



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 9 за 2025 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Колесниченко

К моделированию процессов
агрегации пылевых
фрактальных кластеров в
допланетном ламинарном
диске

Статья доступна по лицензии
[Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К моделированию процессов агрегации пылевых фрактальных кластеров в допланетном ламинарном диске // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 9. 44 с. EDN: [LPYGIQ](https://doi.org/10.26907/2071-2898.2025.9.44)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2025-9>

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

А. В. Колесниченко

**К моделированию процессов агрегации
пылевых фрактальных кластеров
в допланетном ламинарном диске**

Москва — 2025

Колесниченко А. В.

К моделированию процессов агрегации пылевых фрактальных кластеров в допланетном ламинарном диске.

Аннотация. В рамках проблемы формирования планетезималей в Солнечном допланетном облаке развита гидродинамическая модель образования и роста пылевых фрактальных агрегатов в аэродисперсной среде ламинарного протопланетного диска. Показано, как в процессе кластер-кластерной коагуляции происходит слипание твердых пылевых частиц (суб)микронных размеров с образованием укрупненных фрактальных агрегатов, являющихся основным структурообразующим элементом планетезималей в диске. В отличие от ряда существующих исследований, когда моделирование проводилось в рамках «обычной» сплошной среды и когда зачастую не принималась во внимание многодисперсность пылевой составляющей, а также фрактальность образующихся рыхлых пылевых кластеров, предлагается рассматривать газопылевую среду диска как особый тип фрактальной среды, в которой существуют не заполненные частицами пространственные области. Поскольку кинетика процессов укрупнения фрактальных тел существенным образом зависит от конкретного вида ядер коагуляции, то в работе предложен достаточно общий метод их аппроксимации, позволяющий получить для них упрощенные выражения в случае ламинарного движения дисковой среды. Предлагается качественное решение интегро-дифференциального уравнения Смолуховского с помощью приближенных методов получения центральных моментов функции распределения для фрактальной дисковой системы и последующего использования параметров кривых Пирсона. Полученные результаты обеспечивают новый подход в решении ключевой проблемы звездно-планетной космогонии, связанный с объяснением процесса роста межзвездных пылевых кластеров до крупных планетезималей.

Ключевые слова: допланетные газопылевые диски, гидродинамика фрактальных сред, уравнение Смолуховского, процессы коагуляции.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

To modelling of processes of aggregation of dust fractal clusters in a preplanetary laminar disc.

Annotation. Within the framework of the problem of planetesimals formation in the solar preplanetary cloud, a hydrodynamic model of formation and growth of dust fractal aggregates in the aerodisperse medium of the laminar protoplanetary disc is developed. It is shown how in the process of cluster-cluster coagulation the solid dust particles of (sub)micron sizes coalesce with the formation of enlarged fractal aggregates, which are the main structure-forming element of planetesimals in the disc. In contrast to a number of existing studies, when modelling was carried out in the framework of an ‘ordinary’ continuous medium and when the multidispersity of the dust component, as well as the fractality of the formed friable dust clusters, it is proposed to consider the aerodisperse medium of the disk as a special type of fractal medium, in which there exist spatial regions not filled with particles. Since the kinetics of the processes of fractal bodies enlargement essentially depends on a particular type of coagulation nuclei, a rather general method of their approximation is proposed in the paper, which allows us to obtain simplified expressions for them in the case of laminar motion of the disc medium. We propose a qualitative solution of the Smoluchowski integro-differential equation by means of approximate methods for obtaining the central moments of the distribution function for a fractal disc system and the subsequent use of Pearson curves parameters. The obtained results provide a new approach in solving the key problem of stellar-planetary cosmogony related to the explanation of the process of growth of interstellar dust clusters to large planetesimals.

Key words: preplanetary discs, hydrodynamics of fractal media, Smoluchowski equation, coagulation processes.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема образования планет Солнечной системы напрямую связана с ранней стадией формирования и эволюции допланетного газопылевого диска. По современным представлениям, планетезимали формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения вещества допланетного облака по орбите вокруг солнцеподобной звезды, и процессов аккреции при оседании его пылевой составляющей к экваториальной плоскости, перпендикулярной оси вращения диска (см., например, Сафронов, 1969; Goldrich, Ward, 1973; Nakagawa et al., 1986; Toomre, 1964; Youdin, Shu, 2002). При сильном уплощении пылевой составляющей образовавшегося субдиска, когда плотность пыли в слое достигает некоторого критического значения, диск становится гравитационно неустойчивым. В районах с высокой плотностью этих сгущений последующая эволюция приводит к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т. е. к образованию роя первичных газопылевых агломератов [Dominik, Tielens, 1997], служащих основой зародышей рыхлых (fluffy) планетезималей. Наконец, на заключительной стадии процесса эволюции первичного газопылевого диска благодаря собственной гравитации происходит формирование твердотельных километровых планетезималей с большой начальной массой порядка массы астероидов $\sim 10^{15} \dots 10^{19}$ г и размерами в пределах $\sim 0,1 \dots 10$ км (см. [Сафронов, 1969; Nakagawa et al., 1983; Weidenschilling, 1980]).

К сожалению, несмотря на колоссальный прогресс в изучении внеземного вещества, в получении данных наблюдений околозвездных аккреционных дисков, открытии экзопланет и совершенствовании теоретических подходов математического моделирования, астрофизики все еще далеки от решения многих ключевых проблем указанного выше сценария. Одной из таких нерешенных проблем является поиск физического механизма объединения исходных твердых частиц субмикронного и микронного размеров газопылевого диска в планетезимали.

В связи с этим важно отметить, что до последнего времени в большинстве теоретических моделей процессов агрегации пылевых частиц в допланетном диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые образования могут иметь весьма пушистую структуру и чрезвычайно низкую объемную плотность (см., на пример, [Blum,

2004; Okuzumi et al., 2011; Ormel et al., 2007; Suyama et al., 2008; Wada et al., 2008]).

Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с компактными пылевыми агрегатами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь режим их движения в несущей газовой среде, в частности из-за значительного изменения силы трения. Следовательно, для адекватного описания эволюции пылевых агрегатов в диске и, в конечном счете, механизма образования планетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства и внутреннюю структуру рыхлых пылевых агрегатов. В данной работе мы не будем учитывать влияние турбулентности на указанные процессы, а сосредоточимся на построении базовых уравнений эволюционной модели ламинарного допланетного диска, описывающей рост пылевых агрегатов и их гидродинамический перенос с точки зрения фрактальных представлений.

В последние годы появилось значительное число работ, в которых рассматривается внутренняя структура пылевых агрегатов в диске и ее перестройка при достаточно сильных столкновениях кластеров, что, несомненно, способствует более углубленному пониманию тех реальных процессов, сопровождающих ассоциацию мелкодисперсных пылевых частиц в протопланетезимали (см., например, [Сафронов, 1969; Blum, 2004; Okuzumi et al., 2011; Ormel et al., 2007; Ossenkopf, 1993; Suyama et al., 2008; Wada et al., 2008, Nakagawa et al., 1981, 1986; Weidenschilling, 1980]). Однако в этих работах моделирование велось в рамках «обычной» сплошной среды и зачастую не принимались во внимание многофракционность пылевой составляющей допланетного облака, а также фрактальная природа формирующихся в процессе его эволюции пылевых кластеров (изучались в основном компактные пылевые образования с постоянной плотностью или пористые тела). В отличие от этих работ, в представленном нами подходе предлагается рассматривать совокупность пылевых агрегатов как особый тип фрактальной сплошной среды, для которой существуют области, не заполненные ее частицами. Первая часть предпринятого здесь исследования посвящена исключительно математическим аспектам моделирования подобной среды, в которой формируются разномасштабные фрактальные кластеры, служащие в конечном счете основой зародышей рыхлых пылевых агрегатов и крупных планетезималей. При этом рассматривается ранняя стадия этого процесса, происходящая без перестройки внутренней структуры кластеров; более поздняя фаза кластер-кластерной агрегации, связанная с их сжатием при столкновениях с энергией, превышающей некоторое критическое значение, может быть учтена

опосредованно при использовании (характерной для сжатых агрегатов) массовой размерности среды, равной 2,5. Кроме этого, мы ограничились рассмотрением механизмов броуновской и гравитационной коагуляции пылевых мономеров и фрактальных кластеров, находящихся в кинетическом и диффузионном режимах движения, что позволяет достаточно точно рассчитать процесс седиментации фрактальных пылевых агрегатов и определить их максимальные размеры в случае пренебрежения радиальным дрейфом и фрагментацией. Второй шаг моделирования включает учет радиального дрейфа и радиального перемешивания пылевых образований, когда мономерам и кластерным агрегатам «разрешено» двигаться во внутренние области диска и исчезать в зоне испарения. В этом общем случае приходится привлекать к рассмотрению $(2+1)$ -мерное кинетическое уравнение коагуляции Смолуховского, в котором одно измерение связано с радиальной координатой диска ω , другое измерение связано с высотой над экваториальной плоскостью z , а третья координата отвечает массе пылевых кластеров.

Известно, что решение уравнения коагуляции Смолуховского на каждом временном шаге для каждого размера допланетных тел и в каждой пространственной точке является наиболее узким местом в теории процесса их аккумуляции. В частности, поскольку во фрактальной среде вид коэффициентов коагуляции пылевых кластеров (в частности, коэффициенты мономер-кластерной коагуляции и кластер-кластерной коагуляции) существенно видоизменяется (см. Колесниченко, Маров, 2014a,b), то это обстоятельство существенно усложняет решение кинетического уравнения Смолуховского, моделирующего процессы аккумуляции допланетных тел. По этой причине требуется разработка эффективного подхода, позволяющего находить эмпирические распределения для оценки характеристик стохастической коагулирующей дисковой системы, когда имеются лишь ограниченные данные о структурных параметрах составляющих ее компонентов. Для таких распределений необходимо получить приемлемые аппроксимации в тех случаях, когда имеется возможность теоретически определить некоторые моменты распределения, а искомое точное распределение остается неизвестным. В качестве аппроксимирующих распределений в данной работе предложено использовать кривые Пирсона (Pearson, Hartley, 1954). Решение поставленной задачи базируется также на приближенных методах получения моментов системы, которые позволяют найти центральные моменты, а затем и параметры кривых Пирсона. В работе проводится сравнение этих методов и обсуждается практическая применимость каждого из них. При рассмотрении методов получения моментов стохастической системы приводятся выражения,

позволяющие, в частности, оценить среднее расстояние, симметрию и островершинность вероятностного распределения характеристик системы. Эти выражения используются затем при подборе эмпирических моделей по диаграмме Пирсона. В качестве справочного материала приведены точные и полные формулы для основных типов кривых Пирсона.

1. МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ И ДИНАМИКИ ПЫЛЕВЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ: БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Свойства фрактальных пылевых кластеров в диске

При моделировании дисковой системы будем исходить из того, что на самой ранней стадии эволюции газопылевого диска мелкодисперсные твердые частицы (мономеры), двигаясь вместе с газом и сталкиваясь на предельно низких скоростях (~ 10 см/с), слипаются друг с другом (при этом ближайшие соседи образуют химическую связь в зонах контакта), создавая пылевые фрактальные кластеры (ФК) с квазимонодисперсным распределением по размерам. Благодаря низкоскоростным столкновениям растущие пылевые кластеры имеют ворсистую (*fluffy*) структуру с дробной фрактальной размерностью $1.7 < D_f < 2.1$ (см. Meakin, 1984). По мере связывания мономеров в крупные пылевые кластеры, механизм «частица-кластер» замещается агрегацией «кластер-кластер» (Meakin, 1983; Meakin и др., 1989), что приводит к формированию фрактальных структур с более высоким значением массовой размерности D_f . При этом массовая размерность ФК может достигать значений ~ 2.5 , что свидетельствует, в частности, о том, что крупные сжатые пылевые агрегаты в протопланетном облаке могут формироваться при столкновениях «пушистых» агрегатов (Wada и др., 2008).

Далее будем считать, что все первичные мелкодисперсные пылевые частицы вне зависимости от их реальной формы, размеров и материала, являются твердыми сферами, имеющими один и тот же радиус r_0 и массу μ_0 , поскольку форма мономера (сферическая, эллипсоидальная и т.п.) оказывает незначительное влияние ($\lesssim 2\%$) на фрактальную размерность образующихся кластеров (Vertini и др., 2009)). По мере слипания мономеров в кластеры формируются ФК относительно крупных размеров. При этом число n_0 первичных пылевых частиц (ядер), входящих в состав изотропного ФК, и масса кластера m^{cl} определяются следующими асимптотическими формулами (Смирнов, 2011):

$$n_0 := (R_G / r_0)^{D_f}, \quad m^{cl} := \mu_0 n_0 = \mu_0 (R_G / r_0)^{D_f}, \quad R_G / r_0 \gg 1, \quad (1)$$

в которых $R_G := \sqrt{N^{-1} \sum_{i=1}^N |x_i - x_{centre}|^2}$ – характерный размер изотропного кластера (радиус гирации), N – число элементов изображения, принадлежащих кластеру; x_i – радиус вектор i -го мономера, входящего в кластер, x_{centre} – положение центра масс ФК;

$$D_f := \ln n_0 / \ln(R_G / r_0), \quad (1 < D_f < D) \quad (2)$$

– фрактальная размерность числа частиц (или массовая размерность) кластера, являющаяся количественной характеристикой заполнения им евклидова пространства (с размерностью D), а также характеризующая самоподобие его внутренней структуры (Mandelbrot, 1982; Okuzumi и др., 2011). Далее будем предполагать, что внутренняя структура всех кластеров, формирующихся в аэродисперсной дисковой среде, одинакова, поскольку они образуются в одних и тех же областях диска.

