ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2026 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Е. Ладонкина

# Разрывный метод Галеркина с базисными функциями, зависящими от времени

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Ладонкина М.Е. Разрывный метод Галеркина с базисными функциями, зависящими от времени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2026. № 38. 38 с. EDN: GXCCFD
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2026-38

**Ордена Ленина**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**
**имени М.В.Келдыша**
**Российской академии наук**

**М. Е. Ладонкина**

# Разрывный метод Галеркина с базисными функциями, зависящими от времени

**Москва — 2026**

*Ладонкина М. Е.*

**Разрывный метод Галеркина с базисными функциями, зависящими от времени**

При решении задач газовой динамики численными методами повышенного порядка точности часто возникает потеря точности в областях локализации ударных волн. В частности, при использовании разрывного метода Галеркина (РМГ), в областях высоких градиентов решения, возникает необходимость использовать лимитирующие функции, которые и ведут к понижению точности решения. В данной работе предложена методика решения проблемы снижения точности за счет использования в разрывном методе Галеркина базисных функций, зависящих от времени. Так, в областях гладкости решения методика работает как классический РМГ, а в областях локализации ударных волн переходит локально на классический метод Годунова, но на сетке в определенное количество раз мельче исходной.

***Ключевые слова:*** система уравнений Эйлера, разрывный метод Галеркина, базисные функции, зависящие от времени, метод Годунова

*Marina Eugenyevna Ladonkina*

**Discontinuous Galerkin method with time-dependent basis functions**

When solving gas dynamics problems using high-precision numerical methods, accuracy is often lost in regions of shock wave localization. In particular, when using the discontinuous Galerkin method (DGM) in regions with high solution gradients, it becomes necessary to use limit functions, which are known to reduce solution accuracy. This paper proposes a method for solving this problem using time-dependent basis functions in the DGM method. Thus, in regions of solution smoothness, the method operates like the classical DGM method, while in regions of shock wave localization, it locally switches to the classical Godunov method, but on a grid several times finer than the original.

***Key words:*** Eulers equations, discontinuous Galerkin method, time-dependent basis functions, Godunov's method

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант №26-11-00230

# Введение

В настоящее время, для решения сложных прикладных задач, в которых важную роль играют газодинамические процессы, разрабатываются пакеты программ, в основу которых положены численные методы высокого порядка точности. Одним из широко используемых методов является разрывный метод Галеркина (РМГ) [1], [2], [3], [4]. В то же время, в серии работ показано, что при практическом применении РМГ часто возникает потеря точности в областях локализации ударных волн. Данный эффект наблюдается при расчетах и другими схемами повышенного порядка аппроксимации [5], [6]. Поэтому при решении такого типа задач методиками повышенного порядка точности, одной из применяемых концепций, является снижение порядков точности методики вблизи фронтов волн. В частности, для разрывного метода Галеркина, в работе [7], для этой цели в указанных областях снижается число используемых базисных функций. В работе [8] в качестве базисных, используются функции, зависящие от времени. Использование таких функций в областях, содержащих сильные ударные волны, позволяет локально перейти к расчету по схеме Годунова, но на сетке вдвое мельче исходной. Данная методика [8] сохраняет идеологию схем сквозного счета и обеспечивает заданную точность в областях гладкости решения, при этом определяет положение ударных волн и эффективно подавляет нефизичные осцилляции. В настоящей работе предлагается обобщение методики и построение схемы третьего порядка точности за счет использования квадратичного базиса для РМГ. А при наличии ударных волн — переход к схеме Годунова на сетке втрое мельче исходной. Как известно, при использовании классической схемы Годунова энтропийное условие гарантировано выполнено.

# Базисные функции, зависящие от времени, содержащие разрыв внутри ячейки

Рассмотрим одномерную начально-краевую задачу на отрезке $[a, b]$ для уравнений газовой динамики, записанных в консервативной форме:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0, \\ U=\begin{pmatrix}\rho \\ \rho u \\ E\end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix}\rho u \\ \rho u^2+p \\ (E+p)u\end{pmatrix}, \\ U\left(x,0\right)=\Psi_0\left(x\right).\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь величины $\rho,\ u,\ \varepsilon,\ p$ соответствуют плотности, скорости, удельной внутренней энергии и давлению газа, а $E = \rho\left(\varepsilon + u^2/2\right)$– полной энергии на единицу объема. Система замыкается уравнением состояния, в данной работе — уравнением состояния идеального газа. На концах отрезка могут быть заданы граничные условия различных типов.

Под обобщенным решением задачи (1) будем понимать кусочно-гладкие функции $U(x,t)$, которые могут иметь разрывы I рода или разрывные производные на конечном числе кусочно-гладких линий на плоскости $(x,t)$, удовлетворяющие начальным и краевым условиям задачи в точках непрерывности. Для функций $U(x,t)$ и для любой области $D$ с кусочно-гладкой границей справедливо интегральное тождество

$$\oint_{\partial D} U(x,t)\,dx - F(U(x,t))\,dt = 0 \tag{2}$$

и выполнение энтропийного неравенства

$$\oint_{\partial D} S(U)\,dx - \Phi(S(U))\,dt \geq 0, \tag{3}$$

где $S$ — энтропия.

В работах [9], [10] показано, что для обобщенного решения системы (1) и для любой гладкой в области $D$ функции $\varphi(x,t)$ в областях с кусочно-гладкой границей выполнено соотношение:

$$\begin{aligned} &-\oint_{\partial D} U(x,t)\,\varphi(x,t)\,dx - F(U(x,t))\varphi(x,t)\,dt - \\ &-\int_D \left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}F(U(x,t)) + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}U(x,t)\right)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Для нахождения приближенного решения уравнения (1) покроем отрезок $[a,b]$, на котором ищется решение, сеткой $a = x_{1/2} \leq x_{3/2} \leq \ldots \leq x_{N+1/2} = b$ с шагом $\Delta x_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$. Центры интервалов обозначим $x_i = \frac{x_{i+1/2}+x_{i-1/2}}{2},\ i = 1,\ldots,M$.

Не останавливаясь подробно на способах задания граничных условий в дискретном случае, отметим только, что большинство из них могут быть реализованы путем использования фиктивных ячеек, в которых нужным образом задаются значения искомых функций.

В классическом разрывном методе Галеркина базис пространства на котором ищется решение, задается следующим образом: на ячейке с номером $i$ выбирается $p$-мерное пространство базисных функций (в данной работе будем рассматривать $p = 3$), которые в пределах $i$-ой ячейки заданы определенным образом, а в области вне $i$-ой ячейки равны

нулю; например, базис Тейлора (5).

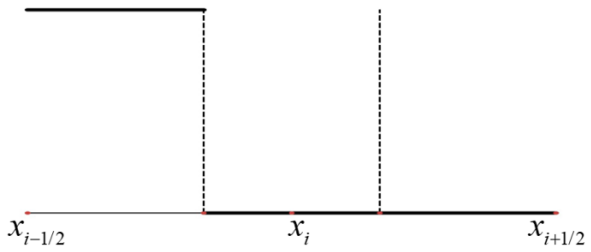
$$\psi_{0i} = 1, \quad \psi_{1i}(x,t) = \frac{x - x_i}{\Delta x}, \quad \psi_{2i}(x,t) = \left(\frac{x - x_i}{\Delta x}\right)^2 \tag{5}$$

Рассмотрим в каждой ячейке с номером $i$ трехмерное пространство $\Xi$, являющееся линейной оболочкой функций $\xi_k(x), k = \overline{1,3}$, которые заданы следующим образом (6) (рис.1).

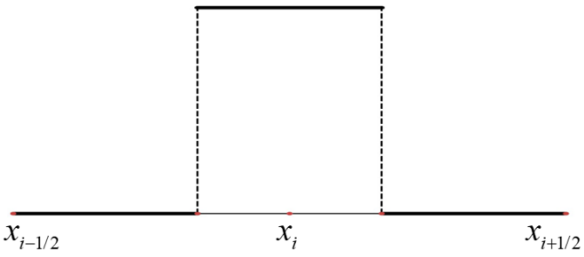
$$\xi_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i - \frac{\Delta x}{6}\right], \\ 0, & x \notin \left[x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i - \frac{\Delta x}{6}\right], \end{cases}$$

$$\xi_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[x_i - \frac{\Delta x}{6}, x_i + \frac{\Delta x}{6}\right], \\ 0, & x \notin \left[x_i - \frac{\Delta x}{6}, x_i + \frac{\Delta x}{6}\right], \end{cases} \tag{6}$$

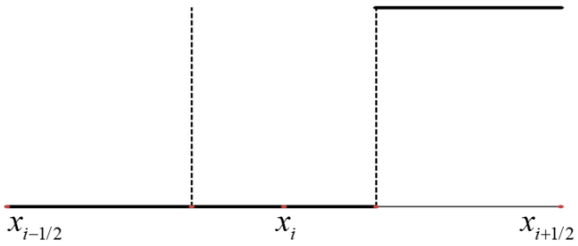
$$\xi_3(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[x_i + \frac{\Delta x}{6}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[x_i + \frac{\Delta x}{6}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right]. \end{cases}$$




*а)*




*б)*




*в)*

*Рис. 1.* Функции а) $\xi_1(x)$, б) $\xi_2(x)$, в) $\xi_3(x)$

Спроектируем ортогонально функции $\psi_{ji}(x,t)$ на пространство функций $\Xi$. Результаты такого проектирования будут выражаться в виде $\sum_{k=1}^{3}\theta_{jk}\xi_k(x)$. Коэффициенты $\theta_{jk}$ будут определяться по формулам (7)

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left(\psi_{ji}(x)-\sum_{k=1}^{3}\theta_{jk}\xi_k(x)\right)\xi_k(x)\,dx=0,\quad j=0,1,2 \tag{7}$$

$$\theta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \theta_2=\begin{pmatrix}\frac{113}{108}\\\frac{1}{108}\\\frac{113}{108}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

На отрезке $[a,b]$ рассмотрим систему линейно-независимых функции $\varphi_{0i}(x,t)$, $\varphi_{1i}(x,t)$ и $\varphi_{2i}(x,t)$ (рис. 2,3). Каждая из таких функций отлична от

нуля только на интервале $x_{i-1/2} \le x \le x_{i+1/2}$ и сконструирована следующим образом:

$$\varphi_{ji}(x,t) = (1-\alpha_{ji}(t))\,\psi_{ji}(x,t) + \alpha_{ji}(t)\sum_{k=1}^{3}\theta_{jk}\xi_k(x), \tag{9}$$

где $\alpha_{ji}(t)$ — регулирующие параметры, зависящие от времени и $0 \le \alpha_{ji}(t) \le 1$.

