



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 7 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

И.Ю. Калашников, В.М. Чечеткин

Особенности двумерного
самогравитирующего потока
набегающего на массивное
тело

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Калашников И.Ю., Чечеткин В.М. Особенности двумерного самогравитирующего потока набегающего на массивное тело // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 7. 17 с. EDN: [KJEUDL](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-7)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-7>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

И.Ю. Калашников, В.М. Чечеткин

Особенности двумерного самогравитирующего потока,
набегающего на массивное тело

Москва — 2025

Калашников И.Ю., Чечёткин В.М.

Особенности двумерного самогравитирующего потока, набегающего на массивное тело

Исследованы особенности двумерного самогравитирующего потока частиц, набегающего на массивное тело. Рассматривается кинетическое описание системы с использованием уравнения Власова–Пуассона, учитывая как гравитационное поле центрального объекта, так и самогравитацию набегающих частиц. В результате анализа получено выражение для вязкости, обусловленной самогравитацией, которая оказывается пропорциональной квадрату плотности и обратно пропорциональной температуре. Показано, что вязкость, обусловленная самогравитацией, приводит к неньютоновскому поведению среды. На основе полученных результатов решены некоторые астрофизические задачи, такие как одномерная стационарная аккреция изотермического газа и потеря углового момента за счет самогравитации.

Ключевые слова: уравнение Власова–Пуассона, вязкость, аккреция.

Kalashnikov I.Yu., Chechetkin V.M.

Features of a two-dimensional self-gravitating flow incident on a massive body

The features of a two-dimensional self-gravitating flow of particles incident on a massive body are investigated. A kinetic description of the system is considered using the Vlasov-Poisson equation, taking into account both the gravitational field of the central object and the self-gravitation of the incident particles. As a result of the analysis, an expression is obtained for the viscosity due to self-gravitation, which turns out to be proportional to the square of the density and inversely proportional to the temperature. It is shown that the viscosity due to self-gravitation leads to non-Newtonian behavior of the medium. Based on the results obtained, some astrophysical problems are solved, such as one-dimensional stationary accretion of isothermal gas and the loss of angular momentum due to self-gravitation.

Key words: Vlasov-Poisson equation, viscosity, accretion.

1. Введение

Статистическая механика систем с далекодействующими взаимодействиями во многом отличается от более привычных систем с короткодействующими силами из-за того, что большой радиус взаимодействия частиц приводит к невозможности разбить систему на статистически независимые подсистемы [1]. Примеры систем с дальним взаимодействием можно найти в ядерной физике, физике плазмы, теории конденсированных сред и, конечно же, в астрофизике. Поэтому в настоящее время активно разрабатываются подходы для описания подобных систем [2–6].

Среди далекодействующих взаимодействий гравитация, вероятно, является наиболее важным и фундаментальным примером [7, 8]. Однако анализ самогравитирующих систем осложнен расходимостью гравитационной силы на малых расстояниях и отсутствием экранирования на больших. В отличие от электромагнитных сил, где заряды могут экранироваться, гравитационные силы всегда остаются неэкранированными, что делает их весьма сложными для анализа. Кроме того, в таких системах может наблюдаться нарушение стандартных термодинамических пределов, таких как закон больших чисел или центральная предельная теорема. Это связано с тем, что корреляции между частицами в системах с далекодействующими силами могут сохраняться на огромных расстояниях, что приводит к нестандартным статистическим свойствам. Например, в гравитационных системах это может проявляться в форме аномальных распределений скоростей или необычных термодинамических циклов [9].

В этом свете исследование вязкости в системах с далекодействующими взаимодействиями, особенно в самогравитирующих системах, представляется весьма актуальной задачей современной физики. Вязкость, как мера внутреннего трения или сопротивления течению, в таких системах должна иметь уникальные особенности, обусловленные гравитационными силами, которые действуют на всех масштабах. В отличие от систем с короткодействующими силами, где вязкость может быть описана в рамках стандартных кинетических подходов, таких как метод Грэда или метод Чепмена – Энскога (см., напр., [10]), в самогравитирующих системах она требует учета коллективных эффектов.

Например, в протопланетных дисках гравитационная неустойчивость может приводить к образованию спиральных волн плотности, которые, в свою очередь, влияют на эффективную вязкость системы [11]. Эти волны могут переносить момент импульса на большие расстояния, что играет важную роль в эволюции диска. Кроме того, вязкость в таких системах часто определяется не только локальными свойствами среды, но и глобальными характеристиками, такими как общая масса системы или ее угловой момент. Это связано с тем, что даже далекие части системы могут влиять на локальные процессы переноса. Например, в галактиках вязкость может быть обусловлена взаимодействием звезд и темной материи, что приводит к сложным динамическим

процессам, таким как радиальное перемешивание и формирование бароподобных структур [12]. Вязкость занимает важнейшее место в теории аккреции [13], способствуя потере веществом углового момента и, как следствие, его падению на центральный объект.