Первая компьютерная модель для описания процесса сборки кластера была предложена в работе (Witten, Sander, 1981) и получила название *DLA*-модель (*Diffussion Limited Aggregation*). В этой модели предполагается, что частицы, совершая брауновское движение в пространстве, соприкасаются с кластером и прилипают к нему. В случае *CCA*-модели (*Cluster-Cluster Aggregation*) (Meakin, 1983) на первой стадии процесса образуется большое число кластеров малых размеров, которые далее объединяются в кластеры бóльших размеров. В результате образуются более рыхлые кластеры, чем в рамках *DLA*-модели, поскольку при таком способе сборки труднее заполнить пустоты. В *RLCA*-модели (*Reaction Limited Cluster Aggregation*) (Jullien, 1986) вероятность прилипания при касании частиц считается малой, поэтому при кластер-кластерной агрегации кластеры могут глубже проникать друг в друга, и в результате образуется более компактный кластер. Наконец, в случае баллистической модели сборки кластеров (*BCCA*) считается, что длина пробега частиц велика по сравнению с размерами области прилипания и потому траектории их движения являются прямолинейными; при таком способе сборки кластер становится наиболее компактным (Vold, 1963; Sutherland, 1966). В табл. 1 представлены значения фрактальной размерности кластеров, образующихся в трехмерном пространстве при различных механизмах роста.

При объединении большого числа малых кластеров (в результате процесса кластер-кластерной ассоциации) образуются обладающие самоподобными свойствами на малых расстояниях однородные рыхлые агрегаты, в которых по мере увеличения их радиуса гирации увеличиваются размеры пустот, а средняя плотность $\bar{\rho}^{cl}$ (средняя массовая плотность вещества в объеме, занимаемом

кластером) убывает по закону $\bar{\rho}^{cl} := \rho_0 (r_0 / R_G)^{3-D_f}$, где $\rho_0 := 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер. Отсюда следует вывод, что одним из характерных свойств фрактального агрегата является его способность охватывать большое пространство (за счет создания ажурной, сильно разветвленной структуры) при использовании меньшего по сравнению с плотным агрегатом количества вещества, необходимого для его образования.

Таблица 1. Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации твердых частиц (Смирнов, 1991)

Модель агрегации	Вероятность прилипания, κ^P	Фрактальная размерность, D_f
Прямолинейная траектория, кластер-частица	$\kappa^P = 1$	$2,97 \pm 0,08$
Брауновское движение, кластер-частица	$\kappa^P = 1$	$2,51 \pm 0,06$
	$\kappa^P = 0,25$	$2,48 \pm 0,12$
Прямолинейная траектория, кластер-кластер	$\kappa^P = 1$	$2,00 \pm 0,05$
Брауновское движение, кластер-кластер	$\kappa^P = 1$	$1,78 \pm 0,05$
Кластер-кластер, малая вероятность прилипания (RLCA-модель)	$\kappa^P < 1$	$2,11 \pm 0,03$

Дробная массовая размерность D_f пылевых кластеров в дисковой среде определяет, в конечном счете, их аэродинамические свойства, стабильность и динамику роста (Chen и др., 1987; Wiltzius, 1987), а следовательно, и пространственно-временную эволюцию этих рыхлых образований (Смирнов, 1991). В частности, в силу рыхлой структуры и меньшей массовой плотности ФК обладают гораздо бóльшей седиментационной устойчивостью (т.е. низкой скоростью оседания частиц) по сравнению с плотными пылевыми кластерами.

1.2. Основные допущения модели

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность физико-химических, динамических и коагуляционных эффектов, происходящих в допланетном облаке в процессе его эволюции, с необходимостью требует разумной схематизации описания дисковой гетерогенной среды. В связи с этим будем далее предполагать, что движение газа и пылевой составляющей диска можно адекватно описать при следующих допущениях:

- I) предполагается несжимаемость материала мономеров, $\rho_0 = \text{const}$;
- II) истинная плотность материала мономеров много больше истинной

плотности газовой составляющей дисковой системы, $\rho_0 \gg \tilde{\rho}_g$;

III) объемное содержание s^{cl} дисперсной фазы не очень велико, так что членами порядка $(s^{cl})^2$ можно пренебречь;

IV) несущая фаза – сжимаемый идеальный газ;

V) вязкость дисперсной фазы можно не учитывать;

VI) предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_d = T$;

VII) суммарный гетерогенный континуум рассматривается в однодавленческом приближении, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$.

Таким образом, эволюционирующее газопылевое протопланетное облако предполагается рассматривать как гетерогенный термодинамический комплекс, состоящий из двух взаимосвязанных подсистем, которые заполняют одновременно один и тот же объем евклидова пространства – газовой фазы солнечного состава (континуальная среда) и полидисперсной фазы пылевых частиц (фрактальная среда с нецелой массовой размерностью D_f , меньшей размерности D координатного пространства, которые находятся при общей абсолютной температуре T и давлении p . Газовую фазу, являющуюся несущей средой, будем описывать далее моделью вязкой жидкости. В свою очередь, полидисперсную пылевую фазу будем считать многоскоростной средой, состоящей из нескольких фракций: фракции первичных пылевых конденсированных мономеров и внедренных в нее многочисленных фракций пылевых фрактальных агрегатов, отличающихся друг от друга только размерами. Другими словами, элементарный микрообъем δV дисковой среды содержит, помимо несущей газовой фазы, описываемой обычными структурными параметрами (такими как числовая $n_g(\mathbf{x}, t)$ и массовая $\rho_g(\mathbf{x}, t) = n_g \mu_g$ плотности, давление $p_g(\mathbf{x}, t)$, температура $T_g(\mathbf{x}, t)$, гидродинамическая скорость $\mathbf{U}_g(\mathbf{x}, t)$ и т.п.), еще множество твердотельных фрактальных образований, которое можно разбить на k ($k = 1, 2, \dots, Q$) фракций – пылевых кластеров с одинаковыми размерами. Если пронумеровать эти фракции в порядке возрастания размеров кластеров, то фракция-1 будет содержать первичные мономеры, фракция-2 содержит ассоциации двух мономеров и т.д. В результате мы получим Q фракций, имеющих следующие характеристики:

$$m_k^{cl} := n_{0,k} \mu_0, \quad R_{G,k} := r_0 n_{0,k}^{1/D_f}, \quad V_k^{cl} := (4\pi/3) R_{G,k}^3, \quad \rho_k^{cl}(\mathbf{x}, t) := \mu_0 n_{0,k} N_k^{cl},$$

$$N_k^{cl}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{\rho}_k^{cl} := m_k^{cl} / V_k^{cl}, \quad s_k^{cl}(\mathbf{x}, t) := V_k^{cl} N_k^{cl}, \quad \mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

Здесь r_0 и μ_0 – радиус и масса первичных мономеров, из которых составлен ФК; $\rho_0 := 3\mu_0 / 4\pi r_0^3$ – массовая плотность материала первичных ядер; $n_{0,k} := (R_{G,k} / r_0)^{D_f}$ – число первичных мономеров, входящих в состав k -го ФК; $R_{G,k}$ – радиус гирации k -го ФК, состоящего из $n_{0,k}$ пылевых мономеров; D_f – фрактальная размерность отдельного кластера и фрактальной среды в целом; $V_k^{cl} := (4/3)\pi r_0^3 n_{0,k}^{3/D_f}$, $m_k^{cl} := \mu_0 (R_{G,k} / r_0)^{D_f}$, $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)$ – соответственно объем, масса и гидродинамическая скорость ФК сорта k ; $N_k^{cl}(\mathbf{x}, t)$ – числовая плотность ФК k -го сорта (число кластеров в единице микрообъема δV дисковой среды); $\rho_k^{cl}(\mathbf{x}, t) := \mu_0 (R_{G,k} / r_0)^{D_f} N_k^{cl}$ – массовая плотность ФК k -го сорта; $s_k^{cl}(\mathbf{x}, t)$ – объемное содержание фрактальных кластеров k -го сорта, $s_k^{cl}(\mathbf{x}, t) := \rho_k^{cl} / \tilde{\rho}_k^{cl}$; $\tilde{\rho}_k^{cl}(\mathbf{x}, t) := \rho_0 (R_{G,k} / r_0)^{D_f - 3}$ – истинная массовая плотность ФК; при этом объемное содержание (концентрация) s_g несущей фазы выражается в виде

$$s \equiv s_g = 1 - s^{cl}, \quad s^{cl} := \sum_{k=1}^Q s_k^{cl} = \sum_{k=1}^Q V_k^{cl} N_k^{cl}. \quad (4)$$

Отметим, что необходимость введения в рассмотрение объемных содержаний заключается в том, что, в отличие от гомогенной смеси, где каждый компонент может рассматриваться как занимающий весь элементарный объем пространства непрерывно и равномерно с другими компонентами, в гетерогенной газопылевой системе протопланетного облака каждая фракция занимает лишь часть элементарного объема. Кроме этого, поскольку пылевые кластеры разных сортов движутся друг относительно друга со скоростями $\mathbf{w}_{kj}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_j$

($k, j = 1, 2, \dots, Q$), возможны столкновения между ними, что приведет в общем случае к взаимному обмену массой, импульсом, моментом импульса и энергией.

Приведем теперь основные гидродинамические уравнения для моделирования несущей газовой фракции и пылевых ФК в случае изотермического ламинарного диска, вращающегося вокруг прото-Солнца с угловой скоростью $\Omega(\varpi, z)$.

1.3. Уравнения сохранения масс несущей и дисперсной фракций пылевого облака

Далее будем исходить из того, что кластеры k -го сорта ведут себя подобно макроскопическим частицам сферической формы, обладающим массой m_k^{cl} и радиусом (гирации) $R_{G,k}$, причем при лобовом соударении пары кластеров

происходит с некоторой вероятностью их объединение в единый агрегат, состоящий из суммарного количества первичных мономеров обеих кластеров: $n_{0,k-i} + n_{0,i} = n_{0,k}$. При этом мы будем пренебрегать воздействием энергии удара на изменение внутренней структуры кластерных агрегатов (см. Ossenkohf, 1993). Тогда уравнения сохранения масс газовой и дисперсных фракций с учетом «фазовых переходов» принимают вид:

$$d\rho_g / dt + \rho_g \nabla \cdot \mathbf{U}_g = 0, \quad \rho_g = \tilde{\rho}_g s, \quad (5)$$

$$\left(\frac{d\rho_k^{cl}}{dt} \right)_k + \rho_k^{cl} \nabla \cdot \mathbf{U}_k = \sum_{j=1, j \neq k}^Q J_{jk} = m_k^{cl} \overset{\circ}{N}_k^{cl}, \quad \rho_k^{cl} := m_k^{cl} N_k^{cl}, \quad (k, j = 1, 2, \dots, Q; k \neq j). \quad (6)$$

Здесь $(d/dt)_k := \partial/\partial t + (\mathbf{U}_k \cdot \nabla)$; $J_{jk} := m_k^{cl} \psi_{jk}$ – интенсивность обмена массами за счет столкновений ФК, которая характеризуется общим числом соударений $\psi_{jk} := \mathcal{K}_{jk} N_k^{cl} N_j^{cl}$ в единице объема дисковой системы; \mathcal{K}_{jk} – ядро коагуляции (интенсивность скорости ассоциации кластеров k и j -сортов; $\tilde{\rho}_g, \rho_g = \tilde{\rho}_g s$ – соответственно истинная и приведенная массовая плотность газовой фазы; $\overset{\circ}{N}_k^{cl}$ – полная скорость изменения числовой плотности N_k^{cl} кластеров k -го сорта за счет процессов коагуляции, определяемая дисперсным уравнением Смолуховского (1917)

$$\overset{\circ}{N}_k^{cl} := \frac{1}{2} \sum_{j=1; k>j}^{k-1} \mathcal{K}_{j(k-j)} N_j^{cl} N_{(k-j)}^{cl} - N_k^{cl} \sum_{j=2}^Q \mathcal{K}_{kj} N_j^{cl}, \quad (k = 1, 2, \dots, Q). \quad (7)$$

Рассмотрим элементарную схему подсчета числа соударений ψ_{jk} между кластерами k -го и j -го сортов в единицу времени в единице объема геометрического пространства. Если выделить один пробный кластер k -го сорта, то за единицу времени об него ударятся все кластеры j -го сорта, находящиеся в цилиндре радиуса $R_{gk} + R_{gj}$ с высотой $|\mathbf{w}_{kj}|$, объем которого $v_{kj} = \pi (R_{G,k} + R_{G,j})^2 |\mathbf{w}_{kj}|$. Таким образом, число кластеров j -го сорта, столкнувшихся в единицу времени с одним кластером k -го сорта, будет равно $N_j^{cl} v_{kj}$, а общее число соударений в единице объема равно

$$\psi_{jk} = N_k^{cl} N_j^{cl} v_{kj} = \kappa^P \pi (R_{G,k} + R_{G,j})^2 |\mathbf{w}_{kj}| N_k^{cl} N_j^{cl},$$

где коэффициент $\kappa^P \leq 1$ определяет долю соударений приведших к переходу частиц j -го сорта в k -фракцию (вероятность прилипания). Из этой формулы

следует выражение для интенсивности скорости ассоциации кластеров k и j -сортов $\mathcal{K}_{jk} := \pi(R_{G,k} + R_{G,j})^2 |\mathbf{w}_{kj}| \kappa^p \equiv \kappa^p \sigma_{kj} |\mathbf{w}_{kj}|$, где $\sigma_{kj} = \pi(R_{G,k} + R_{G,j})^2$ – сечение захвата.

