

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОРОЖДАЮЩИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ ПЕРЕЛЕТОВ В ОКРЕСТНОСТЬ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

Батхин А.Б.

Институт прикладной математики РАН им М. В. Келдыша

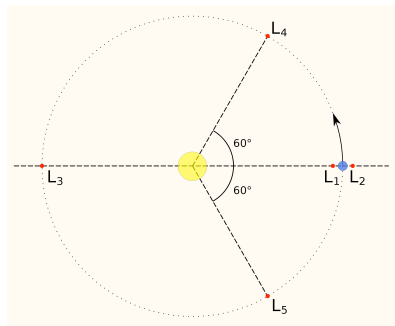
Доклад на XXXIV Академических чтениях по космонавтике
Секция №5 «Прикладная небесная механика и управление
движением»

27 января 2010 г.

Актуальность

Проекты

Многие космические проекты предполагают выведение аппаратов в окрестность точек либрации. Для астрофизических исследований наибольший интерес представляют две ближайшие к Земле коллинеарные точки L_1 и L_2 , расположенные в системе Солнце–Земля на расстоянии 1,497 и 1,508 млн. км., соответственно.



Проекты, использующие L_1 и L_2

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

Аппарат «Genesis», собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.

Телескопы «Гершель» и «Планк» были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .

Аппарат SOHO для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.

Аппарат WMAP для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 в окрестность L_2 .

Проекты, использующие L_1 и L_2

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

Аппарат «Genesis», собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.

Телескопы «Гершель» и «Планк» были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .

Аппарат **SOHO** для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.

Аппарат **WMAP** для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 в окрестность L_2 .

Проекты, использующие L_1 и L_2

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

Аппарат «Genesis», собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.

Телескопы «Гершель» и «Планк» были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .

Аппарат SOHO для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.

Аппарат WMAP для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 в окрестность L_2 .

Проекты, использующие L_1 и L_2

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

Аппарат «Genesis», собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.

Телескопы «Гершель» и «Планк» были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .

Аппарат SOHO для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.

Аппарат WMAP для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 в окрестность L_2 .

Проекты, использующие L_1 и L_2

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

Аппарат «Genesis», собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.

Телескопы «Гершель» и «Планк» были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .

Аппарат SOHO для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.

Аппарат WMAP для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 в окрестность L_2 .

Метод построения орбит

Для построения орбит используются периодические решения пространственной задачи Хилла, которые могут быть продолжены до решений ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ) с соответствующим значением массового параметра μ .

Точки либрации в задаче Хилла

В задаче Хилла как в некотором приближении ОЗТТ из 5-ти остается только 2 точки либрации: L_1 и L_2 .

Метод построения орбит

Для построения орбит используются периодические решения пространственной задачи Хилла, которые могут быть продолжены до решений ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ) с соответствующим значением массового параметра μ .

Точки либрации в задаче Хилла

В задаче Хилла как в некотором приближении ОЗТТ из 5-ти остается только 2 точки либрации: L_1 и L_2 .

Общая схема построения орбит

Предлагается следующая схема построения орбит

- 1 С помощью предельных решений промежуточной задачи Энона строятся порождающие решения плоской задачи Хилла.
- 2 Порождающие решения продолжаются до периодических решений задачи Хилла с одновременным исследованием устойчивости.
- 3 Для семейств плоских периодических решений определяются критические орбиты, взаимодействующие с пространственными.
- 4 Исследуются семейства найденных периодических решений и пригодные орбиты продолжаются до периодических решений ОЗТТ.

Общая схема построения орбит

Предлагается следующая схема построения орбит

- 1 С помощью предельных решений промежуточной задачи Энона строятся порождающие решения плоской задачи Хилла.
- 2 Порождающие решения продолжаются до периодических решений задачи Хилла с одновременным исследованием устойчивости.
- 3 Для семейств плоских периодических решений определяются критические орбиты, взаимодействующие с пространственными.
- 4 Исследуются семейства найденных периодических решений и пригодные орбиты продолжаются до периодических решений ОЗТТ.