Можно ожидать, что обусловленная самогравитацией вязкость (в дальнейшем обозначаемая μ) должна быть пропорциональна $G\rho^2$, где G – это гравитационная постоянная, ρ – плотность вещества. Увеличение температуры T разрушает корреляционные связи, поэтому μ должна уменьшаться с ее увеличением. Простейшей подходящей зависимостью является $\mu \propto G\rho^2/T$. Таким образом, обусловленная самогравитацией вязкость может играть значительную роль лишь для достаточно плотного и холодного вещества. В наиболее часто встречающихся разделах астрофизики температура барионного вещества обычно весьма велика, и доминировать должна вязкость связанная, с короткодействующими силами, которая пропорциональна $T^{2/3}$. Однако для гипотетической темной материи именно гравитационная вязкость должна играть главную роль.

Темная материя, которая не взаимодействует с электромагнитным излучением, но проявляет себя через гравитационные эффекты, может захватываться гравитационным полем компактных объектов. Поскольку для ее аккреции отсутствует предел Эдингтона, она может быть очень эффективной [14–16]. При этом нет другого механизма эффективного отвода углового момента кроме как благодаря самогравитации, т.к. слабое взаимодействие, которому должны быть подвержены частицы темной материи, становится существенным только при очень больших плотностях.

Чтобы получить выражение для вязкости, обусловленной самогравитацией, мы рассмотрели двумерное уравнение Власова – Пуассона, описывающее поток частиц в окрестности компактного объекта (см. Разд. 2.1). По результатам его решения в Разд. 2.4 сделано заключение о конкретном виде вязкости. В Разд. 3 приведено индуктивное обобщение полученной формулы и решены некоторые простые астрофизические задачи.

2. Кинетическое рассмотрение

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим однородный поток частиц массой m , набегающий из бесконечности со средней скоростью \mathbf{v}_0 на центральное неподвижное тело массой M . При этом мы пренебрегаем изменением массы центрального тела за счет аккреции и не учитываем динамическое трение [17], способное придать ему скорость. После установления равновесия получившаяся конфигурация описывается стационарным уравнением Власова:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \phi_g}{\partial \mathbf{r}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\phi_N = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi Gm \int (f dv). \quad (3)$$

Поскольку однородная самогравитирующая конфигурация не может оставаться стационарной, то на значительном удалении от центрального тела наше предположение об однородности набегающего потока не может быть верным. Поэтому ограничимся рассмотрением области, в которой гравитация центрального тела намного превышает самогравитацию набегающих частиц, а именно: $r \ll n_0^{-1/3} \sqrt{M/m}$, где $n_0 = const$ – концентрация частиц на значительном удалении от центра. В силу этого условия, самогравитацию рассматриваем как малую поправку и решение (1)-(3) ищем итеративно в виде $f = f_0(1+g)$, где $|g| \ll 1$. Получаем обычное кинетическое уравнение на движение в гравитационном поле:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4)$$

$$\phi_N = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}, \quad (5)$$

и уравнение на поправку, связанную с самогравитацией:

$$\mathbf{v} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \phi_N}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \phi_g}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \ln f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi Gm \int (f_0 dv). \quad (7)$$

Полагаем, что на удалении от центрального объекта невозмущенная функция распределения является гауссовой по скоростям:

$$f_0|_{|r| \rightarrow \infty} = \frac{n_0}{2\pi\alpha} \exp\left(-\left(\frac{(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2\alpha}\right)\right) \quad (8)$$

где α – дисперсия, одинаковая для всех направлений. В дальнейшем предполагаем осевую симметрию.

2.2. Без учета самогравитации

В сферических координатах (4) выглядит следующим образом:

$$u \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} + \left(\frac{v^2}{r} - \frac{GM}{r^2}\right) \frac{\partial f_0}{\partial u} - \frac{uv}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (9)$$

где u и v – радиальная и азимутальная скорости соответственно. Можно найти все три интеграла уравнения (9):

$$l = rv, \quad (10)$$

$$\mathcal{E} = \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{GM}{r}, \quad (11)$$

$$\mu = \theta + \arctan \frac{v^2 - GM/r}{uv}. \quad (12)$$

Полагая, что скорость \mathbf{v}_0 направлена вдоль вертикальной оси, т.е. $\mathbf{v}_0 = V_0\{\cos\theta, -\sin\theta, 0\}$, запишем решение (9) с учетом условия (8):

$$f_0 = \frac{n_0}{2\pi\alpha} \exp\left(-\frac{2\mathcal{E} - 2V_0\sqrt{2\mathcal{E}}\cos\mu + V_0^2}{2\alpha}\right) \left(\quad (13)$$

Простым вычислением можно убедиться, что $\cos\mu$ действительная величина, поэтому при $\mathcal{E} < 0$ и $v_0 \neq 0$ функция распределения f_0 становится комплексной. Это соответствует гравитационному захвату частиц массивным телом. Далее будем рассматривать лишь ту область, в которой частицы совершают инфинитное движение, т.е. $GM/\alpha r \ll 1$. Таким образом, с учетом начального предположения, рассматриваемая пространственная область есть

$$\frac{GM}{\alpha} \ll r \ll n_0^{-1/3} \sqrt{\frac{M}{n}}. \quad (14)$$

В этом приближении функция распределения (13) имеет вид

$$f_0 \simeq \frac{n_0}{2\pi\alpha} \left[1 + \frac{GM}{\alpha r} \left(1 + \frac{V_0}{v} \sin\theta\right)\right] \left(\times \right. \quad (15)$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{u^2 - 2V_0(u\cos\theta - v\sin\theta) + v^2 + V_0^2}{2\alpha}\right)\right) \left($$

