_2 - d_1)^2\right)^{3/2}} \frac{\delta k_{0x}}{k_{0y}}}\, k_{0y}. \qquad (42)$$

Следовательно, область применимости решения (39) $\delta k_{0x} \gtrsim k_{0x}^*$. Вне этой области порядок малости величины α будет превышать ε.

Отметим также, что в исследуемой области значение проекции скорости звука на ось x c_{2x} близко к скорости ударной волны

$$c_{2x} = d_1 + \frac{c_2 k_{0y}^2}{\left(\kappa^2 + k_{0y}^2\right)^{3/2}} \delta\kappa, \qquad (43)$$

а в точке $\theta_0 = \theta_0^*$ строго равна ей. Следовательно, область присутствия звуковой волны должна быть ограничена.

В общем случае поправка к фазе, обусловленная нелинейными взаимодействиями, имеет достаточно сложную структуру (см., например, [26]), поэтому определение её точной функциональной зависимости представляет из себя сложную, часто неразрешимую, задачу. По этой причине восстановить её полную функциональную зависимость с использованием первых порядков теории возмущений невозможно. Но можно обнаружить появление качественных изменений в решении, что и продемонстрировано в данном разделе.

Поиск решения в рассматриваемой области начнём с рассмотрения случая $\theta = \theta_0^*$. Далее исследуем, как изменяется полученное решение при удалении от точки θ_0^*. В случае $\theta_0 = \theta_0^*$ знаменатель выражения (39) строго равен нулю, и решение (41) необходимо рассматривать при $k_x^{(s)} = \kappa$. Тогда величина $\varphi \to \varphi^* = \kappa x + k_y y - \Omega t$, где согласно (17) $\Omega = \kappa v_2 + c_2\sqrt{\kappa^2 + k_{0y}^2}$.

В этом случае в поправке фазы присутствуют слагаемые $\sim \sqrt{\varepsilon}$, и поэтому необходимо учесть наличие поправки в фазе самой поправки (см. (40)). Кроме этого, должны присутствовать члены, соответствующие слагаемому $\chi(x - d_1 t)^2$ в (41). В итоге для $\delta\hat{P}_2$ можно записать

$$\delta\tilde{P}_2 = A_{\delta P_2} \cos\left\{\varphi^* + \delta\varphi^*\right\} e^{-\gamma^*(x - d_1 t)}, \qquad (44)$$
$$\delta\varphi^* = \delta\kappa^*(x - d_1 t) + \Psi(x, y, t) - \alpha^*(x - d_1 t) \times$$
$$\times \cos\left\{\varphi^* + \delta\kappa^*(x - d_1 t) + \Psi(x, y, t) - \alpha^*(x - d_1 t)\cos\varphi^*\right\} e^{-\gamma^*(x - d_1 t)},$$
$$\Psi(x, y, t) = \beta_1^*(x - d_1 t)^2 + \beta_2^*(x - d_1 t)^2 \cos\varphi^* + \beta_3^*(x - d_1 t)^2 \cos\varphi^* \sin\varphi^*.$$

Здесь $\delta\kappa^*$, α^*, γ^*, β_1^*, β_2^*, β_3^* – значения соответствующих величин при $\theta_0 = \theta_0^*$. Далее подробно рассмотрим необходимость присутствия каждого из слагаемых в $\delta\tilde{P}_2$.

С учётом квадратичного порядка разложения в ряд по $\delta\varphi^*$ выражение (44) должно перейти в (41). Для этого необходимо учесть в $\delta\varphi^*$ слагаемое $\Psi(x, y, t) \sim \varepsilon$. Как уже упоминалось выше, появление этого слагаемого связано с невозможностью определения точного вида функциональной зависимости для гидродинамических величин без нахождения всех членов ряда разложения по $\delta\varphi^*$.