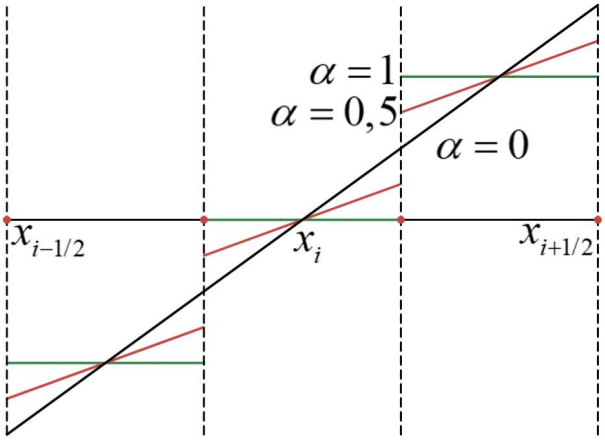



*Рис. 2.* Вид базисной функции $\psi_{1i}(x,t)$, в зависимости от параметра $\alpha(t)$

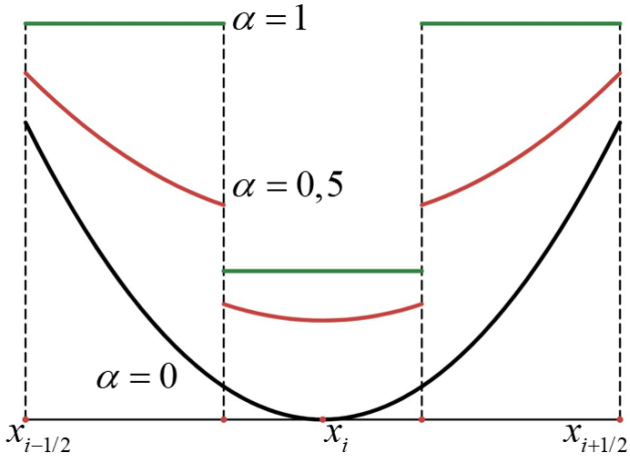



*Рис. 3.* Вид базисной функции $\psi_{2i}(x,t)$, в зависимости от параметра $\alpha(t)$

Рассмотрим 3M-мерное пространство $\Sigma(t)$, представляющее собой линейную оболочку функций $\varphi_{0i}(x,t)$, $\varphi_{1i}(x,t)$ и $\varphi_{2i}(x,t)$, *i=1,M*, и приближенное решение будем находить как элемент этого пространства.

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{M} U_{0i}(t) + U_{1i}(t)\,\varphi_{1i}(x,t) + U_{2i}(t)\,\varphi_{2i}(x,t) \tag{10}$$

На каждом отрезке $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$, значение решения, будет вычисляться по формуле

$$U_i(x,t) = U_{0i}(t) + U_{1i}(t)\,\varphi_{1i}(x,t) + U_{2i}(t)\,\varphi_{2i}(x,t). \tag{11}$$

Для его построения будем использовать процедуру, аналогичную технике метода Годунова [11]. Временной интервал T, на котором ищется решение, разобьем на достаточно малые интервалы $\Delta t = \frac{T}{N}$. На момент времени $t = 0$ ортогонально спроектируем начальные данные на пространство $\Sigma$. Эту проекцию будем использовать как начальные данные для уравнения (1). Будем считать, что на временном промежутке от 0 до $\Delta t$ известно точное обобщенное решение. На момент времени $\Delta t$ некоторое приближение к точному решению с точностью $O\left(\Delta t^2\right)$ снова спроектируем на $\Sigma(\Delta t)$. После этого повторим процедуру для интервалов $\left[t^n, t^{n+1}\right]$, где $t^n = n\Delta t$. В результате мы получим последовательность коэффициентов $U_{pi}(t^n)$, $p = 0,1,2$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим коэффициенты приближенного решения (10), непрерывно зависящего от времени *t*, в предположении существования предела [12]. На отрезке $[a,b]$ это решение может иметь разрывы в точках $x_{i-1/2}$, $x_{i-1/6}$, $x_{i+1/6}$ и $x_{i+1/2}$, $i = 1, ..., M$.

Опишем способ построения решения (11) и, соответственно, способ нахождения коэффициентов $U_{pi}(t^n)$

Рассмотрим на плоскости $(x,t)$ прямоугольную область (рис. 4). Через $U(x,t)$ обозначим точное решение задачи (1) с начальными данными $U_i(x,0)$. Выпишем для областей *ALMD*, *LNOM* и *NBCO* соотношения (2) и просуммируем для $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1(x,t)$ и $\varphi = \varphi_2(x,t)$.

$$
\begin{aligned}
&-\left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^n\right)\varphi_{pi}\left(x,t^n\right)dx-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_{pi}\left(x_{i-1/6}^{-},t\right)dt-\right.\\
&-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_{pi}\left(x,t^{n+1}\right)dx+\\
&\left.+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\varphi_{pi}\left(x_{i-1/2},t\right)dt\right]-\\
&-\int_{ALMD}\left(\frac{d\varphi_{pi}\left(x,t\right)}{dx}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{d\varphi_{pi}\left(x,t\right)}{dt}U\left(x,t\right)\right)dxdt-\\
&-\left[\int_{x_{i-1/6}}^{x_{i+1/6}} U\left(x,t^n\right)\varphi_{pi}\left(x,t^n\right)dx-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i+1/6},t\right)\right)\varphi_{pi}\left(x_{i+1/6}^{-},t\right)dt-\right.\\
&-\int_{x_{i-1/6}}^{x_{i+1/6}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_{pi}\left(x,t^{n+1}\right)dx+\\
&\left.+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_{pi}\left(x_{i-1/6}^{+},t\right)dt\right]-\\
&-\int_{LNOM}\left(\frac{d\varphi_{pi}\left(x,t\right)}{dx}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{d\varphi_{pi}\left(x,t\right)}{dt}U\left(x,t\right)\right)dxdt-\\
&-\left[\int_{x_{i+1/6}}^{x_{i+1/2}} U\left(x,t^n\right)\varphi_{pi}\left(x,t^n\right)dx-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i+1/2},t\right)\right)\varphi_{pi}\left(x_{i+1/2},t\right)dt-\right.\\
&-\int_{x_{i+1/6}}^{x_{i+1/2}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_{pi}\left(x,t^{n+1}\right)dx+\\
&\left.+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i+1/6},t\right)\right)\varphi_{pi}\left(x_{i+1/6}^{+},t\right)dt\right]-\\
&-\int_{NBCO}\left(\frac{d\varphi_{pi}\left(x,t\right)}{dx}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{d\varphi_{pi}\left(x,t\right)}{dt}U\left(x,t\right)\right)dxdt=0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $U\left(x_{i-1/2},t\right)$, $U\left(x_{i-1/6},t\right)$, $U\left(x_{i+1/6},t\right)$, $U\left(x_{i+1/2},t\right)$ подразумевает обобщенное решение, выработавшееся в точках $x_{i-1/2}$, $x_{i-1/6}$, $x_{i+1/6}$, $x_{i+1/2}$ при решении задачи о распаде произвольного разрыва с начальными данными, соответствующими $U\left(x,t^n\right),\quad n=1,N$.

Рассмотрим отдельно область *ALMD*. Так как все формулы будут выписаны для $i$-ой ячейки, индекс $i$ будем использовать только для

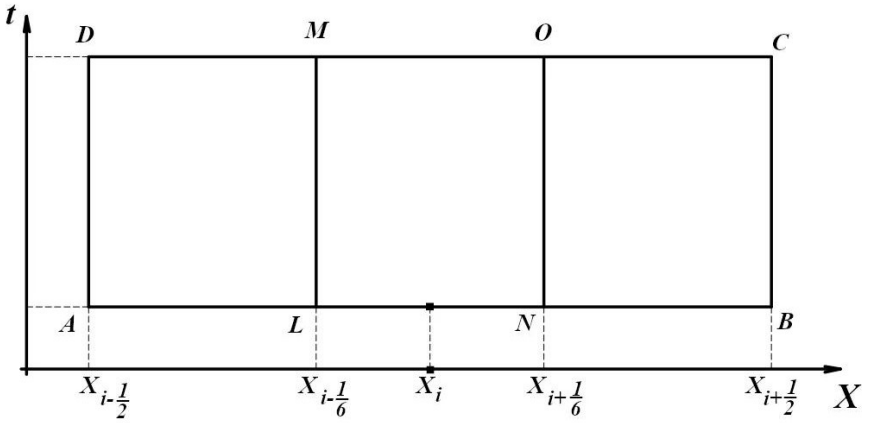



*Рис. 4.* Ячейка в двумерном пространстве $(x,t)$

координаты сеточной переменной $x$. При дальнейшем изложении, и для базисных функций $\varphi_{pi}(x,t)$ индекс $i$ в описании опустим.

$$
\begin{aligned}
&-\left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^n\right)\varphi_p\left(x,t^n\right)dx-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/6}^{-},t\right)dt-\right.\\
&-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_p\left(x,t^{n+1}\right)dx+\\
&\left.+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t\right)dt-\right]\\
&-\int_{ALMD}\left(\frac{d\varphi_p\left(x,t\right)}{dx}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{d\varphi_p\left(x,t\right)}{dt}U\left(x,t\right)\right)dxdt
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Рассмотрим отдельно слагаемые в (13).