1.4. Уравнения сохранения количества движения

Далее для простоты будем предполагать, что сопротивление газовой среды k -кластеру такое же, как и для сферической частицы с радиусом $R_{g,k}$, соответствующей эффективному размеру кластера. Несущую газовую фазу будем описывать моделью вязкой жидкости. Тогда уравнения движения несущей фазы и Q уравнений для разномасштабных ФК могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\rho_g \frac{d}{dt} \mathbf{U}_g = -s \nabla p_g + \nabla \cdot \mathbf{P}_g - \sum_{k=1}^Q \mathbf{F}_{gk} - \rho_g \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad (8)$$

$$\rho_k^{cl} \left(\frac{d\mathbf{U}_k}{dt} \right)_k = -s_k^{cl} \nabla p + \mathbf{F}_{gk} - \sum_{j=1; j \neq k}^Q \left[\mathbf{J}_{jk} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) + \mathbf{F}_{jk} \right] - \rho_k^{cl} \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (9)$$

$$(k = 1, 2, \dots, Q; k \neq j).$$

Здесь $GM_\odot \mathbf{x} / |\mathbf{x}|^3 = \mathbf{g}$ – вектор ускорения гравитационной силы; $\mathbf{x} = \sum_{\alpha} \mathbf{e}_\alpha x_\alpha$ – центральный радиус-вектор; G и M_\odot – гравитационная постоянная и масса протозвезды; $\mathbf{P}_g := \eta_g \left\{ \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^{Tr} - \frac{2}{3} \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \right\}$ – тензор вязких напряжений, ν_g , $\eta_g = \rho_g \nu_g$ – соответственно коэффициенты кинематической и сдвиговой вязкости для газа; $\mathbf{I} = \{ \delta_{\alpha\beta} \}$ – единичный тензор;

$$\mathbf{F}_{gk} \cong -k T_g N_k^{cl} D_{gk}^{-1} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) \quad (10)$$

– сила взаимодействия между кластерами k -го сорта и несущей газовой фазой; k – постоянная Больцмана; D_{gk} – коэффициент бинарной диффузии кластеров k -го сорта в газе;

$$\mathbf{F}_{jk} = m_k^{cl} \psi_{jk} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) = \mathcal{K}_{jk} m_k^{cl} N_k^{cl} N_j^{cl} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_k) \quad (11)$$

– сила столкновения кластеров k -го и j -го сортов.

1.5. Диффузия фрактальных кластеров в несущей среде

Перенос ФК в газопылевом диске определяется их взаимодействием с

частицами (молекулами) несущего газа и двигающимися вместе с ними мелкодисперсными пылевыми частицами. Это взаимодействие имеет разный характер в зависимости от радиуса гирации кластеров и массовой плотности ρ_g газа. В разреженной аэродисперсной среде, когда $\lambda \gg R_g$, где λ – длина свободного пробега частиц (атомов или молекул газа) в газе, сила торможения движущегося кластера возникает в результате однократных столкновений частиц газа с кластером, что соответствует кинетическому режиму переноса кластеров в несущей фазе. В плотном газе, когда $\lambda \ll R_g$, в каждый момент времени большое число частиц газа одновременно взаимодействует с кластером, и движение кластера соответствует диффузионному (гидродинамическому) режиму.

В случае кинетического режима движения коэффициент диффузии D_{gk}^{kin} малых кластеров в газе определяется формулой

$$D_{gk}^{kin} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{kT_g \mu_g}}{\rho_g} \frac{1}{R_{G,k}^2} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{c_{sg}}{n_g} \frac{1}{R_{G,k}^2}, \quad \lambda > R_{G,k}, \quad (12)$$

а сила сопротивления несущей среды (11) описывается законом Эпштейна

$$\mathbf{F}_{gk}^{kin} \cong -kT_g \frac{N_k^{cl}}{D_{gk}^{kin}} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) = -\frac{8\sqrt{2\pi}}{3} c_{sg} \rho_g R_{G,k}^2 N_k^{cl} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g), \quad \lambda > R_{G,k}. \quad (13)$$

Здесь $c_{sg} := \sqrt{kT_g / \mu_g}$ – изотермическая скорость звука в газе.

В другом предельном случае (при диффузионном режиме движения) коэффициент диффузии крупных кластеров в газе определяется формулой

$$D_{gk}^{dif} = \frac{2kT_g}{\pi R_{G,k}^2 \rho_g C_D(Re_{gk}) |\mathbf{w}_{gk}|} = \frac{4kT_g}{\pi R_{G,k} \eta_g Re_{gk} C_D(Re_{gk})}, \quad \lambda \ll R_{G,k}, \quad (14)$$

где для коэффициента сдвиговой вязкости можно использовать первое приближение теории Чепмена-Энскога (Чепмен, Каулинг 1960)

$$\eta_g := \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\mu_g c_{sg}}{\sigma_g} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\rho_g \lambda c_{sg}}{3}. \quad (15)$$

Здесь $\sigma_g := \pi r_g^2$ ($= 1 / \lambda n_g$) – газокинетическое сечение столкновения частиц в газе ($\sigma_g = 2 \times 10^{-15}$ см²); r_g – радиус взаимодействия молекул несущей фазы; $C_D(Re_k)$ – эффективный коэффициент аэродинамического сопротивления кластера сорта k (сферы радиуса $R_{G,k}$) относительно несущей фазы, который в

общем случае достаточно сложным образом зависит от числа Рейнольдса $Re_k := 2R_{G,k} |\mathbf{w}_{gk}| / v_g$. Дальше можно использовать следующее представление для коэффициента C_D , получившее достаточно широкое распространение в астрофизической литературе:

$$C_D(Re_k) = \begin{cases} 24Re_k^{-1} + 3.6Re_k^{-0,313}, & Re_k \leq 500; \quad (\text{закон Стокса}) \\ 9.5 \times 10^{-5} Re_k^{1,397}, & 500 < Re_k \leq 1500; \\ 2.61, & Re_k > 1500. \end{cases}$$

Поскольку в рассматриваемой модели не предполагается учитывать процесс дробления ФК при столкновениях, то вполне естественно предположить, что относительные скорости \mathbf{w}_{gk} их столкновения малы (столкновения кластеров с большими относительными скоростями сопровождаются, как известно, их разрушением). Тогда, при малых числах Рейнольдса, $C_D(Re_{gk}) \cong 24 / Re_{gk}$, коэффициент диффузии кластеров (при гидродинамическом режиме движения)

$$D_{gk}^{dif} = \frac{kT_g}{6\pi R_{G,k} \eta_g} = \left(\frac{kT_g \mu_0^{1/D_f}}{6\pi r_0 \eta_g} \right) (m_k^{cl})^{-1/D_f}, \quad \lambda \ll R_{g,k}, \quad (16)$$

а соответствующая сила сопротивления (11) задается законом Стокса

$$\mathbf{F}_{g,k}^{dif} = 6\pi R_{g,k} \eta_g N_k^{cl} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k) = \left(\frac{6\pi r_0 \eta_g}{\mu_0^{1/D_f}} \right) N_k^{cl} (m_k^{cl})^{1/D_f} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k). \quad (17)$$

Формулы (12) и (14) для коэффициентов диффузии кластеров в диффузионном и кинетическом режимах удобно объединить, используя для коэффициента диффузии кластеров в несущей фазе соотношение

$$D_{gk} = D_{gk}^{dif} + D_{gk}^{kin} = \frac{kT_g}{6\pi \eta_g R_{G,k}} \left(1 + \frac{15\pi}{32\sqrt{2}} \frac{\lambda}{R_{G,k}} \right) \cong \frac{kT_g}{6\pi \eta_g R_{G,k}} (1 + 1,5Kn_k), \quad (18)$$

которое переходит в формулу (14) или (12) соответственно в пределе малых и больших чисел Кнудсена $Kn_k = \lambda / R_{G,k}$ (здесь $\lambda = (\sigma_g n_g)^{-1}$ – длина свободного пробега частиц в газовой среде относительно столкновений друг с другом). Использование формулы (18) позволяет учитывать при моделировании эволюции протопланетного облака плавный переход от кинетического режима взаимодействия кластеров с несущим газом к диффузионному режиму по мере увеличения плотности частиц газа n_g или радиусов гирации $R_{G,k}$ (масс) ФК при приближении к центральной плоскости диска, причем этот переход управляется

параметром $n_g R_g$.

При написании формул (13) и (17) предполагалось, что числа Рейнольдса малы. Выясним, при каких максимальных размерах ФК это допущение справедливо. Рассмотрим в качестве примера квазистационарное свободное оседание ФК в газе к экваториальной плоскости диска под влиянием z -компоненты силы тяготения Солнца $g_z = \Omega_K^2 z$ (здесь $\Omega_K := \sqrt{GM_\odot / \varpi^3}$ – кеплеровская угловая скорость на экваториальной плоскости диска). При указанных условиях уравнение движение k -кластера (9) сводится к виду

$$6\pi R_{G,k} \eta_g \mathbf{w}_{gk}|_z \equiv g_z m_k^{cl} = g_z \left(\frac{4\pi\rho_0}{3} r_0^{3-D_f} \right) R_{G,k}^{D_f}. \quad (19)$$

Отсюда для скорости гравитационного оседания (вдоль оси z) одиночного ФК сорта k в неограниченном газопылевом диске будем иметь

$$\mathbf{w}_{gk}|_z \equiv -U_{k,z} = \Omega_K^2 z \left(\frac{2\rho_0}{9\eta_g} r_0^{3-D_f} \right) R_{G,k}^{D_f-1} = \Omega_K^2 z \left(\frac{\mu_0}{6\pi r_0 \eta_g} \right)^{1/D_f} (m_k^{cl})^{1-1/D_f}. \quad (20)$$

Если число Рейнольдса определить формулой $Re_k := 2R_{G,k} U_{k,z} / \nu_g$, то условие на радиус гирации ФК, при выполнении которого число Рейнольдса мало ($Re_k \ll 1$), имеет вид: $1 \gg Re_k = g_z \left(4\rho_0 r_0^{3-D_f} / 9\eta_g^2 \right) R_{G,k}^{D_f}$, откуда

$$R_{G,k} \ll r_0^{1-3/D_f} \left(9\eta_g^2 / 4g_z \rho_g \rho_0 \right)^{1/D_f}. \quad (21)$$

Это неравенство позволяет оценить максимальный размер стоковских пылевых фрактальных кластеров. Из этой оценки (менее жесткой по сравнению с оценкой $R \ll \left(9\eta_g^2 / 4g_z \rho_g \rho_0 \right)^{1/3}$ для компактных твердых тел) следует, в частности, что в гравитационном поле пушистые фрактальные агрегаты оседают значительно медленнее, чем компактные частицы той же массы.

Следует отметить, что в силу структурных особенностей кластеров сила сопротивления газовой среды более точно определяется рассеянием ее частиц на первичных ядрах фрактальных агрегатов (см. Михайлов, Власенко, 1995). Соответственно, этому механизму рассеяния длина свободного пробега мономеров λ_f внутри кластера (при средней плотности числа мономеров, входящих в кластер, $\bar{n}_{0,k} := n_{0,k} / V_k^{cl} = 3R_{G,k}^{D_f-3} / 4\pi r_0^{D_f}$) определяется соотношением

$$\lambda_f = 1 / \pi r_0^2 n_{0,k} = (4/3) R_{G,k} \left(r_0 / R_{G,k} \right)^{D_f-2}, \quad (22)$$

согласно которому для кластеров с фрактальной размерностью $D_f < 2$

выполняется условие $\lambda_f > R_{g,k}$. Поскольку при таком способе описания условие применимости формулы Стокса для силы сопротивления движению фрактального агрегата имеет вид $\lambda \ll R_{G,k}$ и $\lambda_f \ll R_{G,k}$, то из формулы (22) следует, что для фрактальных агрегатов с $D_f < 2$ это условие не выполняется, в силу чего формула Стокса для таких кластеров неприменима.

Итак, с учетом формул (12) и (18) уравнения движения (8) и (9) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_g}{\partial t} + (\mathbf{U}_g \cdot \nabla) \mathbf{U}_g = \\ & = -\frac{s}{\rho_g} \nabla p_g - \sum_{k=1}^Q L(m_k^{cl}) \rho_k^{cl} (\mathbf{U}_g - \mathbf{U}_k) + \mathbf{v}_g \Delta \mathbf{U}_g + \frac{1}{3} \mathbf{v}_g \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}_g) - \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial t} + (\mathbf{U}_k \cdot \nabla) \mathbf{U}_k = \\ & = -\frac{s_k^{cl}}{\rho_k^{cl}} \nabla p - L(m_k^{cl}) \rho_g (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_g) - \sum_{j=1; j \neq k}^Q \mathcal{K}_{kj} N_j^{cl} (\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_j) - \frac{GM_\odot}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$L(m_k^{cl}) = \begin{cases} L^{kin} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{r_0^{D_f-3} c_{sg}}{\rho_0} \right) R_{G,k}^{2-D_f} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{r_0^2 c_{sg}}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{cl})^{\frac{2-D_f}{D_f}}, & \lambda > R_{G,k}; \\ L^{dif} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \left(\frac{3r_0^{D_f-3} \lambda c_{sg}}{2\rho_0} \right) R_{G,k}^{1-D_f} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{r_0 \lambda c_{sg}}{(\mu_0)^{1/D_f}} \right) (m_k^{cl})^{(1/D_f)-1}, & \lambda < R_{G,k}. \end{cases} \quad (25)$$

Система уравнений неразрывности в форме (3) и (4) и уравнений движения (23) и (24) для полей $\rho_g(\mathbf{x}, t)$, $\rho_k^{cl}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}_g(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}_k(\mathbf{x}, t)$ и $p_g(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t)$, являющаяся обобщением классических уравнений гетерогенной механики, лежит в основе предложенного здесь подхода к моделированию эволюции несущего газа и пылевых фрактальных агрегатов в ламинарном изотермическом диске.

2. ПРОЦЕССЫ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ

2.1. Распределение фрактальных кластеров по массам и ядра коагуляции

Строгое решение задачи образования и эволюции фрактальных кластеров включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции

распределения (спектра) $f(Y)$ кластеров по некоторому характерному набору параметров $Y = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots\}$ в произвольный момент времени t в точке X (Пискунов, 2013), т.е. совместное решение обобщенного нелинейного пространственно неоднородного кинетического уравнения коагуляции и гидродинамических уравнений для фрактальной среды.

В традиционном случае в качестве подобных параметров могут быть использованы объемы V^{cl} ФК, либо их массы m^{cl} , которые связаны соотношением $V^{cl} = (\mu_0 / \rho_0) (m^{cl} / \mu_0)^{3/D_f}$. Хотя в процессе образования планетезималей существенную роль играет дробление сталкивающихся кластерных агрегатов (учет которых сильно усложняет теорию), в данной работе мы ограничимся рассмотрением наиболее простого случая пространственно однородной аккумуляции тел, не подвергающихся дроблениям.

