ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 16 за 2026 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.В. Орлов

Оптическая навигация малых космических аппаратов в стековой компоновке при отделении

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Орлов В.В. Оптическая навигация малых космических аппаратов в стековой компоновке при отделении // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2026. № 16. 19 с. EDN: QSZBPE
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2026-16

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.В. Орлов

Оптическая навигация малых космических аппаратов в стековой компоновке при отделении

Москва — 2026

Орлов В.В.

Оптическая навигация малых космических аппаратов в стековой компоновке при отделении

Среди космических миссий с использованием многоспутниковой группировки увеличивается использование плоских космических аппаратов, например, фемтоспутников на печатной плате. Группу таких спутников можно компоновать способом «стек» при выводе на орбиту. Рассматривается задача определения относительных траекторий таких космических аппаратов с помощью обработки данных с видеокамеры, установленной на материнском космическом аппарате или разгонном блоке. Видео записывается на некотором промежутке времени после отделения аппаратов. В работе рассматриваются различные методы обнаружения космических аппаратов, проводится исследование методов с помощью численного моделирования.

Ключевые слова: фемтоспутник, навигация, отделение

Vladislav Vladimirovich Orlov

Optical navigation of small spacecraft swarm in stack arrangement during deployment

Among space mission with multi-satellite constellation, there is an increasing application of flat spacecraft, such as femtosatellites placed on printed circuit board. The spacecraft group can be assembled using «stack» method during launch into orbit. In this paper, problem of such spacecrafts motion determination using video processing from camera of chief spacecraft or launcher unit is studied. The video is captured after deputy spacecrafts deployment. Various methods are considered for spacecraft position determination and analyzed using numerical modeling.

Key words: femtosatellite, navigation, deployment

Оглавление

Введение 3
Уравнения движения 3
Оптическая навигация тела 5
Определение положения по границе аппарата 8
Определение положения при помощи меток 12
Заключение 19
Библиографический список 19

Введение

В некоторых космических миссиях процесс отделения одного космического аппарата (КА) от другого записывается на видеокамеру. Таким образом можно точно установить параметры отделения как этапа космической миссии. Информацию такого видеоматериала также можно использовать для оценки относительных траекторий КА при помощи методов оптической навигации. Предполагается, что при отделении группы дочерних космических аппаратов (ДКА) от разгонного блока или материнского космического аппарата (оба варианта обозначаются как МКА) камера установлена на корпусе МКА. Некоторые ДКА могут заслонять друг друга и быть не видны на изображении с камеры, а также содержать или не содержать на своём корпусе специальные метки для определения движения.

В большинстве работ [1] по оптической навигации КА требуется полное нахождение аппарата в поле зрения камеры другого аппарата. Однако сразу после отделения группы ДКА только часть каждого аппарата попадает на видеоизображение камеры МКА. Далее по мере удаления ДКА от МКА ухудшается различимость граней или опорных точек ДКА на видеоизображении. В случае если ДКА имеют расположенные на корпусе специальные чёрно-белые метки, оценка относительного движения ДКА может быть получена с помощью известных методов компьютерного зрения, например, с использованием библиотек Aruco [2, 3]. В более общем случае, когда специальные метки не установлены на ДКА, задача относительной навигации может быть решена с использованием методов обнаружения особых реперных точек на видеоизображении. С использованием полученных оценок положений реперных точек могут быть вычислены параметры относительного поступательного и углового движения ДКА.

В данной работе исследуется отделение группы ДКА плоской формы – их линейный размер по одной оси сильно меньше, чем по двум другим осям. Примерами таких аппаратов служат спутники связи Starlink, фемтоспутники класса PCBsat. В таком случае в разгонном блоке или материнском аппарате они, как правило, размещаются в стековой компоновке.

Уравнения движения

В работе используются следующие системы координат (СК) (рис. 1). Начало инерциальной системы координат (ИСК) находится в центре Земли, оси Ox, Oy ортогональны земной оси, ось Oz расположена вдоль земной оси. Орбитальная система координат (ОСК) имеет центр, движущийся относительно ИСК по круговой околоземной орбите с угловой скоростью ω_0, ось Ox сонаправлена вектору скорости, ось Oy сонаправлена местной вертикали, ось Oz дополняет правую тройку векторов и противонаправлена вектору орбитального момента. Связная система координат (ССК) имеет начало в центре масс МКА; её

оси жёстко связаны с главными центральными осями инерции МКА. Считается, что при отделении ДКА от МКА центр масс МКА не меняется. Связная система координат с номером i (ССК$_i$) имеет центр в центре масс ДКА с номером i, оси жёстко связаны с главными центральными осями инерции ДКА. Система координат камеры (СК-кам) имеет центр, неизменный в ССК, ось Oz сонаправлена единичному вектору оптической оси $\mathbf{e}_{\text{toward}}$, ось Oy сонаправлена единичному вектору вертикали камеры $\mathbf{e}_{\text{up}}$, ось Ox дополняет правую тройку векторов. Векторы $\mathbf{e}_{\text{toward}}, \mathbf{e}_{\text{up}}$ постоянны в ССК.

Для описания задачи введём следующие радиус-векторы (рис. 1):

1. $\mathbf{r}_{\text{chief}}$ – положение центра масс МКА в ОСК,
2. $\mathbf{r}^{i}_{\text{deputy}}$ – положение центра масс ДКА с номером i в ОСК,
3. $\mathbf{e}^{\text{ОСК}}_{\text{deploy}}, \mathbf{e}^{\text{ССК}}_{\text{deploy}}$ – единичный вектор, сонаправленный начальной скорости ДКА в момент их отделения в ОСК, ССК соответственно,
4. $\mathbf{r}_{\text{cam}}$ – центр СК-кам в ССК,
5. $\mathbf{r}_{\text{marker}}$ – положение метки Aruco на корпусе ДКА для $\forall i$.

