



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 4 за 2026 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.Ю. Круковский, И.В. Попов,
П.Е. Булатов

Анализ некоторых численных
алгоритмов для расчета
переноса излучения в R-Z
геометрии

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Круковский А.Ю., Попов И.В., Булатов П.Е. Анализ некоторых численных алгоритмов для расчета переноса излучения в R-Z геометрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2026. № 4. 16 с. EDN: [YRLRJC](https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2026-4)
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2026-4>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.Ю. Круковский, И.В. Попов, П.Е. Булатов

**Анализ некоторых численных
алгоритмов для расчета переноса
излучения в R-Z геометрии**

Москва — 2026

Круковский А.Ю., Попов И.В., Булатов П.Е.

Анализ некоторых численных алгоритмов для расчета переноса излучения в R-Z геометрии

Представлен сеточно-характеристический метод расчета радиационного обмена в случае цилиндрической симметрии. С помощью этого приближения получено выражение для плотности энергии излучения в виде квадратуры от коэффициента поглощения и излучательной способности плазмы. Рассчитан вклад излучения в виде источника в уравнение энергии электронов. Приводятся результаты численного моделирования с использованием представленной в данной работе модели магнитогидродинамического течения излучающей многозарядной плазмы лайнера, ускоряемого электродинамически. Полученные в работе результаты подтверждаются данными натуральных экспериментов, которые были проведены на установке АНГАРА5-1. Проведенные расчеты позволяют утверждать об адекватности построенной численной модели.

Ключевые слова: сеточно-характеристический алгоритм, радиационный энергообмен, численное моделирование, магнитная гидродинамика.

Alexander Yurevich Krukovskiy, Igor Viktorovich Popov, Pavel Evgenevich Bulatov

On the algorithm of radiative energy exchange in an axisymmetric formulation of the problem

A grid-characteristic method for calculating radiative exchange in the case of cylindrical symmetry is presented. Using this approximation, an expression for the radiation energy density is derived as a quadrature of the absorption coefficient and emissivity of the plasma. The contribution of radiation as a source to the electron energy equation is calculated. Results of numerical simulations using the magnetohydrodynamic flow model presented in this paper for the radiating multiply charged plasma of an electrostatically accelerated liner are presented. The results obtained in this paper are confirmed by data from full-scale experiments conducted on the ANGARA5-1 facility. The calculations performed allow us to confirm the adequacy of the constructed numerical model.

Key words: grid-characteristic algorithm, radiative energy exchange, numerical modeling, magnetohydrodynamics.

Оглавление

Введение	3
Моделирование переноса излучения в R-Z геометрии	4
Численный метод решения уравнения переноса излучения.....	7
Расчет динамики лайнера, ускоряемого электродинамически	11
Заключение.....	14
Список литературы.....	15

Введение

Изучение течений излучающей многозарядной плазмы в условиях R-Z геометрии является одним из важнейших направлений в радиационной газовой динамике (РГД) и магнитной гидродинамике (МГД). Это связано с достаточно широким кругом физических проблем, которые изучаются в настоящее время экспериментально и теоретически [1-3].

При моделировании широкого класса задач РГД и МГД, таких как электродинамическое ускорение лайнеров [4-6], лазерных термоядерных мишеней, микропинчевых структур, формирующихся в струе металлической плазмы вакуумно-искрового разряда [7], и многих других, важную роль играет конструирование алгоритмов расчета переноса излучения. В общем случае перенос излучения описывается кинетическим уравнением для функции распределения фотонов [8]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \bar{\Omega} \nabla I_\nu = J_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \kappa'_\nu I_\nu, \quad (1)$$

где $I_\nu(t, \vec{r}, \Omega)$ — плотность мощности излучения на частоте ν в телесный угол Ω в момент времени t в точке с радиус-вектором \vec{r} , $\bar{\Omega}$ — единичный вектор в направлении Ω , $J_\nu(t, \vec{r})$ — излучательная способность вещества, $\kappa'_\nu(t, \vec{r})$ — коэффициент поглощения без учета вынужденного излучения, c — скорость света в вакууме, h — постоянная Планка.

Для прямого решения уравнения (1) требуются значительные вычислительные затраты. При этом информация, полученная при решении этого уравнения для широкого класса уравнений РГД и МГД, часто является избыточной. Поэтому на практике достаточно часто используются различные приближения для уравнения переноса, а также приближенные методы его решения.

Известно [8], что в оптически плотном веществе в условиях, близких к термодинамическому равновесию, хорошей моделью является приближение лучистой теплопроводности. В прозрачной же среде — приближение оптически тонкого слоя.

В случае же малой анизотропии излучения достаточно эффективно использование диффузионного приближения [9], основными достоинствами которого являются простота реализации и высокая скорость численных расчетов. Данное приближение обеспечивает физически корректные результаты и в прозрачной, и в достаточно плотной плазме. Заметим, что в области, где пробег фотона сравним с характерным масштабом плазмы, возможна существенная анизотропия излучения. В такой области диффузионное приближение формально неприменимо и может приводить к некорректным результатам. При

этом с помощью данной модели невозможно получить угловое распределение вышедшей энергии, поскольку предполагается изотропность.

Отметим, что оптимизация параметров установок [4-7] требует выполнения достаточно большой серии расчетов (обычно более десятка). Поэтому численный метод решения радиационного обмена должен быть как достаточно экономичным, так и адекватным моделируемой физической ситуации, когда оптически прозрачные области соседствуют с областями, где коэффициент поглощения настолько велик, что длина пробега кванта (величина, обратно пропорциональная коэффициенту поглощения) становится гораздо меньше размера ячейки разностной сетки.

В работе представлен сеточно-характеристический алгоритм расчета радиационного энергообмена. Прототипом данного метода является интегральный вариант приближения Шустера-Шварцшильда [10-12]. Это приближение позволяет получить выражение для плотности энергии излучения в виде источника в уравнении энергии электронов. Данное приближение отражает основные как спектральные, так и энергетические характеристики при моделировании динамики плазмы многозарядных ионов и переноса излучения в плазме. Хотя этот метод достаточно трудоемок, как показала практика численного расчета физических задач [13-18], он приемлем для проведения достаточно большого количества расчетов за разумное время.