Если предположить, что множество Y состоит только из одного параметра m^{cl} , то уравнение Смолуховского для функции распределения $f(m^{cl})$ фрактальных кластеров по массам m^{cl} в цилиндрической системе координат сведется к следующему 2+1-мерному варианту:

$$\frac{\partial f(m^{cl})}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi f(m^{cl}) U_{\varpi}(m^{cl})) + \frac{\partial}{\partial z} (f(m^{cl}) U_z(m^{cl})) \right\} = \quad (27)$$

$$= -f(m^{cl}) \int_0^{\infty} \mathcal{K}(m^{cl}, m_1^{cl}) f(m_1^{cl}) dm_1^{cl} + \frac{1}{2} \int_0^{m^{cl}} \mathcal{K}(m_1^{cl}; m^{cl} - m_1^{cl}) f(m_1^{cl}) f(m^{cl} - m_1^{cl}) dm_1^{cl},$$

в котором $|\mathbf{x}| = \sqrt{\varpi^2 + z^2}$, а также учтен закон сохранения масс при столкновениях $m_{j+m}^{cl} = m_j^{cl} + m_k^{cl}$.

Кинетика процессов коагуляции кластеров существенным образом зависит от конкретного вида ядра $\mathcal{K}_{k,j}$. Приведем некоторые упрощенные выражения для ядра коагуляции $\mathcal{K}_{k,j}$ для практически важных механизмов коагуляции фрактальных кластеров¹⁾. Рассмотрим две группы моделей образования

¹⁾ Важно иметь в виду, что поперечное сечение взаимодействия двух кластеров лишь приблизительно равно сумме квадратов радиусов гирации. Это справедливо, в частности, для кластеров типа RLCA, имеющих сравнительно компактную структуру. Но особенно это касается фрактальных кластеров ССА-модели, которые имеют чрезвычайно пушистую и открытую структуру (Suayama и др., 2012). В работе (Okuzumi и др., 2011) было предложено практически удобное соотношение между поперечным сечением и радиусом гирации для фрактальных агрегатов различных способов сборки и было показано, что безразмерное

кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей мы отнесем модели, связанные с прилипанием мономеров к кластеру, причем переход от кинетического режима к диффузионному связан с характером движения отдельного мономера. В этих моделях переход от одного режима к другому определяется не только радиусом действия поля отдельного кластера, но также и концентрацией сталкивающихся с ним мономеров. Ко второй группе моделей отнесем модели, описывающие рост ФА в результате ассоциации двух кластеров, причем переход от кинетического режима агрегации к диффузионному зависит от соотношения между длиной пробега отдельного кластера в аэродисперсной среде и среднего расстояния между пылевыми частицами.

2.1. Мономер-кластерная коагуляция.

При низкой температуре, которую считаем здесь одинаковой для несущей мелкодисперсной смеси и пылевого фрактального кластера, испарением мономеров с поверхности кластера можно пренебречь, так что прилипание мономеров к поверхности кластера ведет к его росту.

Определим сначала константу скорости этого процесса в случае разреженной аэродисперсной среды, когда сила торможения движущегося кластера создается в результате однократных столкновений первичных мономеров с кластером, что соответствует кинетическому режиму переноса кластера в системе. В этом случае отдельный мономер может свободно достигнуть поверхности ближайшего к нему кластера без столкновений с другими мономерами. Для простоты будем считать, что каждый контакт мономера с поверхностью кластера приводит к его прилипанию. Кроме этого, рассматриваемая здесь модель столкновения мономера с кластером основана на допущении, что размер последнего значительно превышает радиус действия атомных сил. Тогда сечение столкновения мономера с кластером k -го сорта определяется формулой $\sigma_{1,k} = \pi R_{G,k}^2$, с учетом которой константа скорости столкновения мономера с кластером может быть представлена в виде (Смирнов, 2011)

$$\mathcal{K}_{1,k}^{kin} = \langle w \pi R_{G,k}^2 \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT_1}{\mu_{1k}}} \pi R_{G,k}^2. \quad (28)$$

Здесь w – относительная скорость столкновения мономера и кластера,

отношения поперечных сечений к квадратам радиуса гирации сильно эволюционирует для кластеров указанных типов, особенно на ранней ступени их роста в протопланетном диске. В связи с этим предложенные ниже соотношения для ядер коагуляции ФК следует рассматривать как первый шаг их аппроксимации.

треугольные скобки означают усреднение по скоростям w на основе максвелловской функции распределения, $\mu_{1k} = \mu_0 m_k^{cl} / (\mu_0 + m_k^{cl}) \cong \mu_0$ – приведенная масса мономера и кластера, которая практически совпадает с массой мономера. Формулу (28) можно записать в следующих двух видах:

$$\mathcal{K}_{1,k}^{kin} \cong \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT_g}{\mu_0}} \pi R_{G,k}^2 = \sqrt{\frac{8kT_1}{\pi\mu_0}} \left(\frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{cl})^{2/D_f}. \quad (29)$$

С использованием (29) можно получить следующее выражение для величин J_{1k} в уравнениях (9), описывающих рост массы кластера k -го сорта за счет прилипания к нему первичных мономеров

$$J_{1k} = \mathcal{K}_{1,k}^{kin} \rho_1 N_k^{cl} = \rho_1 N_k^{cl} \sqrt{\frac{8kT_g}{\pi\mu_0}} \left(\frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \right) (m_k^{cl})^{2/D_f}, \quad (k = 2, \dots, Q). \quad (30)$$

В случае диффузионного характера прилипания мономеров к поверхности кластера можно использовать формулу Смолуховского для ядра коагуляции (см. (18))

$$\mathcal{K}_{1,k}^{dif} = 4\pi D_{g1}^{dif} R_{G,k} \quad (31)$$

и для константы скорости столкновения мономеров с кластером (здесь D_{g1}^{dif} – коэффициент диффузии мономеров в несущей газовой среде). Тогда, с учетом формулы для коэффициента диффузии мономеров в газе (записанной в первом приближении теории Чепмена-Энскога (Чепмен, Каулинг, 1960))

$$D_{g1}^{dif} = \frac{3\sqrt{\pi kT_g} \lambda_m}{8\sqrt{2\mu_g}} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_{sg} \lambda_m, \quad (32)$$

получим следующее выражение для скорости столкновения мономеров с ФК

$$\mathcal{K}_{1,k}^{dif} = \frac{3\pi^{3/2}}{2\sqrt{2}} c_{gs} \lambda_m R_{G,k}. \quad (33)$$

(здесь λ_m – длина пробега мономеров в несущей газовой среде).

Заметим, что эффективность роста кластеров, за счет столкновений с мономерами, в кинетическом и диффузионном режимах определяется соотношением $\mathcal{K}_{1,k}^{dif} / \mathcal{K}_{1,k}^{kin} = (3/8)(\lambda_m / R_{G,k}) \pi \sqrt{\mu_0 / \mu_1}$.

2.2. Кластер-кластерная коагуляция

Рассмотрим случай, когда контакт между двумя кластерами связан с их свободным движением в дисковой аэродисперсной среде, т. е. в пределе низкой концентрации мономеров. Будем при этом считать, что при соприкосновении

двух ФК они объединяются в один, который принимает сферическую форму и участвует в дальнейшем процессе эволюции. Сечение столкновения двух кластеров определяется формулой $\sigma_{kj} = \pi(R_{G,k} + R_{G,j})^2$. В рамках модели твердых сфер это сечение отвечает ассоциации двух кластеров, так что скорость их объединения равна

$$\mathcal{K}_{k,j} = \left\langle w \pi (R_{G,k} + R_{G,j})^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{8kT_g}{\pi m_{kj}^{cl}}} \pi (R_{G,k} + R_{G,j})^2. \quad (34)$$

Здесь треугольные скобки означают усреднение по скоростям кластеров на основе максвелловской функции распределения; w , $m_{kj}^{cl} = m_k^{cl} m_j^{cl} / (m_k^{cl} + m_j^{cl})$ – соответственно относительная скорость и приведенная масса сталкивающихся ФК. Формулу (34) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{k,j} &= \sqrt{\frac{8kT_g}{\pi \mu_0}} \pi r_0^{D_f} \sqrt{\frac{R_{G,k}^{D_f} + R_{G,j}^{D_f}}{R_{G,k}^{D_f} R_{G,j}^{D_f}}} (R_{G,k} + R_{G,j})^2 = \\ &= \sqrt{\frac{8kT_g}{\pi}} \frac{\pi r_0^2}{\mu_0^{2/D_f}} \sqrt{\frac{m_k^{cl} + m_j^{cl}}{m_k^{cl} m_j^{cl}}} \left\{ (m_k^{cl})^{\frac{1}{D_f}} + (m_j^{cl})^{\frac{1}{D_f}} \right\}^2. \end{aligned} \quad (35)$$

В случае броуновской коагуляции кластеров, находящихся в дисковой аэродисперсной среде с температурой T_g , их столкновения происходят в результате хаотического блуждания кластеров (Blum и др., 1996). В диффузионном режиме роста ФК можно воспользоваться следующей формулой Смолуховского для скорости объединения двух кластеров (ядра коагуляции)

$$\mathcal{K}_{km} = 4\pi \kappa^P (D_{g,k}^{dif} + D_{g,m}^{dif}) (R_{G,k} + R_{G,m}), \quad (36)$$

где $D_{g,k}^{dif}$ и $D_{g,m}^{dif}$ – коэффициенты броуновской диффузии сталкивающихся кластеров в несущей газовой среде; κ^P – вероятность слипания (коэффициент захвата) кластеров. Коэффициент диффузии $D_{g,k}^{dif}$ кластеров сорта k , задаваемый формулой (16), уменьшается с увеличением их размеров, что приводит к тому, что малые кластеры исчезают значительно быстрее, чем успевают разрушиться более крупные (Смирнов, 1991). Подставляя формулу (16) в (36), получим для ядра коагуляции $\mathcal{K}_{k,m}$ следующие выражение:

$$\mathcal{K}_{k,m} = \kappa^p \left(\frac{2kT_g}{3\eta_g} \right) \frac{(R_{G,k} + R_{G,m})^2}{R_{G,k} R_{G,m}} = \kappa^p \left(\frac{2kT_g}{3\eta_g} \right) \frac{\left\{ m_k^{cl} \right\}^{1/D_f} + \left\{ m_m^{cl} \right\}^{1/D_f}}{\left(m_k^{cl} m_m^{cl} \right)^{1/D_f}}. \quad (37)$$

Поскольку функция $\mathfrak{R} = (R_{G,k} + R_{G,m})^2 / 4R_{G,k}R_{G,m}$ слабо зависит от отношения радиусов сталкивающихся кластеров (например, при $R_{G,k} = R_{G,m}$, $\mathfrak{R} = 1$, а при $R_{G,k} = 9R_{G,m}$, $\mathfrak{R} \cong 2,8$), то можно полагать, что броуновская константа скорости ассоциации двух кластеров в диффузионном режиме не зависит от размеров ассоциирующихся кластеров, а следовательно, и от их масс; тогда

$$\Phi_{k,m} \cong \kappa^p \frac{8kT_g}{3\eta_g} = \kappa^p \frac{2\sqrt{2\pi}c_{sg}}{n_g \lambda}. \quad (38)$$

Отметим также, что так как при выводе соотношений (32) и (37) была использована формула (16), то они справедливы при условии $\lambda \ll R_{G,k}$, где λ – длина свободного пробега частиц в несущей газовой фазе.

2.3. Гравитационная коагуляция

Рассмотрим теперь случай гравитационной коагуляции ФК, когда в каждый момент времени большое число мономеров одновременно взаимодействуют с оседающими к экваториальной плоскости диска кластерами (движение последних носит диффузионный характер). Константу скорости процесса, в котором происходит контакт двух падающих в поле силы тяжести кластеров, определим в рамках модели твердых сфер. Пусть ФК k -го сорта, имеющие большую скорость оседания, догоняют более мелкие кластеры размера $R_{G,j}$, падающие более медленно. Поскольку сечение столкновения двух кластеров в рамках модели твердых сфер равно $\sigma_{k,j} = \pi(R_{G,k} + R_{G,j})^2$, то коэффициент гравитационной коагуляции в поле притяжения аккреционного диска при условии, что вероятность слипания ФК при их соприкосновении равна κ^p , определяется соотношением

$$\Phi_{k,j} = \kappa^p \pi (R_{G,k} + R_{G,j})^2 U_{kz}. \quad (39)$$

В случае, когда радиус падающих кластеров много больше длины свободного пробега частиц аэродисперсной среды ($\lambda \ll R_g$), скорость U_{kz} гравитационного оседания (вдоль оси z) одиночного k -кластера в неограниченном газопылевом диске определяется формулой

$$U_{kz} = -\Omega_K^2 z(2\rho_0 / 9\eta_g)r_0^{3-D_f} R_{G,k}^{D_f-1}. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39), окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi_{kj} &= \kappa^p \Omega_K^2 z \left(\mu_0 / 6\eta_g r_0^{D_f} \right) (R_{G,k} + R_{G,j})^2 (R_{G,k}^{D_f-1} - R_{G,j}^{D_f-1}) = \\ &= \kappa^p \Omega_K^2 z \left(r_0 / 6\eta_g \mu_0^{1/D_f} \right) \left\{ (m_k^{cl})^{1/D_f} + (m_j^{cl})^{1/D_f} \right\}^2 \left\{ (m_k^{cl})^{1-1/D_f} - (m_j^{cl})^{1-1/D_f} \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

где предполагается, что $k > j$.

В заключение этого раздела отметим следующее: процессы коагуляции фрактальных кластеров в аэродисперсной фрактальной среде могут быть вызваны одновременным воздействием различных механизмов их столкновения в различных сочетаниях (например, таких как брауновская коагуляция заряженных ФК, турбулентно-брауновская коагуляция заряженных и нейтральных ФК, турбулентно-брауновская коагуляция ФК в гравитационном поле и т.п.). Следует, однако, подчеркнуть, что расчеты соответствующих коэффициентов коагуляции представляют сложную задачу и в общем случае данная проблема до настоящего времени не решена.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Уравнение Смолуховского (Smoluchowski, 1917) для непрерывной функции распределения $f(v, t)$ пылевых агрегатов по объемам $V^{cl} (\equiv v)$ обычно записывается в виде

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^v K(v-w, w) f(v-w, t) f(w, t) dw - f(v, t) \int_0^\infty K(v, w) f(w, t) dw, \quad (42)$$

где $K(v, w)$ – ядро коагуляции, описывающее вероятность столкновения и объединения ФК с объемами v и w . Коэффициент $K(v, w)$ является неотрицательной симметричной относительно своих аргументов функцией, $K(v, w) = K(w, v) \geq 0$. Для решения интегро-дифференциального кинетического уравнения (42) необходимо задание начального условия $f(v, 0) = f_0(v)$, а также выполнение условий $f(v, t) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \infty$.