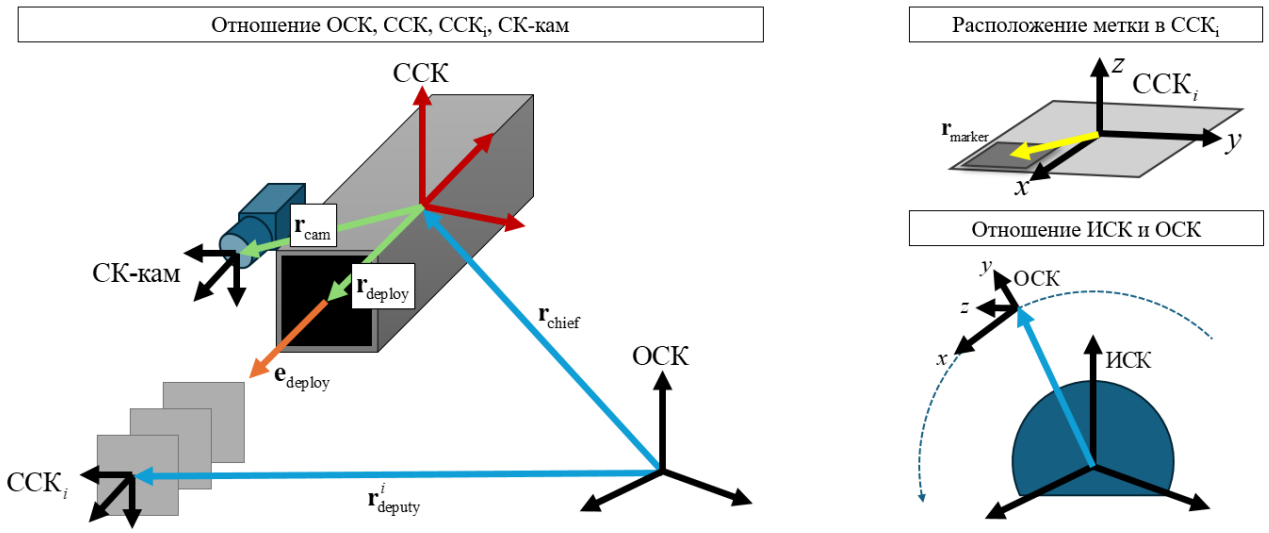


Рис. 1. Системы координат

Матрицей поворота из одной СК в другую $\mathbf{M}_{\text{СК}_1\to\text{СК}_2}$ называется такая матрица, которая для любого радиус-вектора $\mathbf{r}$ связывает его координаты в двух СК соотношением $\mathbf{r}^{\text{СК}_2} = \mathbf{M}_{\text{СК}_1\to\text{СК}_2}\mathbf{r}^{\text{СК}_1} + \mathbf{r}^{\text{СК}_2}_{\text{СК}_1} = \mathbf{M}_{\text{СК}_1\to\text{СК}_2}\left(\mathbf{r}^{\text{СК}_1} - \mathbf{r}^{\text{СК}_1}_{\text{СК}_2}\right)$, где $\mathbf{r}^{\text{СК}_2}_{\text{СК}_1}, \mathbf{r}^{\text{СК}_1}_{\text{СК}_2}$ – центры СК$_1$, СК$_2$ в СК$_2$, СК$_1$ соответственно. Матрица поворота от ССК к СК-кам, удовлетворяющая соотношению $\mathbf{r}^{\text{СК-кам}} = \mathbf{M}_{\text{ССК}\to\text{СК-кам}}\left(\mathbf{r}^{\text{ССК}} - \mathbf{r}_{\text{cam}}\right)$ для любого радиус-вектора $\mathbf{r}$, определяется векторами $\mathbf{e}_{\text{toward}}, \mathbf{e}_{\text{up}}$ и равна произведению следующих матриц:

$$\mathbf{M}_{\text{ССК}\to\text{СК-кам}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_x)^T \\ (\mathbf{e}_y)^T \\ (\mathbf{e}_{\text{toward}})^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_x = \frac{\left[\mathbf{e}_{\text{up}} \times \mathbf{e}_{\text{toward}}\right]}{\left\|\left[\mathbf{e}_{\text{up}} \times \mathbf{e}_{\text{toward}}\right]\right\|}, \quad \mathbf{e}_y = \frac{\left[\mathbf{e}_{\text{toward}} \times \mathbf{e}_x\right]}{\left\|\left[\mathbf{e}_{\text{toward}} \times \mathbf{e}_x\right]\right\|}.$$

При отделении ориентация ДКА относительно МКА считается известной:

$$\mathbf{M}_{\text{ССК}\to\text{ССКi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1,\ldots N.$$

Считается, что кватернион ориентации Λ неизменен во время отделения. Орбитальное движение ДКА в ОСК задаётся уравнениями Хилла-Клохесси-Уилтшира [4]:

$$\begin{cases} \ddot{r}_x = -2\omega_0 \dot{r}_y, \\ \ddot{r}_y = 3\omega_0^2 r_y + 2\omega_0 \dot{r}_x, \\ \ddot{r}_z = -\omega_0^2 r_z. \end{cases} \tag{1}$$

В момент отделения t_{deploy} ДКА начинает движение относительно ОСК в положении $\mathbf{r}_{\text{chief}} + \mathbf{M}_{\text{ССК}\to\text{ОСК}}\mathbf{r}_{\text{deploy}}$ и со скоростью $\dot{\mathbf{r}}_{\text{chief}}\mathbf{M}_{\text{ССК}\to\text{ОСК}}\mathbf{e}_{\text{deploy}}\upsilon_0$.

Система уравнений (1) линейна, а значит, если $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – её решения, то $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ – тоже её решение. Поскольку далее рассматривается движение ДКА относительно МКА, то без потери общности можно поместить центр МКА в центр ОСК $\mathbf{r}_{\text{chief}} = 0$.

Оптическая навигация тела

В данной работе для точки $\mathbf{r}$, имеющей в СК-кам координаты X, Y, Z, проекция на изображение x, y рассчитывается согласно формулам тонкой линзы [3]:

$$x = c_x + f_x \frac{X}{Z}, \quad y = c_y + f_y \frac{Y}{Z}, \tag{2}$$

где c_x, c_y – постоянные координаты точки пересечения оптической оси камеры с ПЗС-матрицей, f – фокусное расстояние камеры в метрах, $f_x = fs_x, f_y = fs_y$ – постоянные фокусные расстояния камеры, приведённые к размерам пикселей по

осям Ox, Oy соответственно, s_x, s_y – коэффициенты, определяющие размер пикселя.

Для снимка камеры в действительности используются другие формулы, учитывающие радиальные искажения. Для нахождения внутренних характеристик камеры – коэффициентов искажения и рассмотренных коэффициентов c_x, c_y, f_x, f_y, – используется калибровка с использованием чёрно-белой шахматной доски с квадратами известного размера. После калибровки, искажённое изображение может быть «скорректировано» – приведено в вид, для которого справедливы формулы (2). Далее такое изображение будем называть неискажённым.

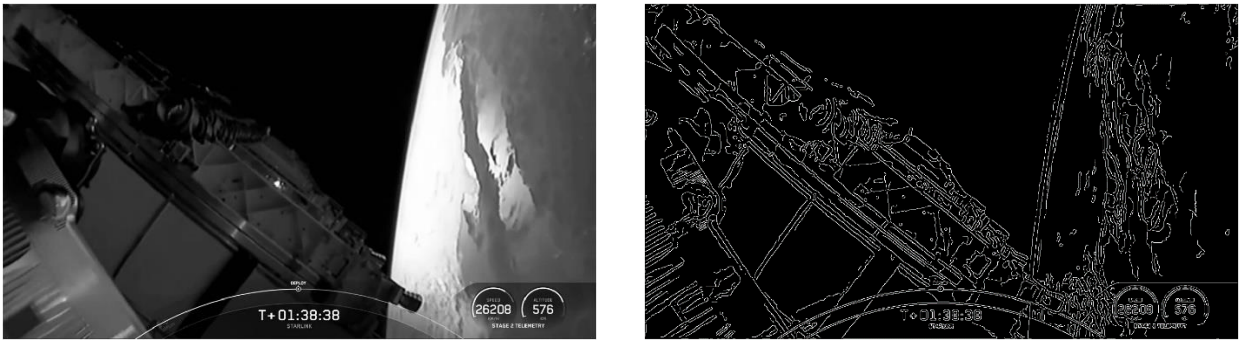
В случае если на корпусе ДКА установлены специальные метки, положение и ориентация меток в СК-кам можно оценить с помощью готовых программных комплексов. Такие программы могут идентифицировать специальную метку, если она полностью изображена на кадре, а внутренние характеристики камеры известны.

