



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 8 за 2025 г.

ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Липатов, [И.В. Абалакин](#)

## Моделирование движения лопасти шарнирного винта

Статья доступна по лицензии  
[Creative Commons Attribution 4.0 International](#)



**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Липатов А.В., Абалакин И.В. Моделирование движения лопасти шарнирного винта // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 8. 24 с. EDN: [KSXNOH](#)  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-8>

**О р д е н а Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. КЕЛДЫША**  
**Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к**

**А. В. Липатов, И. В. Абалакин**

**Моделирование движения  
лопасти шарнирного винта**

**Москва — 2025**

**Липатов А. В., Абалакин И. В.**

Моделирование движения лопасти шарнирного винта

В настоящей работе приводится модель, описывающая движение шарнирно закреплённой лопасти винта вертолётa. Для параметров (углов взмаха, качания и угла установки), определяющих положение лопасти в пространстве, выводится система обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом действия аэродинамических сил, полученных в ходе численного решения задачи обтекания. При этом предполагается, что изменение угла установки лопасти задано аналитическим законом. Предложенная методика реализована в CFD пакете NOISEtte и верифицирована на ряде модельных задач.

**Ключевые слова:** винт вертолета, аппарат перекоса, кинематика лопасти винта

**Aleksey Vladimirovich Lipatov, Ilya Vladimirovich Abalakin**

The Hinged Rotor Mechanics

In this paper, a model describing the motion of a hinged helicopter rotor blade is presented. A system of ordinary differential equations is derived for the parameters (flapping angle, lead-lag angle, and pitch angle) that determine the position of the blade in space, taking into account the aerodynamic forces obtained through the numerical solution of the flow problem. It is assumed that the variation of the blade pitch angle is defined by an analytical law. The proposed methodology is implemented in the CFD package NOISEtte and validated on a series of model problems.

**Key words:** helicopter rotor, swashplate, blade kinematics

## Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Общие понятия . . . . .	4
3	Формальная постановка задачи . . . . .	6
4	Математическая модель . . . . .	7
5	Верификация . . . . .	16
6	Заключение . . . . .	22
	Список литературы . . . . .	23

## 1. Введение

В настоящее время индустрия винтокрылых летательных аппаратов активно развивается. Разработка таких аппаратов непосредственно связана с численным моделированием течений вокруг вращающихся тел, находящихся во взаимодействии. Одним из распространённых методов решения подобных задач является использование перекрывающихся или скользящих сеток [1]. Однако данный метод применим только в тех случаях, когда возможно выделить подсистемы тел, внутри которых отсутствует относительное движение (например, фюзеляж и две жёстко закреплённые лопасти можно рассматривать как две отдельные статичные подсистемы). При наличии же шарнирного соединения между лопастями и втулкой винта этот подход становится неприменим, поскольку лопасти совершают относительные движения. Для моделирования течений вокруг таких систем необходимо использование подвижных расчётных сеток. В предлагаемом подходе расчётная область разделяется на три основные области: неподвижная детализированная сетка вблизи лопасти, предназначенная для моделирования пограничного слоя, основная неподвижная сетка, удалённая от лопасти, и деформируемая сетка, соединяющая две неподвижные области. Такая методика позволяет учитывать сложную динамику лопастей и их взаимодействие с окружающим потоком. Подробное описание численного моделирования течений на подвижных сетках представлено в [2].

Важным вопросом остается способ описания движения шарнирно закреплённых лопастей. Существуют различные подходы для этого, представленные в классической литературе. Например, в [3] предложена линейризованная система уравнений совместного движения лопасти по углам качания и взмаха, полученная на основе принципа Даламбера и законов динамики. В работах [4] и [5] приведены линейризованные аналитические зависимости для углов взмаха и качания, рассматриваемые по отдельности при допущении их независимости. Также в [4] и [5] на конкретных примерах используются результаты, предложенные в [6], где для описания совместного поведения углов взмаха и качания составлена система уравнений, в которой эти величины представлены в виде гармонических функций, причём коэффициенты гармоник этих функций объясняются исходя из силовых и инерционных соображений. В данной статье предлагается альтернативный подход к моделированию движения лопастей относительно шарниров. Предполагается, что он более удобен для применения в методах вычислительной гидродинамики, так как для его реализации достаточно задаться только конструкционными параметрами лопасти и втулки. Здесь предлагается использовать кинематическое описание движения элементов лопасти, в котором абсолютное ускорение определяется непосредственно на

основе полученных в CFD-расчёте аэродинамических сил. При этом предполагается, что циклическое управление задано заранее и отрабатывается как жёстко заданный закон.

В настоящей работе разработана математическая модель движения шарнирно закреплённой к втулке винта лопасти под действием внешних сил. Проведена верификация модели на тестовых задачах, имеющих аналитическое решение. Приведённая в этой работе численная методика реализована в программном комплексе NOISEtte [7]. Комбинация разработанной модели с численными методиками моделирования обтекания систем движущихся тел ([8], [9], [10]) и технологии динамической деформации расчетной сетки ([2], [11]) позволяет проводить расчёты течения около шарнирно закреплённых лопастей винта вертолётa.

## 2. Общие понятия

Воздушный винт – это лопастной движитель, преобразующий крутящий момент двигателя в тягу винта. Воздушный винт состоит из ступицы, лопастей, автомата перекоса и укрепляется на валу двигателя с помощью специальной втулки. Лопасть винта есть вытянутое профилированное тело. Геометрические характеристики винта определяют его аэродинамические свойства. Рассмотрим основные характеристики. Диаметр винта  $D$  называется диаметр окружности, описываемый концами лопастей при вращении винта. Геометрический шаг винта – это расстояние, которое движущийся поступательно винт должен пройти за один свой полный оборот, если бы он двигался в воздухе как в твердой среде. Плоскость, перпендикулярная оси вращения винта, называется плоскостью вращения винта. Наклон сечения лопасти к плоскости вращения винта называется углом установки лопасти винта  $\phi$ . Сечения рабочей части лопасти имеют аэродинамические профили. Профиль лопасти характеризуется хордой, относительной толщиной и другими геометрическими параметрами. Хорды сечений не всегда лежат в одной плоскости, то есть лопасть может иметь крутку. Если все сечения лопасти имеют разный угол установки, то шагом и углом установки лопасти винта традиционно считаются шаг и угол установки сечения  $0.7R$ , где  $R$  – радиус винта. Лопасти имеют переднюю и заднюю кромки, участок лопасти, ближний к втулке винта, называется комлевой частью лопасти или комлем, а свободный конец лопасти обычно оканчивается законцовкой. Наиболее распространённые формы лопасти в плане – прямоугольные с различными формами законцовок на свободном конце лопасти.

Классифицировать винты можно по разным признакам. Исходя из специфики данной работы рассмотрим классификацию по типу крепления

лопасти. Можно выделить три основных типа крепления: жёсткое, упругое, шарнирное. При жёстком креплении лопасть крепится неподвижно к втулке, что приводит к отсутствию махового движения и качания лопастей, а отсутствие осевого шарнира приводит к фиксированному углу установки лопасти. В случае шарнирного крепления лопасть крепится к втулке посредством горизонтального шарнира, ГШ (FH – Flap Hinge), позволяющего двигаться лопасти в вертикальной плоскости, вертикального шарнира, ВШ (LH – Lag Hinge), позволяющего лопасти двигаться в горизонтальной плоскости, и осевого шарнира, ОШ (PH – Pitch Hinge), позволяющего лопасти вращаться вокруг своей продольной оси. Управление вертолётном осуществляется изменением шага лопастей. Шаг лопасти напрямую связан с углом установки, поэтому эти понятия отождествляют. Зависимость шага лопасти от времени на интервале одного оборота может быть представлена как сумма постоянной и гармонической функции. Постоянная часть шага лопасти называется общим шагом лопасти, гармоническая часть – циклическим шагом лопасти. Управление общим шагом лопастей позволяет управлять тягой винта, а управление циклическим шагом лопастей позволяет управлять вертолётном в продольно-поперечной плоскости. На некоторых вертолётном шарниры на втулках винтов заменяются упругими элементами, которые позволяют лопасти совершать движения, аналогичные шарнирной подвеске, но при этом имеются дополнительные моменты от упругих элементов втулки.