Отметим также, что из разложения (44) в ряд следует, что $\mu \sim \delta\kappa^*\alpha^* \sim \varepsilon$. Следовательно, предполагая, что порядки малости $\delta\kappa^*$ и α^* одинаковы, получим

$$\delta\kappa^* \sim \alpha^* \sim \sqrt{\varepsilon}. \tag{45}$$

Необходимость присутствия затухающей экспоненты в (44) объясняется следующими соображениями. Из разложения в ряд функции $\cos(\varphi^* + \delta\varphi^*)$ с точностью до квадратичных слагаемых следует, что в качестве множителей при $\cos\varphi^*$ могут выступать только слагаемые из $\delta\varphi^*$, порядок малости которых не превышает $\sqrt{\varepsilon}$. Из условия $\Psi(x, y, t) \sim \varepsilon$ следует, что слагаемые, входящие в данную функцию, могут присутствовать только в виде множителя перед $\sin\varphi^*$. Это означает, что в итоговом выражении для ΔP_2 слагаемые второго порядка малости, пропорциональные $\cos\varphi^*$, не могут взаимно уничтожаться ни с каким слагаемым функции $\Psi(x, y, t)$. Для решения данной проблемы необходимо учесть, что в общем случае поправка к фазе может содержать мнимую часть. Наличие мнимой части в фазе приводит к появлению затухающей экспоненты (растущую отбрасываем).

В итоге, используя разложение по малости в выражение (44), из равенства $\Delta\tilde{P}_2 = \delta\tilde{P}_2$ получим

$$\begin{aligned} &\beta_1^* = \delta\kappa^*\gamma^*,\ \beta_2 = -2\alpha^*\gamma^*,\ \beta_3^* = (\alpha^*)^2/2, \\ &(\gamma^*)^2 = (\delta\kappa^*)^2 + (\alpha^*)^2,\ \mu^* = \alpha^*\delta\kappa^*. \end{aligned} \tag{46}$$

Из (45) и (35) следует, что:

$$\gamma^* \sim \sqrt{\frac{\psi A_{\delta P_2}}{c_2^2\rho_2^2\left[(d_1 - v_2)^2 - c_2^2\right]}}. \tag{47}$$

Поскольку $c_2 > (d_1 - v_2)$ (см., например, [23]) и $\psi < 0$ (см. (31)), то γ^* – действительное число. Из (45) и (46) следует, что $\alpha^* \sim \delta\kappa^* \sim \gamma^*$, следовательно, полученное решение справедливо для α^* и $\delta\kappa^*$.

При удалении от точки θ_0^* в фазе возмущения необходимо дополнительно учесть изменение проекции волнового вектора $k_x^{(s)} = \kappa + \delta\kappa$ и частоты $\omega^{(s)} = \Omega + \delta\Omega$. Отметим, что поправка $\sim \delta\kappa^*$, полученная при $\theta_0 = \theta_0^*$, сохранится и при $\theta_0 \neq \theta_0^*$. Следовательно, решение (44) можно распространить на ε окрестность точки θ_0^*, поскольку в ней величина $\delta\kappa < \delta\kappa^*$.

При этом в полученном решении для $\delta\tilde{P}$ (см. (44)) необходимо учитывать, что $\varphi \to \varphi^*$, $\alpha^* \to \alpha(\delta\kappa)$, $\gamma^* \to \gamma(\delta\kappa)$, $\beta_1^* \to \beta_1(\delta\kappa)$, $\beta_2^* \to \beta_2(\delta\kappa)$, $\beta_3^* \to \beta_3(\delta\kappa)$. Также отметим, что выражение (39) с учётом (45) и $k_x^{(s)} = \kappa + \delta\kappa + \delta\kappa^*$ сводится к (47) при приближении значения θ_0 к θ_0^*.