В большинстве миссий нет возможности установить специальные метки на корпусе ДКА. Рассмотрим метод идентификации граней ДКА в качестве множества опорных точек для оптической навигации. Пусть некая прямая линия задана уравнением $\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{n}\xi$. Она проецируется на неискажённое изображение как прямая линия $x(\xi), y(\xi)$. Покажем, что выражение наклона линии $\dfrac{y(\xi) - y(0)}{x(\xi) - x(0)}$ не зависит от положения точки на линии ξ:

$$x(\xi) = c_x + f_x \frac{X_0 + n_x\xi}{Z_0 + n_z\xi}, \quad y(\xi) = c_y + f_y \frac{Y_0 + n_y\xi}{Z_0 + n_z\xi},$$

$$\frac{y(\xi) - y(0)}{x(\xi) - x(0)} = \frac{f_y}{f_x} \frac{\dfrac{Y_0 + n_y\xi}{Z_0 + n_z\xi} - \dfrac{Y_0}{Z_0}}{\dfrac{X_0 + n_x\xi}{Z_0 + n_z\xi} - \dfrac{X_0}{Z_0}} = \frac{f_y}{f_x} \frac{Z_0 n_y - Y_0 n_z}{Z_0 n_x - X_0 n_z}.$$

Тогда прямые грани ДКА могут быть обнаружены на неискажённом изображении как прямые отрезки. Рассмотрим чёрно-белое изображение как скалярную функцию чёрного оттенка. Градиент функции создаёт векторное поле, имеющее большое значение по модулю в областях резкого изменения цвета. Такими областями являются, например, грани ДКА, смежные поверхности которых имеют разную освещённость. Алгоритм, предложенный Canny J. [5] и реализованный в Image Processing Toolbox на языке Matlab, используется для выделения кривых резкого изменения цвета. Для демонстрации алгоритма, ниже представлены кадр отделения спутников Starlink [6] (рис. 2, а) и выделенные зоны резкого изменения цвета на кадре (рис. 2, б).



а) б)

Рис. 2. Обнаружение всех граней на изображении

Любая прямая линия на изображении может быть задана переменными θ, ρ так, что любая точка на прямой x, y удовлетворяет равенству:

$$\rho = x\cos(\theta) + y\sin(\theta).$$

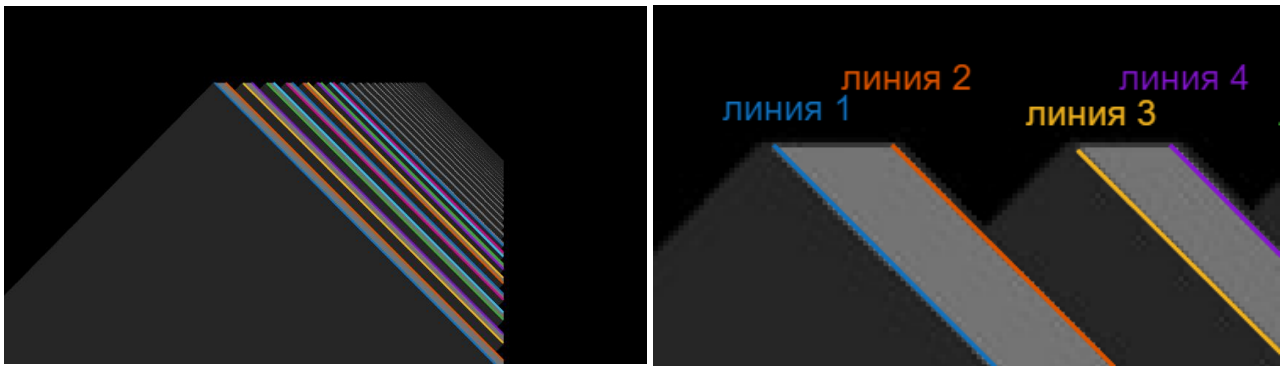
Далее, для нахождения прямых граней КА в данной работе используется преобразование Хафа. Оно тоже реализовано в Image Processing Toolbox [7]. Преобразование Хафа отображает скалярную функцию цвета $f(x, y)$ в скалярную функцию $H(\theta, \rho)$, где число H равно числу точек изображения, лежащих на прямой θ, ρ.

Функция $H(\theta, \rho)$ считается следующим образом. Вначале функция $H(\theta, \rho)$ равна нулю в области поиска $\theta = \{\theta_1, ...\theta_N\}, \rho = [0, \rho_{\max}]$. Далее, для каждой точки изображения и для каждого угла наклона прямой $\theta = \{\theta_1, ...\theta_N\}$ рассчитывается расстояние ρ от начала координат до прямой, и в соответствующей точке (θ, ρ) функция H увеличивается на значение интенсивности цвета пикселя в точке изображения (x, y).

В допустимой области определения – области высоких значений функции $H(\theta, \rho)$ – последовательно отбирается точка (θ^*, ρ^*) с максимальным значением H и убирается из допустимой области определения прямоугольник $\left\{\theta^* - \delta\theta \le \theta \le \theta^* + \delta\theta, \quad \rho^* - \delta\rho \le \rho \le \rho^* + \delta\rho\right\}$, где $\delta\theta, \delta\rho$ – постоянные параметры. Далее можно настроить алгоритм поиска, например отрезки на одной прямой, между которыми расстояние не больше заданного, а затем не рассматривать отрезки с длиной меньше заданной.

Таким образом, алгоритм позволяет искать прямые отрезки среди зон резкого изменения изображения и ограничить поиск отрезков следующими правилами: узкий диапазон углов наклона, минимальная длина отрезка. Поскольку при стековой компоновке грани ДКА параллельны, параметр $\delta\theta$

выбирается большим, а $\delta\rho$ – малым. Пример работы алгоритма на изображении, созданном с помощью численного моделирования, представлен на рис. 3.



а) б)

Рис. 3. Обнаружение длинных прямых граней на изображении

Определение положения по границе аппарата

Рассмотрим набор ДКА $1,...N$, расположенных в стековой компоновке (рис. 4). Для граней $1,...2N$ группы ДКА, расположенных в одной плоскости, введём вектор $\mathbf{L}=\left[L_x,L_y,L_z\right]$, равный по модулю длине грани и параллельный ей, и единичный $\mathbf{h}=\left[h_x,h_y,h_z\right]$, ортогональный $\mathbf{L}$ и линиям граней ДКА. Обозначим смещение ДКА в группе как Δ, ширину ДКА как 2δ. Введём также радиус-векторы $\mathbf{R}_i=\left[X_i,Y_i,Z_i\right]$ в СК-кам такие, что концы граней с номерами $2k-1$, $2k$, $k=1...N$ имеют радиус-векторы $\mathbf{R}_i-\delta\mathbf{h}+(k-1)\Delta\mathbf{h}$, $\mathbf{R}_i-\delta\mathbf{h}+(k-1)\Delta\mathbf{h}+\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}_i+\delta\mathbf{h}+(k-1)\Delta\mathbf{h}$, $\mathbf{R}_i+\delta\mathbf{h}+(k-1)\Delta\mathbf{h}+\mathbf{L}$ соответственно.