Примечательно, что она имеет особенность при $v = 0$. Интегрируя (15) по скоростям в смысле главного значения, получаем распределение концентрации:

$$n = n_0 \left(\left(1 + \frac{GM}{\alpha r} \left[1 - 2\frac{V_0 \sin\theta}{\sqrt{2\alpha}} D\left(\frac{V_0 \sin\theta}{\sqrt{2\alpha}}\right)\right]\right) \right) \left(\quad (16)$$

где $D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy$ – функция Доусона (см. Рис. 1). Для простоты ограничимся случаем малой средней скорости:

$$V_0^2 \ll \alpha, \quad (17)$$

тогда распределение концентрации принимает вид

$$n \simeq n_0 \left(1 + \frac{GM}{\alpha r} \left[1 - \frac{V_0^2}{\alpha} \sin^2\theta\right]\right) \left(\quad (18)$$

а поле средней скорости есть

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{V} = V_0 \left\{ \cos\theta, -\sin\theta + \frac{GM}{\alpha r} \sin\theta \right\} \left(\quad (19)$$

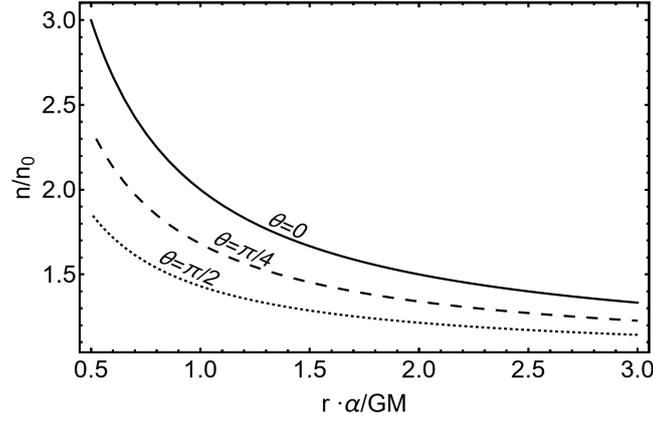


Рис. 1. Радиальное распределение концентрации в невозмущенной задаче согласно (16) при $V_0 = 3\sqrt{2\alpha}/5$ при разных углах: $\theta = 0$ (сплошная линия), $\theta = \pi/4$ (пунктирная) и $\theta = \pi/2$ (точечная).

2.3. Учет самогравитации

Решение уравнения (7) на поправку к потенциалу, обусловленную распределением концентрации (18), можно представить в виде:

$$\phi_g = 4\pi G\rho_0 \left(\frac{r^2}{6} + \frac{GM}{2\alpha} r \left[\left(-\frac{V_0^2}{2\alpha} (1 + \cos^2 \theta) \right) \right] \right) \quad (20)$$

где $\rho_0 = mn_0$. Как и следовало ожидать, эта поправка к потенциалу, как, впрочем, и концентрация (16)(18), не изменяется при замене знака V_0 или θ .

В рассматриваемом нами приближении правая часть (6) имеет большое количество слагаемых. Поскольку мы интересуемся самогравитацией на фоне притяжения центрального объекта, нам достаточно рассмотреть слагаемые, пропорциональные Mn_0^2 . Для демонстрации возникающих черт распределения были рассмотрены лишь два наиболее интригующих слагаемых, а именно слагаемое $\sim v^{-1}$ и слагаемое, связанное с несферичностью потенциала (20). При этом мы придерживаемся точности до $\mathcal{O}(GM)$ -и $\mathcal{O}(V_0^2)$, поэтому, чтобы избежать превышения точности, не учитываем второе слагаемое в уравнении (6), которое теперь принимает вид:

$$u \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{v^2}{r} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{uv}{r} \frac{\partial g}{\partial v} = 4\pi G\rho_0 \frac{GM}{\alpha} \frac{V_0^2}{2\alpha} \left(\frac{1}{3v} - \frac{v}{2\alpha} \right) \sin 2\theta. \quad (21)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$g = 4\pi \frac{G^2 M \rho_0 V_0^2}{2\alpha^2} (p(u, v) \sin 2\theta + q(u, v) \cos 2\theta) r, \quad (22)$$

в результате чего приходим к системе уравнений:

$$v^2 \frac{\partial p}{\partial u} - uv \frac{\partial p}{\partial v} + up - 2vq = \frac{1}{3v} - \frac{v}{2\alpha}, \quad (23)$$

$$v^2 \frac{\partial q}{\partial u} - uv \frac{\partial q}{\partial v} + up + 2vp = 0. \quad (24)$$

