О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К.Р. Корнеев, К.С. Суслов, Д.И. Бажан, А.С. Кузнецова

Аппроксимация плоских периодических орбит в круговой ограниченной задаче трёх тел методом символьной регрессии

Москва — 2026

Корнеев К.Р., Суслов К.С., Бажан Д.И., Кузнецова А.С.

Аппроксимация плоских периодических орбит в круговой ограниченной задаче трёх тел методом символьной регрессии

В работе рассматривается задача построения аналитических аппроксимаций семейств плоских периодических орбит в круговой ограниченной задаче трёх тел с использованием методов символьной регрессии. Построены аппроксимации для орбит Ляпунова вокруг точек L_1 – L_3, семейств вблизи точек L_4 – L_5, а также семейств типов S, D и C. Качество аппроксимаций оценивается по невязке периодичности после численного интегрирования. Показано, что полученные выражения могут использоваться в качестве начальных приближений для дифференциальной коррекции при построении орбит. В выбранной параметризации выявлено резонансное разбиение круговых семейств C1 и C2, связанное с резонансами первого порядка.

Ключевые слова: круговая ограниченная задача трёх тел, периодическая орбита, символьная регрессия, аппроксимация, точка либрации.

Korneev K.R., Suslov K.S., Bazhan D.I., Kuznetsova A.S.

Approximation of planar periodic orbits in the circular restricted three-body problem by symbolic regression

The paper considers the construction of analytical approximations for families of planar periodic orbits in the circular restricted three-body problem using symbolic regression. Approximations are obtained for Lyapunov orbits around L_1–L_3, families near L_4–L_5, and families of types S, D, and C. The accuracy is evaluated via the periodicity residual after numerical integration. It is shown that the resulting expressions can be used as initial guesses for differential correction in orbit determination. In the chosen parametrization, a resonance-based subdivision of the circular families C1 and C2 associated with first-order resonances is revealed.

Key words: circular restricted three-body problem, periodic orbit, symbolic regression, approximation, libration point.

Введение

Круговая ограниченная задача трёх тел (Circular Restricted Three-Body Problem, CR3BP) представляет собой фундаментальную модель небесной механики, описывающую движение тела пренебрежимо малой массы под действием гравитационного притяжения двух массивных тел, вращающихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс [1, 2, 3]. Несмотря на кажущуюся простоту формулировки, CR3BP демонстрирует богатую динамическую структуру, включающую периодические орбиты, квазипериодические траектории и инвариантные многообразия [4, 5].

Систематическая классификация периодических орбит CR3BP была предложена Бруком [30]. Последующее развитие эта классификация получила в работах Доеделя [31], а также в исследованиях российских учёных по структуре семейств периодических решений при малых значениях параметра массы [18, 19]. Согласно этой классификации, периодические орбиты группируются в семейства, исходящие из пяти точек либрации системы. Каждое семейство характеризуется определёнными топологическими свойствами, индексами устойчивости и бифуркационными связями с другими семействами [32, 33]. Детальное изучение бифуркационной структуры семейств проведено в работах по сложным семействам периодических решений [20].

Периодические орбиты в CR3BP играют ключевую роль в проектировании космических миссий [6]. В последние годы интерес к таким орбитам значительно возрос в связи с международными программами освоения Луны: NASA Artemis, китайской программой Chang'e, российской лунной программой и планами размещения орбитальной станции Gateway на окололунной гало-орбите [7, 8]. В России активно развиваются проекты по созданию орбитальной инфраструктуры в окололунном пространстве, включая ретрансляционные спутники для обеспечения связи с обратной стороной Луны [9].

Периодические орбиты вблизи точек либрации L_1 и L_2 системы Земля-Луна используются для миссий по наблюдению за полюсами Луны, связи с обратной стороной Луны и в качестве промежуточных станций для межпланетных перелётов [10, 11]. Космические миссии «Спектр-РГ» и перспективный проект «Миллиметрон» рассматривают использование орбит вблизи точки L_2 системы Солнце-Земля [12, 13].

Традиционные методы вычисления периодических орбит основаны на численном интегрировании уравнений движения с последующей дифференциальной коррекцией [14, 15]. Методы продолжения по параметру, такие как метод псевдодуг, позволяют вычислять целые семейства периодических орбит [16, 17]. Эти подходы получили развитие в работах российских учёных, в частности, в исследованиях ИПМ им. М.В. Келдыша по изучению структуры семейств периодических решений [18, 19, 20]. Однако численные методы требуют значительных вычислительных ресурсов и не предоставляют аналитических выражений для описания орбит.

В последние годы методы машинного обучения начали активно применяться в задачах небесной механики и орбитальной динамики [21, 22]. Особый интерес представляет символьная регрессия — тип машинного обучения, направленный на аппроксимацию данных аналитическими выражениями [23, 24].

Символьная регрессия основана на генетическом алгоритме и позволяет автоматически синтезировать математические модели из экспериментальных данных [25, 26]. Метод успешно применялся для переоткрытия закона всемирного тяготения из наблюдательных данных Солнечной системы [27], для оптимизации траекторий в окрестности малых тел [28], для стабилизации неустойчивых периодических орбит [29]. В отличие от нейронных сетей, которые работают как «чёрные ящики», символьная регрессия создаёт интерпретируемые модели в виде математических формул, что особенно важно для понимания физических закономерностей.

Целью данной работы является построение компактных аналитических выражений для описания известных семейств плоских периодических орбит с использованием методов символьной регрессии. В статье рассматривается применение данного подхода к широкому классу орбит, включая семейства, ассоциированные с точками либрации L_1–L_5, а также семейства типа S (короткопериодические), C (круговые) и D (двупериодические). Такой подход позволяет объединить точность численных методов с компактностью аналитической формы записи, предоставляя эффективный инструмент для аппроксимации начальных условий и периодов орбит в зависимости от параметров системы.

Плоские периодические орбиты в круговой ограниченной задаче трёх тел

Рассматривается движение тела пренебрежимо малой массы m_3 в поле тяготения двух основных тел с массами m_1 и m_2 ($m_1 \geq m_2$). Используется стандартная безразмерная синодическая (вращающаяся) система координат. Единица массы выбрана так, что сумма масс равна единице, расстояние между ними равно единице, а единица времени выбрана так, что период их взаимного обращения равен 2π. Основным параметром системы является массовое отношение:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Центр масс системы находится в начале координат. Основные тела расположены на оси x в точках с координатами ($-\mu$, 0) и ($1-\mu$, 0). Поскольку исследование ограничивается плоским случаем, координата и скорость вдоль

оси z полагаются тождественно равными нулю. Уравнения движения в плоскости Oxy имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} - 2\dot{x} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{cases} \tag{2}$$

где Ω – эффективный потенциал, учитывающий центробежные силы

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \tag{3}$$

Здесь r_1 и r_2 – расстояния от третьего тела до первого и второго соответственно:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Система допускает единственный интеграл движения – интеграл Якоби, который связывает квадрат скорости с положением тела

$$C = 2\Omega(x, y) - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right). \tag{5}$$

Решением системы является вектор состояния $X(t) = [x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)]^T$. Периодической орбитой называется траектория, для которой существует такой минимальный период $T > 0$, что для любого t выполняется условие полной повторяемости фазового вектора

$$X(t + T) = X(t). \tag{6}$$

В рамках данной работы исследуются семейства периодических решений для различных значений μ, соответствующих системам Земля–Луна, Солнце–Земля, а также модельные случаи для широкого диапазона параметров.

Уравнения движения в CR3BP имеют пять стационарных решений, называемых точками либрации. Точки L_1, L_2, L_3, называемые коллинеарными, располагаются на оси x, а точки L_4 и L_5, называемые треугольными, расположены в вершинах таких равносторонних треугольников в плоскости Oxy. Иллюстрация расположения точек либрации представлена на рис. 1.

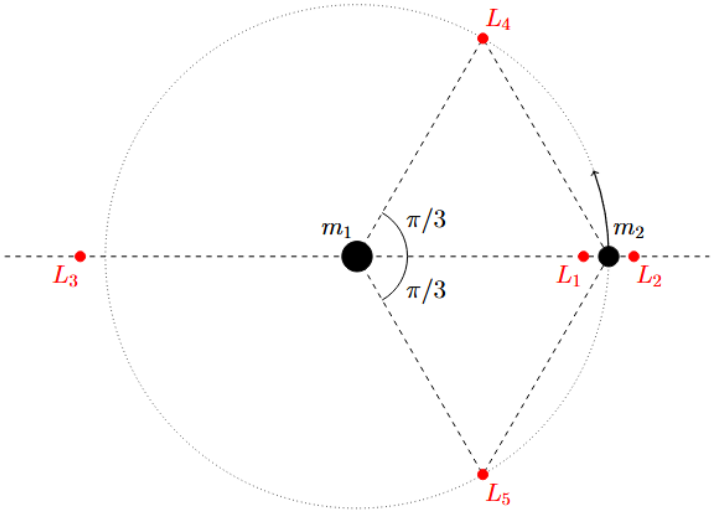

Рис. 1. Иллюстрация расположения точек либрации

Методика создания набора данных

Для проведения символьной аппроксимации предварительно формировались численные выборки периодических решений круговой ограниченной задачи трёх тел. Для каждого рассматриваемого семейства выбиралась параметризация, удобная для численного продолжения соответствующей ветви и последующего построения формульных аппроксимаций. Такой подход позволял учитывать особенности отдельных семейств: геометрию ветви, чувствительность к начальному приближению, наличие сложных или резонансных участков, а также число независимых параметров, необходимых для описания орбит.

Процесс генерации данных состоял из трёх основных этапов: получения начального приближения, уточнения методом дифференциальной коррекции и продолжения семейства по выбранному параметру. При этом конкретная параметризация и техническая стратегия продолжения могли отличаться для разных семейств. Для гладких ветвей было достаточно простой параметризации, тогда как для более сложных семейств использовались специальные замены переменных, разбиение области параметра или отдельная обработка участков с выраженным изменением характера зависимости.

Метод дифференциальной коррекции представляет собой итерационный численный алгоритм, применяемый для решения краевых задач, к которым сводится поиск периодических орбит.

Основным свойством периодической траектории с периодом T является совпадение фазового вектора системы в начальный момент времени t = 0 и в момент t = T. Иными словами, невязка фазового состояния на концах интервала интегрирования должна быть равна нулю.

Пусть $\varphi = [x, y, \dot{x}, \dot{y}]^\top$ — вектор состояния системы. Для однозначного определения орбиты в рамках данной постановки зафиксируем начальные

координаты x_0 и y_0. Задача сводится к поиску вектора начальных скоростей и периода, которые обеспечивают выполнение условия периодичности.

Сформируем вектор варьируемых параметров $z \in R^3$:

$$z = [\dot{x}_0, \dot{y}_0, T]^\top. \quad (7)$$

Вектор начальных условий полной системы имеет вид $\boldsymbol{\varphi_0(z)} = [x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0]^\top$. Введем вектор-функцию невязки $\mathbf{F(z)}$, характеризующую отклонение конечного состояния от начального:

$$F(z) = \varphi(z) - \varphi_0(z), \quad (8)$$

где $\varphi(z)$ — решение уравнений движения в момент времени T. Условие существования периодической орбиты записывается как

$$F(z) = 0. \quad (9)$$

Поскольку размерность вектора невязки ($F \in R^4$) превышает число варьируемых параметров ($z \in R^3$), полученная система является переопределенной. Для её решения применяется обобщенный метод Ньютона (метод Гаусса-Ньютона), минимизирующий евклидову норму вектора невязки. Итерационный процесс уточнения параметров на шаге k описывается выражением

$$z_{k+1} = z_k - \left[J^\top(z_k)J(z_k)\right]^{-1} J^\top(z_k)F(z_k), k = 0,1,2,\dots, \quad (10)$$

где $J(z) = \frac{\partial F}{\partial z}$ — матрица Якоби системы размерностью 4×3.

После нахождения одного скорректированного решения строилась следующая точка семейства. Продолжение выполнялось по выбранному параметру с адаптацией шага к локальному поведению ветви. На гладких участках шаг мог быть крупнее, а в областях ухудшения сходимости, изменения формы ветви или приближения к резонансным значениям — уменьшаться. Поэтому использованные выборки не являются заранее заданными равномерными сетками фиксированного размера. Они представляют собой наборы успешно скорректированных периодических решений, полученные в ходе продолжения соответствующих семейств.