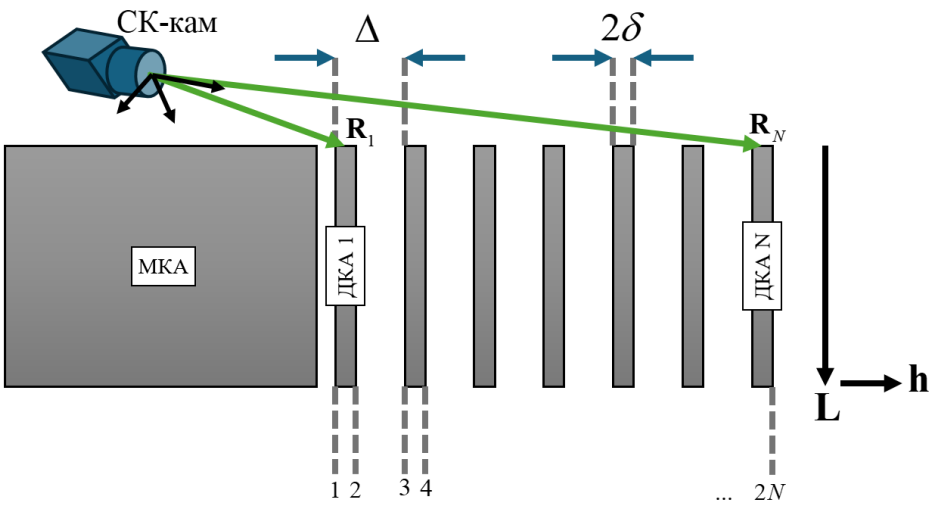


Рис. 4. Расположение ДКА до отделения

Допустим, на неискажённом изображении обнаружены грани с индексами $k_1,...k_m$, $m \le 2N$, как отрезки $x^1_{k_i}, y^1_{k_i}, x^2_{k_i}, y^2_{k_i}$. Считается, что индексы упорядочены по возрастанию $k_1 < ... < k_m$ – их можно отсортировать: самый длинный отрезок принимает индекс k_1, остальные упорядочены по удалённости – по расстоянию между отрезками или по значениям ρ_i, найденным с помощью преобразования Хафа. Считается, что первый индекс известен $k_1 = 1$, так как вероятность обнаружения первой грани наибольшая.

Согласно формулам тонкой линзы

$$x^1_{k_i} = c_x + f_x \frac{X_1 + (-1)^{k_i} h_x \delta + \tilde{k}_i h_x \Delta}{Z_1 + (-1)^{k_i} h_z \delta + \tilde{k}_i h_z \Delta}, \qquad y^1_{k_i} = c_y + f_y \frac{Y_1 + (-1)^{k_i} \delta h_y + \tilde{k}_i h_y \Delta}{Z_1 + (-1)^{k_i} \delta h_z + \tilde{k}_i h_z \Delta},$$

$$x^2_{k_i} = c_x + f_x \frac{X_1 + (-1)^{k_i} h_x \delta + \tilde{k}_i h_x \Delta + L_x}{Z_1 + (-1)^{k_i} h_z \delta + \tilde{k}_i h_z \Delta + L_z}, \quad y^2_{k_i} = c_y + f_y \frac{Y_1 + (-1)^{k_i} \delta h_y + \tilde{k}_i h_y \Delta + L_y}{Z_1 + (-1)^{k_i} \delta h_z + \tilde{k}_i h_z \Delta + L_z},$$

где $\tilde{k}_i = \mathrm{floor}(k_i / 2) - 1$. Обозначим $\bar{k}_i = \left((-1)^{k_i} \delta + \tilde{k}_i \Delta\right)$, $\tilde{x}^j_{k_i} = x^j_{k_i} - c_x$, $\tilde{y}^j_{k_i} = y^j_{k_i} - c_x$. Тогда равенства можно переписать в виде, верном для $\forall i = 1,...m$:

$$\tilde{x}^1_{k_i} Z_1 + \tilde{x}^1_{k_i} \bar{k}_i h_z - f_x X_1 - f_x \bar{k}_i h_x = 0,$$

$$\tilde{x}^2_{k_i} Z_1 + \tilde{x}^2_{k_i} \bar{k}_i h_z + \tilde{x}^2_{k_i} L_z - f_x X_1 - f_x \bar{k}_i h_x - f_x L_x = 0,$$

$$\tilde{y}^1_{k_i} Z_1 + \tilde{y}^1_{k_i} \bar{k}_i h_z - f_y Y_1 - f_y \bar{k}_i h_y = 0,$$

$$\tilde{y}^2_{k_i} Z_1 + \tilde{y}^2_{k_i} \bar{k}_i h_z + \tilde{y}^2_{k_i} L_z - f_y Y_1 - f_y \bar{k}_i h_y - f_y L_y = 0.$$

Запишем равенства в матричном виде

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T_{k_1} & ... & \mathbf{A}^T_{k_m} \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z & L_x & L_y & L_z & X_1 & Y_1 & Z_1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{A}_{k_i} = \begin{bmatrix} -f_x \bar{k}_i & 0 & \tilde{x}^1_{k_i} \bar{k}_i & 0 & 0 & 0 & -f_x & 0 & \tilde{x}^1_{k_i} \\ -f_x \bar{k}_i & 0 & \tilde{x}^2_{k_i} \bar{k}_i & -f_x & 0 & \tilde{x}^2_{k_i} & -f_x & 0 & \tilde{x}^2_{k_i} \\ 0 & -f_y \bar{k}_i & \tilde{y}^1_{k_i} \bar{k}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_y & \tilde{y}^1_{k_i} \\ 0 & -f_y \bar{k}_i & \tilde{y}^2_{k_i} \bar{k}_i & 0 & -f_y & \tilde{y}^2_{k_i} & 0 & -f_y & \tilde{y}^2_{k_i} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, данная система имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{\xi} = 0$. Предположим, некая компонента вектора $\boldsymbol{\xi}$ известна и не равна нулю, например, $h_z = 1$. Тогда система примет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{b},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & L_x & L_y & L_z & X_1 & Y_1 & Z_1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{b}_{k_1} = \begin{bmatrix} -\tilde{x}_{k_i}^1 \bar{k}_i h_z \\ -\tilde{x}_{k_i}^2 \bar{k}_i h_z \\ -\tilde{y}_{k_i}^1 \bar{k}_i h_z \\ -\tilde{y}_{k_i}^2 \bar{k}_i h_z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{k_1}^T & \dots & \mathbf{b}_{k_m}^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{k_1}^T & \dots & \tilde{\mathbf{A}}_{k_m}^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{k_i} = \begin{bmatrix} -f_x\bar{k}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_x & 0 & \tilde{x}_{k_i}^1 \\ -f_x\bar{k}_i & 0 & -f_x & 0 & \tilde{x}_{k_i}^2 & -f_x & 0 & \tilde{x}_{k_i}^2 \\ 0 & -f_y\bar{k}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_y & \tilde{y}_{k_i}^1 \\ 0 & -f_y\bar{k}_i & 0 & -f_y & \tilde{y}_{k_i}^2 & 0 & -f_y & \tilde{y}_{k_i}^2 \end{bmatrix}.$$

Решение последней системы существует и единственно, если количество уравнений равно числу неизвестных 8. Так как одна линия задаёт 4 уравнения, достаточно обнаружить 2 грани одного ДКА, чтобы решить систему. При большем количестве обнаруженных граней вектор неизвестных оценивается методом наименьших квадратов.

Если $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^*$ – решение системы $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{b}$, то $\alpha\tilde{\boldsymbol{\xi}}^*$ – решение системы $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \alpha\mathbf{b}$. Тогда вектор параметров $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z & L_x & L_y & L_z & X_1 & Y_1 & Z_1 \end{bmatrix}^T$ можно однозначно найти из дополнительного условия $h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 = 1$:

