

XXXIV АКАДЕМИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ ПО КОСМОНАВТИКЕ,

*посвященные памяти академика С. П. Королева и других выдающихся
ученых-пионеров освоения космического пространства*

**ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ
ПЕРЕЛЁТА МЕЖДУ КОАКСИАЛЬНЫМИ
ОРБИТАМИ**

П. В. Фадеенков

Pavelf74@mail.ru

Схема перелёта

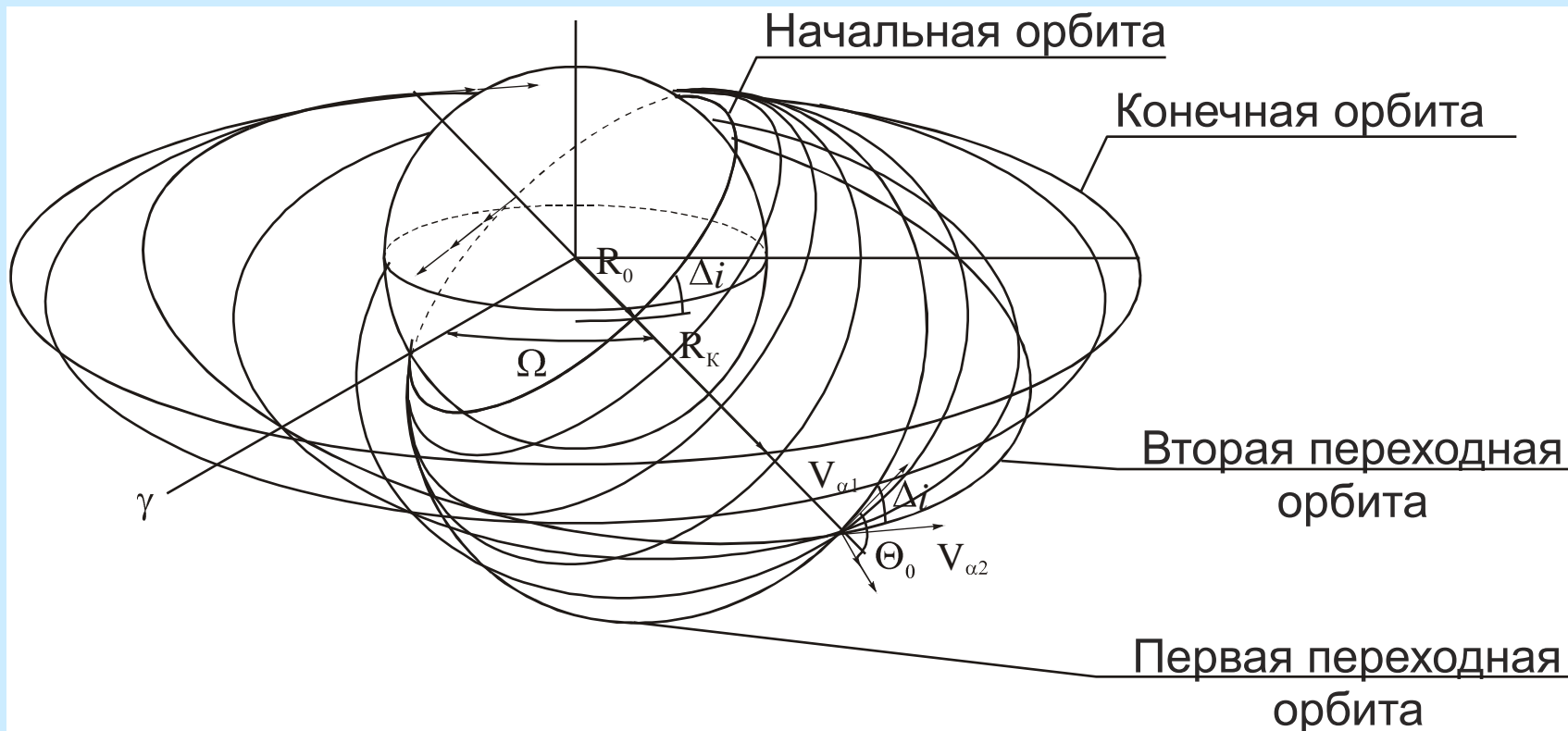


Рисунок 1

Уравнения движения

Исходная система

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{A^3}{\mu(-e^2)}} \left[a_x (+e \cos \vartheta) + a_y e \sin \vartheta \right], \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \left\{ a_y \sin \vartheta + a_x \left[\left(1 + \frac{1}{1+e \cos \vartheta} \right) \cos \vartheta + \frac{e}{1+e \cos \vartheta} \right] \right\}, \\ \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \frac{a_z \cdot \cos u}{1+e \cos \vartheta}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \frac{a_z \cdot \sin u}{(1+e \cos \vartheta) \cdot \sin i}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \left[-a_y \frac{\cos \vartheta}{e} + \frac{a_x}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e \cos \vartheta} \right) \sin \vartheta - a_z \cdot e \cdot \frac{\sin u \cdot \operatorname{ctgi}}{1+e \cos \vartheta} \right], \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \left[\frac{\mu(+e \cos \vartheta)}{A^2(-e^2)^{3/2}} + a_y \frac{\cos \vartheta}{e} - \frac{a_x}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e \cos \vartheta} \right) \sin \vartheta \right], \\ \frac{dV_x}{dt} &= a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a_0 \cdot \delta \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

Система на активном участке

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu(-e^2)}} (1 \pm e) \cdot a_0 \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \cos \theta, \\ \frac{de}{dt} &= \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \cdot a_0 \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \cos \theta, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\sqrt{A(-e^2)} \pm a_0 \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \sin \theta}{1 \pm e}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= 0, \\ \frac{d\omega}{dt} &= 0, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \sqrt{\frac{A(-e^2)}{\mu}} \cdot \frac{\mu(\pm e)^2}{A^2(-e^2)^{3/2}}, \\ \frac{dV_x}{dt} &= a_0 \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_x = a_0 \cdot \delta \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \cos \theta, \quad a_y = 0, \quad a_z = a_0 \cdot \delta \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \sin \theta$$