Наличие поправки $\delta\kappa^*(x - d_1 t)$ в фазе приводит к тому, что при $\theta_0 \to \theta_0^*$ не происходит бесконечного роста коэффициента α (см. (39)). Предполагая, что $\gamma \sim \alpha$, получим следующее выражение для γ в области $\theta_0 \gtrsim \theta_0^*$ ($k_x = \kappa + \delta\kappa$):

$$\gamma = D \frac{\psi A_{\delta P_2}}{c_2^2 \rho_2^2 \left[(d_1 - v_2)^2 - c_2^2 \right] (\delta\kappa^* + \delta\kappa)}, \tag{48}$$

где D – некоторая константа. Значение D можно определить, например, путем проведения численного моделирования.

Для связи выражения (41) с (38) необходимо, чтобы при приближении углов падения θ_0 к θ_0^{**} величинами $\delta\kappa$, β_1, β_2, β_3 можно было пренебречь в рамках рассмотрения второго порядка малости. Данное предположение также согласуется с фактом ослабления затухания при приближении значения угла θ_0 к величине θ_0^{**}.

Отметим, что при $\delta\kappa = 0$ ($\theta_0 = \theta_0^*$) выражение (48) совпадает с (47), а при увеличении значения θ_0 с учётом разложения для волнового вектора переходит в выражение (39). Также наблюдается уменьшение γ и, как следствие, затухания при приближении значения θ_0 к θ_0^{**}.

7. Заключение

В работе в квадратичном приближении исследовано взаимодействие ударной волны с анизотропным полем возмущения плотности. Для решения возникающих в этом приближении неоднородных уравнений предложен новый аналитический метод, позволяющий избежать возникновения секулярных (нарастающих со временем) слагаемых. Этот метод является обобщением подхода, используемого в теории обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [22]. Он заключается во введении дополнительной фазы в решение линейного приближения. С использованием этого метода получено, что при определённых углах «набегания» ударной волны на пространственно-анизотропное поле возмущений плотности за её фронтом возникает затухающее звуковое поле, которое не описывается поверхностными волнами.

A. Приложение

Коэффициенты в уравнениях (23)–(23) имеют вид

$$C_{11} = \frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial t} + \rho_2 \bigtriangledown \delta'' \mathbf{v}_2^{(1)} + \mathbf{v}_2(\bigtriangledown \delta'' \rho_2^{(1)}) + \delta\rho_2^{(s)} \bigtriangledown \delta \mathbf{v}_2^{(s)} + \\ + \delta \mathbf{v}_2^{(s)}(\bigtriangledown \delta \rho_2^{(s)}), \tag{49}$$

$$C_{21} = \frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(1)}}{\partial x} + \delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(s)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(s)}}{\partial y} - \\ - \frac{\delta\rho_2^{(s)}}{\rho_2^2}\frac{\partial \delta P_2^{(s)}}{\partial x}, \tag{50}$$

$$C_{31} = \frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(1)}}{\partial y} + \delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(s)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(s)}}{\partial y} - \\ - \frac{\delta\rho_2^{(s)}}{\rho_2^2}\frac{\partial \delta P_2^{(s)}}{\partial x}, \tag{51}$$

$$C_{41} = \frac{\partial \delta'' \zeta_2^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \zeta_2^{(1)}}{\partial x} - \frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(1)}}{\partial x}\right) - \\ - \frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(\delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta\rho_2^{(s)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta\rho_2^{(s)}}{\partial y}\right) + \left(\delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta\zeta_2^{(s)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta\zeta_2^{(s)}}{\partial y}\right) - \\ - \left(\frac{\Gamma\delta\zeta_2^{(s)}}{\rho_2} - \frac{\Gamma\zeta_2\delta\rho_2^{(s)}}{\rho_2^2}\right)\left(\frac{\partial \delta\rho_2^{(s)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta\rho_2^{(s)}}{\partial x}\right), \tag{52}$$

$$C_{12} = \frac{\partial \delta'' \rho_2^{(2)}}{\partial t} + \rho_2 \bigtriangledown \delta'' \mathbf{v}_2^{(2)} + \mathbf{v}_2(\bigtriangledown \delta'' \rho_2^{(2)}) + \delta\rho_2^{(e)} \bigtriangledown \delta \mathbf{v}_2^{(s)} + \\ + \delta' \mathbf{v}_2^{(e)}(\bigtriangledown \delta \rho_2^{(s)}) + \delta' \mathbf{v}_2^{(s)}(\bigtriangledown \delta \rho_2^{(e)}), \tag{53}$$