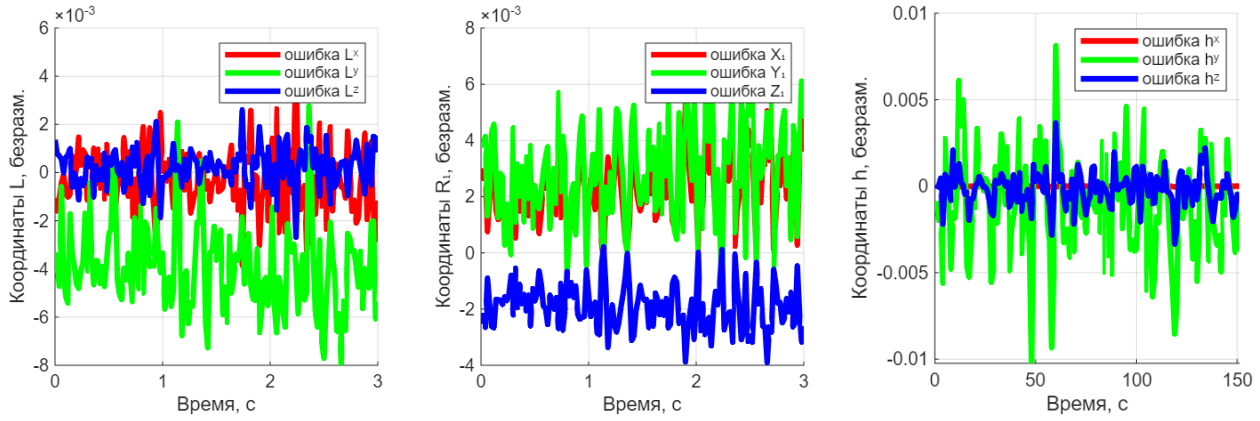
$$h_z = \frac{1}{\beta}, \quad h_x = \frac{\tilde{\xi}(1)}{\beta}, \quad \dots \quad Z_1 = \frac{\tilde{\xi}(8)}{\beta}, \quad \beta = \sqrt{\left(\tilde{\xi}(1)\right)^2 + \left(\tilde{\xi}(2)\right)^2 + 1}.$$

При нахождении вектора неизвестных $\boldsymbol{\xi}$ предположим, что последовательность индексов $k_2 \dots k_m$ известна. Найти её можно различными способами:

1. Для каждого из вариантов размещения возрастающих индексов $2 \dots 2N$ в $k_2 \dots k_m$ при условии $k_1 < \dots < k_m$ построить функцию ошибки на основе дополнительных условий. Такими условиями могут являться соотношения: известная длина грани $|\mathbf{L}| = L$, ортогональность векторов $\mathbf{L} \perp \mathbf{h}$. Далее будем считать истинным размещение с наименьшим значением функции ошибки. Пример функции ошибки: $\mathrm{Loss} = \left(|\mathbf{L}| - L\right)^2 + \left(\mathbf{L}, \mathbf{h}\right)^2$.
2. Оценить $k_2 \dots k_m$ по последовательности $\rho_1 \dots \rho_m$, где ρ_i – расстояния от прямой отрезка до начала координат изображения или до точки (c_x, c_y) на изображении.

Проведём численное моделирование: смоделируем видео отделения группы ДКА с размерами 200×200×5 см^3, начальным удалением от камеры 150 см и скоростью отделения 5 см/с по оси Ox ОСК; камера с разрешением 1920×1080

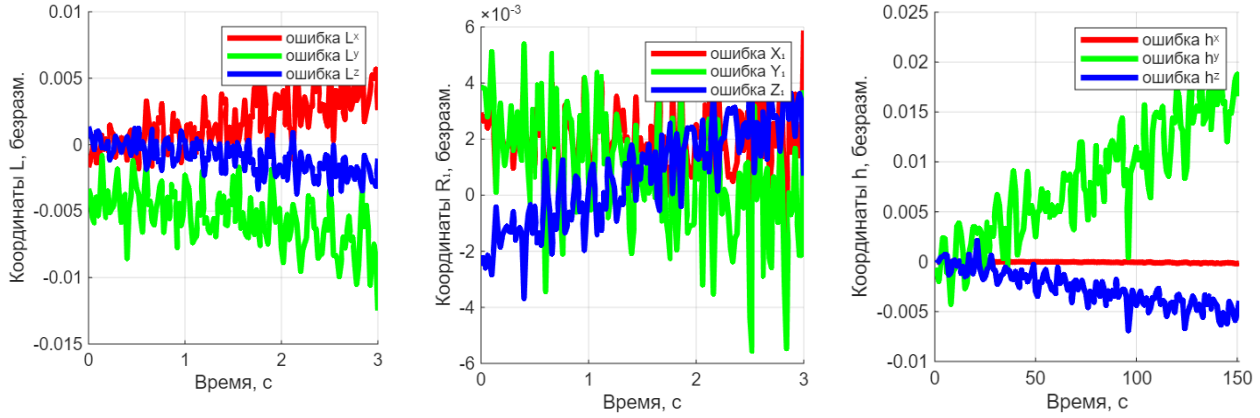
пикселей[2] снимает отделяющиеся ДКА со скоростью 50 кадров/с. На рис. 5 представлены результаты обнаружения ДКА на сгенерированном видеоматериале; ошибки определения компонентов векторов представлены в безразмерном виде – относительно модуля истинного вектора. Можно заметить смещённость оценки алгоритма.



а) б) в)

Рис. 5. Точность работы алгоритма; группа ДКА движется как единое тело

До этого предполагалось, что группа ДКА после отделения движется как единое тело. Теперь рассмотрим случай, когда в начальных условиях (НУ) движения ДКА имеется неопределённость, и ДКА в группе при отделения будут иметь разные направления скоростей. Для относительной ошибки компонент вектора скорости, равной 1/20, предложенный алгоритм приводит к большим ошибкам определения параметров движения (рис. 6). Увеличение ошибки со временем объясняется расхождением ДКА друг от друга.



а) б) в)

Рис. 6. Точность работы алгоритма; ДКА в группе движутся при различных НУ

Для анализа движения группы ДКА при больших относительных скоростях исследуем движение одного ребра ДКА. Представим координаты вершин ребра на изображении в следующем виде:

$$\tilde{x}_1 = f\frac{X}{Z},\quad \tilde{y}_1 = f\frac{Y}{Z},\quad \tilde{x}_2 = f\frac{X+L_x}{Z\pm\sqrt{L^2-L_x^2-L_y^2}},\quad \tilde{y}_2 = f\frac{Y+L_y}{Z\pm\sqrt{L^2-L_x^2-L_y^2}}.$$

Предположим, что точка с изображением $(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$ удалена от камеры больше, чем $(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)$, иными словами, $L_z \geq 0$. Далее используем предположение $L_z \ll Z$, из которого следует $Z \approx fL/l$, $l=\sqrt{(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2)^2+(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)^2}$. Тогда система уравнений приобретает вид

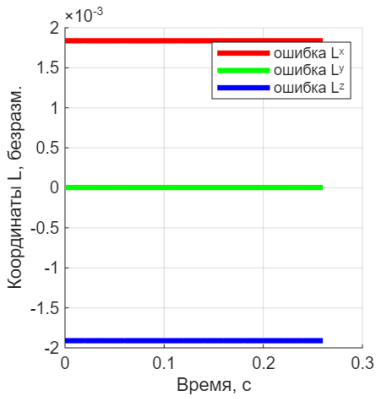
$$X=\tilde{x}_1\frac{L}{l},\quad Y=\tilde{y}_1\frac{L}{l},\quad Z=f\frac{L}{l}$$

$$\tilde{x}_2\left(Z+\sqrt{L^2-L_x^2-L_y^2}\right)-f\left(X+L_x\right)=0,\quad \tilde{y}_2\left(Z+\sqrt{L^2-L_x^2-L_y^2}\right)-f\left(Y+L_y\right)=0.$$

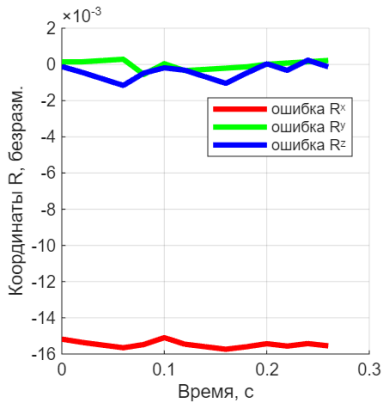
Из минимума функционала

$$\mathrm{Loss}=\left(\tilde{x}_2\left(Z+\sqrt{L^2-L_x^2-L_y^2}\right)-f\left(X+L_x\right)\right)^2+\left(\tilde{y}_2\left(Z+\sqrt{L^2-L_x^2-L_y^2}\right)-f\left(Y+L_y\right)\right)^2$$

можно найти компоненты вектора L. Для 1-го ДКА ошибки определения компонент вектора изображены на рис. 7. Ошибки оценки векторов больше предыдущих результатов; вектор **h** не оценивается, а значит, не определена ориентация ДКА.