Моделирование переноса излучения в R-Z геометрии

Рассмотрим алгоритм расчета процессов переноса излучения на основе приближения «вперед-назад» в задачах с цилиндрической симметрией [13]. В предположении квазистационарности поля излучения и без учета рефракции света уравнение переноса излучения в R-Z геометрии записывается так:

$$\sin \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial I_v}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \varphi} \right) + \cos \theta \frac{\partial I_v}{\partial z} = -\kappa_v I_v + j_v. \quad (2)$$

Компоненты потока энергии излучения записываются в виде

$$S_{rv} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \varphi I_v d\varphi d\theta, \quad (3)$$

$$S_{zv} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \varphi I_v d\varphi d\theta, \quad (4)$$

где r — расстояние от оси симметрии, z — расстояние вдоль оси, S_{rv} , S_{zv} — компоненты спектрального потока энергии излучения вдоль направления осей r и z соответственно, φ — угол между проекцией направления полета фотона $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную к оси симметрии и осью Or , θ — угол между направлением полета фотона и осью симметрии оси Oz (см. рис. 1).

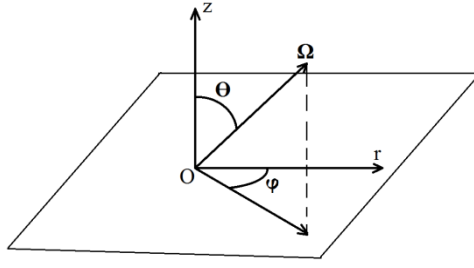


Рис. 1. Определение потока излучения

Граничные условия для уравнения (3) имеют следующий вид:

- на оси $I_\nu(0, z, \varphi, \theta) = I_\nu(0, z, \pi - \varphi, \theta)$,
- на внешней границе определена интенсивность «входящего» потока

$$I_\nu(r_0, z_0, \varphi, \theta) = I_{\nu 0}, (r_0, z_0) \in \Gamma, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi.$$

Проинтегрировав уравнение (2) по угловым переменным и частоте ν ($0 \leq \nu < \infty$), представим вклад энергии излучения в уравнение энергии электронов в виде

$$G = \nabla \vec{S} = c \int_0^\infty \kappa_\nu (U_\nu - U_{p\nu}) d\nu, \quad (5)$$

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} I_\nu d\varphi, \quad (6)$$

$$U_{p\nu} = \frac{1}{c} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} d\varphi, \quad (7)$$

$$U_p = \int_0^\infty U_{p\nu} d\nu, \quad (8)$$

где G — потери на излучение в уравнении энергии электронов, U_ν — спектральная плотность энергии излучения, $U_{p\nu}$ — спектральная плотность энергии «равновесного» излучения, U_p — плотность энергии «равновесного» излучения, j — функция источника.

Разобьем диапазон частот на k групп следующим образом: $0 \leq \nu_1 < \dots < \nu_i < \dots < \nu_{k+1}$. Для каждой группы решаем уравнение (2), используя

усредненные значения для $I_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} I_\nu d\nu$, $U_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} U_\nu d\nu$, $i = \overline{1, k}$. Полагаем, что коэффициент поглощения в пределах группы не зависит от энергии фотонов:

$$\kappa_\nu(T, \rho, \nu) = \kappa_i(T, \rho), \nu_i \leq \nu \leq \nu_{i+1}, G = c \sum_{i=1}^k \kappa_i U_i - 4\pi j, j = \int_0^\infty j_\nu d\nu.$$

Здесь $\rho(r, z)$ — плотность вещества. Далее индекс зависимости от частоты опустим и будем рассматривать «однорупповое» приближение. Результаты, полученные при рассмотрении многогруппового приближения, аналогичны результатам с однорупповым приближением, но доказательства в этом случае существенно более громоздки. В многогрупповом приближении необходимо рассматривать каждую группу и проводить суммирование по всем группам.

При решении уравнения (2) использовался известный прием (см. [9]). Введем для функции $I(r, z, \varphi, \theta)$ двухгрупповое описание по угловой переменной φ . При этом относительно зависимости от угловой переменной θ не будем делать никаких предположений.

$$I(r, z, \varphi, \theta) = \begin{cases} I^+(r, z, \theta), & -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ I^-(r, z, \theta), & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (9)$$

В одномерном осесимметричном случае при интегрировании уравнения (2) по θ получим $I(r)$ (см. [10]). При двумерной постановке модифицируем метод «вперед-назад», используя приближение (9) и численно проинтегрировав уравнение (2) по углу θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) в приближении, что функции I^\pm на интервале $\Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n$ ($\theta_n \leq \theta \leq \theta_{n+1}$) приближенно равны значениям функций $I^\pm(\theta_{n+\frac{1}{2}})$, где $n = \overline{1, N}$, $\theta_1 = 0$, $\theta_{N+1} = \pi$, $\theta_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\theta_n + \theta_{n+1})$.

Проинтегрируем уравнение (2) по φ от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, а затем от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тогда уравнение (2) разобьется на следующую систему уравнений:

$$\frac{\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n}{\Delta\theta_n} \left(\frac{\partial I_{n+\frac{1}{2}}^-}{\partial r} - \frac{I_{n+\frac{1}{2}}^+}{r} + \frac{I_{n+\frac{1}{2}}^-}{r} \right) + \frac{\sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n}{\Delta\theta_n} \frac{\partial I_{n+\frac{1}{2}}^-}{\partial z} = -\kappa I_{n+\frac{1}{2}}^- + j, \quad (10)$$

$$\frac{\cos \theta_n - \cos \theta_{n+1}}{\Delta\theta_n} \left(\frac{\partial I_{n+\frac{1}{2}}^+}{\partial r} + \frac{I_{n+\frac{1}{2}}^+}{r} - \frac{I_{n+\frac{1}{2}}^-}{r} \right) + \frac{\sin \theta_{n+1} - \sin \theta_n}{\Delta\theta_n} \frac{\partial I_{n+\frac{1}{2}}^+}{\partial z} = -\kappa I_{n+\frac{1}{2}}^+ + j. \quad (11)$$

Граничные условия для системы уравнений (10,11): на оси $I^+(0, z, \theta) = I^-(0, z, \pi - \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$. На внешней границе задан поток падающего излучения $I^-(r_0, z_0, \theta) = W/2\pi$, $(r_0, z_0) \in \Gamma$.

