

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»**

---

**Утверждена**  
Ученым советом  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,  
протокол № 14-22 от «10» ноября 2022 г.

# **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ:**

**Математический и функциональный анализ**

**Научная специальность**

**1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика»**

**Форма обучения**

**очная**

Москва, 2022

**Научная специальность:**

1.1.2– «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

**Дисциплина:** Математический и функциональный анализ.

Форма обучения: очная

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА РЕКОМЕНДОВАНА**

Ученым советом ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,  
протокол № 14/22 от «10» ноября 2022 г.

**ИСПОЛНИТЕЛЬ** (разработчик программ):

Веденяпин В.В., ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, д.ф.-м.н.

Согласовано

Заведующий аспирантурой \_\_\_\_\_ / Меньшов И.С. /

## Оглавление

АННОТАЦИЯ .....	4
1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....	4
2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	4
3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
3.1. Структура дисциплины.....	5
3.2. Содержание разделов дисциплины.....	6
3.3. Семинарские занятия .....	7
4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ .....	7
5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	10
6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	10

## АННОТАЦИЯ

Дисциплина «Математический и функциональный анализ» реализуется в рамках Блока «Образовательный компонент» основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре Федерального исследовательского центра «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).

Рабочая программа Дисциплины «Математический и функциональный анализ» разработана и составлена на основании Федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре к условиям их реализации, срокам освоения этих программ с учетом различных форм обучения, образовательных технологий и особенностей отдельных категорий аспирантов (адъюнктов), в соответствии с учебными планами подготовки аспирантов в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по научной специальности 1.1.2 - «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Основным источником материалов для формирования содержания программы являются: материалы конференций, симпозиумов, семинаров, Интернет-ресурсы, научные издания и монографические исследования и публикации.

Общая трудоемкость дисциплины по учебному плану составляет 2 зач.ед. (72 часа), из них лекций – 4 часа, семинарских занятий – 10 часов, практических занятий – 0 часов и самостоятельной работы – 58 часа. Дисциплина реализуется на 1-м курсе, в 1-м семестре, продолжительность обучения – 1 семестр.

Текущая аттестация проводится не менее 2 раз в соответствии с заданиями и формами контроля, предусмотренные настоящей программой.

Промежуточная оценка знания осуществляется в период зачетно-экзаменационной сессии в форме зачета.

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

#### Цели и задачи дисциплины «Математический и функциональный анализ»

**Цель:** освоение фундаментальных знаний и компетенций, которые позволят представлять и разрабатывать методами дифференциальных уравнений модели физико-химических процессов и их дискретные модели в удобном виде, а также владеть математическим аппаратом, позволяющим выбрать наиболее правильную модель, аналитически исследовать и оценивать её свойства.

#### Задачи:

- освоить основы математического и функционального анализа;
- практическое освоение накопленных по дисциплине знаний при использовании математического и функционального анализа;
- стимулирование к самостоятельной деятельности по освоению дисциплины.

### 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Математический и функциональный анализ» направлен на формирование определённых умений, знаний, компетенций.

**а) универсальные (УК):** не предусмотрено

**б) общепрофессиональных (ОПК):** Владение методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности (ОПК-1)

**в) профессиональных (ПК):** Способность использовать математический и функциональный анализ в исследованиях(ПК-1), Способность создавать модели химических и физических процессов с помощью математического и функционального анализа (ПК-2), Способность исследовать или качественно описывать поведение систем с помощью математического и функционального анализа (ПК-3).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:**

- основные понятия математического и функционального анализа
- основные методы использования математического и функционального анализа.
- основные математические методы качественного исследования модели химических и физических процессов с помощью математического и функционального анализа.

**Уметь:**

- использовать основные понятия математического и функционального анализа
- уверенно проводить качественную оценку поведения химических и физических процессов с помощью математического и функционального анализа.

**Владеть:**

- навыками математического и функционального анализа
- основными понятиями математического и функционального анализа.
- навыками исследования основных свойств моделей физико-химической теории с помощью математического и функционального анализа.

**Приобрести опыт:**

- построения моделей физико-химических процессов с помощью математического и функционального анализа;
- исследования поведения физико-химических процессов с помощью математического и функционального анализа.