Общая схема построения орбит

Предлагается следующая схема построения орбит

- 1 С помощью предельных решений промежуточной задачи Энона строятся порождающие решения плоской задачи Хилла.
- 2 Порождающие решения продолжаются до периодических решений задачи Хилла с одновременным исследованием устойчивости.
- 3 Для семейств плоских периодических решений определяются критические орбиты, взаимодействующие с пространственными.
- 4 Исследуются семейства найденных периодических решений и пригодные орбиты продолжаются до периодических решений ОЗТТ.

Общая схема построения орбит

Предлагается следующая схема построения орбит

- 1 С помощью предельных решений промежуточной задачи Энона строятся порождающие решения плоской задачи Хилла.
- 2 Порождающие решения продолжают до периодических решений задачи Хилла с одновременным исследованием устойчивости.
- 3 Для семейств плоских периодических решений определяются критические орбиты, взаимодействующие с пространственными.
- 4 Исследуются семейства найденных периодических решений и пригодные орбиты продолжают до периодических решений ОЗТТ.

Общая схема построения орбит

Предлагается следующая схема построения орбит

- 1 С помощью предельных решений промежуточной задачи Энона строятся порождающие решения плоской задачи Хилла.
- 2 Порождающие решения продолжаются до периодических решений задачи Хилла с одновременным исследованием устойчивости.
- 3 Для семейств плоских периодических решений определяются критические орбиты, взаимодействующие с пространственными.
- 4 Исследуются семейства найденных периодических решений и пригодные орбиты продолжаются до периодических решений ОЗТТ.

Уравнения задачи Хилла

Задача Хилла является предельным случаем круговой ограниченной задачи трех тел.

Уравнения задачи Хилла

во вращающейся системе координат с центром во втором теле имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + 3x - \frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{y}{r^3}, \\ \ddot{z} = -z - \frac{z}{r^3}, \end{cases} \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3x^2 - z^2 + \frac{2}{r} - C$$

Уравнения задачи Хилла

Задача Хилла является предельным случаем круговой ограниченной задачи трех тел.

Уравнения задачи Хилла

во вращающейся системе координат с центром во втором теле имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + 3x - \frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{y}{r^3}, \\ \ddot{z} = -z - \frac{z}{r^3}, \end{cases} \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3x^2 - z^2 + \frac{2}{r} - C$$

Уравнения задачи Хилла

Задача Хилла является предельным случаем круговой ограниченной задачи трех тел.

Уравнения задачи Хилла

во вращающейся системе координат с центром во втором теле имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + 3x - \frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{y}{r^3}, \\ \ddot{z} = -z - \frac{z}{r^3}, \end{cases} \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3x^2 - z^2 + \frac{2}{r} - C$$

Семейства периодических решений

Периодические решения не являются изолированными, а формируют однопараметрические семейства. Они могут быть условно разделены на несколько типов в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений C .

Полуоткрытые семейства, которые могут быть продолжены по C только в одну сторону.

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Большая часть изученных семейств не является замкнутыми и продолжается по $C \rightarrow -\infty$.

Семейства периодических решений

Периодические решения не являются изолированными, а формируют однопараметрические семейства. Они могут быть условно разделены на несколько типов в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений C .

Полуоткрытые семейства, которые могут быть продолжены по C только в одну сторону.

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Большая часть изученных семейств не является замкнутыми и продолжается по $C \rightarrow -\infty$.

Семейства периодических решений

Периодические решения не являются изолированными, а формируют однопараметрические семейства. Они могут быть условно разделены на несколько типов в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений C .

Полуоткрытые семейства, которые могут быть продолжены по C только в одну сторону.

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Большая часть изученных семейств не является замкнутыми и продолжается по $C \rightarrow -\infty$.

Семейства периодических решений

Периодические решения не являются изолированными, а формируют однопараметрические семейства. Они могут быть условно разделены на несколько типов в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений C .

Полуоткрытые семейства, которые могут быть продолжены по C только в одну сторону.

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Большая часть изученных семейств не является замкнутыми и продолжается по $C \rightarrow -\infty$.

Семейства периодических решений

Периодические решения не являются изолированными, а формируют однопараметрические семейства. Они могут быть условно разделены на несколько типов в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений C .

Полуоткрытые семейства, которые могут быть продолжены по C только в одну сторону.

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Большая часть изученных семейств не является замкнутыми и продолжается по $C \rightarrow -\infty$.