Решив систему уравнений (10, 11) и проинтегрировав (6) по углам φ и θ , получим формулу для плотности энергии излучения

$$U = \frac{\pi}{c} \sum_{n=1}^N \left(I_{n+1/2}^+ + I_{n+1/2}^- \right) (\cos \theta_n - \cos \theta_{n+1}). \quad (12)$$

Численный метод решения уравнения переноса излучения

Пусть на плоскости (r, z) в области G определено гладкое взаимно однозначное отображение F , переводящее G в единичный квадрат Q на плоскости (α, β) : $r = r(\alpha, \beta)$, $z = z(\alpha, \beta)$, $(r, z) \in G$, при этом выполнены

условия $J = \frac{1}{2} \frac{\partial(r^2, z)}{\partial(\alpha, \beta)} > 0$, $J^* = \frac{\partial(r, z)}{\partial(\alpha, \beta)} > 0$. Область G разобьем двумя

семействами линий (α_i, β_j) : $\alpha_i = const$, $\beta_j = const$, $i = \overline{1, N_i}$, $j = \overline{1, N_j}$ на разностную сетку, состоящую из четырехугольных ячеек. Обозначим множество узлов разностной сетки через $\bar{\omega}$, а множество ячеек разностной сетки через ω . Введем пространства сеточных функций, определенные в узлах и ячейках разностной сетки, обозначим их соответственно через $H_{\bar{\omega}}$ и H_{ω} . Для записи сеточных функций $f \in H_{\bar{\omega}}$ использовались индексы (i, j) : $f_{ij} \in H_{\bar{\omega}}$, $i = \overline{1, N_i}$, $j = \overline{1, N_j}$. Сеточные функции $g \in H_{\omega}$ отмечались индексами (m, l) : $g_{ml} \in H_{\omega}$, $m = \overline{1, N_m}$, $l = \overline{1, N_l}$ ($N_m = N_i - 1$, $N_l = N_j - 1$). Сеточные функции r , z , $S_{r,z}$ определены в узлах расчетной сетки, а сеточные функции T , ρ , I , κ , j , U , U_p — в ячейках. Тогда из уравнения (12) следует, что плотность излучения в расчетной ячейке

$$U_{ml} = \frac{\pi}{c} \sum_{n=1}^N I_{n+1/2}(m, l) (\cos \theta_n - \cos \theta_{n+1}), \quad (13)$$

где $I_{n+1/2}(m, l) = I_{n+1/2}^+(m, l) + I_{n+1/2}^-(m, l)$. Покроем область G множеством точек $(r_0, z_0) \in X^0$. При этом в каждой разностной ячейке (m, l) находится хотя бы одна точка из множества X^0 . Проведем через каждую точку, принадлежащую X^0 , по углам $\theta_{n+1/2}$ ($n = \overline{1, N}$) луч от границы области G (точка (r', z')) до оси симметрии.

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что данная точка принадлежит G . Затем из точки пересечения луча с осью симметрии проведем луч под углом $\pi - \theta_{n+1/2}$ до пересечения его с границей области G (точка (r'', z'')) (см. рис. 2).

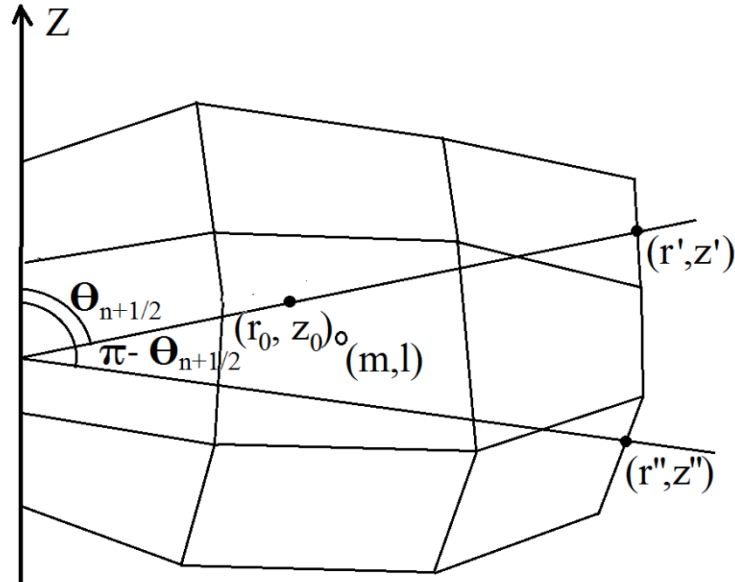


Рис. 2

Для каждого угла $\theta_{n+1/2}$, $n = \overline{1, N}$ найдем в расчетной ячейке (m, l) решение уравнения (10)-(11) $\bar{I}_{n+1/2}(m, l)$ (далее индекс $n + 1/2$ для простоты будем опускать) вдоль траектории этого луча. Найдем $\bar{I}_1(m, l)$ — значение на границе разностной ячейки (m, l) (см. рис. 3).

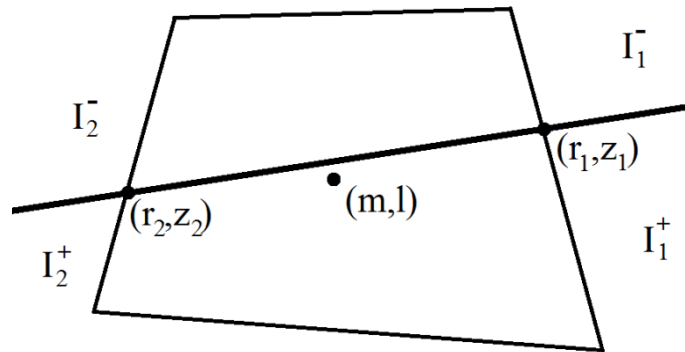


Рис. 3

В случае если ячейка (m, l) приграничная, то $\bar{I}_1^-(m, l) = \frac{W}{2\pi}$. В противном же случае находим значения $\bar{I}_2^-(m', l')$ до пересечения с ячейкой (m, l) (см. рис. 3). Учитываем, что $\kappa_{m'l'}$ и $j_{m'l'}$ постоянны в ячейке (m', l') , $\bar{I}_2^-(m', l')$ получаем путем интегрирования вдоль траектории луча

$$\bar{I}_2^-(m, l) = \frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \left(\frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \bar{I}_1^- \right) e^{\alpha(r_2 - r_1)}, \quad (14)$$