$$C_{22} = \frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(2)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(2)}}{\partial x} + \delta' v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(e)}}{\partial x} + \delta v_{2x}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(s)}}{\partial x} + \\ + \delta' v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(e)}}{\partial y} + \delta v_{2y}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(s)}}{\partial y} - \frac{\delta\rho_2^{(e)}}{\rho_2^2}\frac{\partial \delta P_2^{(s)}}{\partial x}, \tag{54}$$

$$C_{32} = \frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(2)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(2)}}{\partial y} + \delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(e)}}{\partial x} + \delta v_{2x}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(s)}}{\partial x} +$$
$$+\delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(e)}}{\partial y} + \delta v_{2y}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(s)}}{\partial y} - \frac{\delta \rho_2^{(e)}}{\rho_2^2}\frac{\partial \delta P_2^{(s)}}{\partial y}, \quad (55)$$

$$C_{42} = \frac{\partial \delta'' \zeta_2^{(2)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \zeta_2^{(2)}}{\partial x} - \frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(2)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' \rho_2^{(2)}}{\partial x}\right) -$$
$$-\frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(\delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta \rho_2^{(e)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta \rho_2^{(e)}}{\partial y}\right) + \left(\delta v_{2x}^{(s)}\frac{\partial \delta \zeta_2^{(e)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(s)}\frac{\partial \delta \zeta_2^{(e)}}{\partial y}\right) -$$
$$-\left(\frac{\Gamma\delta\zeta_2^{(e)}}{\rho_2} - \frac{\Gamma\zeta_2\delta\rho_2^{(e)}}{\rho_2^2}\right)\left(\frac{\partial \delta \rho_2^{(s)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta \rho_2^{(s)}}{\partial x}\right), \quad (56)$$

$$C_{13} = \frac{\partial \delta'' \rho_2^{(3)}}{\partial t} + \rho \bigtriangledown \delta'' \mathbf{v}_2^{(3)} + \mathbf{v}_2(\bigtriangledown \delta'' \rho_2^{(3)}) + \delta\rho_2^{(e)} \bigtriangledown \delta \mathbf{v}_2^{(e)} +$$
$$+\delta \mathbf{v}_2^{(e)} \bigtriangledown \delta\rho_2^{(e)}, \quad (57)$$

$$C_{23} = \frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(3)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2x}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(3)}}{\partial x} + \delta v_{2x}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(e)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2x}^{(e)}}{\partial y}, \quad (58)$$

$$C_{33} = \frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(3)}}{\partial t} + v_{2x}\frac{\partial \delta'' v_{2y}^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \delta'' P_2^{(3)}}{\partial y} + \delta v_{2x}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(e)}}{\partial x} + \delta v_{2y}^{(e)}\frac{\partial \delta v_{2y}^{(e)}}{\partial y}. \quad (59)$$

Используя в (7) разложение до второго порядка включительно, для зафронтовой области получим следующее:

$$\delta'' P_2^{\Sigma} = \left(c_0^2\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^{n-1} + \Gamma\zeta_2\right)\delta''\rho_2^{\Sigma} + \Gamma\rho_2\delta''\zeta_2^{\Sigma} + \frac{(n-1)c_0^2\rho_2^{n-2}}{2\rho_0^{n-1}}\left(\delta\rho_2^{\Sigma}\right)^2 +$$
$$+\Gamma\delta\zeta_2^{\Sigma}\delta\rho_2^{\Sigma}. \quad (60)$$

Здесь и далее верхний индекс Σ в возмущении гидродинамической величины (δf^{Σ}) обозначает следующее выражение $\delta f^{\Sigma} \equiv \delta f^{(s)} + \delta f^{(e)}$.