3.1. Точные методы решения уравнения коагуляции

Решение интегро-дифференциального уравнения коагуляции (42) представляет значительные математические трудности. Точные аналитические методы решений образуют небольшую группу, их обзор можно найти в работах (Волощук, Седунов, 1975; Попель и др., 1975; Волощук, 1984). В связи с

исследованиями эволюции протопланетного газопылевого облака Сафроновым (1969) было получено точное аналитическое решение уравнения (42) с ядром, пропорциональным сумме объемов сталкивающихся частиц $\mathcal{K}(v, w) \equiv \mathcal{G}(v + w)$, которое дает качественно правильный общий ход зависимости $\mathcal{K}(v, w)$ от объемов тел. Поскольку аналитических методов решения кинетических уравнений (42) с произвольными ядрами не существует, то многие исследования последних лет были посвящены разработке численных методов решения этих уравнений. Обзор по имеющимся реализациям численных методов можно найти, например, в работах (Волощук, 1984; Chan и др., 2006). Основная трудность при использовании численных методов решения уравнения (42) возникает из-за большого диапазона изменения пылевых образований по размерам. По этой причине, несмотря на кажущуюся универсальность численных методов, они применяются сравнительно редко.

Вместе с тем часто не требуется полного знания функции распределения частиц по размерам, а достаточно лишь информации о поведении во времени ее нескольких основных характеристик, таких как центр распределения, рассеяние, симметрия и островершинность, которые можно определить с помощью моментов распределения относительно нуля

$$m_j := \int_0^{\infty} v^j f(v, t) dv, \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (43)$$

являющихся числовыми характеристиками случайной функции $f(v, t)$. Наиболее важной характеристикой центра распределения является среднее значение (математическое ожидание) $E(v) \equiv m_1 := \int_0^{\infty} v f(v, t) dv$. Тогда j -й момент относительно математического ожидания (или центральный момент) определяется как $\mu_j = E[v - m_1]^j := \int_0^{\infty} (v - m_1)^j f(v, t) dv$. Первый центральный момент всегда равен нулю, $\mu_1 = 0$. Второй центральный момент (дисперсия) является показателем рассеяния и определяется соотношением $\mu_2 = \sigma^2(v) := \int_0^{\infty} (v - m_1)^2 f(v, t) dv$. Легко показать, что $\mu_2 = m_2 - m_1^2$. Третий момент относительно среднего, связанный с асимметрией распределения, определяется как $\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$. Одновершинное распределение с $\mu_3 < 0$ имеет левостороннюю (отрицательную) асимметрию. Если $\mu_3 > 0$, то распределение имеет правостороннюю (положительную) асимметрию. Для симметричного распределения $\mu_3 = 0$. Величина $\sqrt{\beta_1} := \mu_3 / (\mu_2)^{3/2}$ измеряет отношение асимметрии распределения к мере рассеяния. Этот нормированный

показатель позволяет сравнивать асимметрию двух распределений, имеющих различный масштаб (см., например, Hahn, Shapiro, 1967). Наконец, четвертый момент относительно среднего связан с островершинностью распределения и называется эксцессом. Он определяется как $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$. Величина $\beta_2 := \mu_4 / \mu_2^2$ является относительным показателем эксцесса. Для нормального распределения, имеющего колоколообразную форму, значение $\beta_2 = 3.0$. Нормальное распределение обычно используется как стандарт, по которому сравнивается островершинность распределений.

Известно, что по первым четырем моментам распределения можно сделать параметрическую оценку самого распределения на основе диаграммы Пирсона, представленной на Рис.1 (см. Hahn., Shapiro, 1967). Далее будет продемонстрирована подобная методика.

3.2. Параметрические методы

Многие исследования последних лет были направлены на разработку различных параметрических методов решения кинетических уравнений Смолуховского с произвольными ядрами (см., например, Волощук, Седунов, 1975; Волощук, 1984; Логунов, 1979, 1985; Frenklach, Harris, 1987; McGraw, 1997; Колесниченко, 2000; Marov, Kolesnichenko, 2001; Marchisio, Fox, 2005; Mingzhou и др., 2008; Yu и др., 2008, 2011).

Параметрические методы основаны на предположении, что решение (точное или приближенное) принадлежит некоторому наперед заданному параметрическому классу функций, в котором ищется приближение. Теоретически распределение $f(v,t)$ всегда может быть представлено в виде бесконечного ряда по какой-либо полной ортогональной системе функций $\varphi_k(v)$ $f(v,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t) \varphi_k(v)$, что позволяет использовать это разложение как параметрическое представление распределения $f(v,t)$ с параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. При этом для определения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ исходное кинетическое уравнение (42) следует заменить системой нелинейных уравнений относительно моментов m_j :

$$\frac{\partial m_j}{\partial t} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_l \beta_{klj}, \quad m_j = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v^j \varphi_k(v) dv, \\ \beta_{klj} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(v,w) \left[\frac{1}{2}(v+w)^j - v^j \right] \varphi_k(v) \varphi_l(w) dv dw. \quad (44)$$

В том случае, когда система функций $\varphi_j(v)$ ортогональна и нормирована

на единицу, при умножении исходного кинетического уравнения (42) на $\varphi_j(v)$ и последующем интегрировании по v можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \alpha_k \alpha_l \beta_{klj}^*, \quad \beta_{klj}^* = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(v,w) \left[\frac{1}{2} \varphi_j(v+w) - \varphi_j(v) \right] \varphi_k(v) \varphi_l(w) dv dw, \quad (45)$$

которая, в отличие от системы (44), разрешена относительно производных по α_j . Коэффициенты β_{klj} и β_{klj}^* в (44) и (45) постоянны и должны определяться до решения соответствующей системы. К сожалению, системы уравнений (44) и (45), в силу большого объема и громоздкости необходимых вычислений, могут быть решены только численно с помощью ЭВМ.

Важно иметь в виду, что определение коэффициентов β_{klj} существенно зависит от выбора базисных функций $\varphi_j(v)$, в качестве которых могут быть использованы ряды Фурье, полиномы Эрмита, полиномы Чебышева, полиномы Лагерра и т. д. (см., например, Кендал, Стьюарт, 1966; Левин, 1974). Вместе с тем исследования точности аппроксимации, которой можно достигнуть при использовании конечного числа членов разложения по полиномам Эрмита (так называемого ряда Грамма–Шарлье), показали следующее (см. Кендал, Стьюарт, 1966). Эти ряды могут вести себя нерегулярно: сумма k членов может дать худшее приближение, чем сумма $(k-1)$ членов; сумма конечного числа членов этих рядов может привести к отрицательным значениям плотности вероятностей, особенно на «хвосте» распределения. Этот неблагоприятный результат является довольно серьезным препятствием при применении нескольких начальных членов ряда (43) для аппроксимации решения кинетического уравнения (42), когда требуется определить не только моменты искомой плотности распределения, но и само распределение.

По счастью, для некоторых ядер специальных видов параметрический метод решения уравнения Смолуховского может быть несколько видоизменен и эффективно использован. К таким ядрам относятся симметричные ядра со степенью однородности η , которые имеют вид

$$K(v,w) = G \sum_{j=0}^n \alpha_j \left(v^{\eta-\delta_j} w^{\delta_j} + v^{\delta_j} w^{\eta-\delta_j} \right), \quad (46)$$

где G – множитель, определяемый специфическими условиями, при которых идет коагуляция.

При подстановке (46) в (43) получается следующая бесконечная система дифференциальных уравнений для моментов:

$$\frac{\partial m_0}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} = -G \sum_{j=0}^n \alpha_j m_{\eta-\delta_j} m_{\delta_j}, \quad \frac{\partial m_1}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial m_p}{\partial t} = \frac{G}{2} \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (m_{\eta-\delta_j+p-k} m_{\delta_j+k} + m_{\eta-\delta_j+k} m_{\delta_j+p-k}), \quad (p = 2, 3, \dots), \quad (47)$$

где $C_n^j = n! / j!(n-j)!$ – биномиальные коэффициенты.

Для решения этой системы, в правые части которых входят в общем случае дробные моменты, необходимо иметь связующие соотношения между дробными и целыми моментами. Параметрические методы базируются на условии, что искомое распределение принадлежит определенному параметрическому классу. Для уменьшения числа отыскиваемых параметров в качестве такого класса может быть выбрана совокупность известных распределений $f(v, t)$, включающая начальное распределение. Наиболее распространенным подходом является использование нормального распределения, которое дает приемлемое описание многих (хотя далеко не всех) реальных явлений. Аналогично гамма-распределение и логарифмическое нормальное распределение могут быть использованы для описания случайных величин, ограниченных только с одной стороны (сверху или снизу), в то время как бета-распределение – для описания случайных величин, ограниченных как сверху, так и снизу. Хотя эти модели приводят к распределениям самой различной формы, все же и они не дают той степени обобщения, которая часто бывает необходима. Это иллюстрируется на Рис. 1, где показаны области в плоскости (β_1, β_2) для различных распределений: нормального, бета-распределения, гамма-распределения, экспоненциального распределения и логарифмически нормального, где β_1 – квадрат нормированного показателя асимметрии, а β_2 – нормированный показатель острровершинности.

Пример решения уравнения Смолуховского параметрическим методом. Предположим, что в результате процессов коагуляции распределение $f(v, t)$ остается в классе распределений, к которым принадлежит начальное распределение, а со временем меняются только его статистические параметры: среднее значение, дисперсия и т.п. В качестве начального распределения пылевых агрегатов по размеру (диаметру) $d(v)$ в газопылевом облаке выберем двухпараметрическое логнормальное распределение. Плотность вероятности логарифмически нормального закона зависит от среднего значения $\langle \ln d \rangle$ и показателя рассеяния (дисперсии) $\sigma_L^2 \equiv \langle (\ln d - \langle \ln d \rangle)^2 \rangle$ логарифма диаметра d :

$$f(d; \mu^*, \sigma_L) = \frac{N}{\sigma_L d \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln d - \langle \ln d \rangle)^2}{2\sigma_L^2}\right\} = \frac{N}{\sigma_L d \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(d / \mu^*)}{2\sigma_L^2}\right\}. \quad (48)$$

Медиана распределения определяется, как нетрудно убедиться из (48), соотношением $\mu^* = \exp\langle \ln d \rangle$, а средние значения самого диаметра и его дисперсии соответственно равны $\langle d \rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_L^2 + \ln \mu^*\right)$, $\sigma^2 \equiv \langle (d - \langle d \rangle)^2 \rangle = \langle d \rangle^2 [\exp \sigma_L^2 - 1]$. Применяя эти соотношения, можно получить формулы для статистических параметров (σ_L^2 и μ^*) логнормального распределения (48) только через средний диаметр частиц $\langle d \rangle$ и относительную дисперсию $\beta^2 := \langle (d - \langle d \rangle)^2 \rangle / \langle d \rangle^2$ их размера: $\sigma_L^2 = \ln(1 + \beta^2)$, $\mu^* = \langle d \rangle / \sqrt{1 + \beta^2}$.

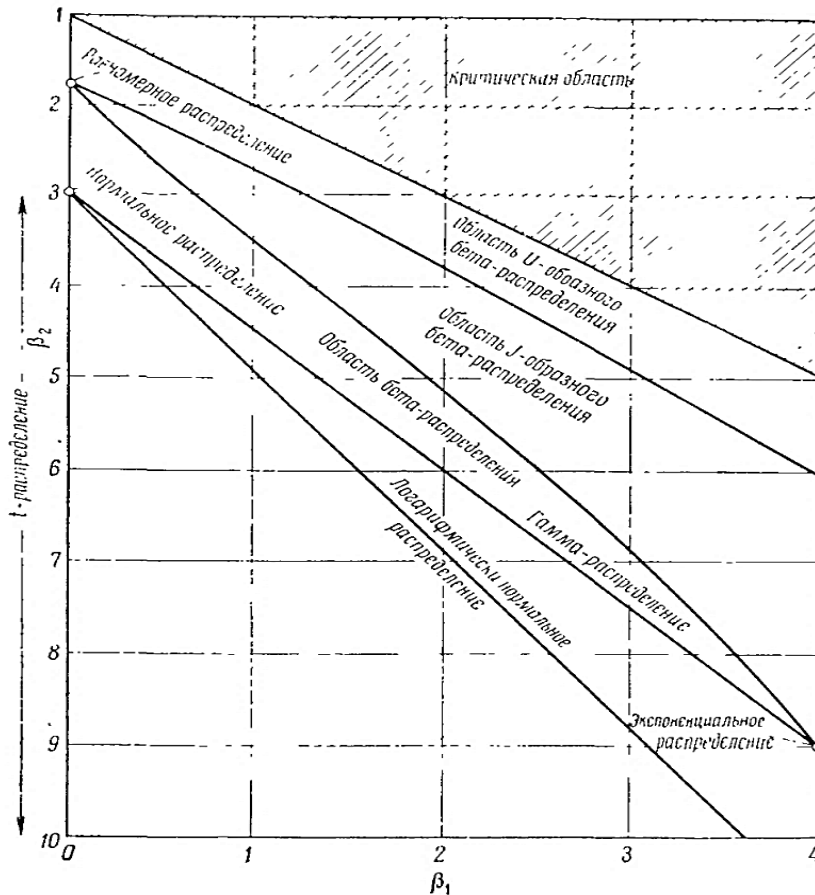


Рис. 1. Области в плоскости (β_1, β_2) для различных распределений

Используем теперь формулу перехода $f(v) = f[d(v)] |\partial d(v) / \partial v|$ (справедливая для строго возрастающей функции $v = v(d)$ случайной величины

d (см. Hahn, Shapiro, 1967)) и распределение (48) для определения плотности начального распределения объема $v = (\pi/6)d^3$ пылевых частиц; тогда

$$f(v; \sigma_L, \mu) = \frac{N}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L v} \exp\left[-\frac{\ln^2(v/\mu)}{18\sigma_L^2}\right], \quad (\mu = (\pi/6)\mu^{*3}). \quad (49)$$