### 3. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 3.1. Структура дисциплины

##### Распределение трудоемкости дисциплины по видам учебных работ

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	общая	
	зач.ед.	час.
ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ по Учебному плану	2	72
Лекции (Л)		4
Практические занятия (ПЗ)	-	-
Семинары (С)		10
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к семинарским и практическим занятиям) и самостоятельное изучение тем дисциплины		58
<i>Вид контроля: зачет</i>		

#### 3.2. Содержание разделов дисциплины

##### Общее содержание дисциплины

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущей аттестации
1.	Теория меры	Мера и измеримые функции. Интеграл Лебега и его сравнение с интегралом Римана. Теорема Егорова. Теорема Фубини. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла.	О, ДЗ
2.	Преобразование Фурье.	Пространства $L^p$ . Разложения по ортогональным системам функций в $L^2$ . Ряды и преобразования Фурье. Теорема Планшереля.	О, ДЗ

3.	Непрерывные функции. Гильбертовы пространства	Метрические и топологические пространства. Компактность. Непрерывные функции на компакте. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Связность. Линейные топологические и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера о представлении линейных функционалов.	О, ДЗ
4.	Линейные операторы.	Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Ограниченные операторы. Понятие о спектре оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Спектральное представление линейного оператора. Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический вид матрицы симметрического, унитарного и кососимметрического оператора.	О, ДЗ
5.	Обобщённые функции.	Обобщенные функции и операции над ними. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Соболевские пространства $H_s$ . Теорема вложения Соболева.	О, ДЗ

**Примечание:** О – опрос, Д – дискуссия (диспут, круглый стол, мозговой штурм, ролевая игра), ДЗ – домашнее задание (эссе и пр.). Формы контроля не являются жесткими и могут быть заменены преподавателем на другую форму контроля в зависимости от контингента обучающихся. Кроме того, на занятиях семинарских может проводиться работа с нормативными документами, изданиями средств информации и прочее, что также оценивается преподавателем.

### 3.3. Лекционные занятия

№ занятия	№ Раздела	Краткое содержание темы занятия	Кол-во часов
1.	1,2,3	Мера и измеримые функции. Интеграл Лебега и его сравнение с интегралом Римана. Теорема Егорова. Теорема Фубини. Метрические и топологические пространства. Компактность. Непрерывные функции на компакте. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Связность. Линейные топологические и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера о представлении линейных функционалов.	2
2.	4,5	Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Ограниченные операторы. Понятие о спектре оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Спектральное представление линейного оператора. Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический вид матрицы симметрического, унитарного и кососимметрического оператора. Обобщенные функции и операции над ними.	2
ВСЕГО			4

### 3.4. Семинарские занятия

№ занятия	№ Раздела (темы)	Краткое содержание темы занятия	Кол-во часов
-----------	------------------	---------------------------------	--------------

3.	1	Задачи на тему Теорема Егорова. Теорема Фубини. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Эргодические теоремы.	2
4.	2	Задачи по темам: Пространства $L_p$ . Разложения по ортогональным системам функций в $L_2$ . Ряды и преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы.	2
5.	3	Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера о представлении линейных функционалов. Эргодические теоремы фон Неймана и Рисса.	2
6.	4	Задачи по темам: Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический вид матрицы симметрического, унитарного и кососимметрического оператора. Эргодические свойства линейных операторов.	2
7.	5	Задачи по темам: Обобщенные функции и операции над ними. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Соболевские пространства $H_s$ . Теорема вложения Соболева. Эргодическая теория и обобщенные функции.	2
ВСЕГО			10

#### 4. ТЕКУЩАЯ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

**Текущая аттестация аспирантов.** Текущая аттестация аспирантов проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН - Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Текущая аттестация по дисциплине проводится в форме опроса, а также оценки вопроса-ответа в рамках участия обучающихся в дискуссиях и различных контрольных мероприятиях по оцениванию фактических результатов обучения, осуществляемых преподавателем, ведущим дисциплину. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины см. ниже.

Объектами оценивания выступают:

- учебная дисциплина – активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость занятий; степень усвоения теоретических знаний и уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы, проводимых в рамках семинаров, практических занятий и самостоятельной работы.

Оценивание обучающегося на занятиях осуществляется с использованием нормативных оценок зачет, незачет.

##### Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Форма контроля знаний	Вид аттестации	Примечание
проверочные работы в течение всего курса	текущая	Ниже приведены перечни рекомендуемых задач и контрольных вопросов
зачет	итоговая	

Примерный перечень рекомендуемых контрольных вопросов для оценки текущего уровня успеваемости студента:

1. Нарисовать фазовый портрет уравнения двумерной системы дифф. уравнения и дать описание поведения уравнения Лиувилля в пространстве  $L_2$ .