Взаимодействие звуковых волн между собой подробно изложено в основном тексте статьи, из взаимодействия энтропийно-вихревых волн между собой (57) – (59) следует

$$k_x^{(3)}\delta'' v_{2x}^{(3)} + k_y^{(3)}\delta'' v_{2y}^{(3)} = 0, \quad (61)$$
$$\delta'' P_2^{(3)} = 0, \quad (62)$$

где $k_x^{(3)} = 2k_x^{(e)}$, $k_y^{(3)} = 2k_y$. Из уравнений (53) – (56) для взаимодействия звуковых волн с энтропийно-вихревыми следует

$$\left(v_{2x}k_x^{(2)} - \omega^{(2)}\right)\delta'' v_{2x}^{(2)} + \frac{k_x^{(2)}}{\rho_2}\delta P_2^{(2)} = k_x^{(s)}\frac{\delta\rho_2^{(e)}\delta P_2}{\rho_2^2} - \\ -\frac{(\omega^{(s)} - k_x^{(s)}v_{2x})\delta P_2\delta v_{2x}^{(s)}}{\rho_2 c_2^2}, \tag{63}$$

$$\left(v_{2x}k_x^{(2)} - \omega^{(2)}\right)\delta'' v_{2y}^{(2)} + \frac{k_y^{(2)}}{\rho_2}\delta'' P_2^{(2)} = \\ = -\left(k_x^{(s)}\delta v_{2x}^{(e)} + k_y\delta v_{2y}^{(e)}\right)\delta v_{2y}^{(s)} - \left(k_x^{(e)}\delta v_{2x}^{(s)} + k_y\delta v_{2y}^{(s)}\right)\delta v_{2y}^{(e)}, \tag{64}$$

$$\left(v_{2x}k_x^{(2)} - \omega^{(2)}\right)\delta''\rho_2^{(2)} + \rho_2\left(\kappa_x^{(2)}\delta'' v_{2x}^{(2)} + \kappa_y^{(2)}\delta'' v_{2y}^{(2)}\right) = \\ = \frac{\omega^{(s)} - v_{2x}k_x^{(s)}}{\rho_2 c_2^2}\,\delta\rho_2^{(e)}\delta P_2 - \delta\rho_2^{(e)}\left(k_x^{(e)}\delta v_{2x}^{(s)} - k_y\delta v_{2y}^{(s)}\right) - \\ -\delta\rho_2^{(s)}\left(k_x^{(s)}\delta v_{2x}^{(e)} - k_y\delta v_{2y}^{(e)}\right), \tag{65}$$

$$\left(v_{2x}k_x^{(2)} - \omega^{(2)}\right)\delta''\zeta_2^{(2)} - \frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left(v_{2x}k_x^{(2)} - \omega^{(2)}\right)\delta''\rho_2^{(2)} = \\ = \left(k_x^{(e)}\delta v_{2x}^{(s)} + k_y\delta v_{2y}^{(s)}\right)\delta\zeta_2^{(e)} - \\ -\frac{\Gamma\zeta_2}{\rho_2}\left[\delta\rho^{(e)}\left(k_x^{(e)}\delta v_{2x}^{(s)} + k_y\delta v_{2y}^{(s)}\right) - \left(\omega^{(s)} - v_{2x}k_x^{(s)}\right)\left(\frac{\delta\zeta_2^{(e)}}{\zeta_2} - \frac{\delta\rho_2^{(e)}}{\rho_2}\right)\delta\rho_2^{(s)}\right]. \tag{66}$$