Численное интегрирование уравнений движения выполнялось адаптивным многошаговым методом Адамса. Шаг интегрирования выбирался автоматически в соответствии с локальной оценкой ошибки, что позволяло устойчиво интегрировать траектории на разных участках семейств, включая области с повышенной чувствительностью к начальному состоянию.

Полученные численные ветви далее использовались как исходные данные для символьной регрессии. В разделах, посвящённых отдельным семействам, указывается выбранный параметр семейства, вид начального фазового вектора и набор величин, для которых строятся аппроксимационные формулы.

Методика аппроксимации

В качестве метода аппроксимации используется символьная регрессия. Цель аппроксимации — получить явные компактные формулы, которые по выбранному независимому параметру семейства возвращают начальные скорости и период. В некоторых случаях используются два независимых параметра. Символьная регрессия выполняется библиотекой PySR [34, 35] отдельно для каждой целевой величины: один запуск алгоритма — одна аппроксимирующая формула. Такой раздельный подход упрощает поиск и позволяет независимо контролировать точность и сложность выражений для разных компонент начальных условий. Вектор компонент начальных условий вместе с периодом обозначим

$$p = [\mathrm{x}, y, \mathrm{v}_x, v_y, \mathrm{T}]^\top. \tag{11}$$

В качестве «внутренней» метрики обучения в PySR используется среднеквадратичная ошибка целевой величины на всём наборе орбит семейства. При этом основной физически значимый критерий качества вводится дополнительно и проверяется уже после получения всех формул: для каждой орбиты семейства берутся фиксированные значения независимого параметра (например, x_0), по формуле вычисляются предсказанные v_{x0}, v_{y0}, T, затем выполняется численное интегрирование CR3BP и оценивается невязка через период. Именно эта величина отражает практическую применимость формулы и согласованность аппроксимаций между собой.

Процедура отбора формул состояла из трёх этапов. На первом этапе для каждой целевой величины строился набор кандидатов, полученных в независимых запусках символьной регрессии. На втором этапе из этого набора выбирались выражения с достаточно малой ошибкой аппроксимации и приемлемой сложностью. На третьем этапе кандидаты проверялись в составе полного начального фазового вектора: по формулам вычислялись начальные условия и период, затем выполнялось численное интегрирование уравнений CR3BP и оценивалась невязка через период.

После выбора окончательных выражений формулы разделялись на символьную составляющую и таблицу числовых коэффициентов. Для каждого семейства такая таблица приводится в соответствующем разделе. В результате формируется набор аналитически записанных аппроксимаций, которые могут использоваться как начальные приближения для дифференциальной коррекции либо как самостоятельное приближённое описание периодических орбит на заданном участке семейства.

Символьные аппроксимации

В этом разделе приведён список полученных аппроксимаций для следующего списка семейств орбит и точек либрации:

1. Точки либрации L_1, L_2, L_3
2. Семейство L1 — плоские орбиты Ляпунова вокруг точки либрации L_1
3. Семейство L2 — плоские орбиты Ляпунова вокруг точки либрации L_2
4. Семейство L3 — плоские орбиты Ляпунова вокруг точки либрации L_3
5. Семейства L4-L5 — долгопериодические орбиты вокруг точек L_4 и L_5
6. Семейство S3 — короткопериодические орбиты вокруг точек L_4 и L_5
7. Семейство D1 — двупериодическая плоская орбита
8. Семейство C1 — ближние круговые орбиты вокруг большего тела
9. Семейство C2 — дальние круговые орбиты вокруг большего тела

Точки либрации L_1, L_2, L_3

Координаты точек L_1, L_2, L_3 зависят от параметра массы системы μ и определяются из условия равенства нулю эффективного потенциала. На рис. 2 показаны положения коллинеарных точек либрации в зависимости от значения параметра.

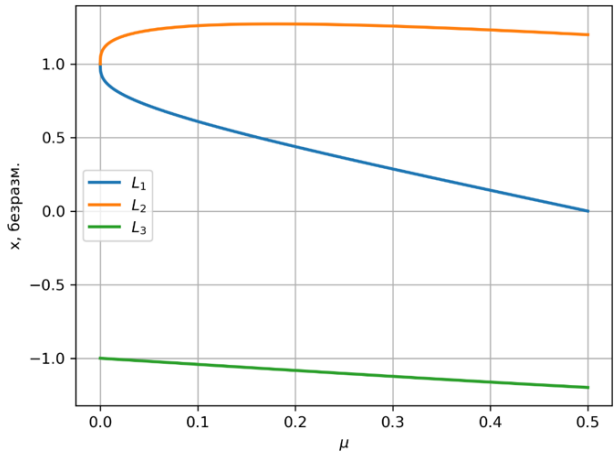

Рис. 2. Положения точек либрации L_1, L_2 и L_3

Точное вычисление координат точек либрации обычно проводится численно. Символьная регрессия позволяет получить аналитические аппроксимации координат как функций параметра массы μ:

$$L_1 = -A_2^1\mu^{A_3^1} - \mu^{A_1^1} + \cos\left(A_4^1\mu^{A_5^1}\right), \tag{12}$$

$$L_2 = A_1^2\left(A_2^2\right)^{\mu}\left(\mu^{A_3^2} - \mu\right) + 1, \tag{13}$$

$$L_3 = -A_1^3\mu + A_2^3\mu e^{\mu\left(A_3^3\mu^2 + \arctan(\mu)\right)} - 1. \tag{14}$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 1, а точность аппроксимаций приведена в таблице 2. Примечательно, что ошибка

аппроксимации точки L_3 чрезвычайно низкая, что связано с крайне простым графиком аппроксимируемой функции.

Таблица 1

Коэффициенты аппроксимации точек L_1, L_2, L_3

N	A^1	A^2	A^3
1	1.094418E+00	7.367384E-01	4.705882E-01
2	6.627480E-01	8.592316E-01	5.405405E-02
3	3.293425E-01	3.394426E-01	6.470588E-01
4	5.164209E-01		
5	2.484131E+00		

Таблица 2

Ошибка аппроксимации точек L_1, L_2, L_3

Точка либрации	Среднеквадратическая ошибка
L_1	3.4E-05
L_2	3.5E-05
L_3	7.6E-08

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними: рис. 3 и рис. 4. Из графиков видно, что аппроксимация теряет качество в областях близи нуля для точек L_1 и L_2.

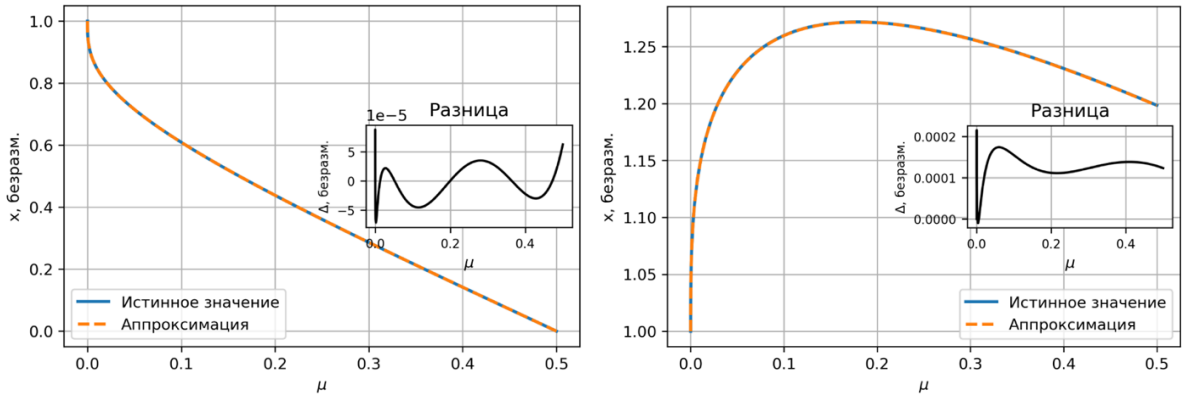

Рис. 3. Аппроксимация точки L_1 (слева) и точки L_2 (справа)

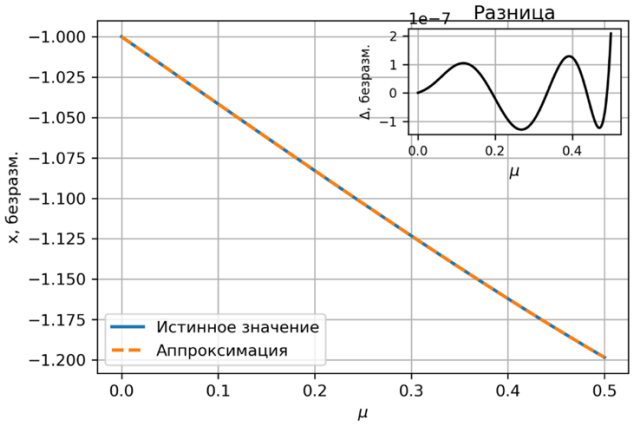

Рис. 4. Аппроксимация точки L_3

Семейство L1

Семейство L1 представляет собой плоские орбиты Ляпунова — двумерные периодические решения вокруг неустойчивой точки L_1, лежащие в плоскости движения первичных тел (плоскости Oxy). Эти орбиты имеют симметрию относительно оси x. Для данного семейства перейдём к новой переменной

$$\mathrm{s} = L_1 - x. \tag{15}$$

С такой заменой вектор начальных условий примет вид

$$p = [L_1 - s, 0, 0, v_y(s), T(s)]^{\mathsf{T}}. \tag{16}$$

Построим семейство L1 численно, с помощью продолжения по параметру s, после чего аппроксимируем методом символьной регрессии:

$$v_y = \begin{cases} \tanh\left(\mathrm{s}\left(\mathrm{C}_1^2 + \mathrm{C}_2^2 \mathrm{s}^{\mathrm{C}_3^2} + \mathrm{s}\sin\left(\mathrm{C}_4^2 - \mathrm{C}_5^2 \mathrm{s}\right)\right)\right), 0 \le \mathrm{s} < 0.021 \\ \mathrm{s} + \left(\mathrm{C}_1^3 + \mathrm{s}^{\mathrm{C}_2^3}\right)\left(\mathrm{C}_3^3 + \operatorname{atan}\left(\operatorname{atan}\left(\dfrac{-\mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_5^3 \mathrm{s}}{\mathrm{s}}\right)\right)\right), 0.021 \le \mathrm{s} < 0.119 \\ C_1^4 + 2s\left(C_2^4 s + \cos\left(\left(-C_3^4 + C_4^4 s + \dfrac{C_5^4}{s}\right)\log(s)\right)\right)^s, 0.119 \le s \end{cases} \tag{17}$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{D}_1^2 + \mathrm{D}_2^2 \operatorname{atan}^{\mathrm{D}_4^2}\left(\mathrm{D}_3^2 \mathrm{x}\right) - \mathrm{x} + \operatorname{atan}\left(\left(\mathrm{D}_5^2 + \mathrm{D}_6^2 \mathrm{x}\right)\operatorname{atan}\left(\mathrm{D}_7^2 \mathrm{x}^2\right)\right). \tag{18}$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 3, а точность аппроксимаций приведена в таблице 4. Оказалось, что наиболее

точная аппроксимация по скорости появляется при разбиении на три области: ближнюю к L_1, среднюю и дальнюю.

Таблица 3

Коэффициенты аппроксимации семейства L1

N	C^2	C^3	C^4	D^2
1	8.404186E+00	2.191625E-01	3.552252E-01	2.694211E+00
2	1.556296E+02	1.554055E+00	2.026058E+00	1.028160E+00
3	1.178488E+00	1.320728E+00	9.943834E-01	3.226200E+01
4	4.260669E+02	3.282971E-02	2.498496E+00	3.399058E+00
5	2.325847E+02	9.931735E-01	9.170297E-02	1.992172E-01
6				3.749951E+00
7				4.157718E+01

Таблица 4

Ошибка аппроксимации параметров семейства L1

Параметр		Среднеквадратическая ошибка
v_y	$0 \le s < 0.021$	1.5E-05
	$0.021 \le s < 0.119$	4.5E-05
	$0.119 \le s$	2.8E-06
T		4.5E-03

Для демонстрации качества аппроксимации, приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними: рис. 5. Из графиков видно, что наиболее сложной является средняя область.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с некоторым шагом по s и нанесём на график. График слева на рис. 6 демонстрирует получившиеся траектории и невязку через период. График справа на рис. 6 показывает, как невязка ведёт себя в различных областях аппроксимации.