В ходе работы будет рассматриваться шарнирно закреплённая лопасть воздушного винта. Рассмотрим основные характеристики такого типа винта. Все винты вертолётном имеют число лопастей больше или равное двум, поэтому размеры математических моделей винта вертолётном напрямую зависят от числа лопастей на винте. Положение каждой лопасти в плоскости вращения определяется азимутальным углом  $\psi$ , который отсчитывается от оси, расположенной над хвостовой балкой вертолётном, против часовой стрелки. В целях снижения нагрузки на шарниры лопасти крепятся к втулке по радиальным направлениям, смещение оси втулки относительно оси вращения винта  $c_{hub}$  – расстояние между продольной осью лопасти и осью втулки винта. Шарниры на втулке могут быть совмещены, тогда речь идёт о шаровом шарнире, иначе они расположены последовательно один за другим. В таком случае величина разноса шарниров определяется расстоянием от центра втулки винта до каждого из шарниров при нулевом положении лопасти. В данной работе будет рассматриваться определённая последовательность разнесённых шарниров на втулке, а именно ГШ-ВШ-ОШ. А для описания разноса шарниров будут использоваться немного другие величины:  $l_{fh}$  – расстояние от центра втулки до ГШ,  $l_{lh}$  – расстояние от ГШ до ВШ и  $l_{ph}$  –

расстояние от ВШ до ОШ (см. Рис.1).

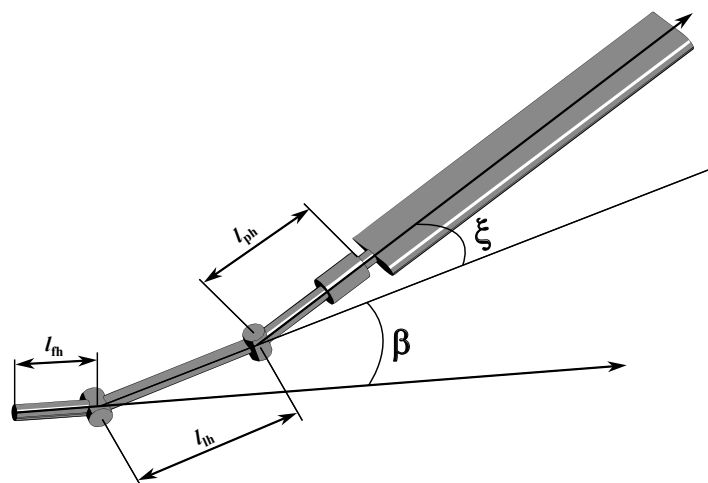


Рис. 1. Шарнирное крепление лопасти

Также опишем основные кинематические величины. Угол махового движения  $\beta$  – угол между плоскостью вращения винта и продольной осью лопасти. Угол качания  $\xi$  – угол между плоскостью, проходящей через азимутальное положение лопасти и перпендикулярной плоскости вращения, и продольной осью лопасти. Угол установки лопасти  $\phi$  – угол между хордой сечения  $0.7R$  ( $R$  – радиус лопасти) и плоскостью вращения винта. На Рис.1 они представлены наглядно.

### 3. Формальная постановка задачи

Рассмотрим лопасть шарнирного винта. Пусть рассматривается винт с  $k$  лопастями. В качестве исходных данных для каждой лопасти заданы следующие величины:

- угловая скорость винта:  $\omega$  (рад/с);
- азимутальное смещение лопасти:  $\psi_0$  (рад);
- геометрические параметры шарниров:  $l_{fh}, l_{lh}, l_{ph}, c_{hub}$  и радиус втулки  $r_{hub}$  (м);
- начальные значения углов взмаха и качания и их производных:  $\beta_0, \xi_0$  (рад) и  $\dot{\beta}_0, \dot{\xi}_0$  (рад/с);
- параметры управления  $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$  (рад) и безразмерные коэффициенты  $k_\beta, k_\xi$ , с помощью которых задаётся закон изменения угла установки  $\phi(\psi) = \Theta_0 + \Theta_1 \cos(\psi) + \Theta_2 \sin(\psi) + k_\beta \beta + k_\xi \xi$ . Параметр  $\Theta_0$  – общий шаг лопасти,  $\Theta_1$  – параметр, отвечающий за наклон тарелки автомата перекоса вперед и назад,  $\Theta_2$  – за наклон тарелки автомата перекоса вбок,  $k_\beta$  – компенсатор взмаха,  $k_\xi$  – компенсатор качания.
- вектор ускорения свободного падения;

- распределение элементарных масс  $dm_i$  (кг) по продольной оси лопасти, в виде функции:  $dm_i = dm \left( \frac{r_i}{R} \right)$ , где  $r_i$  – расстояние до  $i$ -го элемента лопасти от конца ОШ ( $i = 1, \dots, N$ ), а  $R$  – длина лопасти;
- распределение аэродинамических сил  $dF_j$  (Н) по размаху лопасти в виде функции:  $dF_j = dF \left( \frac{r_j}{R} \right)$ , где  $r_j$  – расстояние до  $j$ -го элемента лопасти от конца ОШ ( $j = 1, \dots, M$ ).

Обратим внимание, что в общем случае  $N \neq M$ . В результате решения задачи необходимо вычислить на следующем временном слое величины:

- значения углов  $\beta(t), \xi(t)$  (рад);
- значение угловых скоростей  $\dot{\beta}(t), \dot{\xi}(t)$  (рад/с).

#### 4. Математическая модель

В ходе решения задачи будем пользоваться следующими системами координат (СК), они представлены на Рис.2:

- вертолётная система координат, ВСК (HFR – Helicopter Frame Reference). Начало СК совпадает с центром втулки. Ось  $Oz$  направлена по оси вращения вала винта, ось  $Ox$  направлена вдоль линии нулевого азимутального положения, назад по потоку, ось  $Oy$  дополняет СК до правой тройки. Данная СК является абсолютной для рассматриваемой задачи;
- вращающаяся с винтом (подвижная, неинерциальная) система координат, ВВСК (RFR – Rotor Frame Reference). Начало СК совпадает с центром втулки. Ось  $Oz$  направлена по оси вращения вала винта, ось  $Ox$  лежит в плоскости вращения винта и направлена параллельно продольной оси лопасти при нулевых углах взмаха и качания, ось  $Oy$  дополняет СК до правой тройки (в случае наличия смещения оси втулки относительно оси винта начало данной СК по-прежнему совпадает с центром втулки);
- лопастная система координат (подвижная, неинерциальная), ЛСК (BFR – Blade Frame Reference). Начало СК совпадает с центром ВШ. Ось  $Oz$  направлена по оси ВШ, ось  $Ox$  вдоль лопасти, ось  $Oy$  дополняет СК до правой тройки.