Отметим, что для координаты фронта ударной волны (УВ) $x_{\rm sw} = d_1 t$ (d_1 – скорость фронта УВ). Для дальнейших вычислений нам понадобятся выражения для касательного и нормального вектора к поверхности фронта УВ. Возмущение фронта УВ можно представить в виде $\xi = A_{\delta\xi}\exp\{i\varphi_\xi\} + A_{\delta''\xi}\exp\{i\varphi_\xi^{''}\}$, где использованы обозначения $\varphi_\xi = k_y y - \omega_\xi t$, $\varphi_\xi = 2k_y y - \omega_\xi^{''} t$. Тогда для касательного вектора $\mathbf{t}$ ($|\mathbf{t}| = 1$) и нормального $\mathbf{n}$ ($|\mathbf{n}| = 1$) можно записать

$$\mathbf{t} = \left\{ik_y A_{\delta\xi}e^{\varphi_\xi} + 2ik_y A_{\delta''\xi}e^{\varphi_\xi^{''}};\, 1 + \frac{1}{2}\left(k_y A_{\delta\xi}e^{\varphi_\xi}\right)^2\right\}, \tag{67}$$

$$\mathbf{n} = \left\{1 + \frac{1}{2}\left(k_y A_{\delta\xi}e^{\varphi_\xi}\right)^2;\, -ik_y A_{\delta\xi}e^{\varphi_\xi} - 2ik_y A_{\delta''\xi}e^{\varphi_\xi^{''}}\right\}. \tag{68}$$

С учетом вышесказанного во втором порядке условия Рэнкина-Гюгонио выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta'' v_{1y} - \delta'' v_{2y}^{\Sigma}}{v_{1x} - v_{2x}} + i\kappa_y \delta'' \xi = ik_y \frac{\delta v_{2x}^{\Sigma} - \delta v_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}} \delta\xi, \tag{69}$$

$$\begin{aligned} &2\frac{\delta'' v_{2x}^{\Sigma} - \delta'' v_{1x}}{v_{2x} - v_{1x}} - \frac{\delta'' P_2^{\Sigma} - \delta'' P_1}{P_2 - P_1} - \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta''\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta''\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\delta P_2 - \delta P_1}{P_2 - P_1}\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} - (\delta\xi)^2 k_y^2 + \frac{2ik_y\delta\xi(\delta v_{1y} - \delta v_{2y}^{\Sigma})}{v_{1x} - v_{2x}} - \\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{\delta P_2 - \delta P_1}{P_2 - P_1}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1}\delta\rho_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\delta\rho_2^{\Sigma}}{\rho_2 - \rho_1}\right)^2 - \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 - \frac{\rho_1}{\rho_2^2}\left(\delta\rho_2^{\Sigma}\right)^2}{\rho_2 - \rho_1}, \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} &\delta''\zeta_2^{\Sigma} - \delta''\zeta_1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left(\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^n - 1\right)\frac{\delta''\rho_2^{\Sigma}}{\rho_2^2} - \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^n - 1\right)\frac{\delta''\rho_1}{\rho_1^2} - \\ &-\frac{P_1 + P_2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\left[\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta''\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta''\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} + \frac{\delta'' P_1 + \delta'' P_2^{\Sigma}}{P_1 + P_2}\right] = \\ &= \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left(\frac{n-2}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^n + 1\right)\frac{\delta\rho_1^2}{\rho_1^3} - \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left(\frac{n-2}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^n + 1\right)\frac{(\delta\rho_2^{\Sigma})^2}{\rho_2^3} + \\ &+\frac{P_1 + P_2}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 - \frac{\rho_1}{\rho_2^2}\left(\delta\rho_2^{\Sigma}\right)^2}{\rho_2 - \rho_1} + \frac{\delta P_1 + \delta P_2}{P_1 + P_2}\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\right), \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2\delta''\rho_1}{\rho_1} + \frac{2i\omega_{\xi}''\delta''\xi}{v_{1x} - d_{1x}} - \frac{\delta'' P_2^{\Sigma} - \delta'' P_1}{P_2 - P_1} + \frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta''\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta''\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2ik_y\delta v_{2y}^{\Sigma}\delta\xi}{v_{1x} - d_{1x}} + \\ &+\frac{d_{1x}(\delta\xi)^2 k_y^2}{v_{1x} - d_{1x}} - \frac{v_{1x}k_y^2(\delta\xi)^2}{v_{1x} - d_{1x}} - \frac{\delta P_2 - \delta P_1}{2(P_2 - P_1)}\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{2\delta\rho_1(\delta v_{1x} - i\omega_{\xi}\delta\xi)}{\rho_1(v_{1x} - d_{1x})} - \\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{\delta P_2 - \delta P_1}{P_2 - P_1}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\frac{\rho_1}{\rho_2}\delta\rho_2^{\Sigma} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\right)^2 - \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1}(\delta\rho_1)^2 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\delta\rho_2^{\Sigma}\right)^2}{\rho_2 - \rho_1}. \end{aligned} \tag{72}$$