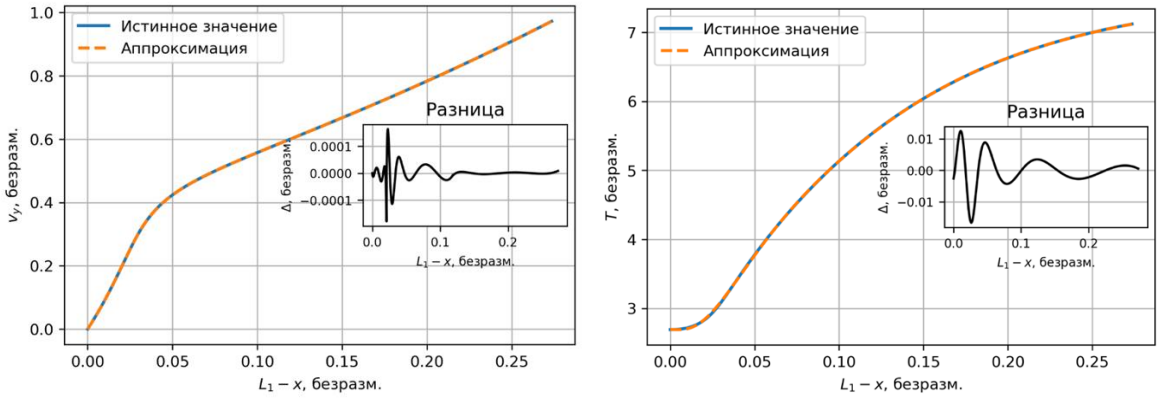

Рис. 5. Аппроксимация v_y (слева) и T (справа) в семействе L1

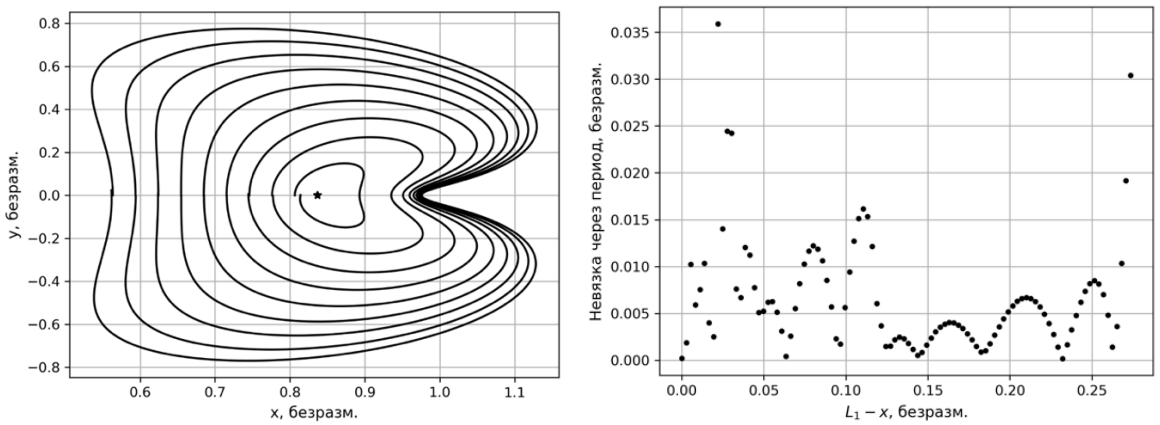

Рис. 6. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) через период в семействе L1. Звёздочкой показано положение L_1

Семейство L2

Семейство L2 представляет собой плоские орбиты Ляпунова — двумерные периодические решения вокруг неустойчивой точки L_2, лежащие в плоскости движения первичных тел (плоскости Oxy). Эти орбиты имеют симметрию относительно оси x. Для данного семейства перейдём к другой переменной

$$\mathrm{q} = x - L_2. \tag{19}$$

С такой заменой вектор начальных условий примет вид

$$p = [q - L_2, 0, 0, v_y(s), T(s)]^{\top}. \tag{20}$$

Построим семейство L2 численно, с помощью продолжения по параметру q, после чего аппроксимируем методом символьной регрессии:

$$v_y = \begin{cases} \exp\left(q\left(C_2^5 + q\left(C_3^5 + \cos\left(\frac{C_4^5}{-C_5^5 + q}\right)\right)\right)\right)^q \frac{q}{-C_1^5 + 4q}, 0 \le q < 0.039 \\ \left(C_1^6 + C_2^6 e^{\sin\left(\frac{C_3^6}{q}\right)} - C_4^6 q^3 - C_5^6 q\left(C_6^6 + C_7^6 e^{\sin\left(\frac{-C_8^6 + C_9^6 q}{q}\right)} + q\right)\right)\frac{1}{q^2}, 0.039 \le q < 0.243 \\ C_1^7 - C_3^7 q - \cos\left(q^2(C_2^7 + C_3^7 \operatorname{atan} q)\operatorname{atan}\left((q - C_2^7)(C_4^7 + C_5^7 \operatorname{atan} q)\log q\right)\right), 0.243 \le q \end{cases} \quad (21)$$

$$T = D_1^3 + D_2^3 e^{-\frac{D_3^3}{\tanh(q)}} + D_4^3 \tanh\left(\tanh\left(D_5^3 - \frac{D_6^3}{q}\right)\right) + q. \quad (22)$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 5, а точность аппроксимаций приведена в таблице 6. Как и в случае семейства L1, наиболее точная аппроксимация по скорости появляется при разбиении на три области: ближнюю к L_2, среднюю и дальнюю.

Таблица 5

Коэффициенты аппроксимации семейства L2

N	C^5	C^6	C^7	D^2
1	4.969901E-01	3.739358E-04	6.302827E-01	3.683467E+00
2	4.699614E-01	9.863004E-06	3.300813E-01	7.025446E+00
3	2.062117E+00	3.392082E-01	1.438803E+00	1.721130E-01
4	4.431504E-01	1.462502E+00	1.790230E+00	4.085631E-01
5	7.126780E-02	3.512677E-01	9.308737E-01	1.980519E+00
6		1.341586E-02		1.137953E-01
7		2.807831E-05		
8		7.654842E-01		
9		3.897699E-01		

Таблица 6

Ошибка аппроксимации параметров семейства L2

Параметр		Среднеквадратическая ошибка
v_y	$0 \le q < 0.039$	3.0E-05
	$0.039 \le q < 0.243$	3.4E-05
	$0.243 \le q$	1.1E-07
T		2.8E-03

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними (рис. 7). Из графиков видно, что наиболее сложной является средняя область.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с некоторым шагом по q и нанесём на график. График слева на рис. 8 демонстрирует получившиеся траектории, а также невязку через период. График справа на рис. 8 показывает, как невязка ведёт себя в различных областях аппроксимации.

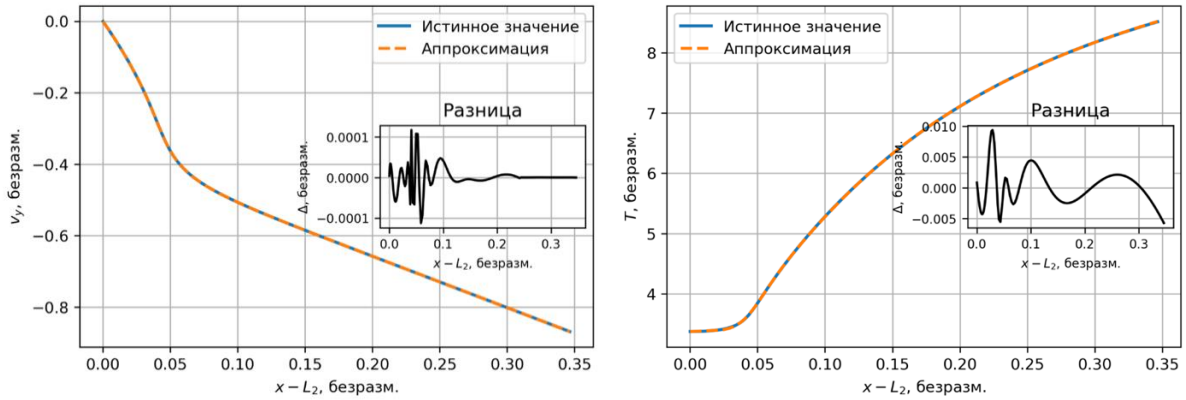

Рис. 7. Аппроксимация v_y (слева) и T (справа) в семействе L2

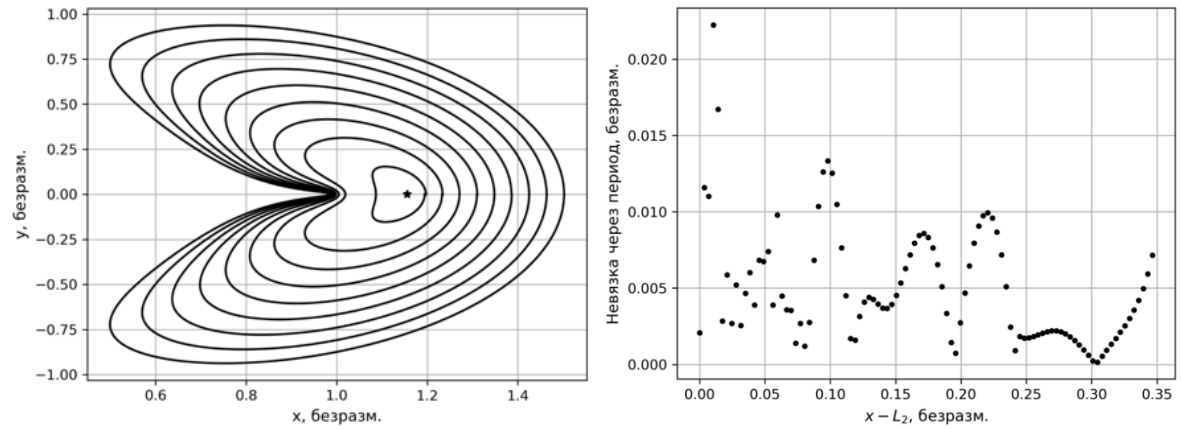

Рис. 8. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) через период в семействе L2. Звёздочкой показано положение L_2

Семейство L3

Семейство L3 представляет собой плоские орбиты Ляпунова — двумерные периодические решения вокруг неустойчивой точки L_3, лежащие в плоскости движения первичных тел (плоскости Oxy). Эти орбиты имеют симметрию относительно оси x. Данное семейство устроено значительно проще, чем L1 или L2. Это связано с тем, что орбиты вблизи L_3 имеют большие периоды и меньшую неустойчивость. Вектор начальных условий принимает вид

$$p = [x, 0{,}0, v_y(x), T(x)]^{\top}. \tag{23}$$

Построим семейство L3 численно, с помощью продолжения по параметру x, после чего аппроксимируем методом символьной регрессии:

$$\mathrm{v_y} = \left(-\mathrm{C_1^8} - \mathrm{x}\right)\left(\mathrm{C_2^8} + \frac{\mathrm{C_3^8}}{\mathrm{x^2}} + \frac{\mathrm{C_4^8}}{\mathrm{x^2}\cos\left(\mathrm{C_5^8} + \mathrm{x}\right)} - \frac{\mathrm{C_6^8}\cos(\mathrm{x^2})}{\mathrm{x}}\right), \tag{24}$$

$$\mathrm{T} = \log\left(\mathrm{D_1^3 e}^{\sin^{-\mathrm{D_4^3}}\left(\mathrm{D_2^3} - \frac{\mathrm{D_3^3}}{\mathrm{x}} + \mathrm{x}\right)} - \mathrm{x} + \mathrm{e}^{\cos\left(\mathrm{D_5^3} - \mathrm{x^2}\right)}\right). \tag{25}$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 7, а точность аппроксимаций приведена в таблице 8. В отличие от L1 и L2 разбиение на три области не понадобилось.

Таблица 7

Коэффициенты аппроксимации семейства L3

N	C^7	D^3
1	1.004786E+00	1.841230E+02
2	1.864200E+00	1.351732E+00
3	5.944614E-02	1.339348E+00
4	2.202565E-02	2.011938E-02
5	4.680363E-01	3.977354E+00
6	1.035400E-01	

Таблица 8

Ошибка аппроксимации параметров семейства L3

Параметр	Среднеквадратическая ошибка
v_y	4.5E-04
T	9.7E-05

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними (рис. 9).

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с постоянным шагом по x и нанесём на график. График слева на рис. 10 демонстрирует получившиеся траектории, а также невязку через период. График справа на рис. 10 показывает, что невязка ведёт себя периодическим образом.