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^n\right)\varphi_p\left(x,t^n\right)dx-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_p\left(x,t^{n+1}\right)dx=\\
&=\sum_{j=1}^{3} U_j\left(t^n\right)\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}}\varphi_j\left(x,t^n\right)\varphi_p\left(x,t^n\right)dx-\\
&-\sum_{j=1}^{3} U_j\left(t^{n+1}\right)\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}}\varphi_j\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_p\left(x,t^{n+1}\right)dx.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Разделив выражение (14) на $\Delta x \Delta t$, перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta x} \left[ \sum_{j=1}^{3} U_j \left(t^{n+1}\right) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} \varphi_j \left(x, t^{n+1}\right) \varphi_p \left(x, t^{n+1}\right) dx - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{3} U_j \left(t^n\right) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} \varphi_j \left(x, t^n\right) \varphi_p \left(x, t^n\right) dx \right] = \tag{15}$$
$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^{3} U_j \left(t\right) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} \varphi_j \left(x, t\right) \varphi_p \left(x, t\right) dx \right].$$

Поскольку функция $U_i(x,t)$ является кусочно-полиномиальной, при достаточно малых значениях $\Delta t$ разрывы в решении могут быть расположены только в окрестностях точек $x_{i-1/2}$ и $x_{i-1/6}$. Обозначая через $D$ модуль максимальной скорости движения разрывов в этих областях, получим, что решение может быть разрывным только в областях $[x_{i-1/2}, x_{i-1/2} + D\Delta t]$x$[t^n, t^n + \Delta t]$, $[x_{i-1/6} - D\Delta t, x_{i-1/6}]$x$[t^n, t^n + \Delta t]$. Поэтому в областях $[x_{i-1/2} + D\Delta t, x_{i-1/6} - D\Delta t]$x$[t^n, t^n + \Delta t]$ решение является гладким.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{d\varphi_p(x,t)}{dx} F\left(U(x,t)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{d\varphi_p(x,t)}{dt} \sum_{j=1}^{3} U_j(t) \varphi_j(x,t) \right) dxdt =$$
$$= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_p\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right)\right) \left(F\left(U\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right)\right)\right) dxdt +$$
$$+ \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_p\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right)\right) \left(U\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right)\right) dxdt = \tag{16}$$
$$= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[ \frac{\partial \varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial x} F\left(U\left(x,t^n\right)\right) + O\left(\Delta t\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial t} U\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right) \right] dxdt =$$
$$= \Delta t \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \frac{\partial \varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial x} F\left(U\left(x,t^n\right)\right) dx + O\left(\Delta t^2\right) +$$
$$+ \Delta t \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \frac{\partial \varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial t} U\left(x,t^n\right) dx + O\left(\Delta t^2\right).$$

Разделив равенство (16) на $\Delta t \Delta x$ и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta x} \left[ \Delta t \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \frac{\partial \varphi_p(x,t^n)}{\partial x} F\left(U\left(x,t^n\right)\right) dx + O\left(\Delta t^2\right) + \right.$$
$$\left. + \Delta t \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \frac{\partial \varphi_p(x,t^n)}{\partial t} U\left(x,t^n\right) dx + O\left(\Delta t^2\right) \right] = 0.$$

Т.к. функциия $U(x,t)$ является ограниченной:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2}+D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{d\varphi_p(x,t)}{dx} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{d\varphi_p(x,t)}{dt} \sum_{j=1}^{3} U_j(t) \varphi_j(x,t) \right) dxdt = 0, \tag{17}$$

аналогично

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{x_{i-1/6}-D\Delta t}^{x_{i-1/6}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{d\varphi_p(x,t)}{dx} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{d\varphi_p(x,t)}{dt} \sum_{j=1}^{3} U_j(t) \varphi_j(x,t) \right) dxdt = 0. \tag{18}$$

Далее рассмотрим интегралы по области $[x_{i-1/2} + D\Delta t, x_{i-1/6} - D\Delta t]$x$[t^n, t^n + \Delta t]$

$$\int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \varphi_p(x,t)}{\partial x} F\left(U\left(x,t\right)\right) dxdt =$$
$$= \int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_p\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right)\right) \left(F\left(U\left(x,t^n\right) + O\left(\Delta t\right)\right)\right) dxdt =$$
$$= \int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial \varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial x} F\left(U\left(x,t^n\right)\right) + O\left(\Delta t\right) dxdt =$$
$$= \Delta t \int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t} \frac{\partial \varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial x} F\left(U\left(x,t^n\right)\right) dx + O\left(\Delta t^2\right). \tag{19}$$

Разделив равенство (23) на $\Delta t \Delta x$ и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$,

получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t\Delta x}\left(\int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\frac{\partial\varphi_p(x,t)}{\partial x}F\left(U\left(x,t\right)\right)dtdx\right)= \\ =\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}}\frac{\partial\varphi_p(x,t^n)}{\partial x}F\left(U\left(x,t^n\right)\right)\,dx \tag{20}$$

и

$$\int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\frac{d\varphi_p(x,t)}{dt}U\left(x,t\right)dxdt= \\ \int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_p\left(x,t^n\right)+O\left(\Delta t\right)\right)\left(U\left(x,t^n\right)+O\left(\Delta t\right)\right)dxdt= \\ =\int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\frac{\partial\varphi_p(x,t^n)}{\partial t}U\left(x,t^n\right)+O\left(\Delta t\right)dxdt= \\ =\Delta t\int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t}\frac{\partial\varphi_p(x,t^n)}{\partial t}U\left(x,t^n\right)dx+O\left(\Delta t^2\right)dx \tag{21}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t\Delta x}\left(\int_{x_{i-1/2}+D\Delta t}^{x_{i-1/6}-D\Delta t}\int_{t^n}^{t^{+1}}\frac{\partial\varphi_p(x,t)}{\partial t}U\left(x,t\right)dtdx\right)= \\ \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}}\frac{\partial\varphi_p(x,t^n)}{\partial t}U\left(x,t^n\right)\,dx. \tag{22}$$

Как показано в работах [13], [14], точное решение задачи с кусочно-полиномиальными данными для достаточно малых значений $\Delta t$ может быть с точностью $O\left(\Delta t\right)$ получено как решение задачи о распаде произвольного разрыва с данными $U_i\left(x_{i-1/2},t\right)$ и $U_{i-1}\left(x_{i-1/2},t\right)$ слева и справа от разрыва.

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)dt=\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left(F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)+O\left(\Delta t\right)\right)dt \tag{23}$$

Рассмотрим следующие слагаемые из (13):

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t\right)dt- \\ -\int_{t^n}^{t^{n+1}}F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/6},t\right)dt. \tag{24}$$

Для первого слагаемого в (24)

$$\begin{aligned}
&\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t\right)dt = \\
&= \int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)+O\left(\Delta t\right)\right)\left(\varphi_p\left(x_{i-1/2},t^n\right)+O\left(\Delta t\right)\right)dt = \\
&= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)+O\left(\Delta t\right)\right)\left(\varphi_p\left(x_{i-1/2},t^n\right)+O\left(\Delta t\right)\right)dt = \\
&= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t^n\right)+O\left(\Delta t\right)\right]dt = \\
&= F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t^n\right)\Delta t + O\left(\Delta t^2\right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Разделив равенство (25) на $\Delta t\Delta x$, и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t\Delta x}\int_{t^n}^{t^{n+1}} & F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t\right)dt = \\
& \frac{1}{\Delta x}F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t^n\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Повторив аналогичные рассуждения относительно второго интеграла из (24), получим

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{\Delta t\Delta x}\int_{t^n}^{t^{n+1}} & F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_p\left(x^-_{i-1/6},t\right)dt = \\
& \frac{1}{\Delta x}F\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x^-_{i-1/6},t^n\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

В итоге показали, что по области $ALMD$ выполняется соотношение (28)

$$
\begin{aligned}
&-\left[\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^n\right)\varphi_p\left(x,t^n\right)dx-\right.\\
&-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/6}^{-},t\right)dt-\\
&-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_p\left(x,t^{n+1}\right)dx+\\
&\left.+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t\right)dt\right]-\\
&-\int_{ALMD}\left(\frac{d\varphi_p\left(x,t\right)}{dx}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{d\varphi_p\left(x,t\right)}{dt}U\left(x,t\right)\right)dxdt=\\
=&-\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{j=1}^{3}U_j\left(t\right)\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}}\varphi_j\left(x,t\right)\varphi_p\left(x,t\right)dx\right)+\right.\\
&+\frac{1}{\Delta x}F\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/2},t^n\right)-\\
&\left.-\frac{1}{\Delta x}F\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/6}^{-},t^n\right)\right]-\\
&-\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/6}}\frac{\partial\varphi_p\left(x,t\right)}{\partial x}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{\partial\varphi_p\left(x,t\right)}{\partial t}U\left(x,t^n\right)\,dx.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Выпишем соотношения (2) для областей *LNOM* и *NBCO*. Повторив рассуждения, которые были сделаны для области *ALMD*, получим (29) и

(30) соответственно.