Предположим теперь, что процесс коагуляции ФК в диске не меняет распределения (49), однако параметры $\mu(t)$ и $\sigma_L^2(t)$ меняются со временем. Введем моменты логнормального распределения

$$m_p(t) = \frac{N}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L(t)} \int_0^\infty v^{p-1} \exp\left\{-\frac{\ln^2[v/\mu(t)]}{18\sigma_L^2(t)}\right\} dv. \quad (50)$$

Согласно (Lee, 1983), для момента p -го порядка справедливо представление $m_p = m_1 \mu^{p-1} \exp\left[\frac{3}{2}(p^2 - 1)\sigma_L^2\right]$, $m_1 = S = \text{const}$, позволяющее выразить дробные моменты, входящие в (47), через m_1, μ, σ_L^2 . В итоге получим следующую параметрическую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (число уравнений должно совпадать с числом неизвестных коэффициентов) для определения параметров $\mu(t), \sigma_L^2(t)$ по заданным начальным значениям $\mu(0), \sigma_L^2(0)$:

$$N := m_0 = S \mu^{-1} \exp(-\frac{3}{2}\sigma_L^2), \quad S := m_1 = \text{const}, \quad m_2 = S \mu \exp(\frac{9}{2}\sigma_L^2); \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_0}{\partial t} &= -G \sum_{j=0}^K \beta_j m_{\eta-\delta_j} m_{\delta_j} = -G m_1^2 \mu^{\eta-2} \sum_{j=0}^n \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta - \delta_j)^2 - 2]\sigma_L^2\right\} = \\ &= -G \mu^\alpha m_0^2 \sum_{j=0}^K \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta - \delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_2}{\partial t} &= 2G \sum_{j=0}^n \beta_j m_{\eta-\delta_j+1} m_{\delta_j+1} = 2G m_1^2 \mu^\alpha \sum_{j=0}^n \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[(\delta_j+1)^2 + (\eta - \delta_j+1)^2 - 2]\sigma_L^2\right\} = \\ &= 2G m_1^2 \mu^\alpha \sum_{j=0}^n \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[(\delta_j+1)^2 + (\eta - \delta_j+1)^2 - 2]\sigma_L^2\right\} = \\ &= 2G \mu^{\eta+2} \sum_{j=0}^n \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta - \delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Эта нелинейная параметрическая система уравнений может быть решена только численно. Результаты подобного моделирования в связи с задачей осаждения пылевых частиц к центральной плоскости диска представлены,

например, в монографии (Kolesnichenko, Marov, 2014b). Здесь же отметим, что изменение во времени среднего числа частиц $N(t)$ можно оценить, предположив, что дисперсия σ_L^2 остается постоянной. В этом случае, ограничившись двумя первыми моментами, из (47) будем иметь

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -G\mu^\alpha N^2 \sum_{j=0}^K \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta - \delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}. \quad (54)$$

Решение этого уравнения, полученное при использовании начального условия $N(0) \equiv N_0 = S / \tilde{v}(0)$, имеет вид

$$N(t) = \frac{S}{\tilde{v}(0)} \frac{1}{1 + qt}, \quad q := G\mu^\alpha \frac{S}{\tilde{v}(0)} \sum_{j=0}^n \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta - \delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}, \quad (55)$$

где $\tilde{v}(0) = (\pi/6)\langle d \rangle^3 = \mu(0) \exp\left(\frac{3}{2}\sigma_L^2\right)$ – начальное значение среднего объема.

Отсюда при использовании соотношения $\tilde{v}(t) := S / N$, можно найти изменение во времени среднего объема частиц. Для относительно больших значений времени, когда $qt \gg 1$, из (55) следует

$$N(t) = 1 / G\mu^\alpha t \sum_{j=0}^n \beta_j \exp\left\{\frac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta - \delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}. \quad (56)$$

Из этого выражения видно, что при достаточно большом времени коагуляции среднее число частиц в системе перестает зависеть от их начального распределения, т.е. как бы «забывает свое прошлое», и может быть описано некоторой универсальной функцией, вид которой определяется только ядром коагуляции. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и с другими возможными распределениями пылевых кластеров по объемам в коагулирующем потоке, например с гамма-распределением.

3.3. Непараметрические методы

Параметрические методы регуляризации системы моментных уравнений (47), несмотря на логическую простоту получения их решения, основаны на очень сильном исходном допущении об известном виде искомого распределения, которое обычно выбирают «волевым» способом. Этот недостаток в выборе доопределяющих соотношений можно устранить, если воспользоваться непараметрическим методом интерполяции для определения связей между целыми и дробными моментами на временном интервале $[t, t + \Delta t]$. Переходя к безразмерным переменным при помощи нормирования всех моментов на их значения в начале интервала, запишем интерполяционный полином Лагранжа $L_j^n(x)$ (см. Демидович, Марон, 1963) для оценки дробного

момента $m_{i+\alpha}$ в виде (Логунов, 1979; Press и др., 1992; Marov, Kolesnichenko, 2001)

$$m'_{i+\alpha}(t) = \sum_{j=k}^{k+n} [m'_j(t)]^{L_j^{(n)}}, \quad k \leq t \leq k+n, \quad m'_\gamma(t) := \frac{m_\gamma(t)}{m_\gamma(0)}, \quad (57)$$

$$L_j^n(x) := \frac{1}{n!} \prod_{n+1} \frac{(-1)^{n-j} C_n^j}{x-j}, \quad C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!},$$

$$\prod_{n+1}(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n), \quad x = i + \alpha - j. \quad (58)$$

Эта интерполяционная формула справедлива для любого времени t и обеспечивает совпадение оценки интерполируемого момента с его точным значением в любой момент времени, если α целое, а при $t=0$, если α – дробное число. Определив затем моменты распределения из соответствующей системы дифференциальных уравнений (при выбранном начальном распределении) можно по первым пяти моментам оценить вид искомого распределения частиц по размерам с помощью диаграммы Пирсона (см. Hahn, Shapiro, 1967).

Заметим, что для оценки точности интерполяции по формуле (57) в литературе были проведены численные расчеты дробных моментов гамма- и логнормальных распределений. Результаты показали, что относительная ошибка интерполяции монотонно убывает с ростом параметра n при увеличении дисперсий исследуемых распределений, а также при увеличении порядка интерполируемого момента. Так, относительная ошибка интерполяции для начальных дробных моментов гамма-распределения зависит только от его параметра формы β и имеет порядок 10^{-2} при $\beta = 2$ и порядок 10^{-3} при $\beta = 5$. С ростом β ошибка монотонно убывает. Знак ошибки в общем случае зависит от β и порядка интерполируемого момента. Для логнормального распределения соотношение (57) становится точным при $n \geq 2$.

Аппроксимация ядер коагуляции. Рассмотрим метод непараметрического доопределения системы моментных уравнений, который является достаточно общим, так как применим для решения уравнений с ядрами коагуляции вида (46).

Пусть $K(v, w)$ – симметричная функция двух переменных со степенью однородности η , которую надо аппроксимировать рядом вида (46). Учитывая условие однородности, запишем $K(v, w)$ в виде (Логинов, 1979)

$$K(v, w) = v^\eta K(1, X) = v^\eta \sum_{j=0}^n \beta_j \left(X^{\delta_j} + X^{\eta-\delta_j} \right), \quad X := \frac{w}{v}. \quad (59)$$

Неизвестные коэффициенты β_j определим из условия выполнения равенства между правой и левой частью (59) при фиксированных значениях X , которые являются точками привязки. Чтобы при последующем интегрировании разложения (59) не появлялись моменты порядка выше степени однородности η , коэффициенты δ_j можно определить равенством $\delta_j = \eta j(n+1)^{-1}$. С учетом введенных обозначений систему уравнений для нахождения коэффициентов β_j можно переписать в виде

$$K(1, X_k) = \sum_{j=0}^n \beta_j \left(X_k^{\delta_j} + X_k^{\eta - \delta_j} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (60)$$

Умножая теперь правую и левую (60) на v^η , получаем, что при $n = 0$ аппроксимация ядра K отыскивается в классе функций $K(v, w) = \beta_0^{(0)}(v^\eta + w^\eta)$; при $n = 1$ отыскивается в классе функций $K(v, w) = \beta_0^{(1)}(v^\eta + w^\eta) + \beta_1^{(1)}v^{\eta/2}w^{\eta/2}$; при $n = 2$ отыскивается в классе функций $K(v, w) = \beta_0^{(2)}(v^\eta + w^\eta) + \beta_1^{(2)}(v^{2\eta/3}w^{\eta/3} + v^{\eta/3}w^{2\eta/3})$ и т.д.

Таким образом, решая уравнение (60) относительно коэффициентов β_j , можно получить, что:

$$\text{при } n = 0 \quad \beta_0^{(0)} = K(1, X_1) / (1 + X_1^\eta);$$

$$\text{при } n = 1 \quad \beta_0^{(1)} = \frac{K(1, X_1)X_2^{\eta/2} - K(1, X_2)X_1^{\eta/2}}{X_2^{\eta/2}(1 + X_1^\eta) - X_1^{\eta/2}(1 + X_2^\eta)},$$

$$\beta_1^{(1)} = \frac{K(1, X_2)(1 + X_1^\eta) - K(1, X_1)(1 + X_2^\eta)}{X_2^{\eta/2}(1 + X_1^\eta) - X_1^{\eta/2}(1 + X_2^\eta)};$$

$$\text{при } n = 2 \quad \beta_0^{(2)} = \frac{K(1, X_1)(X_2^{\eta/3} + X_2^{2\eta/3}) - K(1, X_2)(X_1^{\eta/3} + X_1^{2\eta/3})}{(1 + X_1^\eta)(X_2^{\eta/3} + X_2^{2\eta/3}) - (1 + X_2^\eta)(X_1^{\eta/3} + X_1^{2\eta/3})},$$

$$\beta_1^{(2)} = \frac{K(1, X_2)(1 + X_1^\eta) - K(1, X_1)(1 + X_2^\eta)}{(1 + X_1^\eta)(X_2^{\eta/3} + X_2^{2\eta/3}) - (1 + X_2^\eta)(X_1^{\eta/3} + X_1^{2\eta/3})}.$$

Аппроксимацию ядра $K(v, w)$ называют m -точечной, если правая и левая части (60) совпадают в m точках при изменении параметров X_i от 0 до ∞ . Когда выбрана m -точечная схема привязки, то последовательность точек X_i для системы (60) определяется следующим рекуррентным соотношением

$$(m-1) \left[(X_i + 1)^{-1} - (X_{i+1} + 1)^{-1} \right] = 1, \quad i = 2, 3, \dots, \quad X_1 = 0. \quad (61)$$

Рассчитанные по формуле (61) значения величин X_i при различном числе точек привязки приведены в Табл. 2.

Таблица 2. Типы кривых Пирсона и соответствующие им критерии.

X	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$
X_0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_1		1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7
X_2				1	2/3	1/2	2/5	1/3
X_3						1	3/4	3/5

4. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО ЭМПИРИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

4.1. Подход Пирсона

Рассмотрим теперь подход Пирсона к описанию распределений, основанный на отыскании семейства кривых, при помощи которого можно удовлетворительно представить встречающиеся на практике распределения. На Рис. 2 представлены графики для определения типа кривой Пирсона в зависимости от параметра β_1 , измеряющего отношение асимметрии распределения к мере рассеяния, и параметра β_2 , являющегося относительным показателем эксцесса. Эти графики заимствованы из работ (Крамер, 1948; Elderton, 1953; Кендал, Стьюарт, 1966).

Пирсон предложил для описания статистического распределения $f(x)$ случайной величины x использовать решения дифференциального уравнения

$$d f / dx = -f(x - a) / (b_0 + b_1 x + b_2 x^2). \quad (62)$$

Семейство плотностей, определяемых этой формулой, известно под названием «семейства распределений Пирсона». Если иметь в виду унимодальные распределения, то представляется интересным изучить тот класс плотностей, которые: (а) имеют единственную моду, т. е. $d f / dx = 0$ в некоторой точке $x = a$, где a — мода; (б) имеют гладкое соприкосновение с осью x на концах интервала, где сосредоточено распределение, т. е. $d f / dx = 0$, когда $f = 0$. Нетрудно видеть, что, вообще говоря, решения уравнения (62) удовлетворяют этим условиям. Следует заметить, что среди распределений семейства (62) существуют и такие распределения, которые имеют J - и U -образную форму.