Предельный вариант задачи Хилла

Промежуточная задача Энона

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + 3x, \\ \ddot{y} = -2\dot{x}, \end{cases}$$

Общее решение

$$x = K_1 \cos t + K_2 \sin t + 2K_3,$$

$$y = -2K_1 \sin t + 2K_2 \cos t - 3K_3 t + K_4,$$

Предельный вариант задачи Хилла

Промежуточная задача Энона

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + 3x, \\ \ddot{y} = -2\dot{x}, \end{cases}$$

Общее решение

$$x = K_1 \cos t + K_2 \sin t + 2K_3,$$

$$y = -2K_1 \sin t + 2K_2 \cos t - 3K_3 t + K_4,$$

Решения плоской промежуточной задачи Энона

Решения II вида по Пуанкаре

Такие орбиты будут ударными и в точке соударения гладкие свойства решений нарушаются. Должно быть выполнено одно из двух условий: либо $K_2 \neq 0$, либо $\sin t_1 = 0$.

Такое решение линейной системы не будет периодическим, но может определять решение, которое при определенном выборе начала отсчета времени удовлетворяет следующим условиям:

$$x(-t_1) = x(t_1) = y(-t_1) = y(t_1) = 0.$$

т. е. является ударным.

Решения плоской промежуточной задачи Энона

Решения II вида по Пуанкаре

Такие орбиты будут ударными и в точке соударения гладкие свойства решений нарушаются. Должно быть выполнено одно из двух условий: либо $K_2 \neq 0$, либо $\sin t_1 = 0$.

Такое решение линейной системы не будет периодическим, но может определять решение, которое при определенном выборе начала отсчета времени удовлетворяет следующим условиям:

$$x(-t_1) = x(t_1) = y(-t_1) = y(t_1) = 0.$$

т. е. является ударным.

Решения-дуги $\pm j$

В работе используются только порождающие решения-дуги, симметричные относительно оси OX .

$$K_2 \neq 0$$

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{3}{4} t_1,$$

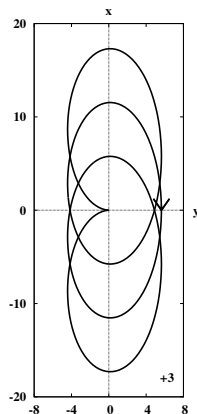
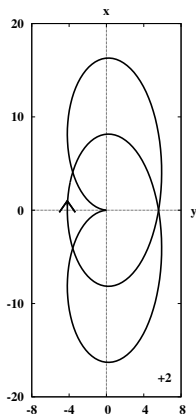
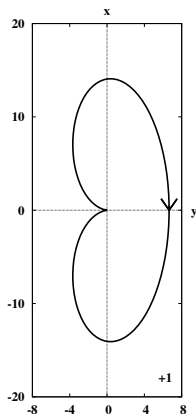
$$x = K_1(\cos t - \cos t_1),$$

$$y = K_1 \left(-2 \sin t + 2 \frac{t}{t_1} \sin t_1 \right),$$

$$C = -K_1^2 \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 t_1 \right),$$

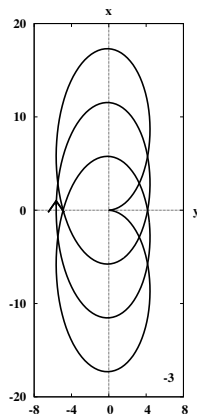
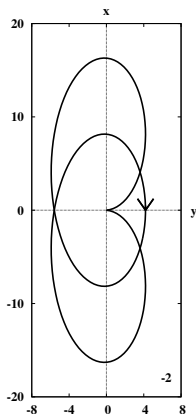
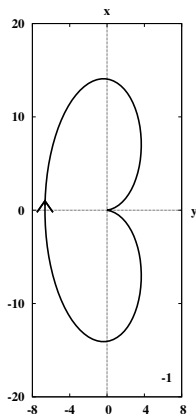
$$-t_1 \leq t \leq t_1.$$

Решения-дуги +1, +2, +3



Здесь и далее указаны безразмерные единицы.

Для системы Солнце–Земля 1 Хилл $\approx 2,166$ млн. км.

Решения-дуги -1 , -2 , -3 

Здесь и далее указаны безразмерные единицы.