Из соображений симметрии ясно, что решение уравнения (21) не должно меняться при одновременном изменении знаков угла θ и какой-либо из скоростей u -или v . К слову, этим же свойством обладает решение (13). Поэтому из (22) получаем условия на функции $p(u, v)$ -и $q(u, v)$:

$$\begin{aligned} p(u, v) &= -p(u, -v) = -p(-u, v) \\ q(u, v) &= q(u, -v) = q(-u, v). \end{aligned} \quad (25)$$

Это ограничивает семейство возможных решений (23)(24) и в результате с учетом приближений (14)(17) искомая из уравнений (1)-(3) с граничным условием (8) функция распределения запишется как:

$$\begin{aligned} f = & \frac{n_0}{2\pi\alpha} \exp\left(\left(\frac{u^2 + v^2}{2\alpha}\right) \left\{ \left(1 + \frac{GM}{\alpha r}\right) \left[\left(1 + \frac{V_0}{\alpha}(u \cos\theta - v \sin\theta) + \right. \right. \right. \\ & + \frac{V_0^2}{2\alpha} \left. \left. \left(\frac{(u \cos\theta - v \sin\theta)^2}{\alpha} - 1\right)\right] \left(1 + \frac{GM V_0}{\alpha r v} \sin\theta \left[\left(1 + \frac{V_0}{\alpha}(u \cos\theta - v \sin\theta) \right) \left(1 + \frac{GM V_0^2}{\alpha} \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2\pi Gmn_0 \frac{GM V_0^2}{\alpha} r [p(u, v) \sin 2\theta + q(u, v) \cos 2\theta] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где найденные из (23)(24) функции p и q имеют вид (см. Рис. 2):

$$p = \frac{u}{6v(u^2 + v^2)} + \frac{uv}{(u^2 + v^2)^2} \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{\alpha}\right) \left(\times \right. \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + \frac{u^2 - v^2}{2u\sqrt{u^2 + v^2}} \log \frac{|v|}{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \right] \left(\right. \\ q = & -\frac{1}{3(u^2 + v^2)} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} \left(1 + \frac{u^2 + v^2}{\alpha}\right) \left(\times \right. \quad (28) \\ & \times \left[1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \log \frac{|v|}{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \right] \left(\right. \end{aligned}$$

Из (26) можно видеть, что обусловленная самогравитацией поправка пропорциональна квадрату концентрации и массе центрального объекта, т.е. она как раз учитывает самогравитацию потока во внешнем поле массивного тела. Причем по мере удаления от него влияние самогравитации растет линейно. Посчитанные численно моменты этой поправки представлены в Табл. 1. Примечательно, что $\langle u^2 + v^2 \rangle \neq 0$ только лишь благодаря второму слагаемому в (23), связанному с несферичностью потенциала (20).

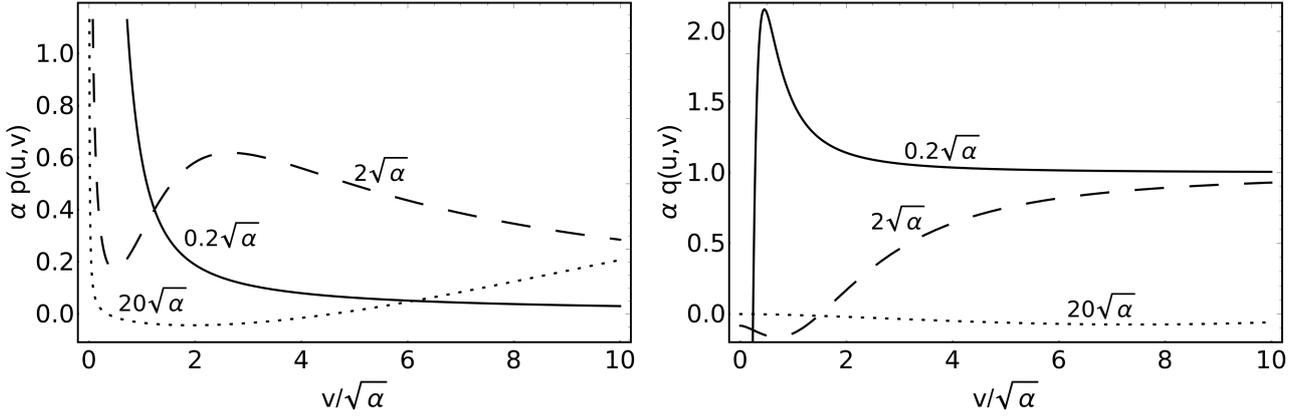


Рис. 2. Функции $p(u, v)$ - (слева) и $q(u, v)$ - (справа) при разных u : $0.2\sqrt{\alpha}$ (сплошная линия), $2\sqrt{\alpha}$ (пунктирная) и $20\sqrt{\alpha}$ (точечная). При этом $p(u, v)$ -нечетная по каждой из переменных, а $q(u, v)$ -четная по каждой из них (см.(25)(27)(28)).