$$
\begin{aligned}
&-\left[\int_{x_{i-1/6}}^{x_{i-1/6}} U\left(x,t^n\right)\varphi_p\left(x,t^n\right)dx-\right.\\
&-\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i+1/6},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i+1/6}^-,t\right)dt-\\
&-\int_{x_{i-1/6}}^{x_{i+1/6}} U\left(x,t^{n+1}\right)\varphi_p\left(x,t^{n+1}\right)dx+\\
&\left.+\int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/6}^+,t\right)dt\right]-\\
&-\int_{LNOM}\left(\frac{d\varphi_p\left(x,t\right)}{dx}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{d\varphi_p\left(x,t\right)}{dt}U\left(x,t\right)\right)dxdt=\\
=&-\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{j=1}^{3}U_j\left(t\right)\int_{x_{i-1/6}}^{x_{i+1/6}}\varphi_j\left(x,t\right)\varphi_p\left(x,t\right)dx\right)+\right.\\
&+\frac{1}{\Delta x}F\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i-1/6}^+,t^n\right)-\\
&\left.-\frac{1}{\Delta x}F\left(U\left(x_{i+1/6},t^n\right)\right)\varphi_p\left(x_{i+1/6}^-,t^n\right)\right]-\\
&-\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/6}}^{x_{i+1/6}}\frac{\partial\varphi_p\left(x,t\right)}{\partial x}F\left(U\left(x,t\right)\right)+\frac{\partial\varphi_p\left(x,t^n\right)}{\partial t}U\left(x,t\right)\,dx
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[ \int_{x_{i+1/6}}^{x_{i+1/2}} U\left(x, t^n\right) \varphi_p\left(x, t^n\right) dx - \right. \\
&- \int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i+1/2}, t\right)\right) \varphi_p\left(x_{i+1/2}, t\right) dt - \\
&- \int_{x_{i+1/6}}^{x_{i+1/2}} U\left(x, t^{n+1}\right) \varphi_p\left(x, t^{n+1}\right) dx + \\
&\left. + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F\left(U\left(x_{i+1/6}, t\right)\right) \varphi_p\left(x_{i+1/6}^+, t\right) dt \right] - \\
&- \int_{NBCO} \left( \frac{\partial \varphi_p(x,t)}{\partial x} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial \varphi_p(x,t)}{\partial t} U\left(x,t\right) \right) dxdt = \\
= &- \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^{3} U_j(t) \int_{x_{i+1/6}}^{x_{i+1/2}} \varphi_j(x,t) \varphi_p(x,t) dx \right) + \right. \\
&+ \frac{1}{\Delta x} F\left(U\left(x_{i+1/6}, t^n\right)\right) \varphi_p\left(x_{i+1/6}^+, t^n\right) - \\
&\left. - \frac{1}{\Delta x} F\left(U\left(x_{i+1/2}, t^n\right)\right) \varphi_p\left(x_{i+1/2}, t^n\right) \right] - \\
&- \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i+1/6}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial \varphi_p(x,t)}{\partial x} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial \varphi_p(x,t^n)}{\partial t} U\left(x,t\right) \, dx
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Просуммировав соотношения (28), (29) и (30), получим систему дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов $U_p(t)$, $p = 0, 1, 2$ вектора решения $U(x,t)$ (11) системы (1) для произвольного момента времени $t$ на ячейке с номером $i$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^{3} U_j(t) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi_j(x,t) \varphi_p(x,t) dx \right) - \\
&- \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial \varphi_p(x,t)}{\partial x} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial \varphi_p(x,t)}{\partial t} U\left(x,t\right) \right) dxdt + \\
&+ \frac{1}{\Delta x} \left[ \varphi_p\left(x_{i+1/2}, t\right) F\left(U\left(x_{i+1/2}, t\right)\right) + \right. \\
&+ \left[ \varphi_p\left(x_{i-1/6}^-, t\right) - \varphi_p\left(x_{i-1/6}^+, t\right) \right] F\left(U\left(x_{i-1/6}, t\right)\right) + \\
&+ \left[ \varphi_p\left(x_{i+1/6}^-, t\right) - \varphi_p\left(x_{i+1/6}^+, t\right) \right] F\left(U\left(x_{i+1/6}, t\right)\right) - \\
&\left. - \varphi_p\left(x_{i-1/2}, t\right) F\left(U\left(x_{i-1/2}, t\right)\right) \right] = 0,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где $U\left(x_{i-1/2},t\right), U\left(x_{i-1/6},t\right), U\left(x_{i+1/6},t\right), U\left(x_{i+1/2},t\right)$ получаются в результате решения задачи Римана с данными $U^{(i-1)}\left(x_{i-1/2},t\right)$ и $U^{(i)}\left(x_{i-1/2},t\right)$, $U^{(i)}\left(x^{-}_{i-1/6},t\right)$ и $U^{(i)}\left(x^{+}_{i-1/6},t\right)$, $U^{(i)}\left(x^{-}_{i+1/6},t\right)$ и $U^{(i)}\left(x^{+}_{i+1/6},t\right)$, $U^{(i)}\left(x_{i+1/2},t\right)$ и $U^{(i+1)}\left(x_{i+1/2},t\right)$ слева и справа от точек $x_{i-1/2}$, $x_{i-1/6}$, $x_{i+1/6}$ и $x_{i+1/2}$. $U^{(i)}\left(x^{-}_{i-1/6},t\right)$ и $U^{(i)}\left(x^{+}_{i-1/6},t\right)$, $\varphi_p\left(x^{-}_{i-1/6},t\right)$ и $\varphi_p\left(x^{+}_{i-1/6},t\right)$ – значения вектора $U\left(x,t\right)$ и функций $\varphi\left(x,t\right)$, вычисленные слева и справа от точки $x_{i-1/6}$. $U^{(i)}\left(x^{-}_{i+1/6},t\right)$ и $U^{(i)}\left(x^{+}_{i+1/6},t\right)$, $\varphi_p\left(x^{-}_{i+1/6},t\right)$ и $\varphi_p\left(x^{+}_{i+1/6},t\right)$ – значения вектора $U\left(x,t\right)$ и функций $\varphi\left(x,t\right)$, вычисленные слева и справа от точки $x_{i+1/6}$. Верхним индексом $(i-1)$, $(i)$, $(i+1)$ обозначен номер ячейки.

Отметим, что формулы (31) для базисных функций, зависящих только от пространства $\varphi = \varphi_p(x)$, совпадают с формулами разрывного метода Галеркина с потоковой функцией $F_{i+1/2} = F\left(U\left(x_{i+1/2},t\right)\right)$ [1], [2], [3].

Подставляя в (31) базисные функции (9), получаем три уравнения. Выпишем конкретный вид данных уравнений на $i$-ой ячейке для функций $\varphi_j\left(x,t\right), j = 0,1,2$.

$$\varphi_0\left(x,t\right) = 1$$

$$\varphi_1\left(x,t\right) = \left(1-\alpha_1\left(t\right)\right)\frac{x-x_i}{\Delta x} + \alpha_1\left(t\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2\left(x,t\right) = \left(1-\alpha_2\left(t\right)\right)\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^2 + \alpha_2\left(t\right)\begin{pmatrix} \frac{113}{108} \\ \frac{1}{108} \\ \frac{113}{108} \end{pmatrix}$$

В формуле (31) элементы матрицы масс для функций $\varphi_j\left(x,t\right), \varphi_p\left(x,t\right)$ вычислены по формуле:

$$\left(\varphi_j\left(x,t\right), \varphi_p\left(x,t\right)\right) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi_j\left(x,t\right)\varphi_p\left(x,t\right)dx$$

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_0(x,t),\varphi_0(x,t)) = \Delta x\\
&(\varphi_1(x,t),\varphi_0(x,t)) = (\varphi_0(x,t),\varphi_1(x,t)) = 0\\
&(\varphi_2(x,t),\varphi_0(x,t)) = (\varphi_0(x,t),\varphi_2(x,t)) = (1-\alpha_2(t))\frac{\Delta x}{12} + \alpha_2(t)\frac{\Delta x}{3}\frac{27}{108}\\
&(\varphi_1(x,t),\varphi_1(x,t)) = (1-\alpha_1(t))^2\frac{\Delta x}{12} + (\alpha_1(t))^2 2\frac{\Delta x}{27} + (1-\alpha_1(t))\alpha_1(t)\,4\frac{\Delta x}{27}\\
&(\varphi_1(x,t),\varphi_2(x,t)) = (\varphi_2(x,t),\varphi_1(x,t)) = 0\\
&(\varphi_2(x,t),\varphi_2(x,t)) = (1-\alpha_2(t))^2\frac{\Delta x}{80} + (\alpha_2(t))^2\,113\frac{\Delta x}{11664} +\\
&\qquad +2(1-\alpha_2(t))\alpha_2(t)\,113\frac{\Delta x}{11664}.
\end{aligned}
$$

Производные по времени и по пространству базисных функций $\varphi_j(x,t)$ вычисляются по формулам:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_0(x,t)}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial\varphi_1(x,t)}{\partial x} = (1-\alpha_1(t))\frac{1}{\Delta x}\\
&\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial x} = (1-\alpha_2(t))\,2\frac{x-x_i}{\Delta x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_0(x,t)}{\partial t} = 0\\
&\frac{\partial\varphi_1(x,t)}{\partial t} = -\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\\ 0\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}\\
&\frac{\partial\varphi_2(x,t)}{\partial t} = -\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)^2\frac{\partial\alpha_2}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{113}{108}\\ \frac{1}{108}\\ \frac{113}{108}\end{pmatrix}\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Введем обозначения:

$$
RR0(x,t) = -\left[F^*\left(U\left(x_{i+1/2},t\right)\right) - F^*\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right)\right],
$$

$$
\begin{aligned}
RR1\left(x,t\right) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial \varphi_1\left(x,t\right)}{\partial x} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial \varphi_1\left(x,t\right)}{\partial t} U\left(x,t\right) \right) dxdt - \\
- \frac{1}{\Delta x} \left[ \varphi_1\left(x_{i+1/2},t\right) F^*\left(U\left(x_{i+1/2},t\right)\right) - \right. \\
- \left[ \varphi_1\left(x^-_{i-1/6},t\right) - \varphi_1\left(x^+_{i-1/6},t\right) \right] F^*\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right) - \\
- \left[ \varphi_1\left(x^-_{i+1/6},t\right) - \varphi_1\left(x^+_{i+1/6},t\right) \right] F^*\left(U\left(x_{i+1/6},t\right)\right) + \\
\left. + \varphi_1\left(x_{i-1/2},t\right) F^*\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right) \right] = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
RR2\left(x,t\right) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{\partial \varphi_2\left(x,t\right)}{\partial x} F\left(U\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial \varphi_2\left(x,t\right)}{\partial t} U\left(x,t\right) \right) dxdt - \\
- \frac{1}{\Delta x} \left[ \varphi_2\left(x_{i+1/2},t\right) F^*\left(U\left(x_{i+1/2},t\right)\right) - \right. \\
- \left[ \varphi_2\left(x^-_{i-1/6},t\right) - \varphi_2\left(x^+_{i-1/6},t\right) \right] F^*\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right) - \\
- \left[ \varphi_2\left(x^-_{i+1/6},t\right) - \varphi_2\left(x^+_{i+1/6},t\right) \right] F^*\left(U\left(x_{i+1/6},t\right)\right) + \\
\left. + \varphi_2\left(x_{i-1/2},t\right) F^*\left(U\left(x_{i-1/2},t\right)\right) \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Сделав все необходимые вычисления, систему уравнений (31) перепишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_0\left(t\right)}{\partial t}\left(\varphi_0\left(x,t\right),\varphi_0\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial U_2\left(t\right)}{\partial t}\left(\varphi_0\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right) = RR0\left(x,t\right) \\
&\frac{\partial U_1\left(t\right)}{\partial t}\left(\varphi_1\left(x,t\right),\varphi_1\left(x,t\right)\right) = RR1\left(x,t\right) \\
&\frac{\partial U_0\left(t\right)}{\partial t}\left(\varphi_0\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right) + \frac{\partial U_2\left(t\right)}{\partial t}\left(\varphi_2\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right) = RR2\left(x,t\right),
\end{aligned}
\tag{32}
$$