Для системы Солнце–Земля $1 \text{ Хилл} \approx 2,166 \text{ млн. км.}$

Предельные орбиты классических семейств

Еще в 60-х годах было показано, что либрационные орбиты \mathbf{a} и \mathbf{c} в пределе по параметру $C \rightarrow -\infty$ дают дуги $\{\pm 1\}$.

Предельные орбиты классических семейств

Порождающие дуги $\{\pm 2\}$ являются предельными решениями семейства спутниковых орбит \mathbf{g}' .

Новые семейства

В работе 2003 года М. Нèпон анонсировал новые семейства периодических решений задачи Хилла, которые были найдены им методом «грубой силы». Среди этих семейств были семейства \mathbf{H}_b и \mathbf{H}_f , которые демонстрировали близкие свойства, а именно:

- порождались предельными решениями вида $\{+2, +1\}$ или $\{+2, +1, +1\}$;
- семейства периодических решений имели устойчивые орбиты в узком диапазоне значений параметра C ;
- в указанном выше диапазоне орбиты семейств представляли собой комбинацию спутниковой и либрационной орбит.

Гипотеза о существовании новых семейств

Была высказана гипотеза о существовании и других семейств периодических орбит задачи Хилла, которые могут быть получены из порождающих решений вида $\{+2, (+1)^n\}$, где показатель n означает повторение дуги n раз. Такие семейства были найдены для $n = 3, 4$.

Общие свойства порождающих решений вида $\{+2, (+1)^n\}$

Численный анализ семейств периодических решений, порожденных дугами вида $\{+2, (+1)^n\}$ показал, что

- семейства продолжаются до орбит, совершающих один оборот вокруг Земли и n оборотов вокруг точки либрации;
- каждое из семейств содержит устойчивые в линейном приближении орбиты;
- плоские периодические решения являются порождающими для пространственных решений;
- орбиты каждого из семейств задачи Хилла продолжаются в периодические решения ОЗТТ для значения μ , соответствующего случаю Солнце-Земля.

Общие свойства порождающих решений вида $\{+2, (+1)^n\}$

Численный анализ семейств периодических решений, порожденных дугами вида $\{+2, (+1)^n\}$ показал, что

- семейства продолжаются до орбит, совершающих один оборот вокруг Земли и n оборотов вокруг точки либрации;
- каждое из семейств содержит устойчивые в линейном приближении орбиты;
- плоские периодические решения являются порождающими для пространственных решений;
- орбиты каждого из семейств задачи Хилла продолжаются в периодические решения ОЗТТ для значения μ , соответствующего случаю Солнце-Земля.

Общие свойства порождающих решений вида $\{+2, (+1)^n\}$

Численный анализ семейств периодических решений, порожденных дугами вида $\{+2, (+1)^n\}$ показал, что

- семейства продолжаются до орбит, совершающих один оборот вокруг Земли и n оборотов вокруг точки либрации;
- каждое из семейств содержит устойчивые в линейном приближении орбиты;
- плоские периодические решения являются порождающими для пространственных решений;
- орбиты каждого из семейств задачи Хилла продолжаются в периодические решения ОЗТТ для значения μ , соответствующего случаю Солнце-Земля.

Общие свойства порождающих решений вида $\{+2, (+1)^n\}$

Численный анализ семейств периодических решений, порожденных дугами вида $\{+2, (+1)^n\}$ показал, что

- семейства продолжаются до орбит, совершающих один оборот вокруг Земли и n оборотов вокруг точки либрации;
- каждое из семейств содержит устойчивые в линейном приближении орбиты;
- плоские периодические решения являются порождающими для пространственных решений;
- орбиты каждого из семейств задачи Хилла продолжаются в периодические решения ОЗТТ для значения μ , соответствующего случаю Солнце-Земля.