Здесь использовано выражение для удельной «холодной» энергии во втором порядке в зафронтовой области:

$$\delta''\varepsilon_{\text{c}}^{\Sigma} = \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left(\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^n - 1\right)\frac{\delta''\rho_2^{\Sigma}}{\rho_2^2} + \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left[\frac{n-1}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)^n + 1\right]\frac{\left(\delta\rho_2^{\Sigma}\right)^2}{\rho_2^3}$$

и обозначение $\delta'' f^{\Sigma} = \delta'' f^{(1)} + \delta'' f^{(2)} + \delta'' f^{(3)}$, где f – любая гидродинамическая величина.

Отметим, что рассмотрение взаимодействия звуковых волн с энтропийно-вихревыми приводит к системе уравнений (63) – (67), следующей из уравнений гидродинамики. Дополняя её УРСом (60), можно определить соответствующие амплитуды возмущений второго порядка без использования условий Рэнкина–Гюгонио. Для нахождения амплитуд возмущений, обусловленных взаимодействием звуковых или энтропийно-вихревых волн между собой, необходимо совместно рассматривать соответствующие гидродинамические уравнения (27) – (30), (61), (62), условия Рэнкина–Гюгонио (69) – (72) и УРС (60).

Список литературы

[1] *Diakov S.V.* Ob ustoichivosti udarnykh voln // *Zh. Eksperim. Teor. Fiz.* — 1954. — Vol. 27, no. 3(9). — P. 288 [in Russian].

[2] *Kontorovich M.I.* Otrazenie i prelomlenie zvuka udarnoy volnoy // *Zh. Eksperim. Teor. Fiz.* — 1959. — Vol. 3. — P. 314 [in Russian].

[3] *Kuznetsov N.M.* Stability of shock waves // *Soviet Physics Uspekhi*. — 1989. — Vol. 32, no. 11. — P. 993.

[4] *Keller J., Merzkirch W.* Interaction of a normal shock wave with a compressible turbulent flow // *Mineralium Deposita*. — 1994. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 241–248.

[5] *Yang Y., Zhang Q., Sharp D. H.* Small amplitude theory of Richtmyer–Meshkov instability // *Physics of Fluids*. — 1994. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 1856–1873.

[6] *Wouchuk J.G.* Growth rate of the linear Richtmyer-Meshkov instability when a shock is reflected // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 63, no. 5. — P. 056303.

[7] Shock front distortion and Richtmyer-Meshkov-type growth caused by a small preshock nonuniformity / A.L. Velikovich, J.G. Wouchuk, C. Huete Ruiz de Lira et al. // *Physics of plasmas*. — 2007. — Vol. 14, no. 7.

[8] *Wouchuk J.G., Huete Ruiz de Lira C., Velikovich A.L.* Analytical linear theory for the interaction of a planar shock wave with an isotropic turbulent vorticity field // *Physical Review E — Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2009. — Vol. 79, no. 6. — P. 066315.

[9] *Huete Ruiz de Lira C., Velikovich A.L., Wouchuk J.G.* Analytical linear theory for the interaction of a planar shock wave with a two-or three-dimensional random isotropic density field // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 83, no. 5. — P. 056320.

[10] Richtmyer–Meshkov instability: theory of linear and nonlinear evolution / K. Nishihara, J. G. Wouchuk, C. Matsuoka et al. // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2010. — Vol. 368, no. 1916. — Pp. 1769–1807.