а)



б)

Рис. 7. Ошибки определения положения ребра 1-го ДКА

Определение положения при помощи меток

В разделе рассматриваются ДКА со специальными метками, размещёнными на грани с наибольшей площадью. Для её обнаружения содержащая её часть ДКА должна быть видна на изображении камеры. Стековая комплектация делает задачу оптической навигации всей группы ДКА при помощи меток затруднительной.

Видимая площадь Δ_i ДКА с номером i (рис. 8) оценивается следующей формулой:

$$\Delta_i = \frac{|\mathrm{LOS}_i|}{\cos\varphi}\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{(\mathrm{LOS}_i, \mathrm{LOS}_{i-1})}{|\mathrm{LOS}_i||\mathrm{LOS}_{i-1}|}. \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{LOS}_i = \mathbf{r}_i^{\text{ОСК}} - \mathbf{r}_{\text{cam}}^{\text{ОСК}}$ – вектор видимости (line of sight) от центра СК-кам до центра ССК$_i$, φ – угол наклона вектора LOS_i от нормали плоскости максимального сечения ССК$_i$. Стоит отметить, что такая формула не имеет смысла при значениях углов $\varphi \approx 90^\circ$ – в таком случае закреплённая на корпусе ДКА может быть неразличима на видеоизображении.

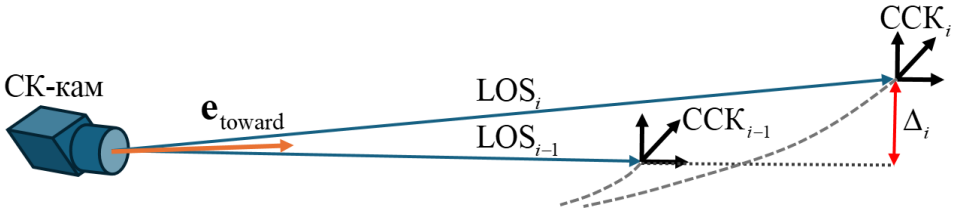


Рис. 8. Видимая часть ДКА

В формуле (3) видимая площадь ДКА зависит от положения камеры. Предположим, центр СК-кам совпадает с центром ОСК. Тогда формула (3) примет следующий вид:

$$\Delta_i \approx \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\left|\mathbf{r}_i^{\text{ОСК}}\right|^2 - \frac{\left(\mathbf{r}_i^{\text{ОСК}}, \mathbf{r}_{i-1}^{\text{ОСК}}\right)^2}{\left|\mathbf{r}_{i-1}^{\text{ОСК}}\right|^2}}. \tag{4}$$

При смещении центра СК-кам относительно центра ОСК $\mathbf{r}_{\text{cam}}^{\text{ОСК}} \neq 0$, видимая площадь ДКА становится пренебрежительно малой при удалении ДКА $\left|\mathbf{r}_{\text{cam}}^{\text{ОСК}}\right| \ll \left|\mathbf{r}_i^{\text{ОСК}}\right|$. Место расположения камеры зависит от архитектуры МКА; для задачи навигации группы ДКА представляет больший интерес способ запуска группы. Для анализа видимой части ДКА без учёта положения камеры изменим формулу оценки видимой площади ДКА Δ_i как проекцию сдвига следующего ДКА от предыдущего в плоскости ортогональной вектору отделения ДКА (рис. 9):

$$\Delta_i \approx \mathrm{Pr}_\Pi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}) = \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} - \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{e}_{\text{deploy}}\right)\mathbf{e}_{\text{deploy}}\right|, \quad \Pi \perp \mathbf{e}_{\text{deploy}}. \tag{5}$$

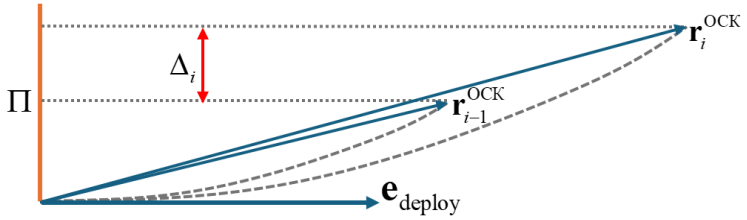
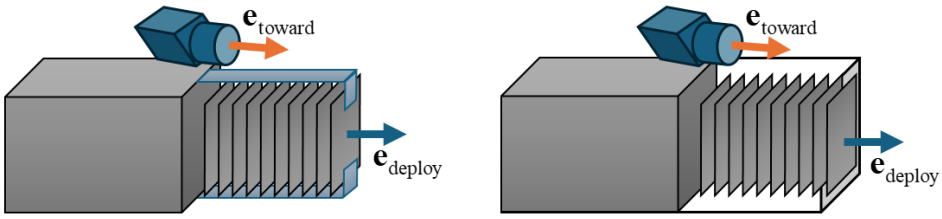


Рис. 9. Оценка видимой части ДКА

Для анализа отделения группы ДКА используем некоторые упрощения в начальных условиях (НУ) при отделении, а именно: рассмотрим типовые схемы отделения при стековой комплектации ДКА (рис. 10). При схеме 1 (рис. 10, а) группа ДКА фиксируется к МКА с помощью специальных штанг. Для НУ характерна линейная зависимость $\mathbf{r}_i^0 = \left(r^0 + i\Delta r\right)\mathbf{e}_{\text{deploy}}$, $\dot{\mathbf{r}}_i^0 = \left(v^0 + i\Delta v\right)\mathbf{e}_{\text{deploy}}$. Здесь значение Δv считается нулевым или малым по сравнению со скоростью отделения v^0 и объясняется сжатием группы ДКА штангами. При схеме 2 (рис. 10, б) группа из N ДКА начинает движение относительно МКА одновременно по специальным направляющим внутри отсека МКА, и ДКА в разные моменты времени покидают отсек. НУ для ДКА одинаковы $\mathbf{r}_i^0 = r^0\mathbf{e}_{\text{deploy}}$, $\dot{\mathbf{r}}_i^0 = v^0\mathbf{e}_{\text{deploy}}$, моменты времени отделения – разные $t_i = t_0 + (N - i)\Delta t$, $\Delta t = \Delta r / v^0$. Подробный анализ таких НУ может показать, что траектории ДКА пересекаются при уравнениях движения (1), а значит, оценённые при отделении траектории ДКА быстро станут неактуальными. В работе полагается, что возмущения движения при свободном полёте и при отделении ДКА мало влияют на движение при отделении $(t\omega_0 \ll 1)$ и заметно влияют далее $(t\omega_0 \sim 1)$. При схемах 1, 2 можно предположить $\cos\varphi \approx \left(\text{LOS}_i, \mathbf{e}_{\text{deploy}}\right) / \left|\text{LOS}_i\right|$ в формулах (3), (4)
.