Таблица 1. Моменты функций (27)(28), взвешенных с $\exp(-(u^2 + v^2)/2\alpha)$

	1	u	v	uv	u^2	v^2
$p(u, v)e^{-(u^2+v^2)/2\alpha}$	0	0	0	2.52α	0	0
$q(u, v)e^{-(u^2+v^2)/2\alpha}$	1.53	0	0	0	-0.42α	4.61α

С учетом самогравитации распределение концентрации (18) дополняется слагаемым:

$$n_g = n_0 \left(1.53 - \frac{GM}{\alpha} - \frac{Gmn_0}{\alpha} - \frac{V_0^2}{\alpha} \right) r \cos 2\theta. \quad (29)$$

2.4. Гравитационная вязкость

Зная функцию распределения (26), можно посчитать необходимые нам моменты. Тензор напряжений, определяемый как $\sigma_{ik} = -\rho \langle (v_i - \langle v_i \rangle) (v_k - \langle v_k \rangle) \rangle$ имеет следующие компоненты:

$$\sigma_{rr} = -\rho_0 \alpha \left(1 + \frac{GM}{\alpha r} \left[1 - \frac{V_0^2}{\alpha} \sin^2 \theta \right] \right) \left(+ 0.42 G \rho_0^2 \frac{GM}{\alpha} \frac{V_0^2}{\alpha} r \cos 2\theta, \quad (30)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\rho_0 \alpha \left(1 + \frac{GM}{\alpha r} \left[1 + \frac{V_0^2}{\alpha} \sin^2 \theta \right] \right) \left(- 4.61 G \rho_0^2 \frac{GM}{\alpha} \frac{V_0^2}{\alpha} r \cos 2\theta, \quad (31)$$

$$\sigma_{r\theta} = -2.52 G \rho_0^2 \frac{GM}{\alpha} \frac{V_0^2}{\alpha} r \sin 2\theta. \quad (32)$$

Соответственно, скалярное давление, для движущихся сред определяемое через след тензора напряжений, есть

$$p = \rho_0 \alpha \left(\left(1 + \frac{GM}{\alpha r} \right) \left(+ 2.1 G \rho_0^2 \frac{GM}{\alpha} \frac{V_0^2}{\alpha} r \cos 2\theta, \quad (33) \right. \right.$$

где первое слагаемое отвечает уравнению состояния идеального газа, второе есть поправка, связанная с притяжением частиц к массивному телу и

совпадающая с обычной барометрической формулой для малых GM , а третье возникает благодаря самогравитации. Однако наиболее примечательным является наличие недиагональной компоненты тензора, обусловленной самогравитацией набегающих частиц в поле центрального тела. В дальнейшем рассмотрим только часть тензора напряжений, связанную с самогравитацией, обозначив ее как σ_{ik}^g .

Вязкость определяется как коэффициент пропорциональности между вязким тензором напряжений $\tau_{ik}^g = \sigma_{ik}^g + p^g \delta_{ik}$ и тензором скорости деформации:

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (34)$$

что связано с требованием инвариантности по отношению как к галилеевским преобразованиям, так и к переходу во вращающуюся систему отсчета [18]. Как следует из Табл. 1, учет самогравитации не меняет первые моменты функции распределения, поэтому E_{ik} , посчитанная с помощью (19), имеет вид:

$$E = \frac{GM V_0}{\alpha r} \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (35)$$

Будем искать линейную связь между (35) и вязким тензором напряжений:

$$\tau^g = 2.52 G \rho_0^2 \frac{GM V_0^2}{\alpha} r \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (36)$$

Очевидно, что коэффициент пропорциональности между ними не является скаляром, что связано с анизотропностью течения. Предположение, что (35) и (36) связаны тензором второго ранга, т.е. что $\tau_{ik}^g = 2\mu_{im} E_{mk}$, приводит к сингулярному при некоторых углах виду μ_{im} . Поэтому рассмотрим наиболее общий случай [19], ища пропорциональность в виде тензора четвертого ранга:

$$\tau_{ik}^g = 2\mu_{iklm} E_{lm}. \quad (37)$$

Оставляя лишь угловую зависимость, перепишем вязкость как

$$\mu_{iklm} = 1.26 G \rho_0^2 r^3 \frac{V_0}{\alpha} h_{iklm} \quad (38)$$

и приходим к трем уравнениям:

$$-2h_{rrr\theta} \sin\theta + h_{rr\theta\theta} \cos\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad (39)$$

$$-2h_{\theta\theta r\theta} \sin\theta + h_{\theta\theta\theta\theta} \cos\theta = -\cos^2\theta + \sin^2\theta, \quad (40)$$

$$-2h_{r\theta r\theta} \sin\theta + h_{r\theta\theta\theta} \cos\theta = -2\cos\theta \sin\theta, \quad (41)$$

на шесть независимых компонент. Также есть условие на равенство нулю следа τ_{ii}^g и ограничение – требуется, чтобы компоненты h_{iklm} были конечными