Примем следующие допущения при решении задачи:

- лопасть является абсолютно твёрдым телом;
- масса лопасти сосредоточена на её продольной оси;
- момент, создаваемый рычагом системы управления относительно ГШ и ВШ, нулевой;
- размеры шарниров малы по сравнению с лопастью;
- массой обладает только лопасть;



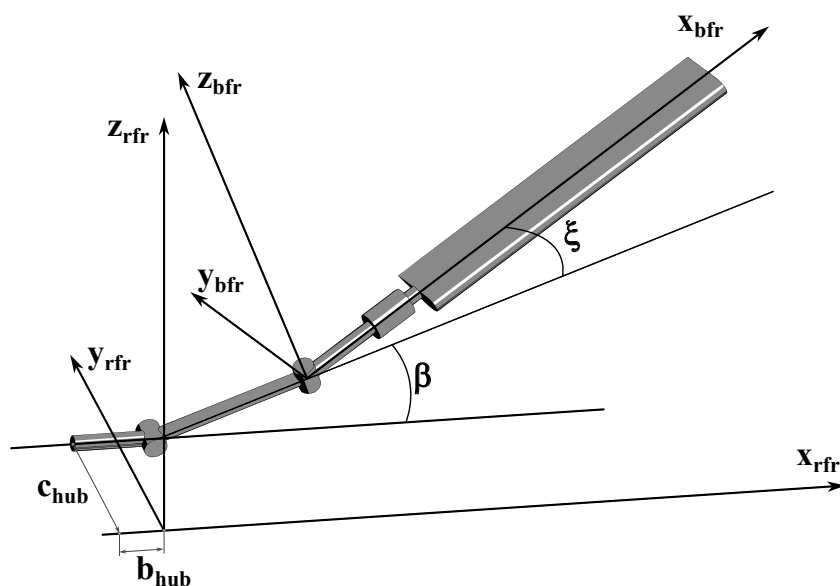


Рис. 2. Используемые системы координат

- будем считать, что вертолёт движется в режиме горизонтального полёта, то есть прямолинейно и с постоянной скоростью (с точки зрения рассматриваемой задачи частным случаем будет режим висения).

**4.1. Уравнение движения лопасти** Рассматриваемое движение лопасти – это движение ЛСК относительно ВВСК, поэтому необходимо учитывать инерционные силы, действующие на лопасть. Выделим элемент лопасти массой  $dm_i$  и определим силовое воздействие на этот участок. Для этого воспользуемся уравнением кинематики, записанным для центра масс элемента лопасти:

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r(\dot{\beta}) + \mathbf{V}_r(\dot{\xi}), \quad (4.1)$$

где:

- $\mathbf{V}_a(t)$  – абсолютная скорость точки лопасти;
- $\mathbf{V}_e(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}_{hf}$  – переносная скорость точки лопасти, определяемая движением ВВСК;
- $\mathbf{V}_r(\dot{\beta}, t) = \dot{\beta}(t) \boldsymbol{\tau}_{fh} \times \mathbf{r}_\beta(t)$  – скорость точки лопасти относительно ВВСК, определяемая маховым движением;
- $\mathbf{V}_r(\dot{\xi}, t) = \dot{\xi}(t) \boldsymbol{\tau}_{lh}(t) \times \mathbf{r}_\xi(t)$  – скорость точки лопасти относительно ВВСК, определяемая движением качания.

Здесь введены следующие векторы (см. Рис.3):

- $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T$  – вектор угловой скорости винта;
- $\mathbf{V}_{hf} = (V_x, V_y, 0)$  – вектор скорости горизонтального полёта<sup>1</sup>;

<sup>1</sup>Причём  $V_x, V_y = const$

- $\boldsymbol{\tau}_{fh} = (0, -1, 0)^T$  – единичный вектор оси горизонтального шарнира;
- $\boldsymbol{\tau}_{lh} = (0, -\sin \beta, \cos \beta)^T$  – единичный вектор оси вертикального шарнира;
- $\mathbf{r}(t) = (x_{rfr}, y_{rfr}, z_{rfr})^T$  – радиус-вектор элемента лопасти;
- $\mathbf{r}_\beta(t) = (x_{\beta rfr}, y_{\beta rfr}, z_{\beta rfr})^T$  – радиус-вектор элемента лопасти относительно ГШ;
- $\mathbf{r}_\xi(t) = (x_{\xi rfr}, y_{\xi rfr}, z_{\xi rfr})^T$  – радиус-вектор элемента лопасти относительно ВШ.

Компоненты радиус-векторов имеют следующий вид:

- $x_{rfr} = b_{hub} + l_{fh} + (l_{lh} + (l_{ph} + r) \cos \xi) \cos \beta$ ;
- $x_{\beta rfr} = (l_{lh} + (l_{ph} + r) \cos \xi) \cos \beta$ ;
- $x_{\xi rfr} = (l_{ph} + r) \cos \xi \cos \beta$ ;
- $y_{rfr} = (l_{ph} + r) \sin \xi + c_{hub}$
- $y_{\beta rfr} = y_{\xi rfr} = (l_{ph} + r) \sin \xi$ ;
- $z_{rfr} = l_{fh} + (l_{lh} + (l_{ph} + r) \cos \xi) \sin \beta$ ;
- $z_{\beta rfr} = (l_{lh} + (l_{ph} + r) \cos \xi) \sin \beta$ ;
- $z_{\xi rfr} = (l_{ph} + r) \cos \xi \sin \beta$ .

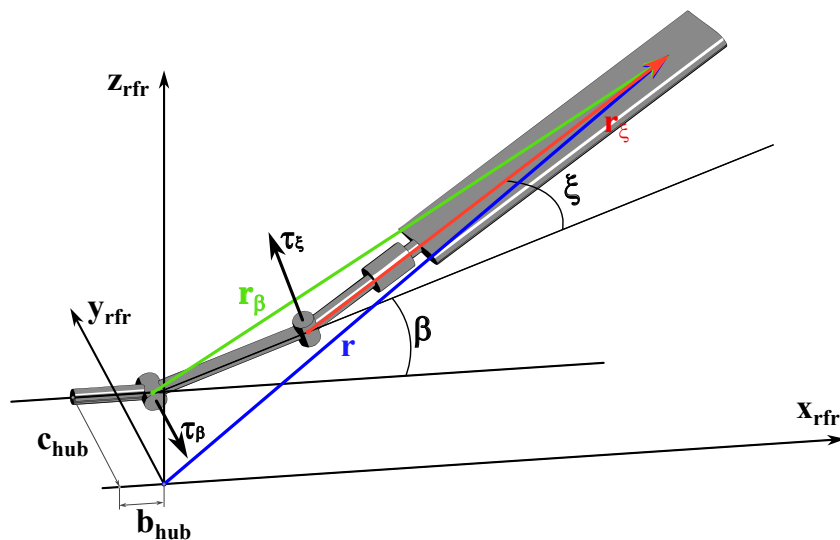


Рис. 3. Основные кинематические величины

Заметим, что производная абсолютного ускорения  $\dot{\mathbf{V}}_a$  есть ускорение от воздействия внешних сил на элемент лопасти

$$\dot{\mathbf{V}}_a = \frac{d\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_{i+1} - \mathbf{N}_i}{dm_i} + \mathbf{g},$$

где  $\mathbf{N}_{i+1}$  – сила, с которой  $i + 1$ -й и следующие элементы лопасти действуют на  $i$ -й элемент,  $\mathbf{N}_i$  – сила, с которой  $i - 1$ -й и предыдущие элементы лопасти действуют на  $i$ -й элемент.

Продифференцировав по времени уравнение (4.1), получим:

$$\frac{d\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_{i+1} - \mathbf{N}_i}{dm_i} + \mathbf{g} = \dot{\mathbf{V}}_e + \dot{\mathbf{V}}_r(\dot{\beta}) + \dot{\mathbf{V}}_r(\dot{\xi}), \quad (4.2)$$

что есть динамическое уравнение движения центра масс элемента лопасти. Перейдём от общей векторной записи уравнения (4.2) к его проекциям на оси ЛСК.