из которого легко вычислить

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1\left(t\right)}{\partial t} = \frac{RR1\left(x,t\right)}{\left(\varphi_1\left(x,t\right),\varphi_1\left(x,t\right)\right)} \\
&\frac{\partial U_2\left(t\right)}{\partial t} = \frac{RR2\left(x,t\right) - RR0\left(x,t\right)\left(\varphi_0\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right)}{\left(\varphi_2\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right) - \left(\varphi_0\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right)^2} \\
&\frac{\partial U_0\left(t\right)}{\partial t} = RR0\left(x,t\right) - \frac{\partial U_2\left(t\right)}{\partial t}\left(\varphi_0\left(x,t\right),\varphi_2\left(x,t\right)\right).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где $F^*\left(x_i\right)$– численная потоковая функция, зависящая от значений приближенного решения по обе стороны границы элемента $x_i^-, x_i^+$ и от

направления единичного нормального вектора $n$ (в формулах выше, знак вектора $n$ учтен).

Для вычисления правых частей уравнений (32) $RR0, RR1, RR2$ необходимо определять $\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$. Для этого заменим производную $\frac{\partial \alpha_j}{\partial t}$ численной аппроксимацией $\frac{\alpha_j^{n+1}-\alpha_j^n}{\Delta t}$, где $\alpha_j^n$ — значение функции $\alpha_j(t)$ в момент времени $n\Delta t$, и $\alpha_j^{n+1}$ — соответственно, в момент времени $(n+1)\Delta t$.

На каждом шаге по времени решаем задачу Римана в точках $x_{i-1/2}, x_{i-1/6}, x_{i+1/6}$ и $x_{i+1/2}$. Далее вычисляем максимальное число Маха $MMax_i$ образовавшихся ударных волн. Значения $\alpha_j^{n+1}$ определяются с использованием двух параметров *M1* и *M2*, *M1*< *M2,* в соответствии с формулами:

если $MMax_i < M1$, то $\alpha_i^{n+1}$= 0

если $MMax_i > M2$, то $\alpha_i^{n+1}$= 1

если $M1 < MMax_i < M2$, то $\alpha_i^{n+1} = \frac{MMax_i - M1}{M2-M1}$.

Для решения задач с наличием ударных волн параметры M1 и M2 необходимо выбирать в промежутке между 1 и 2, так как при возникновении ударных волн с числом Маха больше 2, классический РМГ не позволяет проводить расчеты, а при M1 строго больше 1, на гладких решениях, при достаточно большом числе точек схема переходит в классическую схему РМГ.

В случае, если этих условий для корректного определения $\alpha_j$ окажется недостаточно, необходимо включать функцию энтропийной коррекции. Для этого следует потребовать выполнения энтропийного неравенства. Выпишем соотношение (3) для области $ABCD$

$$\begin{aligned}
&\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x, t^n+\Delta t\right)\right)\, dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x, t^n\right)\right)\, dx + \\
&+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/6}, t\right)\right)\, dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/2}, t\right)\right)\, dt + \\
&+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i+1/6}, t\right)\right)\, dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/6}, t\right)\right)\, dt + \\
&+ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i+1/2}, t\right)\right)\, dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i+1/6}, t\right)\right)\, dt \geq 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Рассмотрим отдельно вычисление интеграла $\int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\,dt$. Будем учитывать тот факт, что при распаде разрыва в точке $x_{i-1/6}$ могут возникнуть ударные волны. В следствие возникновения ударных волн необходимо учитывать производство энтропии.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t\right)\right)\,dt = \\
&= \int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right) + \left(\frac{\partial U\left(x,t\right)}{\partial t}\right)_{\xi}\left(t-t^n\right) + O\left(\Delta t^2\right)\right) + Q_1 dt = \\
&= \int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right) + \left(\frac{\partial \Phi\left(U\left(x,t\right)\right)}{\partial U\left(x,t\right)}\right)_{\mu}\left(\frac{\partial U\left(x,t\right)}{\partial t}\right)_{\xi}\left(t-t^n\right) + O\left(\Delta t^2\right) + Q_1 dt = \\
&= \Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)\Delta t + O\left(\Delta t^2\right) + Q_1\Delta t
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Рассуждая аналогичным образом (35), при вычислении интегралов от энтропийного потока на границах $AD, NO$ и $BC$ получим следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x,t^n+\Delta t\right)\right)\,dx - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x,t^n\right)\right)\,dx + \\
&+\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)+Q_1\right) - \Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)+Q_2\right) + \\
&+\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i+1/6},t^n\right)\right)+Q_3\right) - \Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)+Q_4\right) + \\
&+\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i+1/2},t^n\right)\right)+Q_5\right) - \\
&-\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i+1/6},t^n\right)\right)+Q_6\right) + O\left(\Delta t^2\right) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Разделив равенство (36) на $\Delta t$, и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x,t^n+\Delta t\right)\right)dx - \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x,t^n\right)\right)dx + \right.$$
$$+\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)+Q_1\right)-\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)+Q_2\right)+ \qquad (37)$$
$$+\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i+1/6},t^n\right)\right)+Q_3\right)-\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i-1/6},t^n\right)\right)+Q_4\right)+$$
$$+\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i+1/2},t^n\right)\right)+Q_5\right)-$$
$$\left.-\Delta t\left(\Phi\left(U\left(x_{i+1/6},t^n\right)\right)+Q_6\right)+O\left(\Delta t^2\right)\right]\geq 0$$

получим неравенство (38):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S\left(U\left(x,t\right)\right)\,dx+\Phi\left(U\left(x_{i+1/2},t^n\right)\right)\,-\Phi\left(U\left(x_{i-1/2},t^n\right)\right)\,\geq Q. \qquad (38)$$

# Численные расчеты

Рассмотрим систему уравнений Эйлера (1) с уравнением состояния идеального газа с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$.
Численные расчеты Задач 1 -3 проведены с параметрами M1=1.01, M2=1.1 с дополнительной процедурой энтропийной коррекции.

**Задача 1** (Sod problem) [18].
Начальное распределение вещества в расчетной области: $-5 \leq x \leq 5$.

$$(\rho,u,P)\,(x,0)=\begin{cases}(1.0,\ 0.0,\ 1.0), & x\leq 0,\\ (0.125,\ 0.0,\ 0.1) & x\geq 0,\end{cases} \qquad (39)$$

где $\rho$ — плотность, $u$ — скорость, $P$ — давление. На границах области заданы условия отражения. В результате распада разрыва возникает ударная волна, движущаяся в область низкого давления, веер волн разрежения, расширяющийся в область высокого давления и контактный разрыв.

На рисунках 5, 6 представлены два расчета задачи Сода на сетке из 100 ячеек и сетке с шагом в десять раз мельче с Nx=1000 на момент времени T=2. Оба расчета демонстрируют хорошее совпадение с точным решением. Профиль ударной волны передается достаточно точно, тремя расчетными ячейками. Единичные колебания незначительной

амплитуды наблюдаются на стыке областей контактного разрыва и волны разрежения с областями постоянного течения.