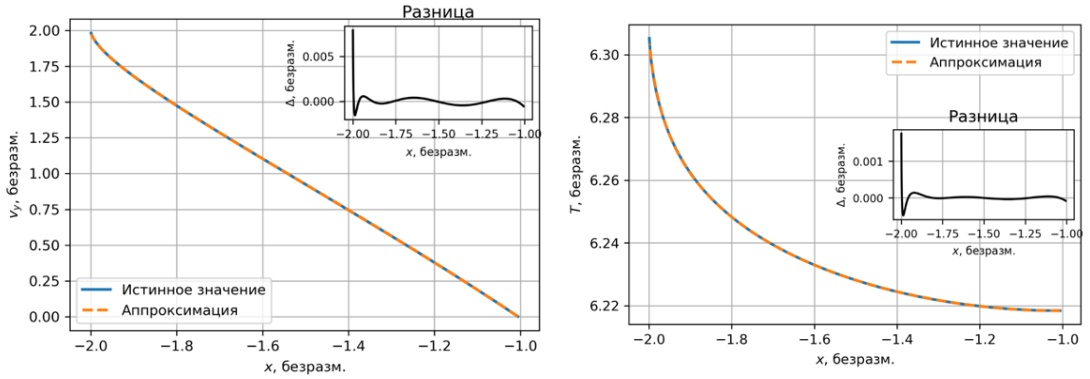

Рис. 9. Аппроксимация v_y (слева) и T (справа) в семействе L_3

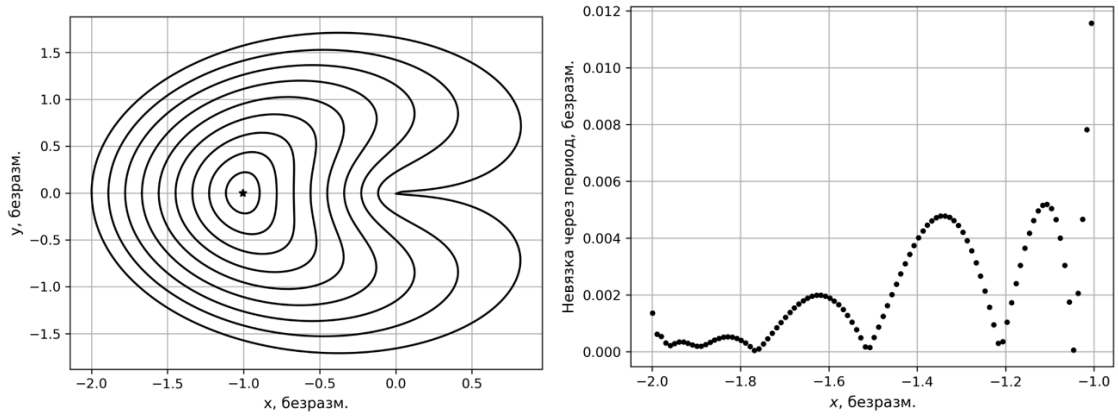

Рис. 10. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) через период в семействе L_3. Звёздочкой показано положение L_3

Семейства L4-L5

Треугольные точки либрации L_4 и L_5 обладают принципиально иной локальной динамикой по сравнению с коллинеарными точками. При значении параметра массы $\mu = 0.01215$ (система Земля-Луна) эти точки линейно устойчивы, что приводит к существованию долгопериодических орбит.

Согласно классификации Doedel [31], долгопериодические семейства орбит вблизи треугольных точек обозначаются как L4 и L5. Эти семейства характеризуются сложной структурой с множественными бифуркациями и переходами между различными типами движения. Параметризация семейства L5 осуществляется через параметр a, связанный с амплитудой колебаний и константой Якоби.

$$x = \cos(a + \pi/3) - \mu, \tag{26}$$

$$y = -sin(a + \pi/3). \tag{27}$$

Таким образом, вектор начальных условий принимает вид

$$p = [x(a), y(a), v_x(a), v_y(a), T(a)]^{\top}. \tag{28}$$

Построим семейство L5 численно, с помощью продолжения по параметру a. Стоит отметить, что семейство L4 является симметричным и достаточно заменить знаки для y-компонент. Аппроксимируем семейство L5 методом символьной регрессии:

$$v_x = \begin{cases} (-B_1^1 - B_2^1 \log(a) - B_3^1 a)\cos\left(B_4^1 a^{B_5^1}\right), 0 < a < 0.5 \\ \dfrac{-B_2^2 \cos\left((a^2)^{B_1^2}\right) + (B_3^2 + B_4^2 \log(a))\sin\left(\dfrac{B_5^2}{a}\right)}{\cos\left((a^2)^{B_1^2}\right)}, 0.5 \le a < 1.08 \\ a^a\left(B_1^3 + B_2^3 \exp\left(B_3^3 a^{-B_4^3} - B_5^3 a^{-B_6^3} + \dfrac{a^{-B_4^3}\sin(B_8^3 a)}{\sin(a^2)\sin\left(a^{B_7^3}\right)}\right)\right), 1.08 \le a < 1.7 \\ \left(B_1^4 + \log(a)^{B_2^4}\right)\left(B_3^4 + B_4^4 e^{a^a} - B_5^4\cos(B_6^4 a) - B_7^4\cos(B_8^4 + B_9^4 a)\right)\dfrac{1}{a}, 1.7 \le a < 2.8 \\ B_1^5 - \dfrac{B_2^5 \log(a)\sin(a)}{\sin\left(B_3^5 - a^a\right)} - \dfrac{B_4^5 \log(a)\sin^2(a)}{\sin(a^a)\sin\left(B_3^5 - a^a\right)} - \sin(a), 2.8 \le a < 2.81 \end{cases}, \quad (29)$$

$$v_y = \begin{cases} a(C_1^9 + C_2^9 a\cos(C_3^9 - C_4^9 a)), 0 < a < 0.5 \\ C_1^{10} - C_2^{10}(C_3^{10} a)^a - C_4^{10}\cos(a^a), 0.5 \le a < 1.08 \\ C_1^{11} + C_2^{11}\left(a + \log\left(\sin\left(a^{C_3^{11}}\right)\right) - \exp\left(\dfrac{C_4^{11}\cos\left(\dfrac{C_6^{11}}{C_7^{11} + a}\right)}{a\sin\left(\dfrac{C_5^{11}}{a}\right)} + \cos(C_8^{11} a)\right)\right), 1.08 \le a < 1.7 \\ -C_1^{12} + a(C_2^{12} a + (C_3^{12} + C_4^{12} e^a - C_5^{12} a)\cos(a)), 1.7 \le a < 2.8 \\ -C_1^{13} + \dfrac{C_2^{13}}{\sin(2a^2)} - C_3^{13}\sin((C_4^{13} + a)^a), 2.8 \le a < 2.81 \end{cases}, \quad (30)$$

$$T = \begin{cases} D_1^4 + a^{D_2^4}(D_3^4 - D_4^4 a + D_5^4 a^a \cos(D_6^4 a)), 0 < a < 0.5 \\ D_1^5 + D_3^5 e^{\cos\left(D_4^5 a^{D_5^5}\right)} + a - \cos(a) - \cos\left(a\left(D_2^5 + a\right)\right) + \cos\left(D_6^5 + D_7^5 a\right), 0.5 \le a < 1.08 \\ D_1^6 - D_5^6 \sin^a\left(\dfrac{D_6^6}{a}\right)\sin\left(D_7^6\left(a(D_8^6 + a)\right)^{-D_9^6}\right) + e^{\sin\left(D_2^6 - D_3^6 a^{-D_4^6}\right)}, 1.08 \le a < 1.7 \\ D_1^7 + \log\left(-D_4^7 (e^a)^{-D_5^7} + (-D_2^7 + a)^{-D_3^7}\right), 1.7 \le a < 2.8 \\ D_3^8 \sin(D_4^8 a)\sin\left(a(D_5^8 + a)\right) + a(D_1^8 - D_2^8 a), 2.8 \le a < 2.81 \end{cases}. \quad (31)$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 9, таблице 10 и таблице 11, а точность аппроксимаций приведена в таблице 12. Ввиду особой сложности данного семейства потребовалось разбиение на 5 разных областей. Области выбраны эвристически из нулей первой или второй производной отдельно взятых функций.

Таблица 9

Коэффициенты аппроксимации семейства L5

N	B^1	B^2	B^3	B^4	B^5
1	1.466297E-3	8.824805E-1	1.366394E-2	3.478206E-2	1.340360E+0
2	3.111248E-4	1.310821E-3	1.053996E-1	2.547241E+0	9.508306E-1
3	2.146999E-2	8.037479E-3	2.559548E+0	1.989828E+0	6.052962E-3
4	4.205466E+0	2.530322E-2	1.642814E+1	4.638909E-10	1.116718E+0
5	2.451134E+0	1.155290E+0	8.104014E+0	2.532799E-4	
6			8.714068E+0	1.401315E+1	
7			2.022637E+0	6.281246E-3	
8			2.434104E+1	5.962229E-1	
9				6.440819E+0	

Таблица 10

Коэффициенты аппроксимации семейства L5

N	D^4	D^5	D^6	D^7	D^8
1	2.102747E+1	2.296406E+1	2.351372E+1	2.673784E+1	1.913393E+1
2	1.972351E+0	1.954184E-1	2.177210E+0	5.546686E-2	3.605902E+0
3	1.133891E+0	2.820783E-1	3.978050E+0	1.404871E+0	1.253294E-2
4	9.478648E-1	4.124223E+0	5.472219E+0	2.998199E+9	9.197821E+2
5	7.982107E-1	1.721417E+0	6.516869E-2	1.655932E+1	1.913860E+1
6	6.512141E+0	9.183349E-1	5.605160E+0		
7		4.032690E+0	5.096846E+1		
8			6.610624E-1		
9			9.646870E-1		

Таблица 11

Коэффициенты аппроксимации семейства L5

N	C^9	C^{10}	C^{11}	C^{12}	C^{13}
1	4.668790E-2	1.874556E+0	1.393939E-1	5.814757E-1	1.990490E-1
2	5.732658E-2	1.678986E+0	4.186942E-2	3.120998E-1	1.974942E-5
3	2.375207E+0	7.340692E-1	1.028780E+0	5.608863E-1	1.611498E-2
4	3.882209E+0	1.080622E+0	1.598181E-2	2.663058E-2	4.091626E-1
5			5.726176E+0	7.542186E-2	
6			5.167705E+1		
7			3.955020E-2		
8			5.726341E+0		

Таблица 12

Ошибка аппроксимации параметров семейства L5

Параметр		Среднеквадратическая ошибка
v_y	$0 \leq a < 0.5$	1.1E-05
	$0.5 \leq a < 1.08$	2.4E-05
	$1.08 \leq a < 1.7$	6.9E-05
	$1.7 \leq a < 2.8$	3.5E-05
	$2.8 \leq a < 2.81$	2.8E-05
v_y	$0 \leq a < 0.5$	7.3E-06
	$0.5 \leq a < 1.08$	1.9E-04
	$1.08 \leq a < 1.7$	6.2E-05
	$1.7 \leq a < 2.8$	5.8E-05
	$2.8 \leq a < 2.81$	2.7E-06
T	$0 \leq a < 0.5$	6.9E-05
	$0.5 \leq a < 1.08$	7.4E-03
	$1.08 \leq a < 1.7$	1.4E-03
	$1.7 \leq a < 2.8$	7.7E-04
	$2.8 \leq a < 2.81$	4.7E-05

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними: рис. 11 и рис. 12.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с постоянным шагом по a и нанесём на график. График слева на рис. 13 демонстрирует получившиеся траектории. Стоит отметить высокое качество получившихся аппроксимаций, хотя это потребовало использования уравнений с более высокой сложностью, а также невязку через период. График справа на рис. 13 показывает, что невязка ведёт себя в разных областях радикально разным образом. В близких к треугольной точке либрации областях невязка на порядок меньше.