Проекция на ось  $Ox_{bfr}$ <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dF_{i_x} + N_{i+1_x} - N_{i_x}}{dm_i} + g_x = & -2 \cos \beta (l_{ph} + r_i) \omega \dot{\xi} - \\ & - ((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \cos \xi \dot{\beta}^2 - (l_{ph} + r_i) \dot{\xi}^2 - \\ & - 2((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \sin \beta \sin \xi \omega \dot{\beta} - \\ & - (-\sin^2 \beta (l_{ph} + r_i) \cos^2 \xi + (l_{fh} + l_{lh} \cos \beta + b_{hub}) \cos \xi \cos \beta + \\ & + c_{hub} \sin \xi + r_i + l_{ph}) \omega^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Проекция на ось  $Oy_{bfr}$

$$\begin{aligned} \frac{dF_{i_y} + N_{i+1_y} - N_{i_y}}{dm_i} + g_y = & (l_{ph} + r_i) \ddot{\xi} + ((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \sin \xi \dot{\beta}^2 - \\ & - 2((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \cos \xi \sin \beta \omega \dot{\beta} + \\ & + ((l_{fh} + l_{lh} \cos \beta + b_{hub}) \cos \beta \sin \xi - \\ & - ((l_{ph} + r_i) \sin^2 \beta \sin \xi - c_{hub}) \cos \xi) \omega^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Проекция на ось  $Oz_{bfr}$

$$\begin{aligned} \frac{dF_{i_z} + N_{i+1_z} - N_{i_z}}{dm_i} + g_z = & ((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \ddot{\beta} + \\ & + (((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \cos \beta + l_{fh} + b_{hub}) \sin \beta \omega^2 + \\ & + 2(l_{ph} + r_i) \sin \beta \cos \xi \omega \dot{\xi} - 2(l_{ph} + r_i) \sin \xi \dot{\beta} \dot{\xi}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где величина  $b_{hub} = \sqrt{r_{hub}^2 - c_{hub}^2}$ .

Таким образом получены уравнения, описывающие силовые воздействия на элемент лопасти. В этих уравнениях учтены внешние силы, сила инерции от вращения с винтом (слагаемые при  $\omega^2$ ), сила Кориолиса от комбинации махового движения и вращения с винтом (слагаемые при  $\omega \dot{\beta}$ ), сила Кориолиса от комбинации движения качания и вращения с винтом (слагаемые при  $\omega \dot{\xi}$ ) и сила Кориолиса от комбинации махового и качающего движения (слагаемые

<sup>2</sup>В уравнениях индексы  $x_{bfr}$ ,  $y_{bfr}$  и  $z_{bfr}$  для облегчения чтения заменены на  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно

при  $\dot{\beta}\dot{\xi}$ ). Заметим также, что  $N_1$  – реакция втулки на лопасть, а на последний участок лопасти ничего не действует, так что  $N_{n+1} = 0$ .

Так как стоит задача определения углового положения лопасти относительно шарниров в каждый момент времени, то перейдём от динамических уравнений элемента тела к уравнениям вращательного движения твёрдого тела относительно ГШ и ВШ. Для этого введём величины погонной массы лопасти и погонной аэродинамической силы:

$$\rho(r) = \frac{dm(r)}{dr}, \quad \mathbf{q}_a(r) = \frac{d\mathbf{F}_a(r)}{dr}.$$

Заметим, что силы по оси  $Ox_{bfr}$  никак не влияют на вращение относительно осей шарниров, поэтому уравнение (4.3) исключим из рассмотрения. Домножим уравнения (4.4) – на плечо приложения силы  $l_{ph} + r_i$ , а уравнение (4.5) – на плечо  $(l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}$  и проинтегрируем по длине лопасти. В результате получаем следующие уравнения:

уравнение вращательного движения относительно ГШ <sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^R (q_{az} + \rho g_z)((l_{ph} + r) \cos \xi + l_{lh}) dr = \int_0^R [((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \ddot{\beta} + \\ + (((l_{ph} + r_i) \cos \xi + l_{lh}) \cos \beta + l_{fh} + b_{hub}) \sin \beta \omega^2 + 2(l_{ph} + r_i) \sin \beta \cos \xi \omega \dot{\xi} - \\ - 2(l_{ph} + r_i) \sin \xi \dot{\beta} \dot{\xi}] ((l_{ph} + r) \cos \xi + l_{lh}) \rho dr, \end{aligned} \quad (4.6)$$

уравнение вращательного движения относительно ВШ

$$\begin{aligned} \int_0^R (q_{ay} + \rho g_y)(l_{ph} + r) dr = \int_0^R (l_{ph} + r) [(l_{ph} + r) \ddot{\xi} + \\ + ((l_{ph} + r) \cos \xi + l_{lh}) \sin \xi \dot{\beta}^2 - 2((l_{ph} + r) \cos \xi + l_{lh}) \cos \xi \sin \beta \omega \dot{\beta} + \\ + ((l_{fh} + l_{lh} \cos \beta + b_{hub}) \cos \beta \sin \xi - ((l_{ph} + r_i) \sin^2 \beta \sin \xi - c_{hub}) \cos \xi) \omega^2] \rho dr. \end{aligned} \quad (4.7)$$

При интегрировании предполагалось, что инерционные и аэродинамические силы приложены к геометрическому центру элемента лопасти. Радиус-вектор геометрического центра лопасти будем считать радиус-вектором элемента лопасти. Отметим, что к каждому сечению лопасти, соединяющему  $i$ -й и  $i + 1$ -й элемент лопасти, приложены две силы реакции  $N_i$ , равные по модулю и противоположные по направлению. В месте крепления лопасти к втулке действуют две подобные силы – реакция втулки на лопасть ( $N_1$ ) и первого элемента лопасти на втулку. Плечи приложения

<sup>3</sup>В уравнениях индексы  $x_{bfr}$ ,  $y_{bfr}$  и  $z_{bfr}$  для облегчения чтения заменены на  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно

парных сил реакции относительно шарниров одинаковы, поэтому моменты от этих сил взаимно сократились при выводе уравнений (4.6) и (4.7).

В исходной задаче распределение аэродинамических сил по лопасти и плотность лопасти дискретны по длине лопасти. Из интегрального вида уравнений следует, что дискретизации слагаемых, связанных с массой и АД силами, не зависят друг от друга и, вообще говоря, могут быть разными. Это никак не влияет на физические процессы в задаче, однако является полезным замечанием при реализации алгоритма.

Уравнения (4.6) и (4.7) были преобразованы к классическому виду закона сохранения кинетического момента:

уравнение относительно ГШ

$$\begin{aligned} & \ddot{\beta} \int_0^R ((l_{ph} + r) \cos \xi + l_{lh})^2 \rho dr = \\ & = \int_0^R (A_z q_{az} + B_z g_z \rho) dr + \int_0^R (C_z \omega^2 + D_z \omega \dot{\xi} + E_z \dot{\beta} \dot{\xi}) \rho dr, \end{aligned} \quad (4.8)$$

уравнение относительно ВШ

$$\ddot{\xi} \int_0^R (l_{ph} + r)^2 \rho dr = \int_0^R (A_y q_{ay} + B_y g_y \rho) dr + \int_0^R (C_y \omega^2 + D_y \omega \dot{\beta} + E_y \dot{\beta}^2) \rho dr. \quad (4.9)$$

Здесь коэффициенты  $A_z, A_y, B_z, B_y, \dots, E_y$  – множители перед соответствующими слагаемыми в уравнениях (4.6) и (4.7). Слагаемые в правой части этих уравнений есть моменты сил относительно ГШ и ВШ. Их можно разделить на моменты внешних и инерционных сил. Множители перед  $\ddot{\beta}$  и  $\ddot{\xi}$  есть моменты инерции рассматриваемой массо-геометрической модели лопасти относительно ГШ и ВШ соответственно.

$$\int_0^R ((l_{ph} + r) \cos \xi + l_{lh})^2 \rho dr = J_{fh},$$

$$\int_0^R (l_{ph} + r)^2 \rho dr = J_{lh}.$$

Законы сохранения кинетического момента для лопасти (4.8) и (4.9) можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}_{rel}}{dt} = \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{M}_i, \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{J}$  есть тензор инерции лопасти, определяемый моментами инерции  $J_{fh}$  и  $J_{lh}$  относительно горизонтального и вертикального шарниров,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{fh} & 0 \\ 0 & J_{lh} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\omega}_{rel} = (\dot{\beta}, \dot{\xi})^T$  – вектор угловых скоростей относительного вращения,  $\mathbf{M}_{ext} = (M_{fh}, M_{lh})^T$  – вектор моментов внешних сил;  $\mathbf{M}_i = (M_{fh}, M_{lh})^T$  – вектор моментов инерционных сил.