при любых углах. По-видимому, есть только единственный способ удовлетворить (39)-(40) и этим требованиям:

$$h_{rr\theta\theta} = -h_{\theta\theta\theta\theta} = \cos\theta, \quad (42)$$

$$h_{rrr\theta} = -h_{\theta\theta r\theta} = \frac{1}{2} \sin\theta. \quad (43)$$

Полагаем, что остальные компоненты должны иметь такой же вид, поэтому из (41) получаем:

$$h_{r\theta r\theta} = \cos\theta, \quad (44)$$

$$h_{r\theta\theta\theta} = 0. \quad (45)$$

Оставшиеся три независимые компоненты нельзя определить из-за того, что $E_{rr} = 0$, поэтому по аналогии с (42) и (45) предположим, что

$$h_{\theta\theta rr} = -h_{rrrr} = \cos\theta, \quad (46)$$

$$h_{r\theta rr} = 0. \quad (47)$$

Таким образом мы получили, что из-за анизотропии задачи вязкость представляет собой тензор четвертого ранга и, что наиболее интересно, она зависит от скорости V_0 . Т.е. имеются основания полагать, что в рассматриваемом приближении самогравитирующий поток в присутствии внешнего поля ведет себя как неньютоновская жидкость.

3. Гидродинамические следствия

3.1. Неньютоновская жидкость

Полученное в Разделе 2.4 соотношение между тензором скорости деформации и вязким тензором напряжений относится лишь к задаче, решаемой в Разделе 2. Однако распространим полученные соотношения на произвольный случай, в том числе и на финитное движение, положив, что самогравитирующая среда в окрестности гравитирующего центрального объекта ведет себя как неньютоновская жидкость, записав вязкость согласно (38) как:

$$\mu_{iklm} = \nu G \rho^2 \frac{m}{k_B T} r^3 w_{iklm}, \quad (48)$$

где ν – это безразмерный коэффициент порядка единицы, ρ , T – плотность и температура среды соответственно, k_B – постоянная Больцмана, r – расстояние до центрального объекта, а тензор w_{iklm} содержит компоненты скорости среды:

$$\begin{aligned} w_{rr\theta\theta} &= w_{r\theta r\theta} = w_{\theta\theta rr} = -w_{rrrr} = -w_{\theta\theta\theta\theta} = V_r, \\ w_{rrr\theta} &= -w_{\theta\theta r\theta} = -\frac{1}{2} V_\theta, \\ w_{r\theta\theta\theta} &= w_{r\theta rr} = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом получается, что обусловленная самогравитацией вязкость пропорциональна $G\rho^2/T$, что было ожидаемо. Т.е. при высоких температурах ее вкладом можно пренебречь, а при низких – наоборот, связанный с самогравитацией эффект становится весьма значительным.

Предполагается, что гравитация центрального объекта намного превосходит самогравитацию среды, т.е. справедлива правая часть неравенства (14). При этом надо помнить, что выражение для вязкости (48)(49) было получено и остается справедливым только в выделенной системе отсчета, связанной с центральным объектом. Пользуясь им, попробуем решить некоторые простейшие астрофизические задачи.

3.2. Одномерная стационарная аккреция изотермического газа

В одномерном центрально-симметричном случае интересующие нас компоненты вязкого тензора напряжений имеют вид

$$\tau_{rr} = -\tau_{\theta\theta} = -2\nu G\rho^2 \frac{m}{k_B T} r^4 \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{1}{r}, \quad (50)$$

соответственно, законы сохранения массы и импульса запишутся так:

$$r^2 \rho V_r = -\frac{\dot{M}}{4\pi}, \quad (51)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \rho V_r^2 + \rho \frac{GM}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^8 \nu G\rho^2 \frac{m}{k_B T} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{1}{r^2} \right] \quad (52)$$

где $\dot{M} > 0$ – темп аккреции. Полагая среду изотермической, т.е. $p = c_s^2 \rho$, где $c_s = \text{const}$ есть скорость звука, и выражая плотность из (51), получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_r^2}{2} - \frac{GM}{r} + c_s^2 \log \rho \right) = -\beta \frac{V_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^3}{V_r} \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{1}{r} \right] \quad (53)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{\nu}{2\pi} \frac{G\dot{M}}{c_s^2} > 0. \quad (54)$$

Полагая, что градиент скорости мал, $|d \log V_r / d \log r| \ll 1$, можно выделить первый интеграл (аналог закона Бернулли):

$$\frac{V_r^2}{2} - \frac{GM}{r} + c_s^2 \log \frac{\rho}{\rho_{\text{out}}} - \beta r^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{1}{r} = \text{const}, \quad (55)$$

где из постоянного интегрирования было выделено слагаемое $c_s^2 \log \rho_{\text{out}}$, содержащее плотность на бесконечности. В отсутствие внешней силы скорость и ее градиент нулевые, поэтому $\text{const} = 0$.