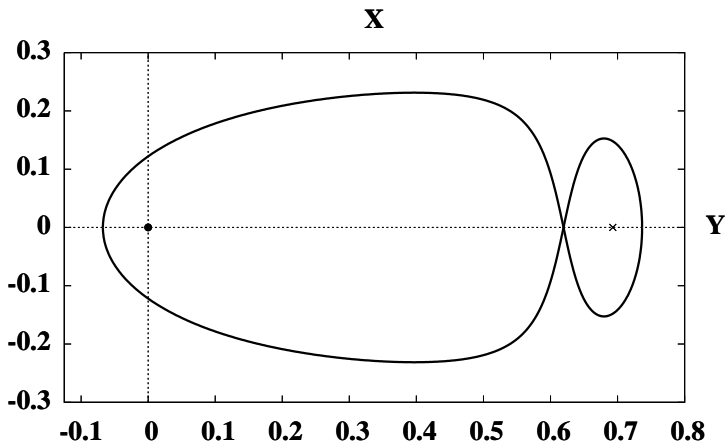
Общие свойства порождающих решений вида $\{+2, (+1)^n\}$

Численный анализ семейств периодических решений, порожденных дугами вида $\{+2, (+1)^n\}$ показал, что

- семейства продолжаются до орбит, совершающих один оборот вокруг Земли и n оборотов вокруг точки либрации;
- каждое из семейств содержит устойчивые в линейном приближении орбиты;
- плоские периодические решения являются порождающими для пространственных решений;
- орбиты каждого из семейств задачи Хилла продолжаются в периодические решения ОЗТТ для значения μ , соответствующего случаю Солнце-Земля.

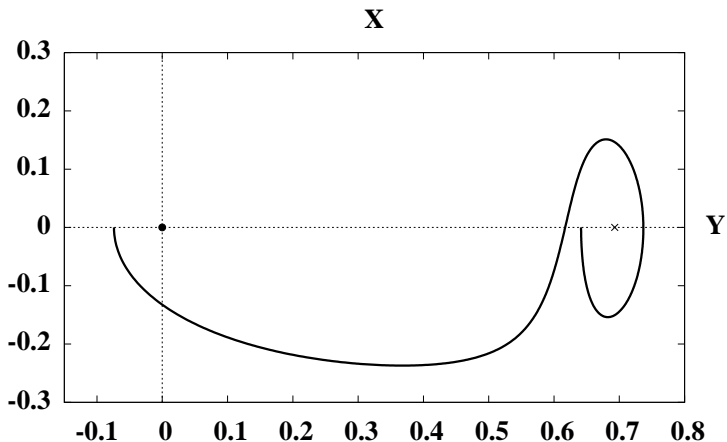
Примеры плоских орбит

Орбита семейства \mathbf{H}_b при $C \approx 4,246$, период 5,359, время пребывания в окрестности $L_2 \approx 2,94$.



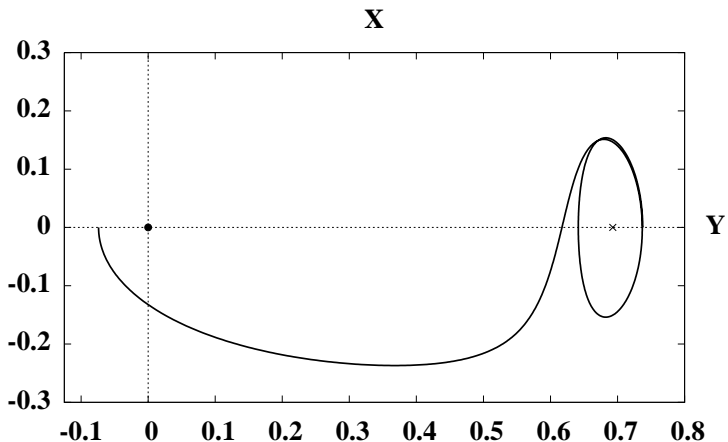
Примеры плоских орбит

Орбита семейства \mathbf{H}_f при $C \approx 4,246$, период 8,404, время пребывания в окрестности $L_2 \approx 5,98$.



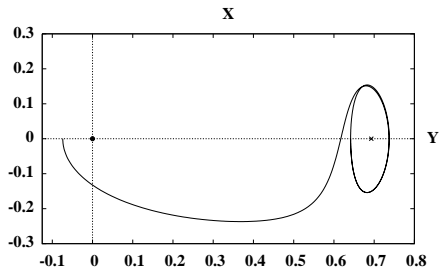
Примеры плоских орбит

Орбита нового семейства \mathbf{B}_a при $C \approx 4,246$, период 11,449, время пребывания в окрестности $L_2 \approx 9,02$.