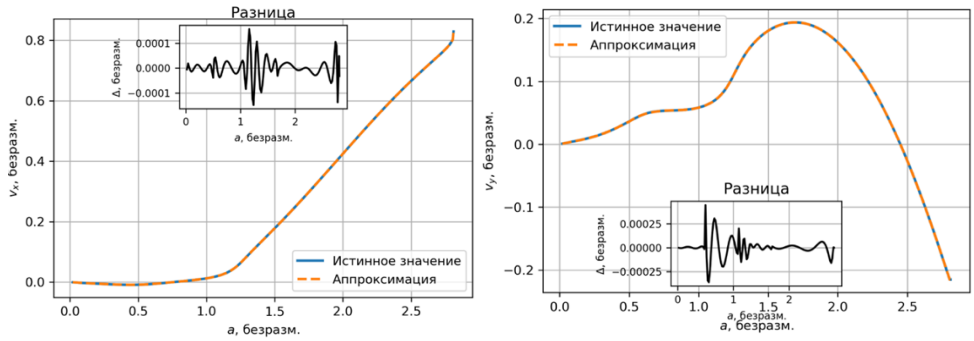

Рис. 11. Аппроксимация v_x (слева) и v_y (справа) в семействе L5

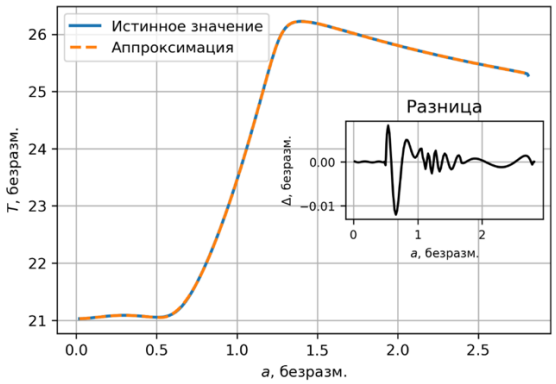

Рис. 12. Аппроксимация T в семействе L5

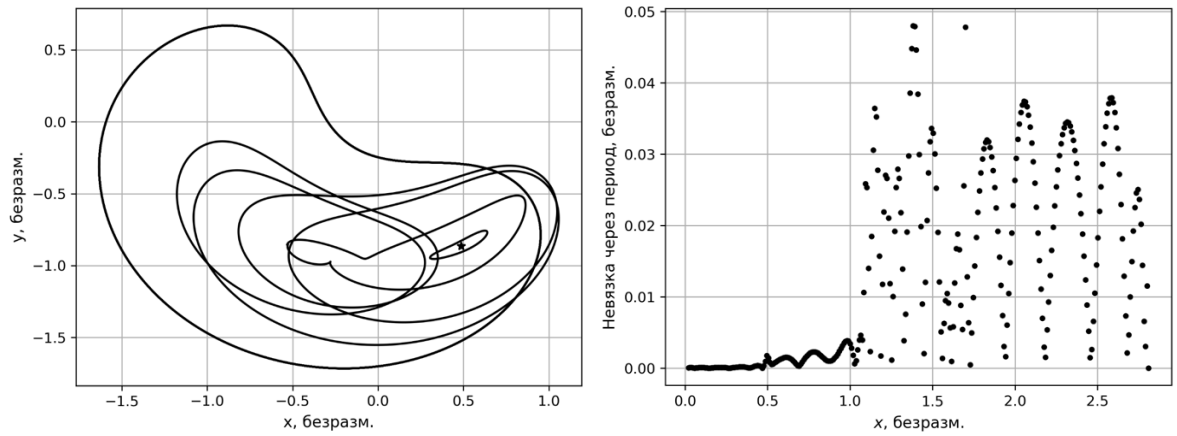

Рис. 13. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) через период в семействе L5. Звёздочкой показано положение L_5

Семейство S3

Семейство S3 в классификации Doedel et al. [31] представляет собой специальный класс симметричных орбит, связанных с треугольными точками либрации L_4 и L_5. Эти орбиты возникают из бифуркаций длиннопериодических орбит L4 и L5 вблизи треугольных точек. Стоит отметить, что семейства типов S1 и S2 также существуют, но связаны с намного большими значениями параметра μ, чем можно встретить в Солнечной системе. Параметризация

семейства S3 осуществляется через параметр a, связанный с амплитудой колебаний и константой Якоби.

$$\mathrm{x} = \cos(\mathrm{a} + \pi/3) - \mu, \tag{32}$$

$$y = -\sin(a + \pi/3). \tag{33}$$

В отличие от прочих аппроксимаций параметр μ также выступает в роли варьируемого параметра. Это возможно благодаря значительно меньшей чувствительности орбит данного типа. Таким образом, вектор начальных условий принимает вид

$$p = [x(a,\mu), y(a), v_x(a,\mu), v_y(a,\mu), T(a,\mu)]^{\mathrm{T}}. \tag{34}$$

Построим семейство S3 численно с помощью продолжения по параметрам a и μ. Аппроксимируем семейство методом символьной регрессии:

$$v_x = -\mathrm{a}(\mathrm{B}_1^6 \cos(\mathrm{B}_2^6 + \mathrm{B}_3^6 \mathrm{a}) + \left(-\mathrm{B}_4^6 \cos\left(\mathrm{B}_5^{6^{\mathrm{a}}} + \log(\mathrm{a})\right) + \mu \cos\left(\mathrm{B}_6^{6^{\mathrm{a}}} - \log(\mathrm{a})\right)\right) \sin(\mathrm{B}_7^6 + \mathrm{a})), \tag{35}$$

$$\mathrm{v_y} = \mathrm{a}\left(\mathrm{C}_1^{14} + \mathrm{C}_2^{14} \mathrm{e}^{\mathrm{C}_3^{14}\mathrm{a}} - \mathrm{C}_4^{14}\mu\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{C}_3^{14}\mathrm{a}} \cos\left(\mathrm{C}_5^{14} + \mathrm{C}_6^{14}\mathrm{a}\mu - \mathrm{a}\right), \tag{36}$$

$$\mathrm{T} = \mu\left(\pi + \frac{8\pi}{5}\sin\left(\mathrm{a} + \frac{3\pi}{10}\right) + \frac{29\pi}{2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{a}} + \sin\left(\mu\frac{111\pi}{4}\right)\right)}\right)\cos\left(\mathrm{e}^{-21\pi\mu}\right) + 2\pi. \tag{37}$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 13, а точность аппроксимаций приведена в таблице 14. Важно заметить, что при $\mu = 0$ период становится строго равен 2π, что вместе с коэффициентами в виде дробей демонстрирует высокое качество аппроксимации. Ввиду двумерности аппроксимации точность ниже, чем у других аппроксимаций.

Таблица 13

Коэффициенты аппроксимации семейства S3

N	B^6	C^{14}
1	2.601493E-1	4.158852E-1
2	5.406951E+0	2.631193E-1
3	1.274147E+0	1.466575E+0
4	4.124474E-1	6.557952E+0
5	2.213025E-1	9.320512E-1

N	B^6	C^{14}
6	2.293713E-1	5.028553E-1
	2.888622E-2	

Таблица 14

Ошибка аппроксимации параметров семейства S3

Параметр	Среднеквадратическая ошибка
v_x	1.1E-03
v_y	2.7E-03
T	1.3E-02

Для демонстрации качества аппроксимации приведём двумерные графики функций вместе с их аппроксимацией и двумерным вставным графиком с разницей между ними: рис. 14 и рис. 15.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с постоянным шагом по a при постоянном μ (для примера взят Меркурий) и нанесём на график. График слева на рис. 16 демонстрирует получившиеся траектории. График справа на рис. 16 показывает, что невязка ведёт себя периодическим образом при постоянном параметре μ. Рис. 17 демонстрирует полную картину графика невязки через период.

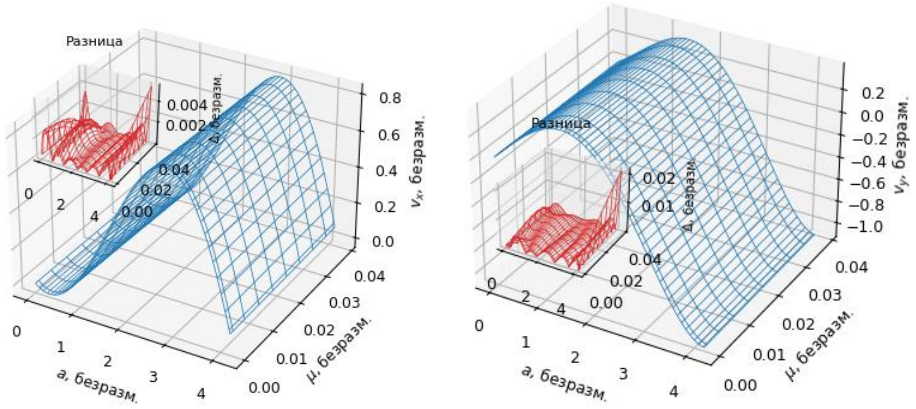

Рис. 14. Аппроксимация v_x (слева) и v_y (справа) в семействе S3

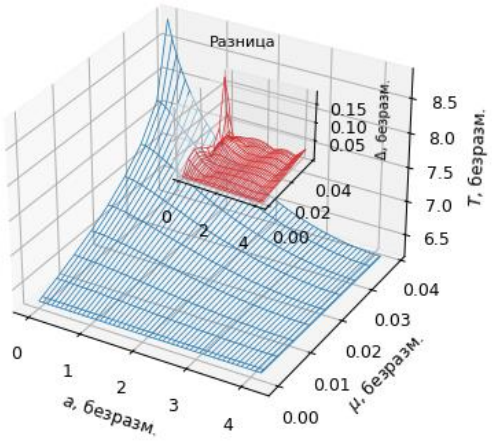

Рис. 15. Аппроксимация T в семействе S3

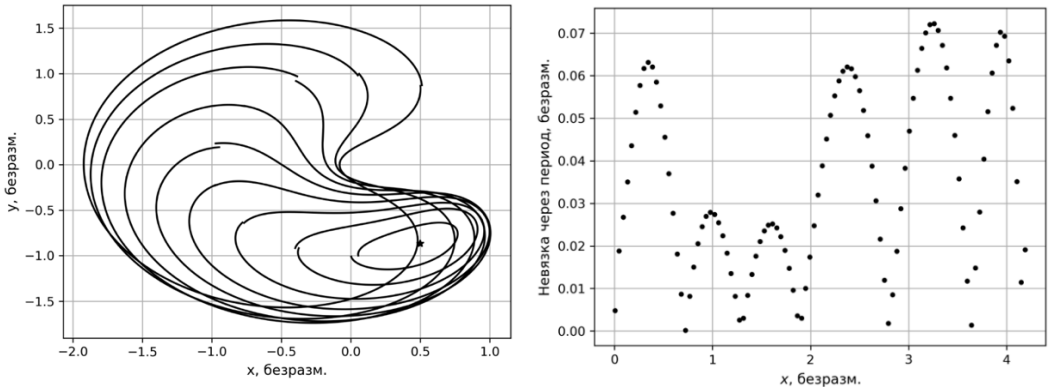

Рис. 16. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) через период в семействе S3. Звёздочкой показано положение L_5

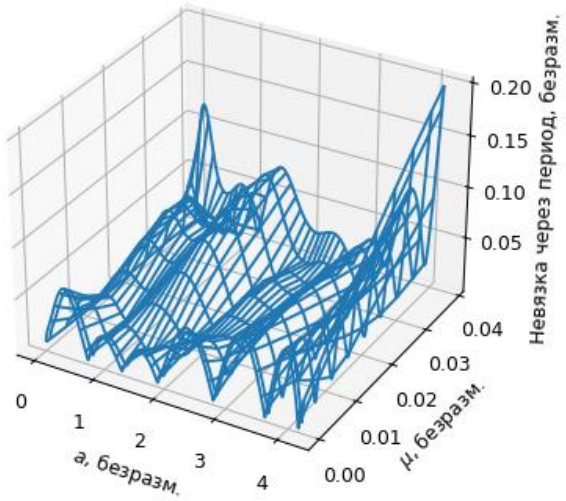

Рис. 17. Ошибка аппроксимации через период в семействе S3

Семейство D1

Семейство D1 в классификации Doedel et al.[31] относится к классу удалённых периодических орбит, охватывающих систему первичных тел. Характерной особенностью является совершение двух оборотов за период. Вектор начальных условий принимает вид

$$p = [x, 0,0, v_y(x), T(x)]^{\top}. \tag{38}$$

Построим семейство D1 численно с помощью продолжения по параметру x. Аппроксимируем семейство D1 методом символьной регрессии:

$$\mathrm{v_y} = \begin{cases} \left(-\mathrm{C}_1^{15} + \mathrm{C}_2^{15}\sin\left(\log x\right) + \mathrm{x}\left(-\mathrm{C}_3^{15} + \mathrm{C}_4^{15}\sin\left(\left(\mathrm{x} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{C}_5^{15}+\log(\mathrm{x})}{\mathrm{x}}}\right)\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right) + \mathrm{C}_6^{15}\log x - \mathrm{x}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{x}}, 0.087 < \mathrm{a} < 0.225 \\ x^{-C_1^{16}}\left(-C_2^{16} + \left(-C_3^{16} + x\right)atan\left(x\left(-C_4^{16}\sin\left(\frac{C_5^{16}}{x} - e^{C_6^{16}x^2}\right) - 1.0\right)\right)\right), 0.225 \le a < 0.786 \\ -\mathrm{C}_1^{17} + \frac{\mathrm{C}_2^{17}}{\log\left(atan(\mathrm{x})\right)} + \frac{\mathrm{C}_3^{17}}{\mathrm{C}_4^{17} + \mathrm{C}_5^{17}\log(\mathrm{x})} - \frac{\mathrm{C}_6^{17}}{\mathrm{x}}, 0.786 \le \mathrm{a} < 0.97 \end{cases} \tag{39}$$

$$\mathrm{T} = \left(\mathrm{D}_2^9 + \mathrm{D}_5^9\mathrm{atan}\left(\mathrm{atan}\left(\mathrm{D}_6^9\mathrm{x}^{\mathrm{D}_7^9}\right)\right) + \mathrm{x}^{\mathrm{D}_3^9} + \mathrm{x}^{\mathrm{D}_4^9}\right)\frac{1}{\cos\left(\mathrm{x}^{\mathrm{D}_1^9}\right)}. \tag{40}$$

Коэффициенты аппроксимации в данных выражениях приведены в таблице 15, а точность аппроксимаций приведена в таблице 16. Аппроксимацию потребовалось разбить на три области, чтобы добиться более высокой точности.