где $\alpha_{m'l'} = \frac{\kappa_{m'l'} \theta_n}{\sin \theta_{n+1/2} (\cos \theta_n - \cos \theta_{n+1})}$. Зная $\bar{I}_1^-(m, l)$, найдем $\bar{I}^-(r, z(r)) = \bar{I}^-(r)$

вдоль траектории из точки с координатами (r_1, z_1) до точки (r_2, z_2) (см. рис. 3)

$\bar{I}^-(r) = \frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \left(\frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \bar{I}_1^- \right) e^{\alpha_{ml}(r - r_1)}$, $r_2 \leq r < r_1$. Проинтегрировав это решение вдоль

траектории луча по разностной ячейке (m, l) , имеем вклад \bar{I}^- в данную ячейку:

$$\bar{I}^-(m, l) = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \bar{I}^-(r) dr = \frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} + \left(\frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \bar{I}_1^- \right) \frac{1}{\alpha_{ml}(r_2 - r_1)} (1 - e^{\alpha_{ml}(r_2 - r_1)}). \quad (15)$$

Теперь найдем $\bar{I}_2^+(m, l)$ — значение \bar{I}^+ на границе разностной ячейки (m, l) (см. рис. 3). Проходя по траектории луча под углом $\pi - \theta_{n+1/2}$ из точки (r'', z'') до оси симметрии, находим (как это было описано выше для луча под углом $\theta_{n+1/2}$) на оси значение $\bar{I}^-(\pi - \theta_{n+1/2})$ ($\bar{I}^-(r'', z'') = \frac{W}{2\pi}$). Из граничных условий следует, что на оси $\bar{I}^+(\theta_{n+1/2}) = \bar{I}^-(\pi - \theta_{n+1/2})$. Затем из уравнения (11) найдем значения $\bar{I}^+(m', l')$ на границах разностных ячеек, которые пересекаются с лучом до пересечения с ячейкой (m, l) (см. рис. 2-3).

$$\bar{I}_1^+(m', l') = \frac{j_{m'l'}}{\kappa_{m'l'}} - \left(\frac{j_{m'l'}}{\kappa_{m'l'}} - \bar{I}_2^+ \right) e^{-\alpha_{m'l'}(r_1 - r_2)}. \quad (16)$$

Зная $\bar{I}_2^+(m, l)$, находим $\bar{I}^+(r, z(r)) = \bar{I}^+(r)$ вдоль траектории из точки (r_2, z_2)

до точки (r_1, z_1) (см. рис. 3) $\bar{I}^+(r) = \frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \left(\frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \bar{I}_2^+ \right) e^{-\alpha_{ml}(r - r_2)}$, $r_2 \leq r < r_1$.

Проинтегрировав это решение вдоль траектории луча по расчетной ячейке (m, l) , имеем вклад \bar{I}^+ в данную ячейку:

$$\bar{I}^+(m, l) = \frac{1}{r_1 - r_2} \int_{r_2}^{\eta} \bar{I}^+(r) dr = \frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} + \left(\frac{j_{ml}}{\kappa_{ml}} - \bar{I}_2^+ \right) \frac{1}{\alpha_{ml}(r_1 - r_2)} \left(1 - e^{-\alpha_{ml}(\eta - r_2)} \right). \quad (17)$$

Таким образом, $\bar{I}_{n+1/2}(m, l) = \bar{I}_{n+1/2}^-(m, l) + \bar{I}_{n+1/2}^+(m, l)$. Если разностная ячейка (m, l) содержит одну точку множества X^0 , то $I_{n+1/2}(m, l) = \bar{I}_{n+1/2}(m, l)$. Если же ячейка (m, l) содержит ii точек из X^0 , где $ii > 1$ (точка пересечения k -го луча с границами ячеек имеет координаты (r_1^k, z_1^k) и (r_2^k, z_2^k) , решение вдоль траектории между координатами (r_1^k, z_1^k) и (r_2^k, z_2^k) - $\bar{I}_{n+1/2}^k(m, l)$). Тогда расчетная ячейка (m, l) разбивается на ii частей, которые имеют площади S_1, \dots, S_{ii} ($\sum_{k=1}^{ii} S_k = S_{ml}$), следующим образом. Проведем под углом $\theta_{n+1/2}$ линии. Данные линии соединяют точки с координатами $(r_1^{k+1/2}, z_1^{k+1/2})$ и $(r_2^{k+1/2}, z_2^{k+1/2})$, где $f^{k+1/2} = 0.5(f^k + f^{k+1})$, $k = \overline{1, ii-1}$, $f = r_1, r_2, z_1, z_2$. В этом случае S_1 — площадь четырехугольника, имеющего вершины (r_{ij}, z_{ij}) , (r_{i+1j}, z_{i+1j}) , $(r_1^{1.5}, z_1^{1.5})$, $(r_2^{1.5}, z_2^{1.5})$ (в случае, когда (r_{ij}, z_{ij}) или (r_{i+1j}, z_{i+1j}) не принадлежит S_1 , то S_1 — площадь треугольника); S_{ii} — площадь четырехугольника с вершинами $(r_1^{ii-1/2}, z_1^{ii-1/2})$, $(r_2^{ii-1/2}, z_2^{ii-1/2})$, (r_{ij+1}, z_{ij+1}) , (r_{i+1j+1}, z_{i+1j+1}) (при условии, что (r_{ij+1}, z_{ij+1}) или (r_{i+1j+1}, z_{i+1j+1}) не принадлежит S_{ii} , S_{ii} — площадь треугольника). При $ii > 2$, S_i , $1 < k < ii$ — площадь пересечения четырехугольника с вершинами $(r_1^{k-1/2}, z_1^{k-1/2})$, $(r_2^{k-1/2}, z_2^{k-1/2})$, $(r_1^{k+1/2}, z_1^{k+1/2})$ и $(r_2^{k+1/2}, z_2^{k+1/2})$ разностной ячейки (m, l) . Значит, интенсивность излучения в расчетной ячейке (m, l) определяется по формуле

$$I^{n+1/2}(m, l) = \frac{1}{S_{ml}} \sum_{k=1}^{ii} \bar{I}_{n+1/2}^{(k)}(m, l) S_k. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получаем выражение для плотности интенсивности излучения в разностной ячейке (m, l) . Чем больше точек содержит множество X^0 , тем точнее определяется плотность энергии излучения.