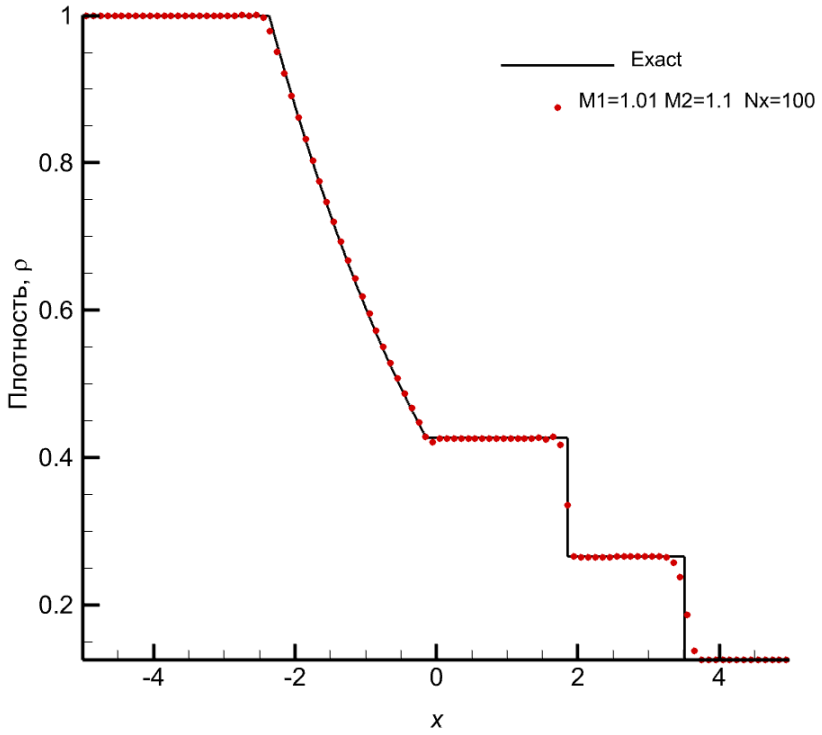



*Рис. 5.* Распределение плотности вещества в Задаче 1

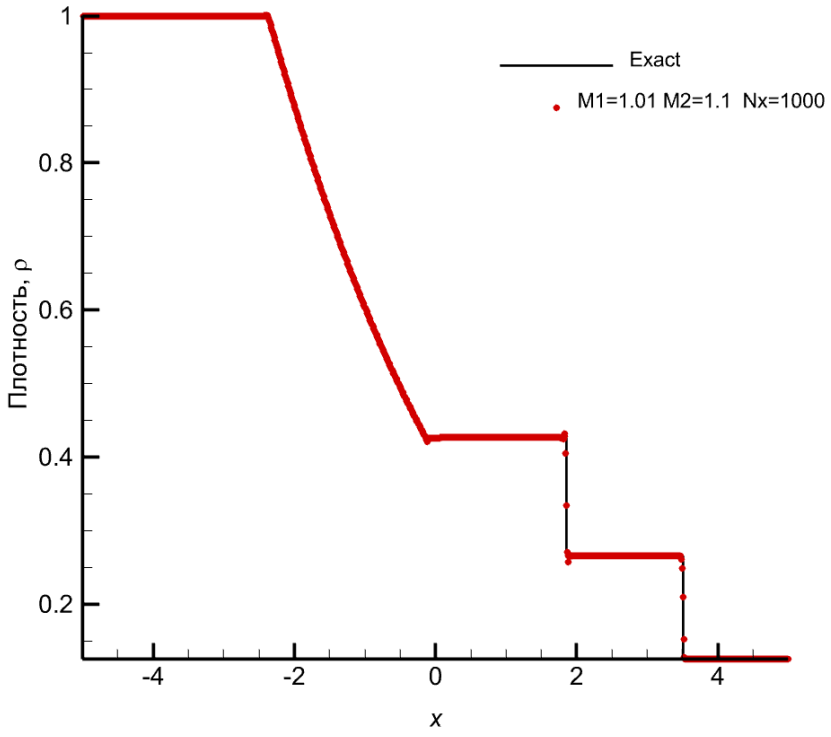



*Рис. 6.* Распределение плотности вещества в Задаче 1

**Задача 2** (Shock entropy wave interaction) [19]
Задача 2 представляет собой взаимодействие ударной волны с энтропийным возмущением. После прохождения ударной волны, интенсивностью M=3,5 за фронтом формируется сложное течение, в котором со временем образуется серия ударных волн меньшей амплитуды.
Начальное распределение вещества в расчетной области: $-5 \leq x \leq 5$.

$$(\rho, u, P)(x, 0) = \begin{cases} (3.857143,\ 2.629369,\ 10.333333), & x \leq -4, \\ (1 + 0.2\sin(5x),\ 0.,\ 1.000000) & x \geq -4, \end{cases} \tag{40}$$

где $\rho$ — плотность, $u$ — скорость, $P$ — давление. На границе области заданы условия отражения.

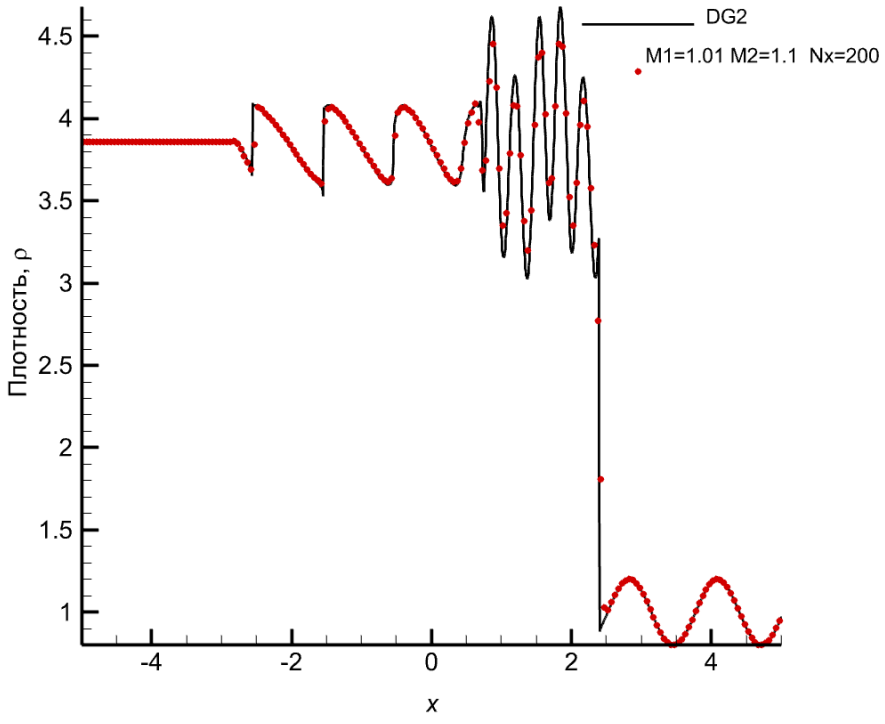



*Рис. 7.* Распределение плотности вещества в Задаче 2

На рисунках 7, 8 представлены два расчета задачи 2 на сетках с шагом по пространству $h_1 = 0.05$ и $h_2 = 0.005$ на момент времени T=1.8. В качестве референсного решения используется расчет РМГ с

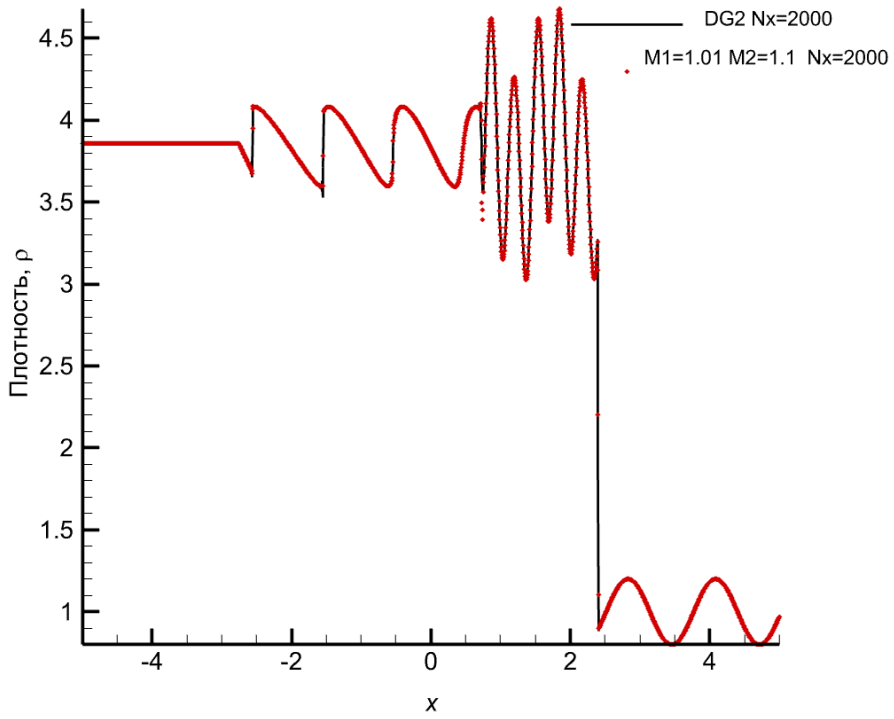



*Рис. 8.* Распределение плотности вещества в Задаче 2

квадратичными полиномами и «моментным» лимитером Криводоновой [17].

На рисунке 9 представлена сильно увеличенная область решения Задачи 2 ($x \in [-2.9; -1.6]$). Ранее, в работах [20], [21], было показано, что, используя схемы повышенного порядка точности даже с лимитирующими функциями, можно столкнуться с немонотонностью получаемых решений. При этом амплитуда колебаний достаточно мала и сказывается на точности решения только на подробных сетках. В отличие от классического разрывного метода Галеркина (рис. 9, сплошная линия), модифицированным методом, с базисными функциями, зависящими от времени, при использовании дополнительной процедуры энтропийной коррекции можно получить монотонные профили численного решения (рис. 9, красные точки).

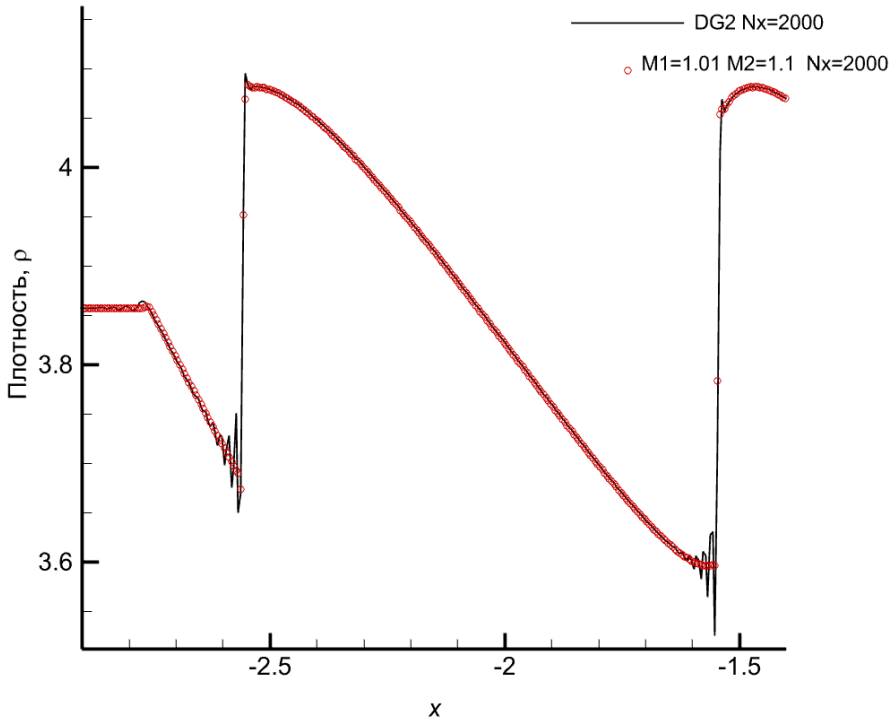



*Рис. 9.* Распределение плотности вещества в Задаче 2, Nx=2000

**Задача 3** (Woodward-Colella blast waves) [22].
Данная задача представляет собой модель многократного взаимодействия двух ударных волн различной интенсивности с волнами разрежения и между собой. В результате возникает сложная картина течения.
Начальное распределение вещества в расчетной области: $0.0 \leq x \leq 1.0$.

$$(\rho, u, P)(x, 0) = \begin{cases} \left(1,\ 0,\ 10^{3}\right), & 0 \leq x \leq 0.1, \\ \left(1,\ 0,\ 10^{-2}\right), & 0.1 \leq x \leq 0.9, \\ \left(1,\ 0,\ 10^{2}\right), & 0.9 \leq x \leq 1.0, \end{cases} \tag{41}$$

где $\rho$ — плотность, $u$ — скорость, $P$ — давление. На границах области заданы условия отражения.