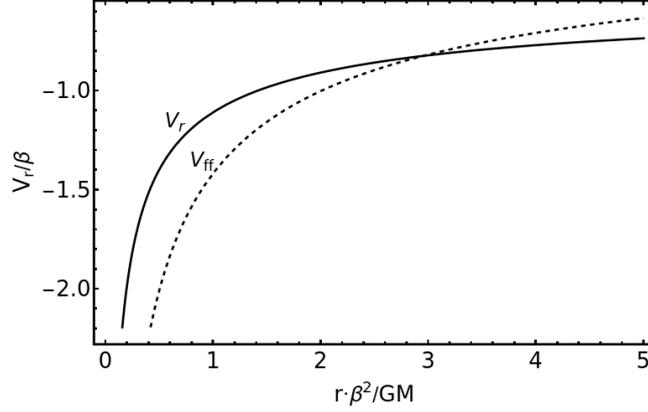


Рис. 3. Распределение скорости холодной изотермической среды с учетом вязкости (57) (сплошная линия) и скорость свободного падения (пунктирная).

Для достаточно холодной среды можно пренебречь третьим слагаемым. Тогда, ища решение в виде $V_r = -\beta r a'(r)/a(r)$, где штрих обозначает производную, приходим к уравнению:

$$a'' - \frac{2GM}{\beta r^3} a = 0. \quad (56)$$

Заменой $a = \sqrt{r} b(\sqrt{8GM/\beta^2 r})$ его можно свести к уравнению на модифицированные функции Бесселя первого порядка. Требуя, чтобы скорость всюду была отрицательной, можно определить константу интегрирования. В результате получаем следующее выражение для скорости:

$$V_r = -\frac{\beta}{2} r \frac{d}{dr} \log \left[\left(\sqrt{r} K_1 \quad \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{2GM}{r}} \right) \right] \quad (57)$$

где K – функция Макдональда. При малых радиусах скорость ведет себя как

$$V_r \simeq -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{r}} - \frac{3\beta}{8} \simeq -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \quad (58)$$

т.е. она в два раза меньше скорости свободного падения $V_{ff} = (2GM/r)^{1/2}$ (см. Рис. 3). Таким образом, как и ожидалось, вязкость тормозит среду. Наличие в выражениях (57)(58) темпа аккреции \dot{M} (содержится в β , см.(54)) не удивительно – благодаря вязкости все течение перераспределяется и подстраивается под темп аккреции.

3.3. Потеря углового момента

Оценим скорость изменения удельного углового момента $l = \rho \mathbf{r} \times \mathbf{V}$ за счет самогравитации. Для этого предположим радиальную симметрию и наличие обеих компонент скорости. Надо отметить, что обычно такие задачи

решаются в другой плоскости. В нашем случае, для оценки, заменим скорость обращения вокруг центрального объекта модулем азимутальной скорости $|V_\theta|$. Нужна лишь $r\theta$ компонента вязкого тензора напряжений:

$$\dot{i}_\phi^g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \tau_{r\theta} \sim \tau_{r\theta}, \quad (59)$$

где точка обозначает производную по времени. В свертке $\mu_{iklm} E_{lm}$ отлично от нуля только одно слагаемое, поэтому получаем

$$\dot{i}_\phi^g \sim G \rho^2 \frac{m}{k_B T} r^2 V_r |V_\theta|. \quad (60)$$

Поскольку величины не изменяются по углу, соотношение (51) остается справедливым, а в качестве $|V_\theta|$ можно взять кеплерову скорость:

$$\dot{i}_\phi^g \sim -G \dot{M} \rho \frac{m}{k_B T} |V_\theta| = -G \dot{M} \rho \frac{m}{k_B T} \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (61)$$

Таким образом получается, что самогравитация аккрецирующей среды способствует уменьшению углового момента.

4. Заключение

В работе проведен анализ двумерного самогравитирующего бесстолкновительного потока частиц, набегающего на массивное тело. С учетом самогравитации как поправки, была найдена функция распределения (26). При этом расчеты проводились в такой пространственной области, в которой, с одной стороны, самогравитация набегающих частиц намного меньше притяжения центрального тела, а с другой стороны, частицы не захватываются им (14). Полагалось, что вдали от центрального объекта частицы находятся в термодинамическом равновесии (8), а также что средняя скорость набегающих частиц мала по сравнению со среднеквадратичной (17).

При анализе моментов полученной функции распределения оказалось, что тензор напряжений имеет недиагональную компоненту (32), обусловленную самогравитацией набегающих частиц в поле центрального тела. Диагональные же компоненты, за вычетом соответствующего давлению половины следа тензора, имеют тот же самый числовой коэффициент (см. (30)-(33)), т.е. их можно записать в одно выражение (36), являющееся вязким тензором напряжений. Была найдена пропорциональность между ним и тензором скорости деформации (49), т.е. вязкость. Она оказалась тензором четвертого ранга, зависящим от скорости потока (38)(42)-(47). Таким образом было показано, что при сделанных предположениях самогравитирующая среда в окрестности массивного тела ведет себя как неньютоновская жидкость с анизотропной вязкостью. Примечательно, что такой эффект возникает в бесстолкновительной среде только за счет дальнедействующей силы притяжения.