а) б)

Рис. 10. Типовые схемы отделения

Рассмотрим одновременное отделение ДКА по схеме 1 (рис. 10, а). Положение $\mathbf{r}_i(t)$ ДКА с индексом i есть решение системы (1):

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} r_x^0 - t(6r_y^0\omega_0 + 3\dot{r}_x^0) + \dfrac{2\dot{r}_y^0\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} - \dfrac{2\dot{r}_y^0}{\omega_0} + \left(6r_y^0 + \dfrac{4\dot{r}_x^0}{\omega_0}\right)\sin(\omega_0 t) \\ 4r_y^0 + \dfrac{2\dot{r}_x^0}{\omega_0} + \dfrac{\dot{r}_y^0\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - \left(3r_y^0 + \dfrac{2\dot{r}_x^0}{\omega_0}\right)\cos(\omega_0 t) \\ r_z^0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{\dot{r}_z^0\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_i^0 = \begin{bmatrix} r_x^0 \\ r_y^0 \\ r_z^0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i^0 = \begin{bmatrix} \dot{r}_x^0 \\ \dot{r}_y^0 \\ \dot{r}_z^0 \end{bmatrix}.$$

Если принять небольшим время t отлёта группы ДКА после отделения по сравнению с временем оборота вокруг Земли $2\pi/\omega_0$, и разложить $\mathbf{r}_i(t)$ по параметру $\varepsilon = \omega_0 t$ с точностью до $o(\varepsilon)$, выражение под корнем в уравнении (4) и Δ_i будут нулевыми для $\forall i$. Повышение точности разложения $\mathbf{r}_i(t)$ приводит к отличному от нуля значению Δ_i, однако, как далее покажет численное моделирование, значение Δ_i пренебрежимо мало. Следовательно, при совмещении центров СК-кам и ОСК, после отделения группы ДКА невозможно наблюдать специальные метки на корпусах ДКА.

Раскладывая вектор $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$ по параметру $\varepsilon = \omega_0 t$ с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим:

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \Delta r\mathbf{e}_{\text{deploy}} + \Delta v\mathbf{e}_{\text{deploy}}t + \begin{bmatrix} -\Delta v e_y \omega_0 t^2 \\ \omega_0^2 t^2\left(\dfrac{3}{2}\Delta r e_y + \dfrac{\Delta v e_x}{\omega_0}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\Delta r e_z \omega_0^2 t^2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Рассмотрим некоторые варианты отделения ДКА от МКА, пользуясь формулами (5),(6). При $\mathbf{e}_{\text{deploy}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ сдвиг в плоскости $Oyz^{\text{ОСК}}$ пропорционален разнице в скорости $\Delta_i = \Delta v\omega_0 t^2$. При $\mathbf{e}_{\text{deploy}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ сдвиг в плоскости $Oxz^{\text{ОСК}}$ пропорционален разнице в скорости $\Delta_i = \Delta v\omega_0 t^2$. При $\mathbf{e}_{\text{deploy}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \pm 1\end{bmatrix}^T$ сдвиг в плоскости $Oxy^{\text{ОСК}}$ равен нулю $\Delta_i = 0$.

Таким образом, видимая площадь ДКА по формуле (5) пропорциональна разнице в скорости Δv.

Рассмотрим отделение ДКА с одинаковыми НУ в разные моменты времени по схеме 2 (рис. 10, б). Разница положений соседних ДКА при разложении по параметру $\varepsilon = \omega_0 t$ с точностью до $o(\varepsilon^2)$ равна

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \begin{bmatrix} f_1(\omega_0, \Delta r, r^0, v^0, e_x, e_y) + 2(r^0 + \Delta r)\omega_0 e_y t \\ f_2(\omega_0, \Delta r, r^0, v^0, e_x, e_y) - 2(r^0 + \Delta r)\omega_0 e_x t - \dfrac{3r^0(r^0 + \Delta r)\omega_0^2}{v^0} e_y t \\ f_3(\omega_0, \Delta r, r^0, v^0, e_z) + \dfrac{r^0(r^0 + \Delta r)\omega_0^2}{v^0} e_z t \end{bmatrix},$$

где f_1, f_2, f_3 – некоторые функции, не зависящие от времени. Можно заметить, что при $\mathbf{e}_{\text{deploy}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}^T$ сдвиг в плоскости $Oxy^{\text{ОСК}}$ равен нулю $\Delta_i = 0$ по формуле (5). Рассмотрим момент времени $t = (N - i)\Delta r / v^0$, когда отделяется ДКА с номером $i - 1$ в группе из N ДКА:

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{e}_{\text{deploy}} \Delta r + \begin{bmatrix} -\dfrac{e_y \Delta r^2 \omega_0}{v^0} \\ \dfrac{e_x \Delta r^2 \omega_0}{v^0} + \dfrac{3 e_y r^0 \Delta r^2 \omega_0^2}{2 v^0} \\ -\dfrac{e_z r^0 \Delta r^2 \omega_0^2}{2 v^0} \end{bmatrix}.$$

Сдвиг Δ_i по формуле (5) равен $\Delta r^2 \omega_0 / v^0$ при $\mathbf{e}_{\text{deploy}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ или $\mathbf{e}_{\text{deploy}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, а значит, при фиксированной разнице размещения ДКА Δr для большей видимой части ДКА требуется меньшая скорость отделения v^0. Однако для характерных значений необходимая скорость отделения оказывается чрезмерно малой. К примеру, для $\Delta r = 5 \times 10^{-3}$ м, $\omega_0 = 0.0011$ рад/с, $\Delta_i = 2 \times 10^{-2}$ м необходимая скорость отделения равна $v^0 = \Delta r^2 \omega_0 / \Delta_i \approx 1.4 \times 10^{-6}$ м/с.

В схемах 1-2 отделения группы ДКА при малых значениях Δv оценка видимой площади Δ_i по формулам (4), (5) слишком мала для обнаружения метки. Рассмотренные схемы не позволяют распределить группу ДКА за малое относительно периода орбиты время так, чтобы они не заслоняли друг друга на изображении камеры МКА.

На примере численного моделирования рассмотрим сценарии, рассчитаем видимую площадь по формуле (3) и используем алгоритмы обнаружения метки для физических значений, характерных для ДКА типа PCBsat и МКА типа CubeSat (табл. 1). Линейный размер метки составляет 25% от линейного размера

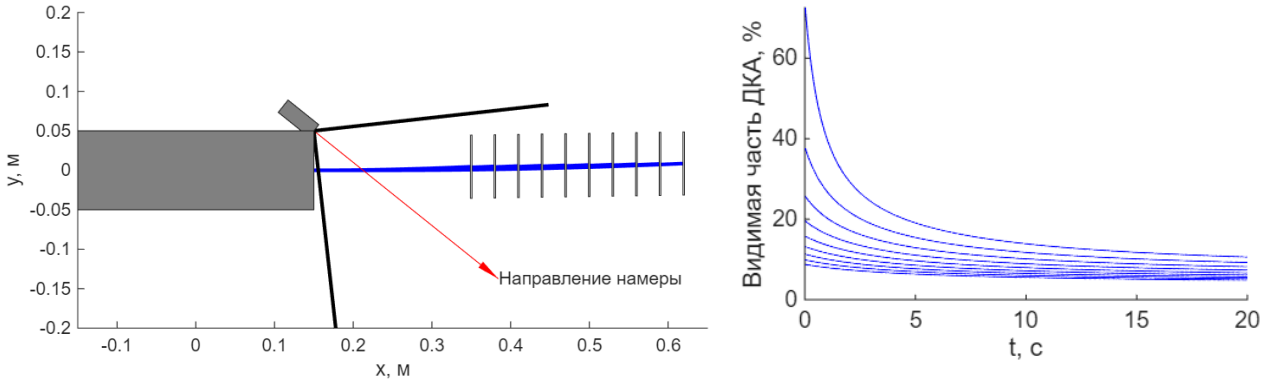
ДКА, а значит, для наблюдаемости метки по видеоизображению требуется значение видимой части метки Δ_i более чем 25% от размера МКА.