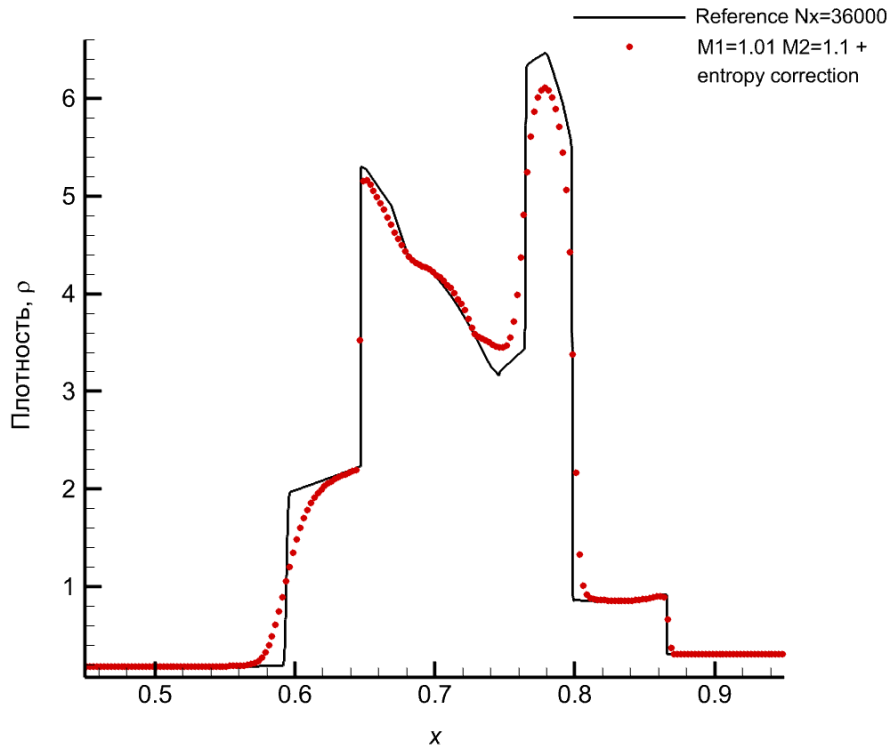



*Рис. 10.* Распределение плотности вещества в Задаче 3

Эта задача является одним из общепринятых тестов для проверки работоспособности численных методов для задач газовой динамики, так как в структуре решения присутствуют и взаимодействие ударных волн различной интенсивности, и взаимодействие волн разрежения,

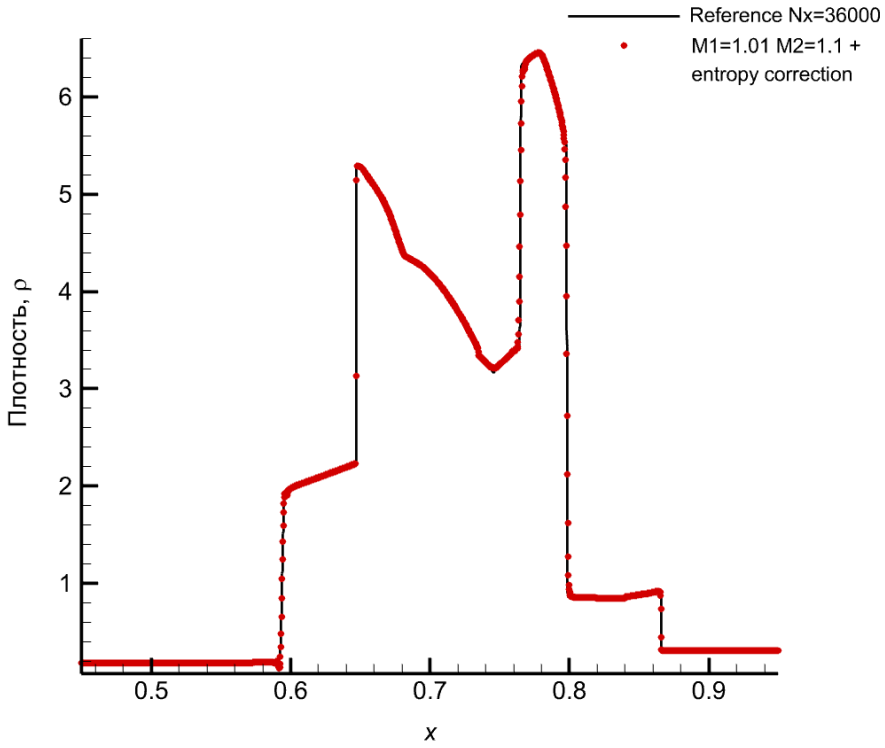



*Рис. 11.* Распределение плотности вещества в Задаче 3

и высокая амплитуда изменения газодинамических параметров. На рисунках 10 и 11 представлены профили плотности на момент времени $t = 0.038$. В качестве референсного решения используется расчет, выполненный на 36000 ячеках. Следует отметить, что решение данной задачи новой модификацией РМГ с квадратичным базисом и использованием энтропийно-корректирующей процедуры, показало возможность ее применения при численном моделировании газодинамических процессов.

## Влияние настроечных параметров

При расчетах модифицированным разрывным методом Галеркина (МРМГ1) с линейными базисными функциями, зависящими от времени [8], для определения параметра $\alpha(t)$, отвечающего за точность схемы, во всех расчетах использовались значения $M1 = 1.1$ и $M2 = 1.7$. С такими параметрами схема работала стабильно, показывая качественно достаточно хорошие результаты.

В первой серии расчетов МРМГ2 с квадратичным базисом (5), (6), (9), (10) для определения $\alpha_j(t)$ так-же были использованы значения параметров $M1 = 1.1$ и $M2 = 1.7$. С такими параметрами в областях гладкого решения или при возникновении ударных волн слабой интенсивности (до M=1.1) метод работает как классический РМГ третьего порядка точности, получая немонотонное решение, так как $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = 0$. При возникновении сильных разрывов в решении, (например, Задача 3) такой метод без дополнительных процедур монотонизации работать не может. По этой причине были уменьшены значения параметров $M1, M2$ для определения $\alpha_j(t)$ до $M1 = 1.01$ и $M2 = 1.1$, и в задаче 3 решение было получено. Однако с такими параметрами $M1, M2$ в решении наблюдаются мелкомасштабные осцилляции постоянной амплитуды в областях постоянного течения, заметные при большем увеличении масштаба рисунков 5 и 6 (см. рис. 12 и 13, синяя сплошная линия). При численном решении данной методикой с использованием дополнительной энтропийно-корректирующей процедуры удается получить монотонное решение с единичными колебаниями на стыке областей (красные точки).

На рисунках 14 и 15 представлены профили плотности и распределение параметров $\alpha_j(t)$ на момент времени T=0.038 при решении Задачи 3. В основном, во всех расчетах параметр $\alpha_j(t) = 0$, в областях локализации ударных волн, в 2-5 ячейках $\alpha_j(t) = 1$. В расчете с параметрами $M1 = 1.01$ и $M2 = 1.1$ и дополнительной процедурой энтропийной коррекции, вне областей локализации ударных волн, параметр $\alpha_j(t)$ меняется в пределах от $\alpha_j(t) = 0$ до $\alpha_j(t) = 0.5$, и в результате в решении полностью отсутствуют осцилляции.

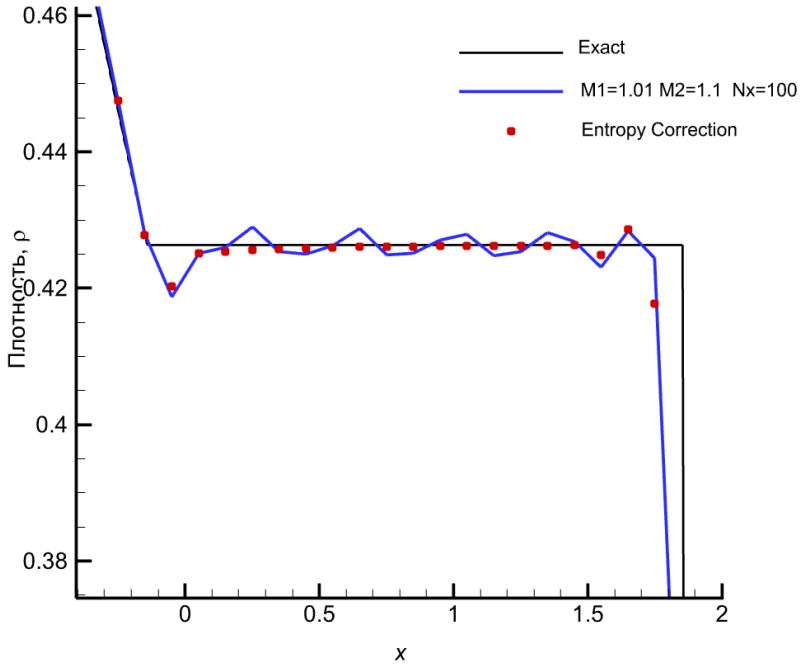



*Рис. 12.* Распределение плотности вещества в задаче 1. Синяя сплошная линия — решение без использования энтропийно-корректирующей процедуры, красные точки — решение с использованием энтропийно-корректирующей процедуры

