ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

ПРОГРАММА
Вступительного экзамена в аспирантуру по специальностям:
1.1.2. - Дифференциальные уравнения и математическая физика,
1.1.6 - Вычислительная математика

На экзамене оценивается знание материала общей части программы, а также вопросов в области будущей научной работы в аспирантуре. Билет вступительного экзамена состоит из двух вопросов по программе вступительного экзамена и одного дополнительного по теме предполагаемой научной работы. Список дополнительных вопросов предоставляется поступающим.

Общая часть.

1. Непрерывные функции одной переменной и их свойства. Равномерная непрерывность. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Асколи-Арцела.
2. Функции многих переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент. Теоремы об обратной и неявной функции.
3. Интеграл Римана и его свойства. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы трапеций и Симпсона, квадратурные формулы Гаусса. Оценки погрешностей.
4. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Тензор скоростей деформаций. Кинематический смысл его компонент. Формула Остроградского-Гаусса. Дивергенция скорости, вектор вихря скорости. Их кинематический смысл. Формула Стокса.
5. Сходимость числовых рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, Лейбница, интегральный). Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Умножение рядов.
6. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
7. Собственные и несобственные интегралы зависящие от параметра. Равномерная сходимость по параметрам и ее признаки. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.
8. Мера множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства. Пространства L_p. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского и Шварца.
9. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование и дифференцирование). Разложение элементарных функций в ряды.
10. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Конформные отображения. Элементарные функции комплексного переменного $z^n, e^z, \frac{az+b}{cz+d}$ и задаваемые ими отображения, функция Жуковского. Простейшие многозначные функции $(\sqrt{z}, Ln\, z)$. Понятие римановой поверхности.
11. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Основная теорема о вычетах и ее применение. Принцип аргумента и терема Руше.
12. Линейные преобразования. Квадратичные формы. Приведение их к каноническому виду линейными преобразованиями в комплексной и действительной областях. Закон инерции.
13. Линейная зависимость и независимость векторов. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Методы численного решения линейных систем.
14. Ортогональные преобразования в евклидовом пространстве и ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц. Характеристический многочлен линейного преобразования векторного пространства. Собственные числа и собственные векторы. Свойства собственных чисел и векторов симметрических матриц. Понятие о методе ортогональных вращений решения полной проблемы собственных значений.

15. Жорданова нормальная форма матриц и линейных операторов.
16. Принцип сжатых отображений в полных метрических пространствах и его применения. Итерационные методы решения уравнений $f(x)=0$ (хорд, Ньютона).
17. Линейные операторы в нормированных пространствах, норма линейного оператора. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (методы простой итерации и Зейделя).
18. Гильбертово пространство. Линейные и билинейные функционалы в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала.
19. Резольвента и спектр линейного оператора. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором.
20. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения с симметричным ядром.
21. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций, неравенство Бесселя, сходимость ряда Фурье. Поточечная сходимость; достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе функций. Полнота системы тригонометрических функций.
22. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши систем уравнений первого порядка и уравнений n порядка. Зависимость от начальных данных и параметров.
23. Линейные дифференциальные уравнения и системы n порядка. Однородные уравнения. Линейная независимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Общее решение неоднородного уравнения.
24. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные). Свойства и методы решения.
25. Устойчивость по Ляпунову решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению. Второй метод Ляпунова.
26. Экстремальные задачи с ограничениями, метод множителей Лагранжа. Простейшая задача вариационного исчисления. Достаточные условия экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Вариационная задача с подвижными концами. Условия трансверсальности.
27. Классификация линейных уравнений с частными производными 2-го порядка. Характеристики линейных уравнений с двумя независимыми переменными. Примеры разных типов уравнений из механики сплошной среды и физики.
28. Задача Коши для уравнения колебания струны. Формула Даламбера и метод Фурье.
29. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения первой краевой задачи.
30. Гармонические функции и принцип максимума. Основные краевые задачи для уравнения Пуассона. Фундаментальное решение и теория потенциала.
31. Основные понятия теории разностных схем для линейных уравнений в частных производных: аппроксимация, устойчивость, сходимость. Простейшая разностная схема решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Рекомендуемая литература к общей части.

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков И.В. Лекции по математическому анализу.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. ч. 1-3.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.
4. Евграфов М.А. Аналитические функции.
5. Воеводин В.В. Линейная алгебра.
6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
10. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
11. Алексеев В.М.,Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.
12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.
14. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики.
15. Бабенко К.И. Основы численного анализа.