Таблица 15

Коэффициенты аппроксимации семейства D1

N	C^{15}	C^{16}	C^{17}	D^9
1	1.135374E-1	4.258335E-1	1.329795E+0	3.409960E+1
2	3.991896E-2	1.600305E+0	8.821651E-2	6.317418E+0
3	9.106296E-1	3.905004E-1	6.585475E-1	1.989189E+1
4	4.534061E-5	2.890171E-2	8.026690E-1	5.910087E+0
5	6.259935E-1	6.476194E-1	9.236741E+1	1.625496E-1
6	7.590430E-1	2.385067E+0	3.852754E-1	1.326491E+0
7				1.750301E+0

Таблица 16

Ошибка аппроксимации параметров семейства D1

Параметр		Среднеквадратическая ошибка
v_y	$0.087 \le \mathrm{x} < 0.225$	1.0E-06
	$0.225 \le x < 0.786$	1.1E-04
	$0.786 \le x < 0.97$	8.1E-05
T		9.8E-04

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними: рис. 18.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с постоянным шагом по a и нанесём на график. График слева на рис. 19 демонстрирует получившиеся траектории. Стоит отметить высокое качество получившихся аппроксимаций, хотя это потребовало использовать уравнения с более высокой сложностью. Также посчитаем невязку через период, нанесём точки на график. График справа на рис. 19 показывает, что невязка ведёт себя в разных областях радикально разным образом. В близких к треугольной точке либрации областях невязка на порядок меньше.

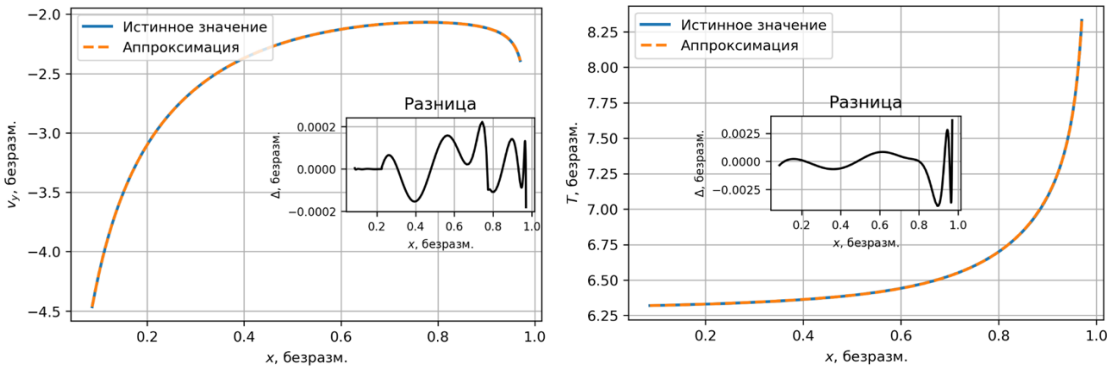

Рис. 18. Аппроксимация v_y (слева) и T (справа) в семействе D1

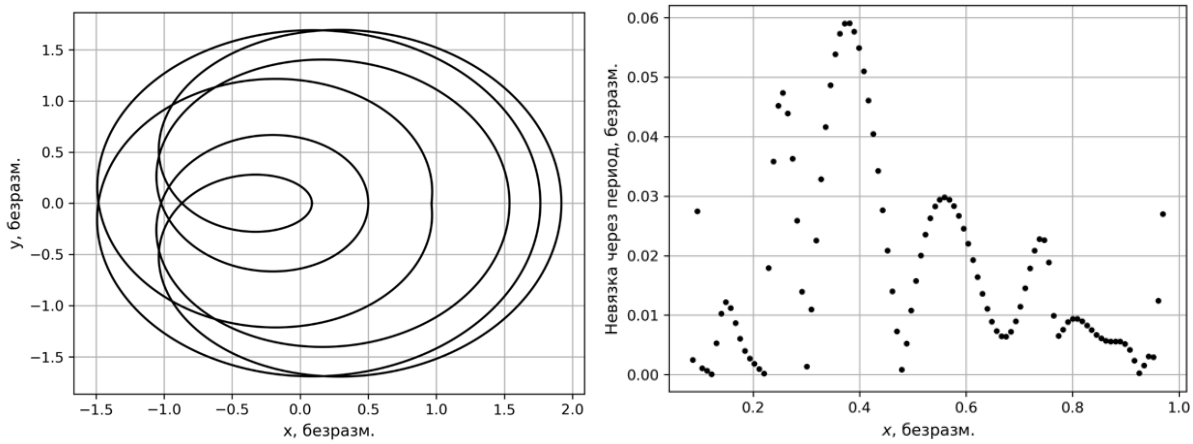

Рис. 19. Аппроксимированные орбиты и ошибка аппроксимации через период в семействе D1.

Семейство C1

Семейство C1 в классификации Doedel et al. [31] считается простым семейством круговых орбит и не рассматривается отдельно. Однако наше численное исследование показало, что это семейство устроено значительно более сложным образом. В качестве параметра семейства используется координата начального положения x. Начальные условия имеют вид

$$p = [x, 0, 0, v_y(x), T(x)]^\top. \quad (41)$$

При построении семейства методом продолжения по параметру обнаруживается, что семейство C1 не является гладким: в ряде значений параметра возникают разрывы, через которые не удаётся провести продолжение решения. Тем не менее все полученные решения принадлежат одному и тому же семейству и соответствуют круговым орбитам вокруг большего тела.

Анализ расположения точек разрыва показывает, что они соответствуют резонансам между угловой скоростью движения третьего тела и угловой скоростью вращающейся системы координат. Для круговой орбиты вокруг большего тела среднее движение приближённо определяется выражением

$$n(x) = \sqrt{\frac{1-\mu}{x^3}}. \tag{42}$$

Численно установлено, что в точках разрыва выполняется соотношение

$$n(x) = \frac{k+1}{k}, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{43}$$

Таким образом, семейство $C1$ содержит последовательность резонансов первого порядка

$$2{:}\,1,\ 3{:}\,2,\ 4{:}\,3, 5{:}\,4, 6{:}\,5. \tag{44}$$

Физически это означает, что третье тело совершает $k+1$ оборотов вокруг большего тела за время, в течение которого система координат совершает k оборотов. В синодической системе координат этому соответствует замыкание орбиты после целого числа оборотов:

$$\frac{1}{n-1} = \mathrm{k}. \tag{45}$$

Аналитическое выражение для положения резонансных точек имеет вид

$$x^{(k)} = \left(\frac{1-\mu}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^2}\right)^{1/3}. \tag{46}$$

Численно найденные значения параметра x в точках резонанса приведены в таблице 17.

Таблица 17

Резонансная структура семейства C1

Обозначение	Резонанс	Теоретическое значение	Численно найденное значение
$x_{2:1}$	2:1	6.299599E-1	6.277300E-1
$x_{3:2}$	3:2	7.631421E-1	7.742918E-1
$x_{4:3}$	4:3	8.254810E-1	8.374220E-1
$x_{5:4}$	5:4	8.617730E-1	8.666462E-1
$x_{6:5}$	6:5	8.855479E-1	8.832851E-1

Аппроксимация семейства, как и в других случаях, выполнена с помощью метода символьной регрессии. Для начала введём опорные значения, относительно которых будем делать поправки:

$$v_0^{(C1)}(x) = \sqrt{\frac{1-\mu}{x+\mu}} - (x+\mu), \tag{47}$$

$$T_0^{(C1)}(x) = \frac{2\pi(x+\mu)}{\sqrt{\frac{1-\mu}{x+\mu}} - (x+\mu)}. \tag{48}$$

После использования метода символьной регрессии получилась следующая формула:

$$v_y^{(C1)}(x) = v_0^{(C1)}(x) + \Delta v^{(C1)}(x),$$

$$\Delta v^{(C1)}(x) = C_1^{18}x + \frac{(x - C_2^{18})\left(\frac{C_3^{18}x}{\cos\left(C_4^{18} - \frac{C_5^{18}}{\ln x}\right)} - C_6^{18}\right)\left(\sin\left(\frac{C_7^{18}}{\ln x}\right) + C_8^{18}\right)}{x - C_9^{18}}. \tag{49}$$

Таблица 18

Коэффициенты аппроксимации скорости семейства C1

N	C_N^{18}
1	4.708495E-6
2	2.131990E-1
3	1.104409E-5
4	2.495418E-1
5	2.062851E+0
6	4.209950E-7
7	2.117359E+0
8	1.402351E-2
9	9.299470E-1

Аппроксимация периода записывается кусочно:

$$T^{(C1)}(x) = \begin{cases} T_0^{(C1)} + \Delta T_1^{(C1)}(x), & x < x_{2:1}, \\ T_0^{(C1)} + \Delta T_2^{(C1)}(x), & x_{2:1} \le x \le x_{4:3}, \\ T_0^{(C1)} + \Delta T_3^{(C1)}(x), & x > x_{4:3}. \end{cases} \quad (50)$$

Для первого участка

$$\Delta T_1^{(C1)}(x) = x^{D_1^{10}}(x - D_2^{10})\left(D_3^{10}\sin\frac{D_4^{10}}{x} + D_5^{10}\right) \times \left(\sin\frac{D_6^{10}x}{x - D_7^{10}} - D_8^{10}\right)\frac{\cos(D_9^{10}x)}{\sin(D_4^{10}/x)}. \quad (51)$$

Для второго участка

$$\Delta T_2^{(C1)}(x) = [D_1^{11}(\sin(T_0\sin x) - D_2^{11})^2\cos^2(\cos(2\pi T_0) + D_3^{11}) + \frac{D_4^{11}}{D_6^{11}}\left|\frac{\sin(2\pi T_0)}{T_0\sin(D_5^{11}T_0)}\right| - D_7^{11}]\cos^3 T_0. \quad (52)$$

Для третьего участка

$$\Delta T_3^{(C1)}(x) = (\cos(D_1^{12}T_0) - D_2^{12})^3 \sin T_0 \cos\left(\frac{\sin(D_3^{12}T_0^3 + D_4^{12})}{\cos(\sin T_0)}\right) \times \cos^2\left(D_5^{12} - \frac{\cos(2\pi T_0)}{D_6^{12}}\right). \quad (53)$$

Таблица 19

Коэффициенты аппроксимации периода семейства C1

N	D_N^{10}	D_N^{11}	D_N^{12}
1	1.447737E+1	7.081848E-2	-1.096795E+0
2	7.659898E-1	-5.684899E-1	4.099466E-1
3	6.546419E+0	4.340469E-1	2.733658E+0
4	2.895431E+2	2.488756E-1	1.025320E-1
5	2.467312E+0	-2.359869E-1	1.108534E+0
6	6.098379E+0	-4.659980E-1	-3.684015E-4
7	1.030011E+0	-3.055960E-2	
8	3.106986E-1		
9	7.187014E+2		

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними: рис. 20.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с постоянным шагом по x и нанесём на график. График слева на рис. 21 демонстрирует получившиеся траектории. График справа на рис. 21 демонстрирует, что невязка значительно увеличивается по мере приближения к меньшему телу.