Расчет динамики лайнера, ускоряемого электродинамически

Описанный выше алгоритм реализован в комплексе программ РАЗРЯД [6], который создан для численного исследования двумерных задач МГД в широком диапазоне параметров вещества и электромагнитного поля. Приведем пример одной из таких задач, исследуемых с помощью описанной методики.

В рассмотренной постановке лайнер представляет собой цилиндрическую оболочку, образованную вольфрамовой плазмой. Толщина оболочки равна 2,5 мм, внутренний радиус – 2 см. Лайнер находится в разрядной камере радиусом 2,5 см. Средняя плотность лайнера $\bar{\rho} = 1,97 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$. Плотность остаточного газа в разрядной камере в расчетах полагалась $4 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3$. Ток, создаваемый генератором, проходит через лайнер, замыкающий электроды. Электротехническая схема представима как электрическая цепь, которая соединяет лайнер с генератором. Лайнер – нагрузка генератора с переменным сопротивлением и индуктивностью. Собственные параметры цепи: сопротивление $\bar{R} = 0,24 \text{ Ом}$; индуктивность $L_0 = 25 \text{ нГн}$. Они соответствуют условиям натуральных экспериментов на комплексе АНГАРА-5-1 [5, 10, 19].

$$\left(B_{\varphi} \right)_{\text{прав}} = \left(2 \frac{I}{r} \right)_{\text{прав}}, \quad L \frac{dI}{dt} + \bar{R}I + v(t) = u(t), \quad I(0) = 0,$$

$$v(t) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} E_z(r_{\text{прав}}, z) dz, \quad z_{\min} = 0, \quad z_{\max} = 1, \quad L = L_0 + 2 \ln \left(\frac{r_k}{r_{\text{прав}}} \right),$$

$$u(t) = \begin{cases} 2300 \sin \left(\frac{\pi}{160} t \right) \text{ кВ}, & t < 160 \text{ нс} \\ 0, & t \geq 160 \text{ нс} \end{cases}.$$

Уравнения цепи решаются до момента смены режима протекания тока, обусловленного эффектом «slow-bar», т.е. до момента времени, пока выполняется условие $W(t) > 0$, где $W(t) = v(t) + 2 \ln \left(\frac{r_k}{r_{\text{прав}}} \right) \frac{dI}{dt}$ (см. [7]).

При $W(t) \leq 0$ расчет уравнения цепи выполняется со следующими параметрами: $L_0 = 20 \text{ нГн}$, $\bar{R} = 0$, $u(t) = 0$ [20].

В начальный момент времени ($t = 0$) во всей области задаются электронная и ионная температуры $T_e = T_i = 0.3 \text{ эВ}$.

Для численного анализа влияния неоднородности оболочки на ее динамику в начальное распределение плотности вносится возмущение:

$$\rho_x = \bar{\rho} \cdot \left(1 + 0.15 \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right) \right), \quad 0 = z_{\min} \leq z \leq z_{\max} = 1. \quad (\text{см. рис. 4})$$