В Разд. 3 на основе частной решенной задачи было сделано индуктивное обобщение полученной формулы для вязкости (48)(49) для случая произвольных плотности, температуры и скорости среды. При этом все еще предполагалось, что гравитация центрального объекта намного превосходит самогравитацию среды, т.е. справедлива правая часть неравенства (14).

На основе полученных выражений для вязкости решены некоторые астрофизические задачи. В частности, рассмотрена одномерная стационарная аккреция изотермического газа (Разд. 3.2), где показано, что вязкость, обусловленная самогравитацией, приводит к замедлению потока и изменению его структуры. В Разд. 3.3 оценена скорость потери углового момента за счет самогравитации. Полученные результаты согласуются с ожиданиями, что самогравитация способствует уменьшению углового момента, что может играть важную роль в процессах аккреции и формирования компактных объектов.

Однако стоит отметить, что при кинетическом рассмотрении конкретной задачи (Разд. 2) были сделаны определенные упрощения, такие как предположение о малой средней скорости потока и инфинитном движении частиц. Эти допущения позволили получить простое аналитическое решение, но могут ограничивать применимость результатов в реальных астрофизических условиях. В будущих исследованиях было бы полезно расширить область применимости решения (26). Кроме того, переход от решения частной задачи к общему выражению для вязкости носит скорее эвристический характер. К тому же, в силу двумерной постановки не представляется возможным узнать полярные компоненты тензора w_{iklm} . Поэтому в дальнейшем необходимо получить более общее выражение для вязкости (48), основанное на первых принципах.

В целом работа вносит важный вклад в понимание динамики самогравитирующих систем и их влияния на астрофизические процессы. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области аккреции, динамики темной материи, динамики галактик и других астрофизических явлений, где гравитационные эффекты играют ключевую роль.

Список литературы

- [1] Dauxois, T., Ruffo, S., Arimondo, E., and Wilkens, M. (2002) Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions: An Introduction. 602, 1–19.
- [2] Campa, A., Dauxois, T., and Ruffo, S. (2009) Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions. Phys. Rep., 480, 57–159.

- [3] Ogawa, S. and Yamaguchi, Y. (2015) Landau-like theory for universality of critical exponents in quasistationary states of isolated mean-field systems. *Phys. Rev. E*, 91, 062108.
- [4] Calabrese, S. and Porporato, A. (2019) Origin of negative temperatures in systems interacting with external fields. *Physics Letters A*, 383, 2153–2158.
- [5] Shukla, P. (2020) Extensive nature of long range interactions: role of disorder. *Journal of Physics A Mathematical General*, 53, 165001.
- [6] Solfanelli, A. and Defenu, N. (2024) Universality in long-range interacting systems: The effective dimension approach. *Phys. Rev. E*, 110, 044121.
- [7] Padmanabhan, T. (1990) Statistical mechanics of gravitating systems. *Phys. Rep.*, 188, 285–362.
- [8] Chavanis, P. H., Rosier, C., and Sire, C. (2002) Thermodynamics of self-gravitating systems. *Phys. Rev. E*, 66, 036105.
- [9] Chavanis, P. H. (2006) Phase Transitions in Self-Gravitating Systems. *International Journal of Modern Physics B*, 20, 3113–3198.
- [10] Liboff, R. L. (1969) *Introduction to the Theory of Kinetic Equations*. Wiley.
- [11] Gammie, C. F. (2001) Nonlinear outcome of gravitational instability in cooling, gaseous disks. *ApJ*, 553, 174.
- [12] Binney, J. and Tremaine, S. (2008) *Galactic Dynamics: Second Edition*.
- [13] Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. (1973) Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24, 337–355.
- [14] Peirani, S. and de Freitas Pacheco, J. A. (2008) Dark matter accretion into supermassive black holes. *Phys. Rev. D*, 77, 064023.
- [15] Mach, P. and Odrzywolek, A. (2021) Accretion of Dark Matter onto a Moving Schwarzschild Black Hole: An Exact Solution. *Phys. Rev. Lett.*, 126, 101104.
- [16] Hui, L., Law, Y. T. A., Santoni, L., Sun, G., Tomaselli, G. M., and Trincherini, E. (2023) Black hole superradiance with dark matter accretion. *Phys. Rev. D*, 107, 104018.
- [17] Chandrasekhar, S. (1943) Dynamical Friction. I. General Considerations: the Coefficient of Dynamical Friction. *ApJ*, 97, 255.
- [18] Landau, L. and Lifshitz, E. (2013) *Fluid Mechanics: Volume 6. No. т. 6*, Pergamon.
- [19] de Groot, S. R. and Mazur, P. (1984) *Non-equilibrium Thermodynamics*. Dover Books on Physics, Dover Publications.

Содержание

1. Введение	3
2. Кинетическое рассмотрение	4
2.1. Постановка задачи	4
2.2. Без учета самогравитации	5
2.3. Учет самогравитации	7
2.4. Гравитационная вязкость	9
3. Гидродинамические следствия	11
3.1. Неньютоновская жидкость	11
3.2. Одномерная стационарная аккреция изотермического газа . . .	12
3.3. Потеря углового момента	13
4. Заключение	14
Список литературы	15