[11] *Huete Ruiz de Lira C., Wouchuk J.G., Velikovich A.L.* Analytical linear theory for the interaction of a planar shock wave with a two-or three-dimensional random isotropic acoustic wave field // *Physical Review E — Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2012. — Vol. 85, no. 2. — P. 026312.

[12] Analytical linear theory for the shock and re-shock of isotropic density inhomogeneities / C. Huete Ruiz de Lira, J.G. Wouchuk, B. Canaud, A.L. Velikovich // *Journal of fluid mechanics*. — 2012. — Vol. 700. — Pp. 214–245.

[13] *Gorodnichev K.E., Kuratov S.E.* Razvitie vozmusheni v sisteme stalki-vayushikhsya plastin // *VANT. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniia zadach matematicheskoi fiziki*. — 2013. — no. 2. — Pp. 37–47 [in Russian].

[14] *Gorodnichev K.E., Kuratov S.E., Serezhkin A.A.* Evolution of Perturbations of Shock Wave Fronts and a Contact Surface at the Decay of Discontinuity at the Interface Between Two Media // *Nuclear physics and engineering*. — 2015. — Vol. 6, no. 3-4. — Pp. 158–158 [in Russian].

[15] Hydrodynamic instability at the interface between colliding inhomogeneous mediums / K. Gorodnichev, S. Kuratov, P. Zakharov, E. Gorodnichev // Journal of Physics: Conference Series / IOP Publishing. — Vol. 941. — 2017. — P. 012051.

[16] Disturbance evolution in the shock impact of a density non-uniform medium / K.E. Gorodnichev, S.E. Kuratov, I.S. Menshov et al. // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2017. — Vol. 29, no. 3. — Pp. 95–112 [in Russian].

[17] Theoretical and numerical analysis of density perturbation development induced by high velocity impact / K. Gorodnichev, P. Zakharov, S. Kuratov et al. // *Physics of Fluids*. — 2020. — Vol. 32, no. 3.

[18] Influence of Density Perturbations on the Stability of the Inner Ice Boundary in ICF Targets / K.E. Gorodnichev, S.I. Glazyrin, D.K. Ilnitsky, S.E. Kuratov // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2022. — Vol. 85, no. 11. — Pp. 1793–1801.

[19] The interface instability development induced by the bulk density perturbations in accelerated media / K.E. Gorodnichev, P.P. Zakharov, S.I. Glazyrin, S.E. Kuratov // *Physics of Fluids*. — 2024. — Vol. 36, no. 1.

[20] On the effect of initial internal roughness in ICF targets on their compression / S.I. Glazyrin, P.P. Zakharov, K.E. Gorodnichev, S.E. Kuratov // *Physics of Plasmas*. — 2024. — Vol. 31, no. 6.

[21] *Isakovich M.A.* Obschaya acustika. — M.: Nauka, 1973 [in Russian].

[22] *Nayfeh A.H.* Perturbation methods. — New York: Wiley, 1973.

[23] *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics Fluid Mechanics. — Elsevier, 1987.

[24] *Anderson W.W., Cherne F.J., Zocher M.A.* Material properties under intensive dynamic loading. — Springer Science & Business Media, 2007.

[25] *Murnaghan F.D.* The compressibility of media under extreme pressures // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1944. — Vol. 30, no. 9. — Pp. 244–247.

[26] *Rudenko O.V., Soluyan S.I.* Theoretical foundations of nonlinear acoustics. — 1977.

Оглавление

1 Введение 3
2 Взаимодействие ударной волны с полем возмущения плотности. Линейное приближение 4
3 Нелинейное взаимодействие звуковых волн 7
4 Метод дополнительной фазы 8
5 Стандартное определение дополнительной фазы 10
6 Дополнительная фаза вблизи порога возникновения поверхностных волн 11
7 Заключение 14
A Приложение 15
Список литературы 19