Таким образом получен и выписан в общем виде закон сохранения кинетического момента для лопасти шарнирного винта. Данный закон применим к трёхшарнирному креплению с разнесёнными шарнирами в последовательности ГШ-ВШ-ОШ и к сферическому шарнирному креплению. Ещё раз отметим, что в постановке задачи, с точки зрения массо-инерционных характеристик, считалось, что масса лопасти сосредоточена на её продольной оси. Поэтому данная система уравнений разрешает маховое движение и движения качания, считая, что циклический шаг и общий шаг винта задаётся аналитически.

Рассмотренная постановка задачи удобна для использования её при ведении расчётов вычислительной аэродинамики, поэтому заодно рассмотрим вероятный способ её интеграции в уже работающий код. Обычно результаты решения уравнений вычислительной аэродинамики хранятся в проекциях на глобальную систему координат, в данном случае это ВСК. Тогда необходимо значения аэродинамических сил  $\mathbf{F}_{hfr}$ , полученных в результате решения уравнений Навье-Стокса, спроецировать в ЛСК для использования их в системе уравнений (4.10):

$$\mathbf{F}_{bfr} = A_{hfr}^{bfr} \mathbf{F}_{hfr}.$$

Матрица перехода между этими системами координат:

$$A_{hfr}^{bfr} = \begin{pmatrix} \cos \xi \cos \beta \cos \psi - \sin \xi \sin \psi & \cos \xi \cos \beta \sin \psi + \sin \xi \cos \psi & \cos \xi \sin \beta \\ -\sin \xi \cos \beta \cos \psi - \cos \xi \sin \psi & -\sin \xi \cos \beta \sin \psi + \cos \xi \cos \psi & -\sin \xi \sin \beta \\ -\sin \beta \cos \psi & -\sin \beta \sin \psi & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Считая, что мы знаем конфигурацию лопасти и её пространственное положение, определяемое  $\beta, \xi, \dot{\beta}, \dot{\xi}$ , на текущий момент, можно утверждать, что теперь подготовлены все данные, необходимые для решения системы (4.10). После решения этой системы будут определены значения  $\beta, \dot{\beta}, \xi, \dot{\xi}$  на новом шаге по времени. Зная новое положение лопасти относительно шарниров, корректируем расчётную сетку и конфигурацию лопасти, тем самым получая начальные данные для такой же задачи, но на следующем шаге по времени.

#### 4.2. Методы решения полученной системы дифференциальных уравнений

В общем случае систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) можно записать в виде (здесь заменены обозначения производных с точки на штрих):

$$\beta'' = f_{\beta}(t, \beta, \beta', \xi, \xi'), \quad (4.11)$$

$$\xi'' = f_{\xi}(t, \beta, \beta', \xi, \xi').$$

Обозначим за  $y_1 = \beta$  и  $y_2 = \xi$  и введём новые переменные  $y_3 = \beta' = y_1'$  и  $y_4 = \xi' = y_2'$ . Обозначим через  $\mathbf{Y}$  новый вектор неизвестных переменных, а через  $\mathbf{F}$  – новый вектор правой части:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ f_{\beta}(t, y_1, y_3, y_2, y_4) \\ f_{\xi}(t, y_1, y_3, y_2, y_4) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Тогда систему (4.11) можно преобразовать к системе ОДУ первого порядка:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}). \quad (4.13)$$

Матрица Якоби такой системы имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_1} & \frac{\partial F_4}{\partial y_2} & \frac{\partial F_4}{\partial y_3} & \frac{\partial F_4}{\partial y_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{y_1}^{\beta} & f_{y_2}^{\beta} & f_{y_3}^{\beta} & f_{y_4}^{\beta} \\ f_{y_1}^{\xi} & f_{y_2}^{\xi} & f_{y_3}^{\xi} & f_{y_4}^{\xi} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

**Линейный метод Рунге-Кутты (LRKm)** Пусть известно решение системы на момент времени  $t^n$ , то есть задан вектор  $\mathbf{Y}^n$ . Требуется найти решение на момент  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Для этого рассмотрим следующую  $m$ -шаговую процедуру решения системы (4.12) - (4.13)[12]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}^{(0)} &= \mathbf{Y}^n, \\
 \mathbf{Y}^{(k)} &= \mathbf{Y}^n + \alpha_k \Delta t \mathbf{F}(t^n, \mathbf{Y}^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, m, \\
 \mathbf{Y}^{n+1} &= \mathbf{Y}^{(m)},
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

где набор коэффициентов  $\alpha_k$  есть

$$\alpha_k = \frac{1}{m - k + 1}. \tag{4.16}$$

Запишем процедуру решения (4.15) покомпонентно:

$$\begin{aligned}
 y_1^{(0)} &= y_1^n, \quad y_2^{(0)} = y_2^n, \quad y_3^{(0)} = y_3^n, \quad y_4^{(0)} = y_4^n, \\
 y_1^{(k)} &= y_1^n + \alpha_k \Delta t y_3^{(k-1)}, \\
 y_2^{(k)} &= y_2^n + \alpha_k \Delta t y_4^{(k-1)}, \\
 y_3^{(k)} &= y_3^n + \alpha_k \Delta t f^\beta \left( t^n, y_1^{(k-1)}, y_3^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, y_4^{(k-1)} \right), \\
 y_4^{(k)} &= y_4^n + \alpha_k \Delta t f^\xi \left( t^n, y_1^{(k-1)}, y_3^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, y_4^{(k-1)} \right), \\
 y_1^{n+1} &= y_1^{(m)}, \quad y_2^{n+1} = y_2^{(m)}, \quad y_3^{n+1} = y_3^{(m)}, \quad y_4^{n+1} = y_4^{(m)}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Данный метод численно решает нелинейную систему (4.12) - (4.13) со вторым порядком точности при числе шагов  $m \geq 2$ . При  $m = 1$  схема LRK1 есть метод Эйлера первого порядка<sup>1</sup>.

**Комплексный метод Розенброка (CROS)** Если для решения системы (4.12)-(4.13) возникает необходимость проводить расчёты с большим значением шага по времени  $\Delta t$ , то лучше использовать комплексную схему Розенброка второго порядка точности, хорошо зарекомендовавшую себя при решении жёстких систем ОДУ [13]. Введём комплексное число  $\alpha = \frac{1+i}{2}$ , где  $i^2 = -1$ . Тогда комплексная схема Розенброка запишется в виде

$$\mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{Y}^n = \operatorname{Re} \left( (\mathbf{I} - \alpha \Delta t \mathbf{J}(t^n))^{-1} \Delta t \mathbf{F}(t^n, \mathbf{Y}^n) \right), \tag{4.18}$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{J}$  – матрица Якоби (4.14).