Прежде чем переходить к нахождению семейства точных решений уравнения (62), рассмотрим некоторые свойства, присущие этому семейству в целом. Имеем: $(df/dx)x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2) = x^n(x - a)$. Интегрируя левую часть этого уравнения по частям и предполагая, что полученные интегралы существуют, получим

$$\begin{aligned} \left[x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2)f \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (nb_0x^{n-1} + (n+1)b_1x^n + (n+2)b_2x^{n+1})f dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1}f dx - a \int_{-\infty}^{\infty} x^n f dx. \end{aligned} \quad (63)$$

Предположим теперь, что выражение в квадратных скобках обращается в нуль на концах распределения $\lim_{f \rightarrow \pm\infty} x^{n+2}f \rightarrow 0$ или что распределение имеет

бесконечный диапазон. Тогда, пользуясь обозначениями (43) для моментов относительно нуля, будем иметь

$$nb_0m_{n-1} + \{(n+1)b_1 - a\}m_n + \{(n+2)b_2 + 1\}m_{n+1} = 0. \quad (64)$$

Это уравнение позволяет выразить четыре константы a, b_0, b_1 и b_2 через моменты m_1, m_2, m_3, m_4 или через три момента (43), взятых относительно среднего: μ_2, μ_3, μ_4 . Полагая в (64) последовательно $n = 0, 1, 2, 3$, можно найти следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} = -\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'}, \quad b_0 = -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{A} = -\frac{\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{A'}, \\ b_1 = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} = -\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'}, \quad b_2 = -\frac{(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)}{A} = -\frac{(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}{A'}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\text{где} \quad A := 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2, \quad A' := 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1, \quad (66)$$

а параметры β_1 и β_2 определяются формулами $\beta_1 := (\mu_3)^2 / (\mu_2)^3$ и $\beta_2 := \mu_4 / \mu_2^2$. В этих формулах нулевое значение принято в качестве среднего, так что распределения семейства (62) полностью определяются своими четырьмя первыми моментами. Из уравнения (62) следует, что мода равна $x = a$. Из (65) следует, что для пирсоновской меры асимметрии (*skewness*) имеем

$$Sk := -a / \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3) / (10\beta_2 - 12\beta_1 - 18). \quad (67)$$

Далее, если $a = 0$, то

$$d^2f/dx^2 = f(b_0 - b_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2)^{-2},$$

поэтому точки перегиба графика плотности распределения $f(x)$ определяются формулой $x^2 = b_0 / b_2$. Следовательно, у плотности из семейства Пирсона существует не более чем две точки перегиба, и если их действительно две, то они отстоят от моды на одинаковом расстоянии. В общем случае может случиться, что одна из точек перегиба находится вне области, где сосредоточено распределение.

Дискриминант знаменателя в уравнении (56) равен: $D = b_1^2(1 - \kappa^{-1})$, где

$$\kappa := b_1^2 / 4b_0b_2 = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} \quad (68)$$

– «каппа Пирсона» Общий интеграл уравнения (62) зависит от вида корней квадратного уравнения $b_0 + b_1x + b_2x^2 = 0$ и определяется κ -критерием Пирсона и дополнительными параметрами:

$$a := 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6, \quad c := 8\beta_2 - 15\beta_1 - 36 = 0, \quad d := \beta_2 - \beta_1 - 1 < 0.$$

Семейство кривых Пирсона, удовлетворяющее уравнению (62), приведено в Табл. 3.

Таблица 3.

Тип уравнения	Начало отсчета для x	Область определения
I. Бета-распределение $f(x) = f_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$	Мода	$-a_1 < x < a_2$
II. $f = f_0 \left(1 - x^2 / a^2\right)^m$	Мода (среднее)	$-a < x < a$
III. Гамма-распределение $f = f_0 e^{-\gamma x} (1 - x/a)^{\gamma a}$	Мода	$-a < x < \infty$
IV. Распределение Пирсона 4-го типа $f = f_0 e^{-\gamma \arctg x/a} \left(1 + x^2 / a^2\right)^{-m}$	Среднее $+va / (2m - 2)$	$-\infty < x < \infty$
V. $f = f_0 e^{-\gamma/x} x^{-p}$	Начало кривой	$0 < x < \infty$
VI. Распределение Пирсона 6-го типа $f = f_0 (x - a)^{q_2} x^{-q_1}$	Точка, отстоящая на $ a $ от начала кривой	$a < x < \infty$

VII. $f = f_0 \left(1 + x^2 / a^2\right)^{-m}$	Мода (среднее)	$-\infty < x < \infty$
--	----------------	------------------------

В Табл. 4 приведены типы кривых Пирсона и соответствующие им критерии, а также границы области кривых Пирсона. Граница 1 – это верхняя граница всех распределений, а граница 0 – граница кривых Пирсона.

Таблица 4.

Тип кривой	Граница 0	I	II	III	IV	V	VI	VII	Граница 1
Критерии		$\kappa < 0$	$\kappa = 0$	$\kappa = \pm\infty$	$0 < \kappa < 1$	$\kappa = 1$	$\kappa > 1$	$\kappa = 0$	
	$d < 0$		$\beta_2 < 3$	$a = 0$				$\beta_2 > 3$	$c \geq 0$ $\mu_3 = \infty$

Таким образом, если вдоль осей прямоугольной системы координат условиться откладывать отрезки, отвечающие величинам β_1 и β_2 , то в плоскости β_2, β_1 различным типам кривых Пирсона будут соответствовать области, кривые и точки.

На Рис. 2 указано такое разбиение плоскости β_2, β_1 для основных типов кривых Пирсона I-VII. Прямая линия с уравнением $d \equiv \beta_2 - \beta_1 - 1 = 0$ представляет собой верхнюю границу для допустимых точек (β_2, β_1) , так как не существует распределений, для которых $d < 0$. Кроме этого, если кривая принадлежит семейству Пирсона, причем $c := 8\beta_2 - 15\beta_1 - 36 \geq 0$, то $\mu_3 = \infty$. На Рис. 2 прямая с уравнением $c = 0$ служит нижней границей точек с координатами (β_2, β_1) .

Заметим, что наиболее типичная колоколообразная форма кривой типа I наблюдается тогда, когда m_1 и m_2 положительны (область I на Рис.3): для J -образного бета-распределения (область I(J)) один из этих показателей отрицателен. Если же m_1 и m_2 оба отрицательны, то бета-распределение имеет U -образную форму (область I(U)).

Граница области I(J) задается уравнением $4(4\beta_2 - 3\beta_1)(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)^2 = \beta_1(\beta_2 + 3^2)(8\beta_2 - 9\beta_1 - 12)$; линия III типа задается уравнением $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$; линия V типа задается уравнением $\beta_1(\beta_2 + 3)^2 = 4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)$. Линия, ниже которой (а также на ней самой) для всех кривых Пирсона: $\mu_8 = \infty$, $8\beta_2 - 15\beta_1 - 36 = 0$.

В работе (Pearson, Hartley, 1954) было установлено, что пирсоновские

распределения хорошо соответствуют результатам наблюдений. Другое достоинство этих распределений (в частности, распределений I и III типов) состоит в том, что ими можно с хорошей точностью приближать теоретические распределения, зная их моменты. Систематическое изложение техники подбора аппроксимирующих распределений дано в работе (Elderton, 1953).

Все распределения Пирсона определяются своими четырьмя первыми моментами за исключением распределений, задаваемых меньшим количеством моментов.

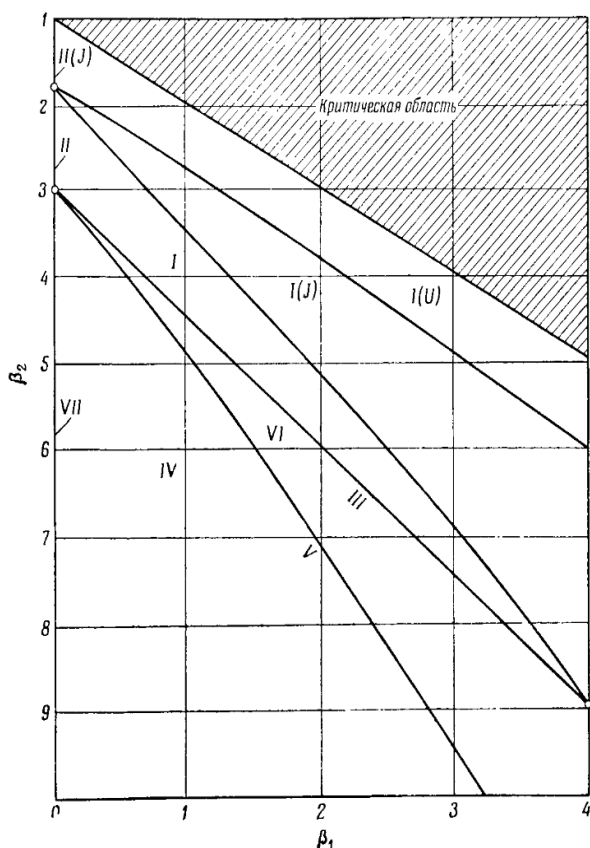
5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Схему вычисления моментов решения разберем на примере кинетического уравнения (42) с ядром коагуляции (Логунов, 1979)

$$K(v, w) = Gv^\alpha w^\alpha. \quad (69)$$

Подставляя (62) в (21) и учитывая (44), получим систему уравнений для определения первых пяти моментов решения кинетического уравнения

$$\begin{aligned} dm'_0 / d\tau &= B_0(m'_\alpha)^2, & dm'_1 / d\tau &= 0, & dm'_2 / d\tau &= B_2(m'_{1+\alpha})^2, \\ dm'_3 / d\tau &= B_3m'_{1+\alpha}m'_{2+\alpha}, & dm'_4 / d\tau &= B_4m'_{1+\alpha}m'_{3+\alpha} + B_5(m'_{2+\alpha})^2, \end{aligned} \quad (70)$$



Метод Пирсона состоит в следующем:

1. Определяются первые четыре момента для эмпирического распределения, отвечающие результатам наблюдений.
2. Вычисляются значения β_1 и β_2 и величина k (см. (61)), и, следовательно, определяется тип распределений.
3. Эмпирические моменты приравниваются моментам подходящего распределения, которые выражены в терминах его параметров.
4. Полученные уравнения разрешаются относительно неизвестных параметров, и, следовательно, находится искомое распределение (см. Большев, Смирнов, 1983).

Рис. 2. Графики для определения типа кривой Пирсона в зависимости от β_1 и β_2 .

где дифференцирование проводится по $\tau = Gm_1^{2\alpha}t$. Здесь

$$\begin{aligned} B_0 &:= -(1/2)m_1^{-2\alpha}m_0^{-1}(0)m_{1+\alpha}^2(0), & B_2 &:= m_1^{-2\alpha}m_2^{-1}(0)m_{1+\alpha}^2(0), \\ B_3 &:= 3m_1^{-2\alpha}m_{1+\alpha}(0)m_{2+\alpha}(0)m_3(0) & B_4 &:= 4m_1^{-2\alpha}m_{1+\alpha}(0)m_{3+\alpha}(0)m_4^{-1}(0), \\ & & B_5 &:= 3m_1^{-2\alpha}m_{2+\alpha}^2(0)m_4^{-1}(0). \end{aligned} \quad (71)$$

Для случая двухточечной интерполяции дробных моментов через целые доопределяющие уравнения для системы (70) принимают вид:

$$\begin{aligned} m'_\alpha &= (m'_0)^{1-\alpha}, & m'_{1+\alpha} &= (m'_2)^\alpha, \\ m'_{2+\alpha} &= (m'_2)^{1-\alpha}(m'_3)^\alpha, & m'_{3+\alpha} &= (m'_{3+\alpha})^{1-\alpha}(m'_4)^\alpha. \end{aligned} \quad (72)$$

Подставляя (72) в (70), получим

$$\begin{aligned} dm'_0/d\tau &= B_0(m'_0)^{2(1-\alpha)}, & dm'_1/d\tau &= 0, & dm'_2/d\tau &= B_2(m'_2)^{2\alpha}, & dm'_3/d\tau &= B_3m'_2(m'_3)^\alpha, \\ dm'_4/d\tau &= B_4(m'_2)^\alpha(m'_3)^{1-\alpha}(m'_4)^\alpha + B_5(m'_2)^{1-\alpha}(m'_3)^{2\alpha}. \end{aligned} \quad (73)$$

Первые четыре уравнения имеют аналитические решения, которые можно записать в виде:

при $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned} m'_0 &= \exp(B_0\tau), & m'_1 &= 1, & m'_2 &= \exp(B_2\tau), \\ m'_3 &= [1 + (B_3/2B_2)\exp(B_2\tau)]^2; \end{aligned} \quad (74)$$

при $\alpha \neq 1/2$

$$\begin{aligned} m'_0 &= [1 + (2\alpha - 1)B_0\tau]^{-1/(1-2\alpha)}, & m'_1 &= 1, & m'_2 &= [1 + (2\alpha - 1)B_2\tau]^{1/(1-2\alpha)}, \\ m'_3 &= \left\{ 1 + \frac{B_3}{2B_2} \left[\left(1 + \frac{B_2\tau}{1-2\alpha} \right)^{2(1-\alpha)/(1-2\alpha)} - 1 \right] \right\}^{1/(1-\alpha)}. \end{aligned} \quad (75)$$

Графики $m'_0(\tau)$ и $m'_2(\tau)$, рассчитанные при $\alpha = 1/4$ и различных порядках интерполяционных схем, применяемых для выражения дробных моментов через целые, приведены на Рис. 3. Для интерполяционных схем выше второго порядка эти зависимости были определены численно. Все расчеты проведены в предположении, что $m_1 = 1/100$, а начальная плотность распределения частиц по размерам является гамма-распределением

$$p(v, 0) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} v^{\beta-1} \exp(-\lambda v), \quad \text{при } \lambda = 4 \cdot 10^9, \beta = 2, \quad (76)$$

причем начальные значения моментов определялись как

$$m_\gamma(0) = \Gamma(\beta + \gamma) / \lambda^\gamma \Gamma(\beta). \quad (77)$$

По первым пяти моментам решения можно сделать параметрическую оценку самого решения на основе диаграммы Пирсона, построенной в координатах квадрата асимметрии β_1 и эксцесса β_2 оцениваемого распределения.

$$\beta_1 = \left[\mu'_3 / (\mu'_2)^{3/2} \right]^2, \quad \beta_2 = \mu'_4 / (\mu'_2)^2, \quad \mu'_i = \int_0^\infty (v - \bar{v})^i p(v) dv. \quad (78)$$

Чтобы решить, какое из семейств распределений Пирсона аппроксимирует искомое распределение, нужно использовать годограф совокупности параметров $\beta_1(\tau)$ и $\beta_2(\tau)$.

На Рис. 3 представлена диаграмма Пирсона для классических распределений, на которой нанесены годографы точек с координатами $\beta_1(\tau)$ и $\beta_2(\tau)$, рассчитанные для ядра вида (62) при $\alpha = 0$, $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 1/2$ и начальном условии (68). Годограф 4 соответствует уравнению с ядром $K(v, w) = G(v + w)$.