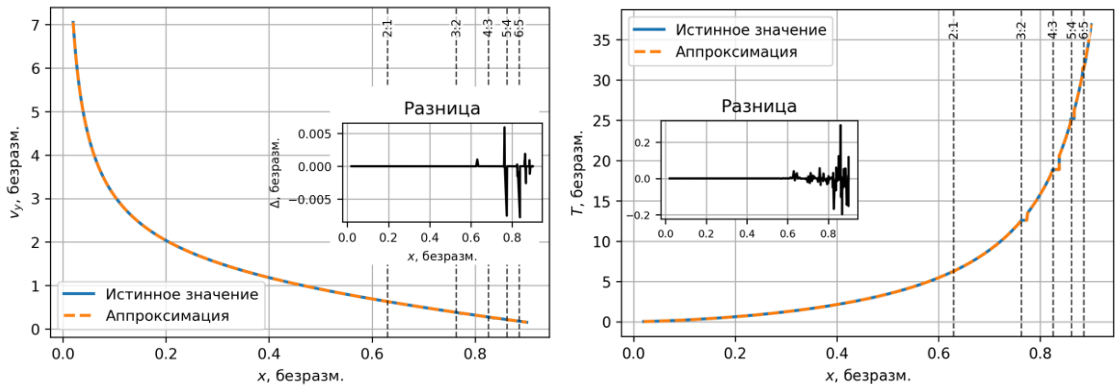

Рис. 20. Аппроксимация v_y (слева) и T (справа) в семействе C1

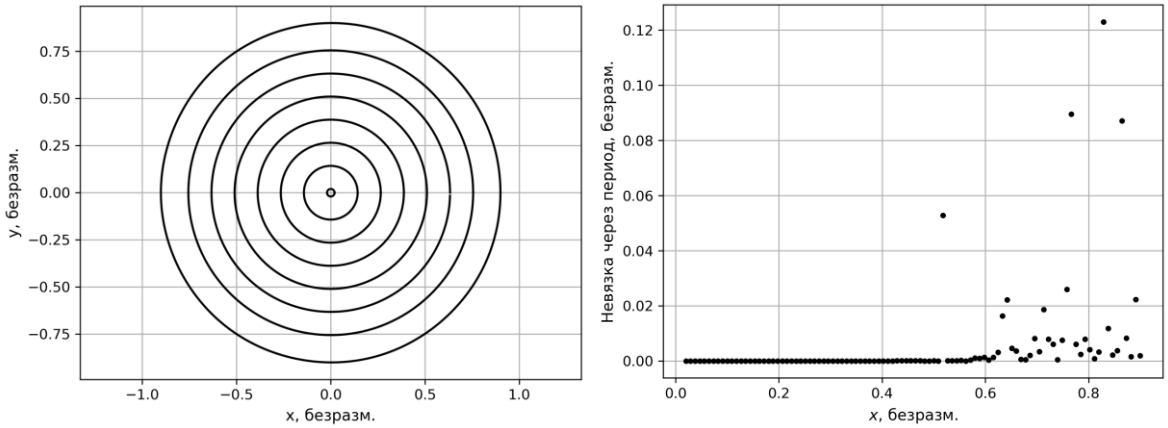

Рис. 21. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) в семействе C1 через период

Семейство C2

Семейство C2 соответствует круговым орбитам, расположенным на значительном удалении от начала координат. В отличие от семейства C1 движение третьего тела в данном случае происходит не вокруг одного из тел системы, а вокруг барицентра системы, и влияние обоих тел становится сопоставимым.

Численный анализ показывает, что орбиты данного семейства имеют характер движения вокруг центра масс, а вклад обоих тел формирует эффективное гравитационное поле, близкое к центральному с суммарной массой системы.

В качестве параметра семейства используется координата начального положения x. Начальные условия задаются в виде

$$p = [x, 0, 0, v_y(x), T(x)]^{\top}. \tag{54}$$

При построении семейства методом продолжения по параметру обнаружились значения x, в окрестности которых структура решений изменяется. Эти точки соответствуют разрывам семейства и не позволяют использовать метод продолжения.

Данные точки связаны с резонансами между угловой скоростью движения третьего тела и угловой скоростью вращающейся системы координат. Для круговой орбиты вокруг барицентра среднее движение приближённо определяется выражением

$$n(x) = x^{-3/2}. \tag{55}$$

Численно установлено, что в точках разрыва выполняется соотношение

$$n(x) = \frac{k}{k+1}, k = 1,2,3,\ldots \tag{56}$$

Таким образом, семейство $C1$ содержит последовательность резонансов первого порядка

$$5{:}\,6,\ 4{:}\,5,\ 3{:}\,4, 2{:}\,3, 1{:}\,2. \tag{57}$$

Физически это означает, что третье тело совершает $k+1$ оборотов вокруг большего тела за время, в течение которого система координат совершает k оборотов. В синодической системе координат этому соответствует замыкание орбиты после целого числа оборотов:

$$\frac{1}{n-1} = k+1. \tag{58}$$

Аналитическое выражение для положения резонансных точек имеет вид

$$x^{(k)} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{2/3}. \tag{59}$$

Численно найденные значения параметра x в точках резонанса приведены в таблице 20.

Таблица 20

Резонансная структура семейства C2

Обозначение	Резонанс	Теоретическое значение	Численно найденное значение
$x_{5:6}$	5:6	1.129243E+0	1.131281E+0
$x_{4:5}$	4:5	1.160397E+0	1.154620E+0
$x_{3:4}$	3:4	1.211414E+0	1.209620E+0
$x_{2:3}$	2:3	1.310371E+0	1.299500E+0
$x_{1:2}$	1:2	1.587401E+0	1.589500E+0

Как и для C1, не все резонансные значения из таблицы являются границами кусочной аппроксимации. Некоторые резонансные значения входят в сами поправочные выражения как характерные точки, тогда как границы ветвей выбираются по интервалам, использованным в формулах скорости и периода.

Как и в случае C1 введём опорные значения:

$$v_0^{(C2)}(x) = x^{-1/2} - x, \tag{60}$$

$$T_0^{(C2)}(x) = \frac{2\pi}{x^{-3/2} - 1}. \tag{61}$$

Аппроксимация скорости имеет кусочный вид:

$$v_y^{(C2)}(x) = \begin{cases} v_0^{(C2)}(x) + \Delta v_1^{(C2)}(x), & x < x_{3:4}, \\ v_0^{(C2)}(x) + \Delta v_2^{(C2)}(x), & x_{3:4} \le x < x_{2:3}, \\ v_0^{(C2)}(x) + \Delta v_3^{(C2)}(x), & x_{2:3} \le x < x_{1:2}, \\ v_0^{(C2)}(x) + \Delta v_4^{(C2)}(x), & x \ge x_{1:2}. \end{cases} \quad (62)$$

Для первого участка

$$\Delta v_1^{(C2)}(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{\left(x-x_{5:6}\right)^{-1}-C_1^{19}}{C_2^{19}}\right)}{\left[\left(x-x_{3:4}\right)^{-1}+\left(C_3^{19}\left(x-x_{4:5}\right)^{-1}-\left(x-x_{5:6}\right)^{-1}\right)C_4^{19}\right]^2}. \quad (63)$$

Для второго участка

$$\begin{aligned} &\Delta v_2^{(C2)}(x) \\ &= C_1^{20}[C_2^{20}(x-x_{2:3})^{-1}(\cos((x-x_{2:3})^{-1}+C_3^{20})-C_4^{20}) \\ &-\frac{\ln\left(\frac{C_5^{20}}{\sqrt{(x-x_{3:4})^{-1}}+C_6^{20}/\cos((x-x_{2:3})^{-2}-C_7^{20})}\right)}{C_8^{20}(x-x_{2:3})^{-1}+\cos((x-x_{2:3})^{-2})}]^3. \end{aligned} \quad (64)$$

Для третьего участка

$$\begin{aligned} \Delta v_3^{(C2)}(x) = &\left((x-x_{1:2})^{-1}-\frac{(x-x_{1:2})^{-1}}{-(x-x_{2:3})^{-2}/C_1^{21}+(x-x_{1:2})^{-1}}\right)\times \\ &-\left(C_2^{21}-C_3^{21}\frac{x}{\left(x-x_{2:3}\right)^{-2}\left(x-x_{1:2}\right)^{-1}}\right)\times \\ &\frac{\left((x-x_{2:3})^{-1}+\left(-C_4^{21}(x-x_{2:3})^{-2}+(x-x_{1:2})^{-1}\right)C_5^{21}\right)-C_6^{21}}{x}. \end{aligned} \quad (65)$$

Для четвёртого участка

$$\Delta v_4^{(C2)}(x) = \frac{C_1^{22}\sin^3 x}{C_2^{22}-x}. \quad (66)$$

Таблица 21

Коэффициенты аппроксимации скорости семейства C2

N	C_N^{19}	C_N^{20}	C_N^{21}	C_N^{22}
1	1.026736E-1	1.270627E-2	-8.153077E-2	3.171908E-7
2	3.677166E-2	6.816478E-3	-4.043180E-7	1.586983E+0
3	-3.521499E-1	1.186075E+0	7.244709E-6	
4	7.631655E-1	1.209138E+0	-7.619614E-1	
5		9.552864E-1	-3.729560E-4	
6		1.089951E-1	1.897596E-6	
7		1.219088E+0		
8		7.238222E-1		

Аппроксимация периода C2 также записывается кусочно. Обозначим

$$s_T = \sin T_0^{(C2)}, c_T = \cos T_0^{(C2)}. \tag{67}$$

Тогда

$$T^{(C2)}(x) = \begin{cases} T_0^{(C2)} + \Delta T_1^{(C2)}(x), & x < x_{3:4}, \\ T_0^{(C2)} + \Delta T_2^{(C2)}(x), & x_{3:4} \le x < x_{2:3}, \\ T_0^{(C2)} + \Delta T_3^{(C2)}(x), & x_{2:3} \le x < x_{1:2}, \\ T_0^{(C2)} + \Delta T_4^{(C2)}(x), & x \ge x_{1:2}. \end{cases} \tag{68}$$

Для первого участка введём

$$u_5 = (x - x_{4:5})^{-1}, u_6 = (x - x_{5:6})^{-1}. \tag{69}$$

Тогда

$$\Delta T_1^{(C2)}(x) = \left(\frac{\sin(u_6 + D_1^{13}) \cos(T_0 + u_5) \cos(u_5 - D_2^{13})}{D_3^{13}} + \cos \frac{D_4^{13}}{x} \right)^2 - D_5^{13} + \frac{D_6^{13}}{\sin(-u_6 - D_7^{13})}. \tag{70}$$

Для второго участка введём

$$d_{23} = x - x_{2:3}, u_5 = d_{23}^{-1}, u_6 = d_{23}^{-2}, u_7 = (x - x_{3:4})^{-1}. \tag{71}$$

Тогда

$$\Delta T_2^{(C2)}(x) = \left[\frac{D_1^{14}(-x+s_T^2)}{u_5+D_2^{14}u_6} + \frac{D_3^{14}\left(D_4^{14}c_T + D_4^{14}\sin\left(D_5^{14}d_{23}+u_5\right)+1\right)^3}{u_7^{3/2}}\right] \times \left(\sin c_T + D_6^{14}\right). \quad (72)$$

Для третьего участка введём

$$d_{23} = x - x_{2:3}, u_5 = d_{23}^{-1}, u_6 = d_{23}^{-2}, u_7 = (x-x_{1:2})^{-1}. \quad (73)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta T_3^{(C2)}(x) = (-c_T &+ u_5)(-D_1^{15}[-T_0\left(-u_7 \right.\\ &\left. + D_2^{15}\left(D_3^{15}c_T + \frac{1}{u_6 + D_4^{15}/s_T}\right)^2\right) \times (s_T D_5^{15} + c_T)\\ &+ u_5] - D_6^{15}) + D_7^{15}.\end{aligned} \quad (74)$$

Для четвёртого участка

$$\Delta T_4^{(C2)}(x) = T_0(c_T + D_1^{16})\frac{D_2^{16}\left(\frac{x}{D_3^{16}} + T_0 + \sin(D_4^{16}s_T) + D_5^{16}\right)^2}{s_T}. \quad (75)$$

Таблица 22

Коэффициенты аппроксимации периода семейства C2

N	D_N^{13}	D_N^{14}	D_N^{15}	D_N^{16}
1	1.133625E+0	-3.485409E-1	-4.455732E-8	1.028288E+0
2	1.415443E+0	3.927675E-3	3.264437E+4	7.782937E-8
3	-6.173846E-1	3.146282E+0	5.534723E-3	5.005733E-1
4	-1.948150E+0	6.824447E-1	5.307582E-1	2.187388E+0
5	8.855390E-2	1.986498E+1	4.979120E+0	2.619868E-1
6	1.403744E-2	6.088008E-1	1.497674E-4	
7	1.177831E+0		1.473375E-3	

Для демонстрации качества аппроксимации приведём графики функций вместе с их аппроксимацией и разницей между ними: рис. 22.