---

<sup>1</sup>В случае линейной системы порядок точности равен  $m$



Для системы (4.12)-(4.13) с четырьмя неизвестными схему (4.18) можно записать в покомпонентном виде без использования комплексной арифметики и с одним вызовом функции для расчёта правой части, что делает схему более экономной, чем многошаговый метод (4.17).

## 5. Верификация

Полученная математическая модель движения шарнирно закреплённой лопасти была реализована в виде отдельного модуля в программном комплексе NOISEtte [7]. Верификация модели проведена на трёх тестовых задачах.

Первая верификационная задача представляет собой классический маятник. В её постановке масса лопасти сведена к одной точке, вращение винта отсутствует, аэродинамические силы не учитываются, а начальное положение лопасти задано с небольшим отклонением от направления ускорения свободного падения. Эта задача имеет точное аналитическое решение, с которым проводится сравнение.

Вторая верификационная задача рассматривает независимые колебания лопасти в направлениях взмаха и качания. В данной постановке гравитация исключена, аэродинамический расчёт отключён, а взаимное влияние угловых перемещений  $\beta(\xi)$  и  $\xi(\beta)$  исключено путём принудительного зануления одного из углов. Аналитическое решение линеаризованной версии этой задачи представлено в [3].

Третья задача посвящена выходу винта на стационарный режим с постоянным углом конусности при учёте только махового движения и воздействия аэродинамических сил. Данная задача не имеет точного аналитического решения, однако верификация результатов может быть проведена путём проверки выполнения условия равновесия, а именно равенства нулю суммарного момента всех внешних и инерционных сил, действующих на лопасть в установившемся режиме.

### 5.1. Маятник Конфигурация моделируемой системы:

- угловая скорость вращения ротора:  $\omega = 0$  рад/с;
- азимутальное смещение лопасти:  $\psi = 0$  рад;
- положение шарниров:  $l_{fh} = l_{lh} = l_{ph} = 0$  м;
- радиус втулки и смещение оси лопасти:  $r_{hub} = c_{hub} = 0$  м;
- начальные значения углов и угловых ускорений:  $\beta(0) = \frac{\pi}{2.1}$  рад,  $\xi(0) = 0$  рад,  $\dot{\beta}(0) = \dot{\xi}(0) = 0$  рад/с;
- распределение элементарных масс по размаху лопасти:  $dm_i \left( \frac{r_i}{R} \right) = [2 \text{ кг}, 0.5]$ ;

- длина лопасти:  $R = 10$  м;
- компоненты вектора ускорения свободного падения в ВСК:  $\mathbf{g}_{hfr} = (0, 0, -1)$  м/с<sup>2</sup>;
- аэродинамические силы отсутствуют.

Введём угол  $\beta_1 = \pi/2 - \beta$ , тогда движение маятника со стержнем с нулевой массой и  $N$  грузами одинаковой массы, расположенными на расстоянии  $r_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) от точки подвеса, описывается уравнением:

$$\ddot{\beta}_1 = g \frac{\sum_{i=1}^N r_i}{\sum_{i=1}^N r_i^2} \sin(\beta_1) = 0.$$

Если принять угол  $\beta_1$  малым, то решение этого уравнения даётся формулой

$$\beta_1(t) = \beta_1(0) \cos \left( \sqrt{g \frac{\sum_{i=1}^N r_i}{\sum_{i=1}^N r_i^2}} t \right),$$

или для угла исходного угла  $\beta$  в заданной выше постановки задачи

$$\beta(t) = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2.1} \right) \cos(\sqrt{0.2}t).$$

На Рис.4 приведено сравнение численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.10) с аналитическим решением линейного уравнения. Видно, что численное решение практически неотлично от точного решения.

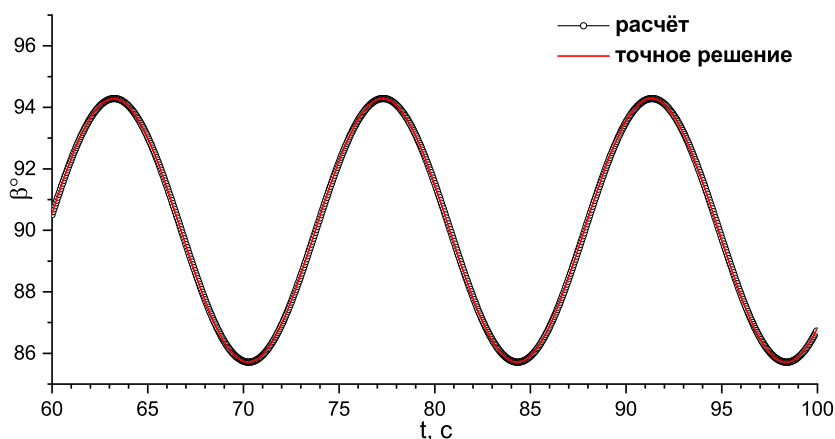


Рис. 4. Изменение угла  $\beta$  в зависимости от времени в задаче о маятнике

## 5.2. Независимые колебания лопасти при вращении

**Колебания по углу  $\beta$**  Конфигурация моделируемой системы:

- угловая скорость вращения ротора:  $\omega = 1$  рад/с;
- азимутальное смещение лопасти:  $\psi = 0$  рад;
- положение шарниров:  $l_{fh} = 10$  м,  $l_{lh} = l_{ph} = 0$  м;
- радиус втулки и смещение оси лопасти:  $r_{hub} = c_{hub} = 0$  м;
- начальные значения углов и угловых ускорений:  $\beta(0) = 0.02\pi$  рад,  $\xi(0) = 0$  рад,  $\dot{\beta}(0) = 0.01\pi$  рад/с,  $\dot{\xi}(0) = 0$  рад/с;
- распределение элементарных масс по размаху лопасти:  $dm_i \left(\frac{r_i}{R}\right) = [2 \text{ кг}, 0.5]$ ;
- длина лопасти:  $R = 10$  м;
- компоненты вектора ускорения свободного падения в ВСК:  $\mathbf{g}_{hfr} = (0, 0, 0)$  м/с<sup>2</sup>;
- аэродинамические силы отсутствуют;
- $\xi(t) = const = 0$  рад.

Аналитически, при малых углах, данное движение по углу  $\beta$  под действием центробежной силы инерции от вращения с лопастью описывается уравнением

$$\ddot{\beta} + (1 + \epsilon)\omega^2\beta = 0,$$

где  $\epsilon = 1 + S_{fh}l_{fh}/J_{fh}$ ,  $S_{fh} = \sum dm_i(l_{lh} + (l_{ph} + r_i) \cos \xi)$  – центр масс лопасти по оси  $Oy_{bfr}$ ,  $J_{fh} = \sum dm_i(l_{lh} + (l_{ph} + r_i) \cos \xi)^2$  – момент инерции лопасти относительно оси  $Oy_{bfr}$ .

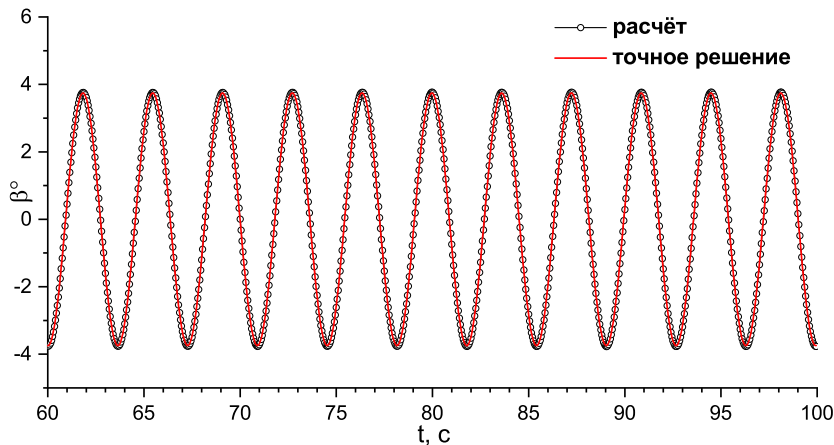


Рис. 5. Изменение угла  $\beta$  в зависимости от времени в задаче о вращении лопасти

В общем виде это линейное уравнение имеет следующее решение:

$$\beta(t) = \beta_0 \cos(\sqrt{1 + \epsilon}\omega t) + \frac{\dot{\beta}_0}{\sqrt{1 + \epsilon}\omega} \sin(\sqrt{1 + \epsilon}\omega t),$$

или при данной выше конфигурации

$$\beta(t) = 0.02\pi \cos(\sqrt{3}t) + \frac{0.01\pi}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t).$$

На Рис.5 приведено сравнение численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.10) с аналитическим решением линейного уравнения. Видно, что численное решение практически неотлично от точного решения.