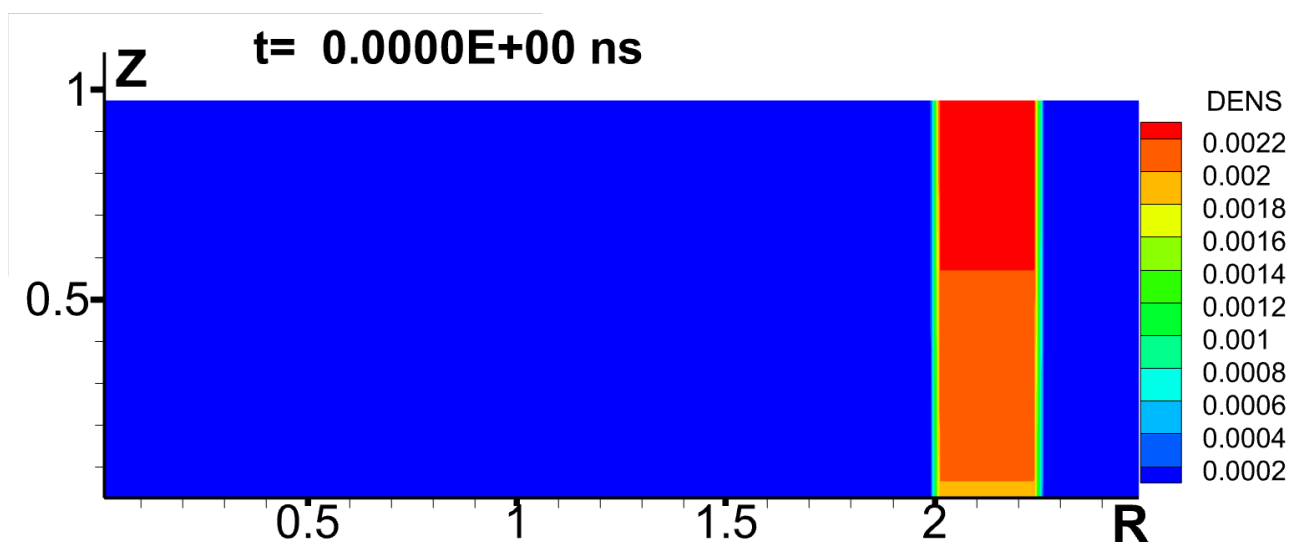


Рис. 4. Распределение плотности g/cm^3 в начальный момент времени

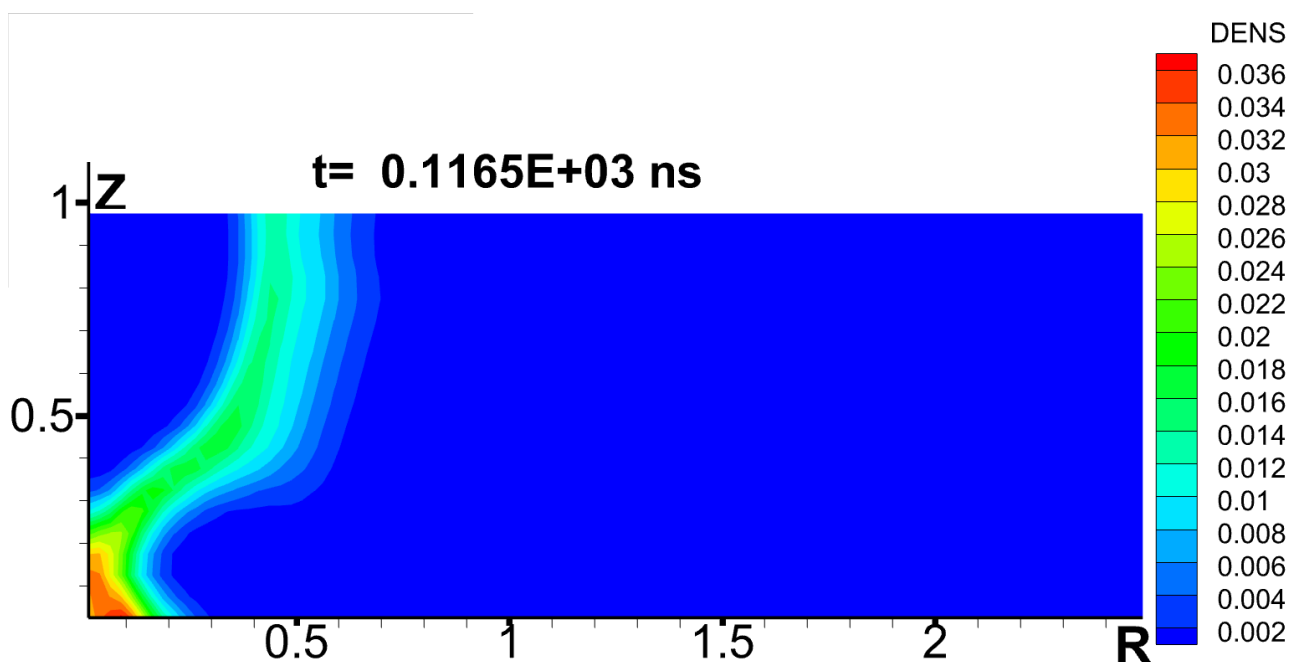


Рис. 5. Распределение плотности g/cm^3 в момент времени $t = 116.5 \text{ нс}$

Для расчета оптических свойств плазмы, ионизационного состояния и термодинамических параметров использовались табличные данные [21].

На рис. 5 – 8 представлены результаты численного расчета динамики лайнера на момент времени 116.5 нс. Лайнер около этого момента времени достиг оси симметрии и начал схлопываться. Его скорость составила $10 \div 15 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$, плотность от $2.4 \cdot 10^{-2}$ до $3.6 \cdot 10^{-2} g/cm^3$. Полученные

результаты хорошо согласуются с предварительными оценками, сделанными на основании данных [19], и подтверждаются данными натуральных экспериментов с генератором АНГАРА-5-1 [5, 19]. Поэтому можно утверждать об адекватности рассмотренной в данной работе численной модели.