Примеры плоских орбит

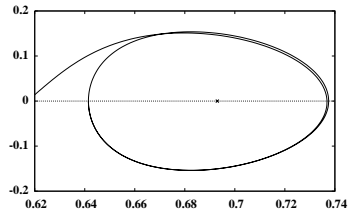
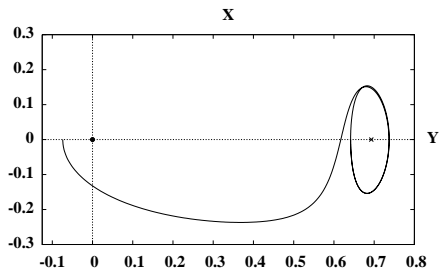
Орбита нового семейства \mathbf{B}_b при $C \approx 4,246$, период 14,494, время пребывания в окрестности $L_2 \approx 12,08$.



Увеличенная окрестность
точки либрации

Примеры плоских орбит

Орбита нового семейства \mathbf{B}_b при $C \approx 4,246$, период 14,494, время пребывания в окрестности $L_2 \approx 12,08$.



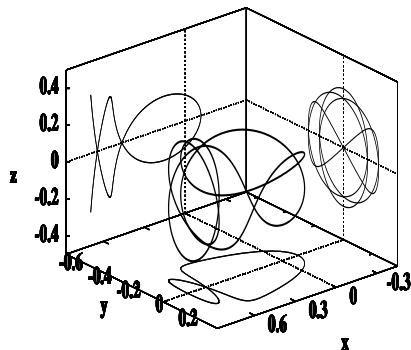
Увеличенная окрестность
точки либрации

Сводная таблица

| Название | Дуги | Период | T_{lib} |
|----------------------|------------------|--------|-----------|
| H_b | $\{+2, +1\}$ | 5,36 | 2,94 |
| H_f | $\{+2, (+1)^2\}$ | 8,40 | 5,98 |
| B_a | $\{+2, (+1)^3\}$ | 11,45 | 9,02 |
| B_b | $\{+2, (+1)^4\}$ | 14,49 | 12,08 |

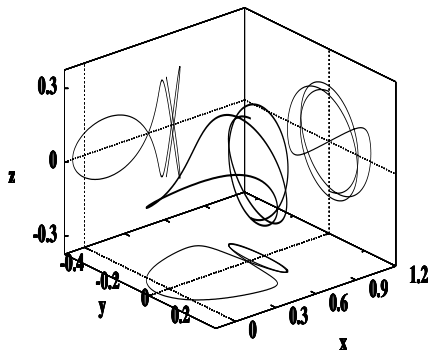
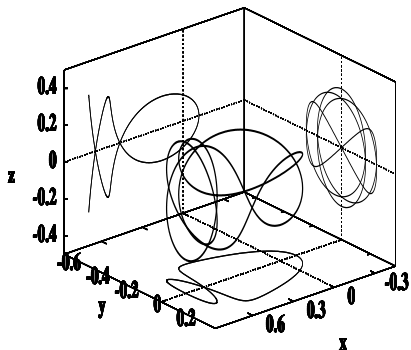
Пространственные орбиты

Для семейств \mathbf{H}_b и \mathbf{H}_f построены пространственные орбиты, сохраняющие в целом общий характер поведения соответствующих плоских орбит



Пространственные орбиты

Для семейств \mathbf{H}_b и \mathbf{H}_f построены пространственные орбиты, сохраняющие в целом общий характер поведения соответствующих плоских орбит



Выводы

С помощью порождающих орбит были найдены семейства периодических решений, совершающих конечное число оборотов в окрестности одной из ближайших точек либрации.

Выводы

С помощью порождающих орбит были найдены семейства периодических решений, совершающих конечное число оборотов в окрестности одной из ближайших точек либрации.

Найденные семейства содержат устойчивые в линейном приближении орбиты, которые могут быть продолжены в периодические решения ОЗТТ.

Выводы

С помощью порождающих орбит были найдены семейства периодических решений, совершающих конечное число оборотов в окрестности одной из ближайших точек либрации.

Найденные семейства содержат устойчивые в линейном приближении орбиты, которые могут быть продолжены в периодические решения ОЗТТ.

Аналогичные орбиты с одно- и двукратным облетом коллинеарной точки либрации были найдены Б. Б. Крейсманом с использованием другой техники.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!