**Колебания по углу  $\xi$**  Рассмотрим второй тест – движения лопасти по углу  $\xi$  – и сравним с аналитическим решением. Зададим конфигурацию моделируемой системы:

- угловая скорость вращения ротора:  $\omega = 1$  рад/с;
- азимутальное смещение лопасти:  $\psi = 0$  рад;
- положение шарниров:  $l_{fh} = 5$  м,  $l_{lh} = 3$  м,  $l_{ph} = 0$  м;
- радиус втулки и смещение оси лопасти:  $r_{hub} = c_{hub} = 0$  м;
- начальные значения углов и угловых ускорений:  $\beta(0) = 0$  рад,  $\xi(0) = 0.02\pi$  рад,  $\dot{\beta}(0) = 0$  рад/с,  $\dot{\xi}(0) = 0.01\pi$  рад/с;
- распределение элементарных масс по размаху лопасти:  $dm_i \left( \frac{r_i}{R} \right) = [2 \text{ кг}, 0.5]$ ;
- длина лопасти:  $R = 10$  м;
- компоненты вектора ускорения свободного падения в ВСК:  $\mathbf{g}_{hfr} = (0, 0, 0)$  м/с<sup>2</sup>;
- аэродинамические силы отсутствуют.
- $\beta(t) = const = 0$  рад.

При малых углах аналитически данное движение описывается следующим уравнением:

$$\ddot{\xi} + \nu^2 \omega^2 \xi = 0,$$

где  $\nu^2 = S_{lh}(l_{fh} + l_{lh})/J_{lh}$ ,  $S_{lh} = \sum dm_i(l_{ph} + r_i)$  – центр масс лопасти по оси  $Oz_{bfr}$ ,  $J_{lh} = \sum dm_i(l_{ph} + r_i)^2$  – момент инерции лопасти относительно оси  $Oz_{bfr}$ . В общем виде это линейное уравнение имеет следующее решение:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\nu\omega t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\nu\omega} \sin(\nu\omega t),$$

или при данной выше конфигурации

$$\xi(t) = 0.02\pi \cos(\sqrt{1.6}t) + \frac{0.01\pi}{\sqrt{1.6}} \sin(\sqrt{1.6}t).$$

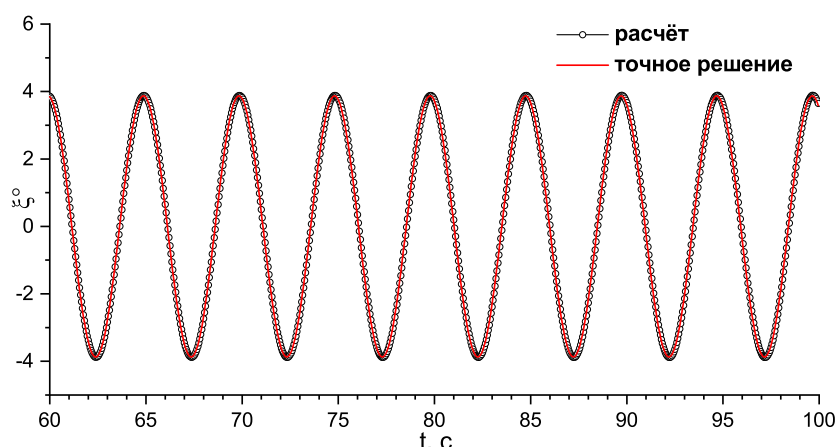


Рис. 6. Изменение угла  $\xi$  в зависимости от времени в задаче о вращении лопасти

На Рис.6 приведено сравнение численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.10) с аналитическим решением линейного уравнения. Видно, что численное решение практически неотличимо от точного решения.

**Выход на постоянный угол конусности** Эта задача рассматривалась, чтобы была произведена верификация работы с учётом аэродинамических сил. Конфигурация моделируемой системы:

- угловая скорость вращения ротора:  $\omega = 650$  об/мин;
- азимутальное смещение лопасти:  $\psi = 0$  рад;
- положение шарниров:  $l_{fh} = 0.05$  м,  $l_{lh} = 0$  м,  $l_{ph} = 0.077$  м;
- радиус втулки и смещение оси лопасти:  $r_{hub} = c_{hub} = 0$  м;
- начальные значения углов и угловых ускорений:  $\beta(0) = 0$  рад,  $\dot{\beta}(0) = 0$  рад/с, в данной задаче  $\dot{\xi}(t) = const = 0$  рад/с и  $\xi(t) = const = 0$  рад;
- распределение элементарных масс по длине лопасти:  $dm_i \left( \frac{r_i}{R} \right) = [1 \text{ кг}, 0.5]$ ;
- длина лопасти:  $R = 1.015$  м;
- компоненты вектора ускорения свободного падения в ВСК:  $\mathbf{g}_{hfr} = (0, 0, -9.8)$  м/с<sup>2</sup>;
- угол установки лопасти  $\phi(t) = const = 8^\circ$ .

В задаче моделируется обтекание двухлопастного винта с прямоугольными в плане лопастями на основе аэродинамического профиля НАСА0012 без крутки (Рис.7), хорда лопасти – 0.1903 метра (удлинение б). Параметры среды, обтекание в которой моделировалось, были выбраны таким образом, чтобы обеспечить значение числа Рейнольдса  $10^4$ , чтобы уменьшить требования по высоте приграничных ячеек для обеспечения условия  $y^+ < 1$ . Моделирование течения производилось на основе системы уравнений Навье-Стокса,

осреднённых по Рейнольдсу с замыканием моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса. В ходе расчёта на очередном шаге по времени по распределению давления на поверхности лопастей определялись аэродинамические силы, действующие на лопасть. Они передавались в модуль кинематики лопасти шарнирного винта.

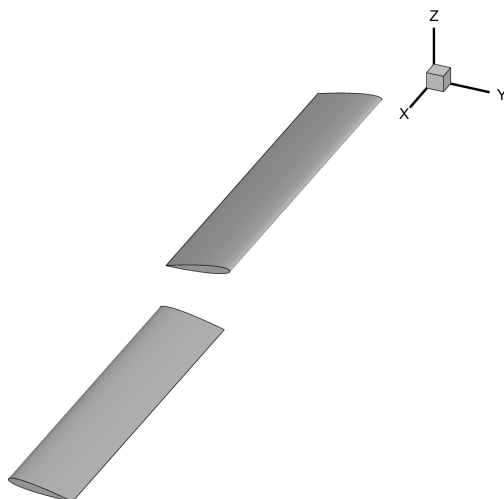


Рис. 7. Модельный двухлопастной винт

При данной постановке задачи качественно получилось ожидаемое решение – после 20 оборотов тяга и угол конусности винта стабилизировались и вышли на стационарные значения (см. Рис.8, вертикальные линии соответствуют началу очередного оборота винта). Угол конусности вышел на значение  $0.78^\circ$ , тяга – 7.3 кгс, а крутящий момент – на 10.5 кгм. Характер выхода на установившиеся значения качественно соответствует ожидаемым.