2. Нарисовать фазовый портрет одномерной гамильтоновой системы, решить её и дать описание поведения уравнения Лиувилля в пространстве  $L^2$ .
3. Рост энтропии для уравнения Ливилля, энтропия по Пуанкаре в пространстве  $L^2$ .
4. Экстремаль Больцмана и эргодические теоремы Фон-Неймана и Рисса в пространстве  $L^2$  и обобщённых функциях.
5. Дискретное время для уравнения Лиувилля. Теорема Рисса в пространстве  $L^2$  и обобщённых функциях.
6. Непривное время. Теорема фон Неймана в пространстве  $L^2$  и Боголюбова в обобщённых функциях.
7. Функционалы Ляпунова и H-теорема в пространстве  $L^2$  и обобщённых функциях.

Примерный перечень рекомендуемых контрольных задач для оценки текущего уровня успеваемости студента:

#### Задача № 1.

Для системы уравнений одномерного движения

1. Построить фазовый портрет.
2. Найти законы сохранения в различных пространствах функций.
3. Уточнить поведение фазовых траекторий в окрестности особых точек для уравнения Лиувилля в различных пространствах функций.
4. Выписать уравнение Лиувилля для этой динамической системы и приближение гидродинамического типа. Оценить, к чему стремятся решения в различных функциональных пространствах.

Задача № 2. Для заданного студенту значения  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ :

Описать движение материальной точки с потенциальной энергией  $U(x) = x^{2\beta}(x-3)^\alpha(x-5)^{\alpha+1}$ :

1. Выписать соответствующую динамическую систему. Найти законы сохранения в различных пространствах функций.
2. Построить фазовый портрет. Сколько различных фазовых траекторий соответствуют уровню энергии  $E \geq 0$ ?
3. Уточнить поведение фазовых траекторий в окрестности особых точек для уравнения Лиувилля в различных пространствах функций.
5. Выписать уравнение Лиувилля для этой динамической системы и приближение гидродинамического типа. Дать анализ в различных пространствах функций.

#### Задача № 3.

1. Выписать систему, описывающую колебательный процесс.
2. Выписать законы сохранения. Выписать H-функции для уравнения Лиувилля. К чему стремится решение при времени, стремящемся к бесконечности в различных пространствах функций?
3. Выписать уравнение Лиувилля для этой динамической системы и приближение гидродинамического типа, дать анализ в различных пространствах функций.

**Итоговая аттестация аспирантов.** Итоговая аттестация аспирантов по дисциплине проводится в соответствии с локальным актом ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Положением о текущей, промежуточной и итоговой аттестации аспирантов ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре и является обязательной.

Итоговая аттестация по дисциплине осуществляется в форме зачета в период зачетно-экзаменационной сессии в соответствии с Графиком учебного процесса. Обучающийся допускается к зачету в случае выполнения аспирантом всех учебных заданий и мероприятий, предусмотренных

настоящей программой. В случае наличия учебной задолженности (пропущенных занятий и (или) невыполненных заданий) аспирант отрабатывает пропущенные занятия и выполняет задания.

Оценивание обучающегося на промежуточной аттестации осуществляется с использованием нормативных оценок на зачете – зачет, незачет.

#### Оценивание аспиранта на промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Требования к знаниям и критерии выставления оценок
Незачет	основное содержание учебного материала не раскрыто; допущены грубые ошибки в определении понятий и при использовании терминологии; не даны ответы на дополнительные вопросы.
Зачет	раскрыто содержание материала, даны корректные определения понятий; допускаются незначительные нарушения последовательности изложения; допускаются небольшие неточности при использовании терминов или в логических выводах; при неточностях задаются дополнительные вопросы.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Основная литература

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики., М., Наука,2000.
2. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

### Дополнительная литература и Интернет-ресурсы

1. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1-3. – М.: Физматгиз.1958.
2. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.. Обобщенные функции. Вып. 4.– М.: Физматгиз.1958.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.
4. Козлов В.В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М., 2002.
5. Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д., Элементы прикладной математики. М.,Наука, 1967.
6. Пуанкаре А. Замечания о кинетической теории газов. // Пуанкаре А. Избранные труды, М., Наука, 1974.
7. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова.,М., Физматлит,2001.
8. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений.М.-Л.: ОГИЗ. 1947.
9. Зельдович Я.Б., Мышкин А.Д. Элементы математической физики. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». 1973.

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для обеспечения интерактивных методов обучения для чтения лекций требуется аудитория с мультимедиа (возможен вариант с интерактивной доской).

Для проведения дискуссий и круглых столов, возможно, использование аудиторий со специальным расположением столов и стульев.

**ИСПОЛНИТЕЛИ** (разработчики программы):

Веденяпин В.В., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н.  
Орлов Ю.Н., ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, зав сектором, д.ф.-м.н.