Таблица 1

Параметры численного моделирования

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Размеры МКА	$30\times10\times10$ см^3	Высота орбиты	400 км
Размеры ДКА	$8\times8\times0.2$ см^3	Угловая скорость центра ОСК ω_0	≈ 0.0011 рад/с
Размеры метки ДКА	2×2 см^2	Время моделирования	20 с
Скорость отделения ДКА v^0	1 см/с	Кадров в секунду	50
Разность скорости отделения	0.1 см/с	Начальное удаление ДКА r^0	15 см
Количество ДКА в группе	10	Шаг размещения ДКА Δr	0.5 см

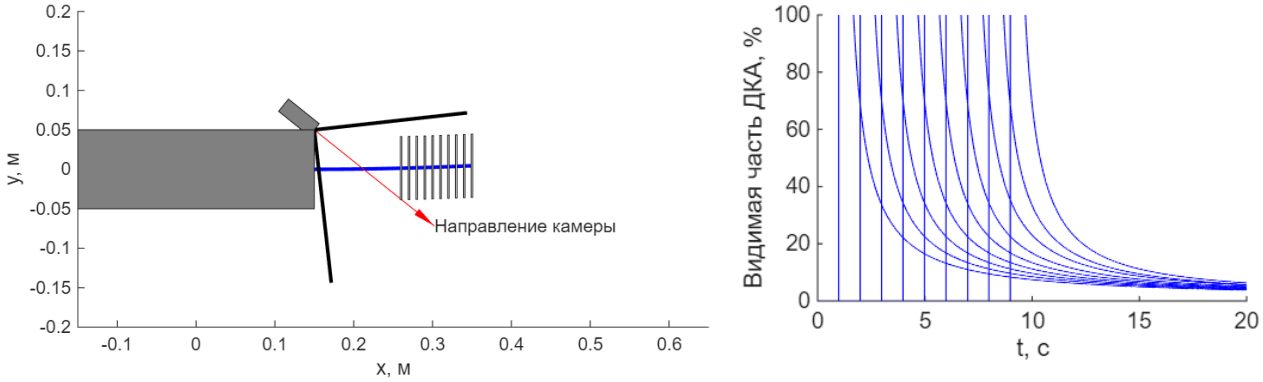
Иллюстрация отделения при $\mathbf{e}_{\text{deploy}}^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ показана на рис. 11, а; траектории ДКА $\mathbf{r}_i(t)$ и угол обзора камеры показаны синими и чёрными линиями соответственно. На графике рис. 11, б показаны видимые части ДКА с номерами $i = 2,...10$, рассчитанные по формуле (3). В начальный момент времени видимая площадь ДКА максимальна и недостаточна для обнаружения метки на большинстве ДКА в группе – за время моделирования наблюдаются метки ДКА с номерами 9, 10.



а) б)

Рис. 11. Иллюстрация отделения по схеме 1 при $\mathbf{e}_{\text{deploy}}^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

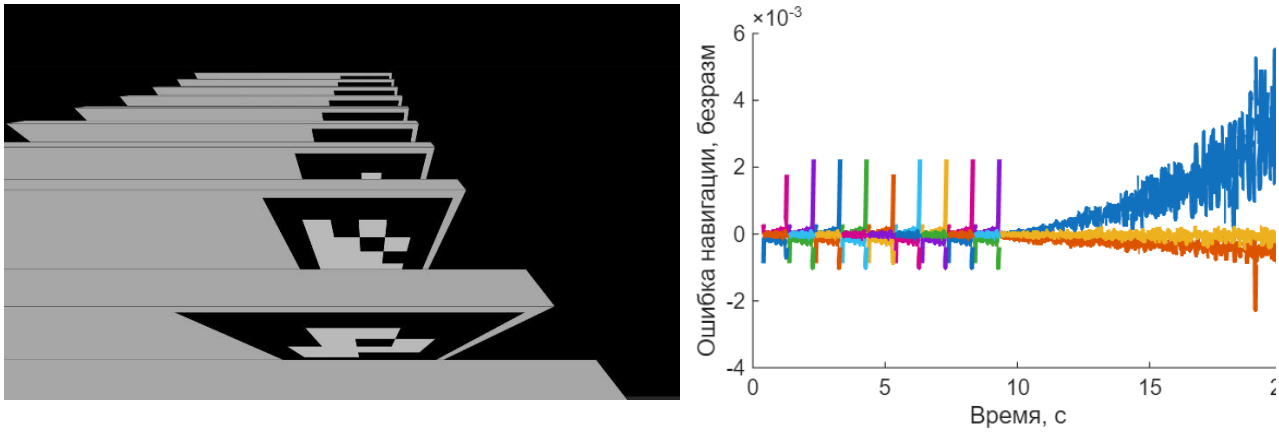
Иллюстрация отделения при $\mathbf{e}_{\text{deploy}}^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ показана на рис. 12, а. На графике рис. 12, б показаны видимые части ДКА согласно формуле (3). После отделения каждого ДКА в течение ~1 с его метка может наблюдаться камерой.



а) б)

Рис. 12. Иллюстрация отделения по схеме 2 при $\mathbf{e}_{\text{deploy}}^{\text{ОСК}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Для последней схемы рассмотрим ошибки определения положения ДКА. На рис. 13, а изображен смоделированный кадр камеры в некоторый момент отделения. На рис. 13, б покомпонентно приведены ошибки определения компонентов радиус-векторов ДКА: в течение ~1 с наблюдаются ДКА 1...9, далее наблюдается 10-й ДКА. Ошибка определения положения ДКА относительно модуля их радиус-вектора в ОСК в первую секунду после отделения составляет менее 2×10^{-4}.



а) б)

Рис. 13. Иллюстрация отделения группы ДКА по схеме 2: а) смоделированный кадр камеры МКА, б) ошибки определения компонент радиус-векторов меток

Заключение

Разработан алгоритм определения движения плоских ДКА во время отделения от МКА при стековой компоновке по видеоизображению. В работе предложен алгоритм обнаружения группы ДКА по совместной обработке изображения их граней. Рассмотрены варианты отделения группы ДКА и возможности обнаружения специальных меток на их корпусе. Численное моделирование показало, что с помощью определения движения по результатам обработки видеоизображения граней ДКА возможно оценить начальные условия движения после отделения от МКА.

Библиографический список

1. William M.O.J. Spacecraft Optical Navigation. John Wiley & Sons, 2024. 120 p.
2. OpenCV: Detection of ArUco Markers [Electronic resource].
3. Коптев М.Д., Прошунин Н.Н., Иванов Д.С. Определение движения макетов системы управления микроспутников на аэродинамическом столе с использованием видеокамеры // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. №. 109. С. 5–8.
4. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // Journal of the Aerospace Sciences. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658. DOI: https://doi.org/10.2514/8.8704.
5. Canny J. A Computational Approach to Edge Detection // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1986. Vol. PAMI-8, № 6. P. 679–698. DOI: https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851.
6. Watch SpaceX deploy Starlink satellites in glorious view from space [Electronic resource]. 2021. URL: https://www.youtube.com/watch?v=rFLoGka4abk.
7. The MathWorks I. Image Processing Toolbox [Electronic resource]. URL: https://www.mathworks.com/products/image-processing.html.