Проинтегрируем аппроксимированные значения вектора начальных условий с постоянным шагом по x и нанесём на график. График слева на рис. 23 демонстрирует получившиеся траектории. График справа на рис. 23 показывает, что невязка значительно увеличивается по мере приближения к меньшему телу.

Общая структура семейств C1 и C2 представлена на рис. 24. Данный рисунок демонстрирует явную асимметричность этих семейств решений и сложную резонансную структуру.

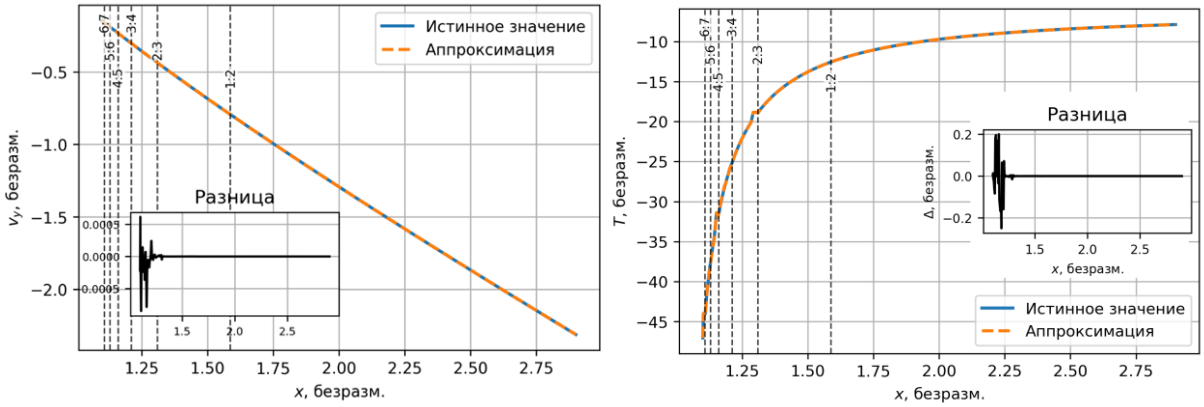

Рис. 22. Аппроксимация v_y (слева) и T (справа) в семействе C2

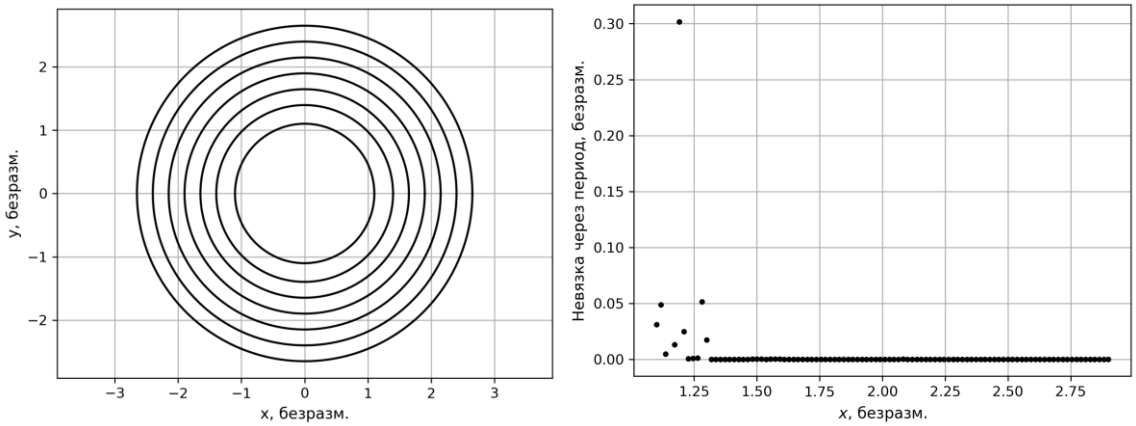

Рис. 23. Аппроксимированные орбиты (слева) и ошибка аппроксимации (справа) через период в семействе C2

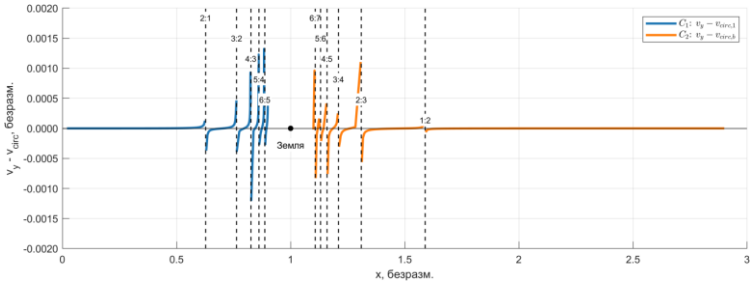

Рис. 24. Общая структура семейств C1 и C2

Заключение

В работе рассмотрена задача построения аналитических аппроксимаций для семейств плоских периодических орбит в круговой ограниченной задаче трёх тел на основе методов символьной регрессии. Исследование охватывает как стационарные решения в виде коллинеарных точек либрации L_1, L_2, L_3, так и ряд семейств периодических орбит различной природы: семейства Ляпунова L1, L2, L3, орбиты вокруг точек L_4 – L_5, семейства S3, D1, а также круговые семейства C1 и C2.

Показано, что символьная регрессия позволяет получать компактные аналитические выражения, аппроксимирующие начальные условия и период орбит с приемлемой точностью на заданных диапазонах параметра. Для простых семейств получены достаточно компактные формулы, в то время как для более сложных случаев для обеспечения точности требуется разбиение области параметра на несколько участков.

Качество аппроксимации оценивалось не только по ошибке приближения отдельных компонент, но и по невязке через период после численного интегрирования уравнений движения. Такой подход позволяет оценить согласованность полученных выражений как приближённого описания периодических решений. Показано, что в большинстве рассмотренных случаев полученные формулы могут использоваться в качестве начальных приближений для дифференциальной коррекции при построении периодических траекторий.

Для круговых семейств C1 и C2 установлено, что они обладают разрывной структурой. Показано, что положения разрывов соответствуют последовательности резонансов первого порядка между угловой скоростью движения третьего тела и угловой скоростью вращающейся системы. Для семейства C1 наблюдается последовательность резонансов вида $(k+1):k$, соответствующая движению вокруг большего тела, тогда как для семейства C2 реализуется последовательность $k:(k+1)$, связанная с движением вокруг барицентра системы.

Полученные результаты показывают, что символьная регрессия может использоваться не только для аппроксимации численных данных, но и как инструмент обнаружения структурных особенностей численно построенных семейств периодических решений.

Представляет интерес дальнейшее развитие подхода на пространственные орбиты, а также построение аппроксимаций, зависящих от параметра массы μ. Отдельного исследования требует выявленная резонансная структура круговых семейств.

Благодарности

Авторы благодарят М.Ю. Овчинникова за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1975. — 799 с.

[2] Суботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. — М.: Наука, 1968. — 800 с.

[3] Szebehely V. Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. — Academic Press, 1967. — 668 p.

[4] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985. — 304 с.

[5] Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. — 312 с.

[6] Howell K.C., Ozimek M.T. Natural and non-natural spacecraft formations near the L1 and L2 libration points in the Sun-Earth/Moon ephemeris system // Dynamical Systems. — 2010. — Vol. 25, No. 2. — P. 149-173.

[7] Whitley R., Martinez R. Options for staging orbits in cislunar space // IEEE Aerospace Conference. — 2016. — P. 1-9.

[8] Davis D.C., et al. Orbit maintenance and navigation of human spacecraft at cislunar near rectilinear halo orbits // AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting. — 2017. — AAS 17-509.

[9] Ивашкин В.Ю., Сихарулидзе Ю.Г. О рациональных схемах полёта к Луне // Космические исследования. — 2000. — Т. 38, № 6. — С. 583-591.

[10] Folta D.C., et al. The ARTEMIS mission design // Acta Astronautica. — 2012. — Vol. 73. — P. 137-150.

[11] Edelbaum T.N. Propulsion requirements for controllable satellites // ARS Journal. — 1961. — Vol. 31, No. 8. — P. 1079-1089.

[12] Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космических аппаратов. — М.: Наука, 1988. — 280 с.

[13] Кардашев Н.С., и др. Обзор научных задач для обсерватории Миллиметрон // Успехи физических наук. — 2014. — Т. 184, № 12. — С. 1319-1352.

[14] Howell K.C. Three-dimensional, periodic, 'halo' orbits // Celestial Mechanics. — 1984. — Vol. 32, No. 1. — P. 53-71.

[15] Richardson D.L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points // Celestial Mechanics. — 1980. — Vol. 22, No. 3. — P. 241-253.

[16] Gómez G., Jorba À., Masdemont J., Simó C. Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Vol. III: Advanced Methods for Collinear Points. — World Scientific, 2001. — 200 p.

[17] Koon W.S., Lo M.W., Marsden J.E., Ross S.D. Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design. — Marsden Books, 2011. — 327 p.

[18] Брюно А.Д., Варин В.П. Периодические решения ограниченной задачи трёх тел при малых μ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2007. — № 34. — 40 с.

[19] Брюно А.Д., Варин В.П. Сложные семейства периодических решений ограниченной задачи трёх тел // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2007. — № 35. — 28 с.

[20] Брюно А.Д. Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трёх тел // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2010. — № 65. — 32 с.

[21] Izzo D., Märtens M., Pan B. A survey on artificial intelligence trends in spacecraft guidance dynamics and control // Astrodynamics. — 2019. — Vol. 3, No. 4. — P. 287-299.

[22] Dachwald B., et al. Trajectory optimization for spacecraft missions using machine learning // Acta Astronautica. — 2019. — Vol. 158. — P. 44-56.

[23] Schmidt M., Lipson H. Distilling free-form natural laws from experimental data // Science. — 2009. — Vol. 324, No. 5923. — P. 81-85.

[24] Символьная регрессия // Машинное обучение (курс лекций, К.В. Воронцов). [Электронный ресурс]. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Символьная_регрессия (дата обращения: 20.02.2026).

[25] Koza J.R. Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection. — MIT Press, 1992. — 819 p.

[26] Панченко Т.В. Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие. — Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. — 87 с.

[27] Lemos P., Jeffrey N., Cranmer M., Ho S., Battaglia P. Rediscovering orbital mechanics with machine learning // Machine Learning: Science and Technology. — 2023. — Vol. 4, No. 4. — 045002.

[28] Martin J.R., Schaub H. Periodic orbit discovery enhanced by physics-informed neural networks // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. — 2022. — AAS 22-567.

[29] Akash A. Data-driven stabilization of unstable periodic orbits of the three-body problem // New Astronomy. — 2023. — Vol. 98. — 101918.

[30] Broucke R.A. Periodic orbits in the restricted three-body problem with Earth-Moon masses // JPL Technical Report 32-1168. — 1968. — 92 p.

[31] Doedel E.J., et al. Elemental periodic orbits associated with the libration points in the circular restricted 3-body problem // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2007. — Vol. 17, No. 8. — P. 2625-2677.

[32] Hénon M. Generating Families in the Restricted Three-Body Problem // Lecture Notes in Physics. — Springer, 1997. — 278 p.

[33] Moser J. On the generalization of a theorem of A. Liapounoff // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1958. — Vol. 11, No. 2. — P. 257-271.

[34] Cranmer M. Interpretable machine learning for science with PySR and SymbolicRegression.jl // arXiv preprint arXiv:2305.01582. — 2023.

[35] Cranmer M. PySR: Fast & parallelized symbolic regression in Python/Julia // Zenodo. — 2020. — DOI: 10.5281/zenodo.4041459.

Оглавление

Введение 3
Плоские периодические орбиты в круговой ограниченной задаче трёх тел 4
Методика создания набора данных 6
Методика аппроксимации 8
Символьные аппроксимации 8
Точки либрации L_1, L_2, L_3 9
Семейство L1 11
Семейство L2 13
Семейство L3 15
Семейства L4-L5 17
Семейство S3 21
Семейство D1 24
Семейство C1 26
Семейство C2 31
Заключение 37
Благодарности 37
Список литературы 38