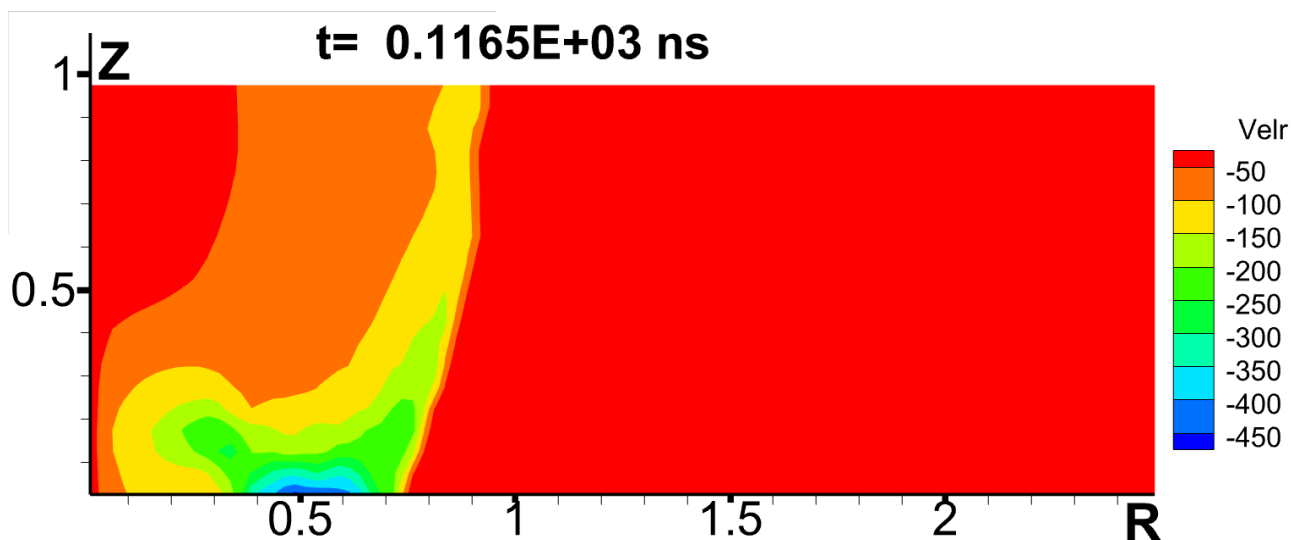


Рис. 6. Распределение скорости 10^6 см/сек в момент времени $t = 116.5$ нс

Из рис. 6 видно, что неоднородность начальной плотности привела к неравномерному распределению скорости вдоль оси аппликата (оси Oz), в результате чего менее плотные приэлектронные слои лайнера плазмы достигают оси симметрии раньше его центральной части. Под лайнером образуется квазисферическая полость с захваченным в ней остаточным газом. На момент времени $t = 116.5$ нс на внешней границе лайнера образуются относительно небольшие волнообразные возмущения плотности (см. на рис. 5). Это является результатом влияния гидродинамической неустойчивости рэлей-тейлоровского типа. Данная неустойчивость выражена недостаточно ярко, поскольку сжимаемость вещества оболочки частично ее гасит. Приведенный численный расчет продемонстрировал, что на конечной стадии сжатия распределение плотности существенно неоднородно по пространству. Хорошее согласование численных результатов и экспериментальных данных подтверждает достаточно высокую эффективность применения описанного в данной работе численного метода расчета энергии излучения. Как показала практика (см. [13-18]), описанный в работе алгоритм вполне приемлем для проведения широкомасштабного вычислительного эксперимента. Отметим, что методы диффузионного типа [7], которые используются в расчетах динамики плазменных оболочек, хотя существенно экономичнее, однако достаточно часто приводят к результатам, которые плохо согласуются с экспериментальными данными.

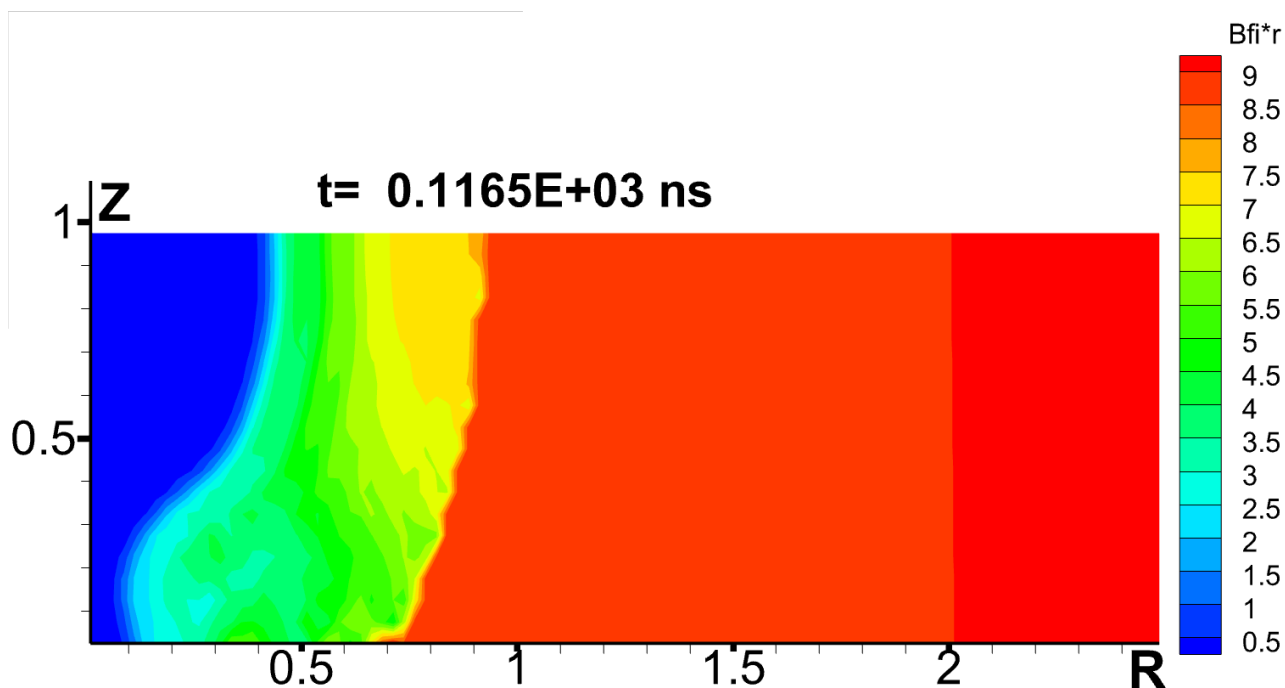


Рис. 7. Распределение $B_\phi \cdot r$ $\text{мГс} \cdot \text{см}$ в момент времени $t = 116.5 \text{ нс}$

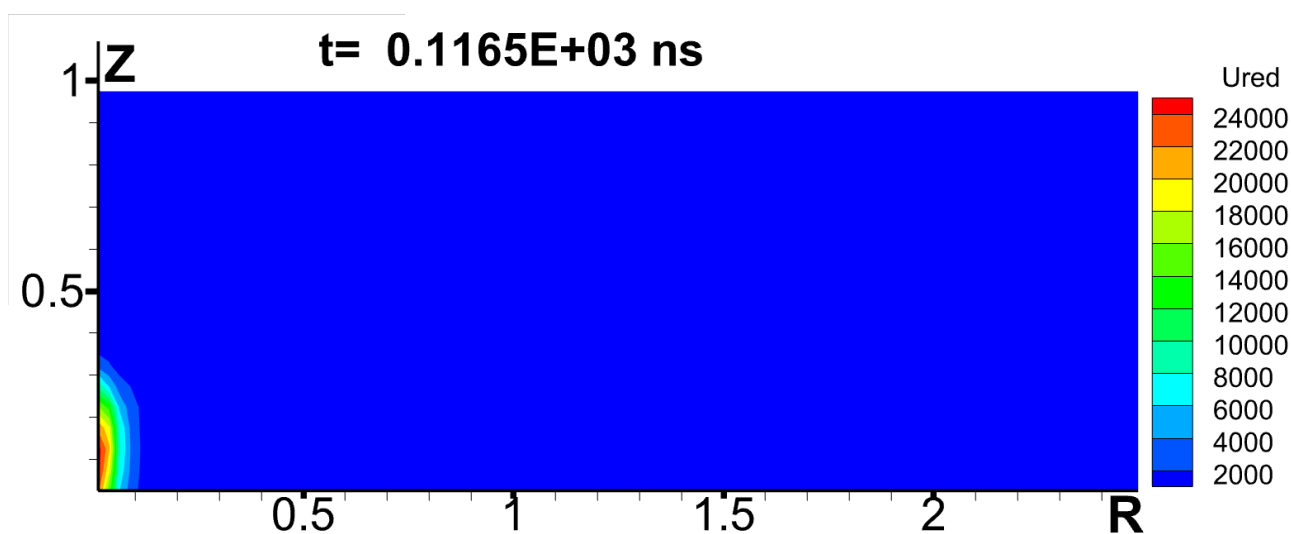


Рис. 8. Распределение плотности излучения $10^{-12} \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{см}}$
в момент времени $t = 116.5 \text{ нс}$