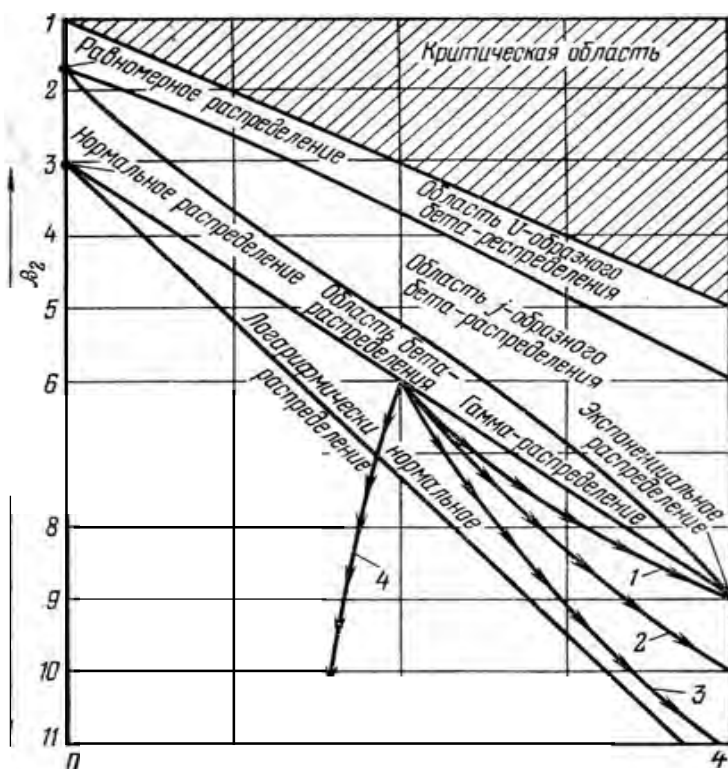


Рис.3. Диаграмма Пирсона с годографами решений кинетического уравнения соответствующих ядрам (69) при 1- $\alpha = 0$; 2- $\alpha = 1/4$; 3- $\alpha = 1/2$; 4- $K(v, w) = G(v + w)$ (Логунов, 1979).

В рассматриваемом случае точки β_1, β_2 лежат в области, ограниченной графиками кривых гамма-распределения и логнормального распределения (см. Рис. 2). Следовательно, для описания экспериментальных данных нужно выбрать семейство распределений Пирсона II.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска вокруг молодых звезд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано в общем случае с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося протопланетного диска при учете магнитогидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно-временного распределения термогидродинамических параметров дисковой среды и их численных значений зависит агрегатное состояние основных компонентов дискового вещества, расположение фронтов конденсации-сублимации и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остается нерешенным. К ним, частности, относится разработка численных моделей газопылевой системы, в которой эволюция аэродисперсного протопланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца, к уплотнению пылегазового субдиска в окрестности экваториальной плоскости и его распаду (вследствие гравитационной неустойчивости) на многочисленные пылевые сгущения, к возникновению локальных дискретных центров уплотнения, т.е. к образованию роя первичных уединенных газопылевых агрегатов, служащих основой зародышей планетезималей.

В представленной работе рассматривается ранняя стадия образования планетной системы – стадия спокойной (ламинарной) эволюции протопланетного газопылевого облака. При этом образование, рост и динамика пылевых сгущений играют решающую роль в понимании его эволюции. До последнего времени в большинстве теоретических моделей агрегации пылевых частиц в диске изначально принималась компактная структура возникающих укрупненных пылевых образований. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые кластеры могут иметь весьма рыхлую (пушистую) структуру и чрезвычайно низкую объемную плотность. Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с

компактными пылевыми образованиями относительно большие геометрические поперечные сечения, может существенно измениться режим движения в газовой несущей среде, в частности из-за значительного изменения силы трения. Поскольку эти процессы нельзя наблюдать непосредственно, то наше понимание этой первой фазы роста пылевых кластеров существенно зависит от предложенной теоретической модели их образования. По нашему мнению, для адекватного моделирования эволюции подобных пылевых агрегатов в диске и, в конечном счете, механизма образования зародышей прото-планетезималей необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению фрактальные свойства и внутреннюю структуру возникающих пылевых агрегатов.

Поскольку строгое решение задачи образования и эволюции подобных пылевых объектов включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции распределения (спектра) пылевых кластеров по размерам (т. е. решение обобщенного нелинейного пространственно неоднородного кинетического уравнения Смолуховского), то в работе приведены практически важные аппроксимационные модели для ядер коагуляции различного рода фрактальных кластеров. При этом проанализированы две группы моделей образования кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей отнесены модели, обусловленные прилипанием мономеров к кластеру, причем проанализирован связанный с характером движения отдельного мономера переход от кинетического режима к диффузионному. Ко второй группе моделей отнесены модели, описывающие рост фрактальных агрегатов в результате ассоциации двух разномасштабных кластеров.

В работе рассмотрен параметрический метод решения кинетических уравнений Смолуховского с произвольными ядрами коагуляции, который может быть полезным в тех случаях, когда необходимо знание только общих свойств функции распределения допланетных тел по размерам. Этот подход включает в себя решение конечного числа связанных между собой дифференциальных уравнений для целых моментов функции распределения пылевых фрактальных кластеров по размерам. Преимущество метода моментов состоит в том, что он позволяет значительно сэкономить вычислительное время по сравнению с прямым численным решением кинетического уравнения коагуляции, которое требует отслеживания всех размеров для каждого допланетного тела в каждом пространственно-временном интервале.

Рассмотрен также случай, позволяющий находить подходящее распределения фрактальных кластеров, когда имеются только ограниченные данные о характеристиках коагулирующей газопылевой смеси. Такие аппроксимационные распределения можно получить, если найдено конечное число моментов распределения, причем точный вид искомого распределения заранее неизвестен. При рассмотрении моментного метода решения

коагуляционного уравнения Смолуховского получены выражения, позволяющие оценить среднее расстояние, симметрию и островершинность вероятностного распределения фрактальных кластеров по размерам. Эти выражения используются затем при подборе соответствующих решений эмпирических моделей по диаграмме Пирсона.

Полученные результаты открывают возможности создания усовершенствованных (и более приближенных к реальности) моделей эволюции газопылевого облака, обеспечивая тем самым новый подход в решении ключевой проблемы звездно-планетной космогонии, связанной с объяснением процесса роста межзвездных пылевых частиц до крупных планетезималей.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Волощук В.М., Седунов Ю.** Процессы коагуляции в дисперсных средах. М.: Гидрометеиздат. 1975. 320 с.
- Волощук В.М.** Кинетическая теория коагуляции. М.: Гидрометиздат. 1984. 283 с.
- Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз. 1963. 664 с.
- Кендал М. Дж., Стьюарт А.** Теория распределений. Пер. с англ. / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Наука. 1966. 588 с.
- Колесниченко А.В.** Проблемы моделирования процессов массопереноса и коагуляции в допланетном газопылевом облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2000. № 41. 30 с.
- Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых прото-планетезималей в Солнечном допланетном облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 75. 44 с. <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-75>
- Колесниченко А.В., Маров М.Я.** Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014b. 632 с.
- Крамер Г.** Математические методы статистики. –М.: ИЛ. 1948. 648 с.
- Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио. 1974. 656 с.
- Логунов В.И.** Динамика процессов дробления капельной жидкости в турбулентном потоке // ПМТФ. 1985. № 4. С. 66-73.
- Логунов В.И.** Обезвоживание и обессоливание нефтей. М.: Химия. 1979. 216 с.
- Михайлов Е.Ф., Власенко С.С.** Образование фрактальных структур в газовой фазе // УФН. 1995. Т.165. . № 3. С.263-283.

- Пискунов В.Н.** Динамика аэрозолей. М.: Физматлит. 2010. 293 с
- Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с
- Смирнов Б.М.** Процессы с участием кластеров и малых частиц в буферном газе // УФН. 2011. Т.181. № 7. С.713-74.
- Смирнов Б.М.** Физика фрактальных кластеров. М. : Наука. 1991. 134 с.
- Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов // М. :ИЛ. 960. 510 с.
- Bertini I., Gutierrez P. J., and Sabolo W.** The influence of the monomer shape in the first stage of dust growth in the protoplanetary disk// *Astron. and Astrophys* .2009. V. 504. P. 625–633.
- Blum J.** Grain growth and coagulation. In *ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust*, ed. A.N. Witt, G.C. Clayton and B.T. Draine (San Francisco: ASP). 2004. P. 369-391.
- Blum J., Wurm G., Kempf S., Henning Th.** The Brownian motion of dust in the solar nebula: an experimental approach to the problem of pre-planetary dust aggregation // *Icarus* 1996. V. 124. P.441-451.
- Chan T.L., Lin J.Z., Zhou K., Chan C.K.** Simultaneous Numerical Simulation of Nano and Fine Particle Coagulation and Dispersion in a Round Jet // *J. Aerosol Sci.* 2006. V. 37. P. 1545-1561.
- Chen Z.-Y., Meakin P., Deutch J. M.** Comment on «Hydrodynamic Behavior of Fractal Aggregates» // *Phys. Rev. Lett.* 1987. *Phys. Rev. Lett.* 198. 59. № 18. P. 2121.
- Dominik C., Tielens A.G.G.M.** The physics of dust coagulation and the structure of dust aggregates in space// *Astrophys. J.* 1997. V.480. P.647-673.
- Elderton W.P.** *Frequent curves and correlation.* Cambridge University Press. 1953.290 p.
- Frenklach M., Harris S. J.** *Aerosol Dynamics Modeling Using the Method of Moments* // *J. Coll. Interface Sci.* 1987. V. 118. P. 252-261.
- Goldrich P., Ward W.R.** The formation of planetesimals// *Astrophys. J.* 1973. V.183. № 3. P. 1051-1061.
- Hahn G.J., Shapiro S.S.** *Statistical models in engineering.* New York, Wiley 1967.376 p.
- Jullien R.** A new model of cluster aggregation // *J.Phys.A.* 1986. V. 19. № 11. P. 2129-2136.
- Lee K.W.** Change of Particle Size Distribution during Brownian Coagulation // *J. Colloid Interface Sci.* 1983. V. 92. № 2. P. 315-325.
- Mandelbrot B.B.** *The fractal geometry of nature/* N.Y.: Freeman. 1982. 468 p.
- Marchisio D. L., Fox R. O.** Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments // *J. Aerosol Sci.* 2005. V. 36. P. 43-73.
- Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V.** *Mechanics of Turbulence of Multicomponent Gases.* Kluwer Academic Publishers. 2001. 375 p.
- McGraw R.** Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments // *Aerosol Sci. Technol.* 1997. V. 27. P. 255-265.
- Meakin P.** Effects of cluster trajectories on cluster-cluster aggregation: A comparison of linear and Brownian trajectories in two- and three-dimensional simulations// *Phys. Rev.* 1984. V. 29. № 2. P. 997-999.
- Meakin P.** Formation of fractal clusters and networks by irreversible diffusion-limited aggregation// *Phys. Rev. Lett.* 1983. V.51. № 13. P. 1119-1122.
- Meakin P., Donn B., Mulholland G.** Collisions between point masses and fractal aggregates//*Langmuir.* 1989. V. 5. P. 510-518.

Mingzhou Yu., Jianzhong Lin., Tatleung C. A. New Moment Method for Solving the Coagulation Equation for Particles in Brownian Motion // *Aerosol Science and Technology*. 2008. V. 42. P. 705-713.

Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula // *Icarus*. 1986. V.67. P. 375-390.

Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K. Accumulation of planetesimals in the solar nebula// *Icarus*. 1983. V.54. P. 361-376.

Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchi T., Sakagami M.-A. Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution // *ApJ*. 2011. V. 731. P.95.

Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M. Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters// *Astron. Astrophys.* 2007. V. 461. P. 215-236.

Ossenkopf V. Dust coagulation in dense molecular clouds: the formation of fluffy aggregates//*Astron. Astrophys.* 1993. V. 280. P. 617-646.

Pearson E. S., Hartley H.O. *Biometrika Tables for Statisticians*, V.I. Cambridge University Press. Cambridge. 1954. 25 p.

Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes in Fortran: 2 nd edition/* Cambridge University Press. 1992. 994 p.

Smoluchowski M. V. Experiments on a mathematical theory of kinetic coagulation of colloid solutions // *Z. Phys. Chem.-Stoichiometrie und Verwandtschaftslehre* 1917. V. 92. P. 129-68.

Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S. Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions//arxiv:1205.1894v1 [astro-ph. EP]. 2012. 28 P.

Suyama T., Wada K., Tanaka H. Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions//*Astroph. J.* 2008. V. 684. P.1310-1322.

Sutherland D. N. Comments on Vold's simulation of floc formation// *J. colloid and Interface Sci.* 1966. V. 22. P. 300-302.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars// *Astrophys. J.* 1964. V.139. P. 1217-1238.

Vold M.J. Computer simulation of floc formation in a colloidal suspension // *J. colloid and Interface Sci.* 1963. V. 18. P. 684-695.

Youdin A.N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability// *Astrophys. J.* 2002. V. 580. P. 494-505.

Yu M. Z., Lin J. Z., Chan T. L. A new moment method for solving the coagulation equation for particles in Brownian motion // *Aerosol Sci. Technol.* 2008.V. 42. P. 705-713.

Yu M. Z., Lin J., Jin H., Jiang Y. The verification of the Taylor-expansion moment method for the nanoparticle coagulation in the entire size regime due to Brownian motion // *J. Nanopart. Res.* 2011. V. 13. P. 2007-2020.

Wada, K.; Tanaka, H.; Suyama, T.; Kimura, H.; Yamamoto, T. Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions// *Astrophys. J.* 2008. V. 677. P.1296-1308.

Witten T.A., Sander L.M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 1400-1403.

Wiltzius P. Hydrodynamic behavior of fractal aggregates//*Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. № 7. P. 710-713.

Weidenschilling S.J. Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula // Icarus. 1980. V.44. P. 172-189.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Модель образования и динамики пылевых фрактальных кластеров: Базовые уравнения.....	6
2. Процессы кластеризации во фрактальной среде.....	16
3. Решение уравнения Смолуховского методом моментов.....	22
4. Аппроксимация решения уравнения Смолуховского эмпирическими распределениями.....	32
5. Вычисление моментов решения кинетического уравнения.....	36
Заключение.....	38
Список литературы.....	41