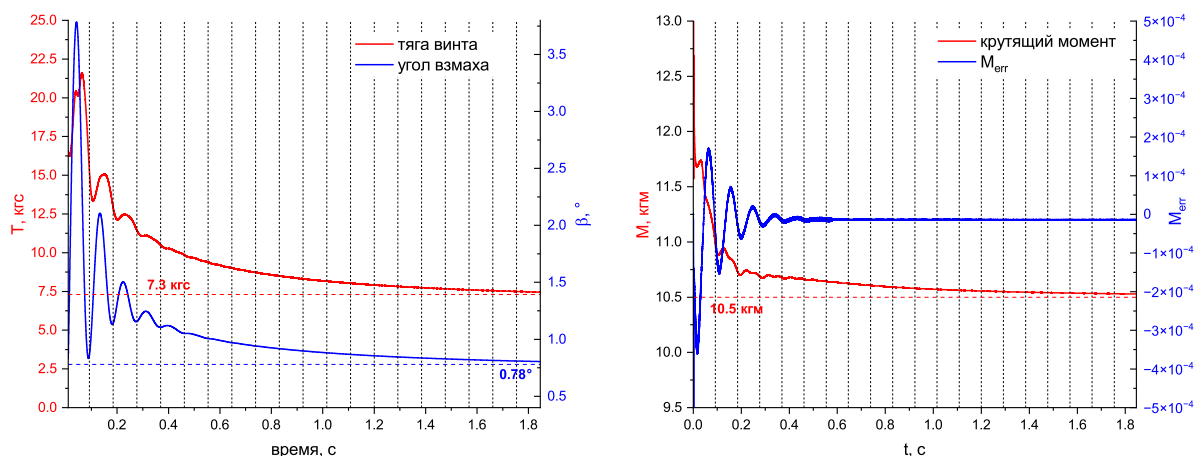


Рис. 8. Характеристики двухлопастного модельного винта

Провести численную верификацию результатов его работы можно путём проверки выполнения условия равновесия в отдельные моменты времени с

точки зрения принципа Даламбера. В рассматриваемой постановке задачи на лопасти действуют только следующие силы с точки зрения этого принципа: сила тяжести, аэродинамическая сила и сила инерции, состоящая из слагаемых, полученных от вращения с винтом  $\omega$  и от ускорения  $\ddot{\beta}$ . А условие равновесия записывается в виде (5.1).

$$-M_{\omega} - M_g + M_{AD} - M_{\ddot{\beta}} = 0, \quad (5.1)$$

где  $M_{\ddot{\beta}} = J\ddot{\beta}$ ,  $J$  – момент инерции лопасти относительно ГШ.

Наглядно это равновесное состояние изображено на Рис.8. Значения моментов инерционных сил и силы тяжести  $M_{\omega}$ ,  $M_g$  и  $M_{\ddot{\beta}}$  возможно определить из конфигурации лопасти и данных о её пространственном положении. Для определения момента аэродинамической силы необходимо провести дополнительную обработку полученных в ходе расчёта данных, так как точка приложения суммарной аэродинамической силы заранее не известна. В данном случае лопасть была разбита на секции. Исходя из имеющегося после аэродинамического расчёта распределения давлений по поверхности лопасти, для каждой секции была определена аэродинамическая сила, действующая на неё. Считалось, что эта аэродинамическая сила приложена к геометрическому центру секции. Исходя из этих соображений был определён полный аэродинамический момент относительно ГШ путём суммирования по всем секциям произведений аэродинамических моментов секций на соответственный рычаг относительно ГШ.

Это равенство было проверено на каждом шаге моделирования. Причём неточность выполнения равенства считалась следующим образом:

$$M_{err} = \frac{M_{AD} - M_{\omega} - M_g - M_{\ddot{\beta}}}{|M_{AD}|}.$$

Полученный результат представлен на Рис.8, слева. Максимальная ошибка в уравнениях равновесия составляет  $4 \cdot 10^{-4}$ . Эта ошибка соответствует изменению массы лопасти в текущей конфигурации примерно на 0.1%, из чего можно считать, что равновесие выполняется и алгоритм реализован верно.

## 6. Заключение

В работе получена система дифференциальных уравнений, описывающих динамику шарнирно закреплённой лопасти винта вертолёта с учётом воздействия на неё аэродинамических сил, рассчитанных методами вычислительной гидродинамики. Разработанная математическая модель лопасти с тремя разнесёнными шарнирами позволяет учитывать взаимодействие лопасти, совершающее сложное движение, с внешним

потоком. Проведена верификация модели на трёх тестовых задачах, подтверждающая корректность предложенного подхода и его применимость для решения реальных задач.

В перспективе предлагаемый метод может быть расширен для учёта дополнительных факторов, таких как упругость лопастей и более сложные конфигурации шарнирных соединений, что позволит разработанной методике ещё больше повысить точность моделирования реального несущего винта вертолётa.

## Список литературы

1. Бахвалов П.А. Моделирование течения в системах ротор–статор с осесимметричным статором рёберно-ориентированными схемами // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 124. С. 1—16. URL: <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-124>.
2. Бахвалов П.А., Вершков В.А. Рёберно-ориентированные схемы на подвижных гибридных сетках в коде NOISEtte // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 127. С. 1—36. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-127>.
3. У. Джоносон. Теория вертолета: В 2 книгах. Кн. 1. Москва: Мир, 1983. с. 502.
4. Вертолётa, расчёт и проектирование. Том 1. Аэродинамика / М.Л. Миль, А.В. Некрасов, А.С. Браверман [и др.]. Москва: Машиностроение, 1966.
5. Вертолётa, расчёт и проектирование. Том 2. Колебания и динамическая прочность / М.Л. Миль, А.В. Некрасов, А.С. Браверман [и др.]. Москва: Машиностроение, 1967.
6. Гессоу А., Мейерс Г. Аэродинамика вертолета. Москва: Государственное издательство оборонной промышленности, 1954.
7. NOISEtte CFD&CAA Supercomputer Code for Research and Applications / Abalakin, Ilya V., Bakhvalov, Pavel A., Bobkov, Vladimir G. et al. // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2024. aug. Vol. 11, no. 2. P. 78–101. URL: <https://superfri.org/index.php/superfri/article/view/562>.
8. Численное исследование аэродинамических и акустических свойств винта в кольце / И.В. Абалакин, В.А. Аникин, П.А. Бахвалов [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 130–145. URL: <https://doi.org/10.7868/S0568528116030026>.



9. Численное моделирование обтекания жесткого винта в косом потоке / И.В. Абалакин, В.Г. Бобков, Т.К. Козубская [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2020. № 4. С. 105–116. URL: <https://doi.org/10.31857/S0568528120040015>.
10. Supercomputer Simulation of Turbulent Flow Around Isolated UAV Rotor and Associated Acoustic Fields / Bobkov Vladimir, Gorobets Andrey, Kozubskaya Tatiana et al. // Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1510. P. 256–269.
11. Методика деформации неструктурированных сеток в задачах определения аэродинамических характеристик тел при малых перемещениях / В.Г. Бобков, В.А. Вершков, Т.К. Козубская [и др.] // Математическое моделирование. 2021. Т. 33, № 3. С. 109–132. URL: <http://dx.doi.org/10.20948/mm-2021-03-08>.
12. Jameson A. Numerical solution of the Euler equations for compressible inviscid fluids // Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics / под ред. F. Angrand, A. Dervieux, J.A. Désidéri [и др.]. Philadelphia: SIAM, 1985. С. 199–245.
13. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем / А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Н.Н. Калиткин [и др.] // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46, № 8. С. 1392–1414.