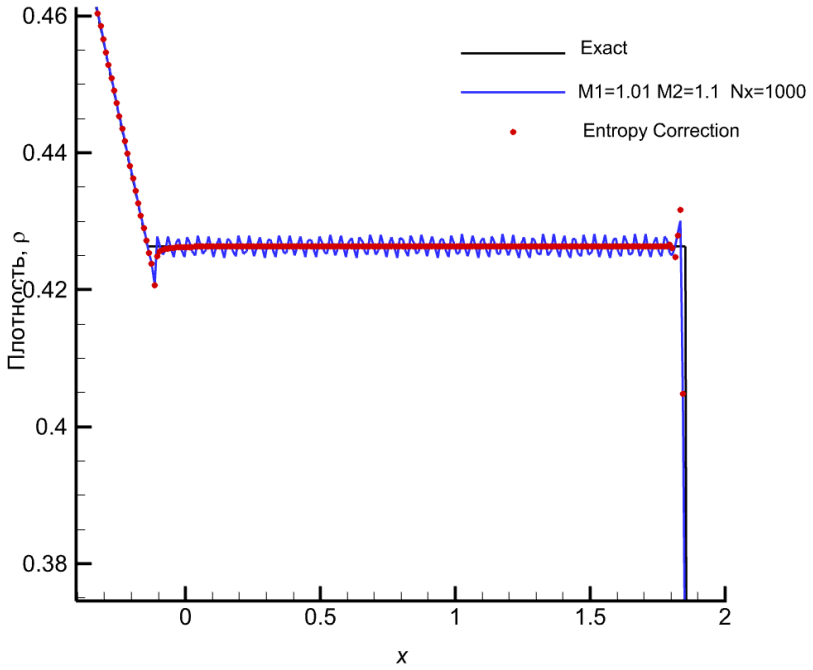



*Рис. 13.* Распределение плотности вещества в задаче 1. Синяя сплошная линия — решение без использования энтропийно-корректирующей процедуры, красные точки — решение с использованием энтропийно-корректирующей процедуры

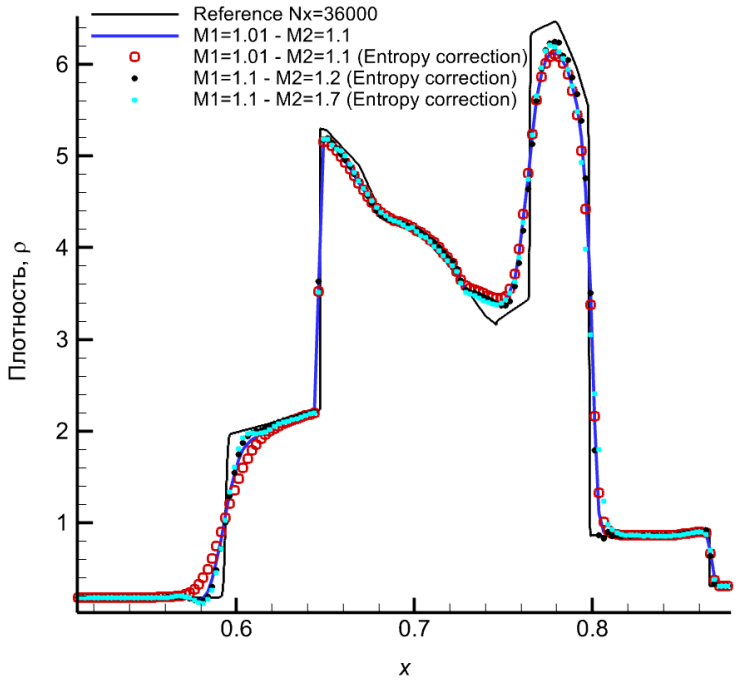



*Рис. 14.* Распределение плотности вещества в задаче 3

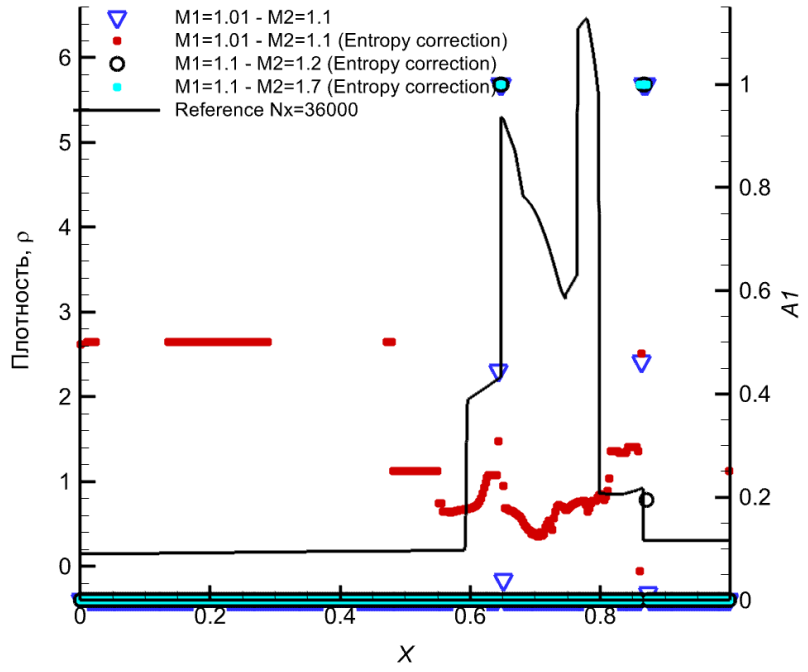



*Рис. 15.* Распределение параметра $\alpha_1(t)$ в Задаче 3 на момент времени T=0.038

# Заключение

В работе построена методика, на основе разрывного метода Галеркина с базисными функциями, зависящими от времени. В областях гладкости решения методика работает как классический РМГ третьего порядка точности, а в областях локализации ударных волн переходит локально на классический метод Годунова, но на сетке в три раза мельче исходной. Показано, что для решения задач с наличием ударных волн параметры, определяющие качество схемы, необходимо выбирать в промежутке между 1 и 2, так как при возникновении ударных волн с числом Маха больше 2 классический РМГ не позволяет проводить расчеты, а при значении меньшего параметра строго больше 1 на гладких решениях при достаточно большом числе точек схема переходит в классическую схему РМГ. В случае, если этих условий для корректного определения $\alpha_j$ окажется недостаточно, необходимо включать функцию энтропийной коррекции, обеспечивающую выполнение энтропийного неравенства. Численное решение классических задач показало возможность применения данной методики для решения газодинамических задач.

# Библиографический список


1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998, Vol. 1697, pp. 151-268.

2. Cockburn B., Karniadakis G.E., Shu C.-W. Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and applications, Springer Science & Business Media, 2012, P. 472 doi 10.1007/978-3-642-59721-3

3. Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for computational fluid dy namics. In E. Stein, R.de Borst, and T.J.R. Hughes, editors, Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition, 2018, V 5, P 141–203. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, U.K. doi 10.1002/9781119176817.ecm2053

4. Hoskin D.S., Van Heyningen R.L., Nguyen N.C., Vila-Pérez J., Harris W.L. and Peraire J. Discontinuous Galerkin Methods for Hypersonic Flows // Progress in Aerospace Sciences, 2024, №146, 1, 100999 DOI:10.1016/j.paerosci.2024.100999

5. Остапенко В.В., О сходимости разностных схем сквозного счета

в областях влияния ударных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997, Т. 37 №10, С. 1201–1212

6. Брагин М.Д., Реальная точность линейных схем высокого порядка аппроксимации в задачах газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **64**:1 (2024), 149–161; DOI: 10.31857/S0044466924010118

7. Волков А.В. Метод численного исследования обтекания пространственных конфигураций путем решения уравнений Навье-Стокса на основе схем высокого порядка точности // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, М., 2010

8. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Модификация разрывного метода Галеркина, с использованием базисных функций, зависящих от времени // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 523 (2025), 50–58; Dokl. Math., 111:3 (2025), 182–188.

9. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации // Дифференциальные уравнения, 2015, Т.51, №7, С.899-907

10. Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук, 2015, Т.461, №:4, С. 390-393. doi: 10.7868/S0869565215100060

11. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959. Т. 47, №3, С. 271-306.

12. Тишкин В.Ф., Жуков В.Т., Мышецкая Е.Е. К обоснованию схемы Годунова в многомерном случае // Матем. моделирование, **28**:2 (2016), 86–96; Math. Models Comput. Simul., **8**:5 (2016), 548–556/

13. Меньшов И.С. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова на основе решения обобщенной задачи Римана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т.30. №9, С.1357-1371.

14. Тешуков В.М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // Прикл. мех. техн. физ., 1980, Т 21, №2, С. 126–133.

15. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Матем. моделирование. 2012, Т 24, №12, С.124–128.

16. Ковыркина О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф. О сходимости разностных схем сквозного счета в областях влияния ударных волн // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 504, № 1. – С. 42-46. – DOI: 10.31857/S2686954322030043.

17. Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods // Journal of Computational Physics, 226:1, 2007, pp. 276–296.

18. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1978. V. 27.

19. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // Journal of Computational Physics, 1989, № 83, p.32–78 doi:10.1016/0021-9991(89)90222-2

20. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Решение задач гидродинамики с использованием метода Галеркина с разрывными базисными функциями // Тезисы докладов международной конференции “Современные проблемы прикладной математики и информатики”, Дубна, 22-27 августа 2012 г., с.20–23.

21. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики // Матем. моделирование, 26:1 (2014), 17–32; Math. Models Comput. Simul., 6:4 (2014), 397–407.

22. Woodward P.R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // Journal of Computational Physics. 1984. V. 54. N 1. P. 115–173. doi: 10.1016/0021-999190142-6.

# Оглавление

Введение . . . . . 3
Базисные функции, зависящие от времени, содержащие разрыв внутри ячейки . . . . . 3
Численные расчеты . . . . . 23
Влияние настроечных параметров . . . . . 31
Заключение. . . . . 35
Библиографический список . . . . . 35