Заключение

Разработан сеточно-характеристический метод расчета радиационного энергообмена в R-Z геометрии в приближении «вперед-назад». Получено выражение для плотности энергии излучения в виде квадратуры от излучательной способности плазмы и коэффициента поглощения. Проведен расчет динамики лайнера, ускоряемого электродинамически. Результаты

расчетов хорошо согласуются с результатами натуральных экспериментов, что показывает высокое качество предложенной в настоящей работе модели.

Список литературы

1. Hansen S.B., Gomez M.R., Sefkow A.B., Slutz S.A., Sinars D.B., Hahn K.D., Harding E.C., Knapp P.F., Schmit P.F., Awe T.J., McBride R.D., Jennings C.A., Geissel M., Harvey-Thompson A.J., Peterson K.J., Rovang D.C., Chandler G.A., Cooper G.W., Cuneo M.E., Herrmann M.C., Hess M.H., Johns O., Lamppa D.C., Martin M.R., Porter J.L., Robertson G.K., Rochau G.A., Ruiz C.L., Savage M.E., Smith I.C., Stygar W.A., Vesey R.A., Blue B.E., Ryutov D., Schroen D.G., and Tomlinson K. Diagnosing magnetized liner inertial fusion experiments on Z // *Physics of Plasmas* 22, 056313 (2015).
2. Орешкин В.И. Излучение высокотемпературной плазмы. Пинч-эффект. – Lambert Academic Publishing, Saarbrucken, Deutchland, 2013, 189 p.
3. Gonsalves J., Nakamura K., Daniels J., Benedetti C., Pieronek C., de Raadt T., Steinke S., Bin J., Bulanov S.S., van Tilborg J., Geddes C.G.R., Schroeder C.B., Toth Cs., Esarey E., Swanson K., Fan-Chiang L., Bagdasarov G., Bobrova N., Gasilov V., Satorov P., Leemans W.P. Petawatt laser guiding and electron beam acceleration to 8 GeV in a laserheated capillary discharge waveguide // *Physical Review Letters* 122, 084801 (2019), p.1–6.
4. Spielman R.B. et al. PBFA Z: a 20 MA Z-pinch driver for plasma for radiation sources. In: Proc. BEAM'96. Prague, Czech Republic, 1996, vol. 0-4-3, p. 150.
5. Грабовский В.Е., Воробьев О.Ю., Дябилин К.С. и др. Теоретическое и экспериментальное исследование плазмы Z-пинча как источника мощного импульса мягкого рентгеновского излучения для генерации ударных волн в конденсированных средах. // *ЖЭТВ*, 1996, 109, 1.
6. Гасилов В.А., Чуватин А.С., Круковский А.Ю. и др. Комплекс программ «РАЗРЯД»: моделирование ускорения плазмы в сильноточных импульсных системах. // *Математическое моделирование*, 2003, т. 15, № 9, с. 107-124.
7. Romanov I.V., Tsygvintsev I.P., Paperny V.L., Kologrivov A.A., Kolobkin Yu.V., Krukovskiy A.Yu. and Rupasov A.A. Influence of the laser plasma – expansion specific on a cathode jet formation and the current stability in a laser-ignited vacuum discharge. // *Physics of Plasmas*. 25, 083107 (2018).
8. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008, 653 с.
9. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985, 304 с.
10. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975, 936 с.
11. Рекин А.Д. Уравнения переноса излучения в приближении Шустера–Шварцшильда для задач со сферической и цилиндрической симметрией // *ТВТ* 16, выпуск 4 (1978), с. 811–818.
12. Круковский А.Ю., Ладонкина М.Е., Повещенко Ю.А., Попов И.В. Методика расчета лучистого переноса энергии в приближении «вперед-назад». //

Журнал Средневолжского математического общества, 2022. Т. 24, № 4. с. 1-16.

13. Гасилов В.А., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Тарасов Д.С. Алгоритм расчета радиационного энергообмена в импульсной магнитоускоряемой плазме. / В сб. научных трудов «Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем». – М.: Издательство «Станкин», Выпуск 3/ 2000, с. 73-86.
14. Браницкий А.В., Грабовский Е.В., Захаров С.В. и др. О проникновении азимутального магнитного потока при сжатии двойного лайнера. // Физика плазмы, 1999. т. 25, вып. 12 с. 1079-1084.
15. Ткаченко С.И., Гасилов В.А., Круковский А.Ю. и др. Вычислительная модель и результаты численного анализа электровзрыва тонких алюминиевых проводников // *Mathematica Montisnigri*. Vol. XXVIII, p. 39-61. Подгорица, 2013.
16. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новиков В.Г. и др. Численное моделирование токопрохождения в вакуумном диоде с лазерным поджигом // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, № 78, М., 2013, 20 с.
17. Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Гасилов В.А. и др. Моделирование формирования пинча в вакуумном диоде с лазерным поджигом // *Математическое моделирование* 2016. Т. 28, № 2, с. 146-160.
18. Romanov I.V., Tsygvintsev I.P., Paperny V.L. and et al. Influence of the laser plasma – expansion specific on a cathode jet formation and the current stability on a laser-ignited vacuum discharge. // *Physics of Plasmas* 25, 083107 (2018).
19. Zakharov S.V., Smirnov V.P., Grabovskii E.V. Nedoseev S.L., Oleinik G.M., Zaitsev V.I. Imploding Liner as a Driver for Indirect Driven Target Physics Studies. Proc. of the I.A.E.A. Technical Committee Meeting on Drivers for Inertial Confinement Fusion. Paris, 1994. (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1995), p. 395.
20. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. – М.: Энергоатомиздат, 1984, 300 с.
21. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. – М.: Физматлит. 2000, 400 с.