$$\cos \vartheta \Big|_{\vartheta=0} = 1, \quad \cos \vartheta \Big|_{\vartheta=\pi} = -1, \quad \sin \vartheta \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \sin \vartheta \Big|_{\vartheta=\pi} = 0, \quad u = \vartheta$$

Определение угла отклонения вектора тяги от плоскости орбиты

1. Постоянство радиуса

апоцентра

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{A^3}{\mu(1-e^2)}} \cdot (1 \pm e) \cdot a_0 \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \cos \theta \\ \frac{de}{dt} &= \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{\mu}} \cdot a_0 \cdot \exp\left(\frac{V_x}{c}\right) \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cdot (1 \mp e) = const \quad (3)$$

2. Принцип максимума Понтрягина

2.а. сокращенная система

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dV_x} &= \pm 2 \cdot C_1 \cdot \sqrt{1 \pm e} \cdot \cos \theta, \\ \frac{di}{dV_x} &= \pm \frac{C_1 \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 \pm e}}, \end{aligned} \right\} C_1 = \sqrt{\frac{A \cdot (1 \mp e)}{\mu}} = const \quad (4)$$

2.б. Гамильтониан

$$H = \pm 2 \cdot C_1 \cdot \sqrt{1 \pm e} \cdot \cos \theta \cdot \psi_e \pm \frac{C_1 \cdot \sin \theta}{\sqrt{1 \pm e}} \cdot \psi_i + 1 = 0 \quad (5)$$

2.в. оптимальное управление

$$ctg \theta_{opt} = \frac{2 \cdot (1 \pm e) \cdot \psi_e}{\psi_i} \quad \text{или} \quad \sin \theta_{opt} = \frac{C}{\sqrt{1 \pm e}}, \quad \cos \theta_{opt} = \frac{\sqrt{1 \pm e - C^2}}{\sqrt{1 \pm e}} \quad (6)$$

Определение угла отклонения вектора тяги от плоскости орбиты

3. Интегралы

$$i_k - i_0 = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 \pm e_k - C^2}}{C}\right) - \arctg\left(\frac{\sqrt{1 \pm e_0 - C^2}}{C}\right),$$

$$V_x = \sqrt{\frac{\mu}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)}} \cdot \left| \sqrt{1 \pm e_k - C^2} - \sqrt{1 \pm e_0 - C^2} \right|. \quad (7)$$

3.а. подстановка

$$C = \sqrt{1 \pm e_0} \cdot \sin \theta_0 \quad (8)$$

3.б. оптимальный угол отклонения вектора тяги от плоскости орбиты

$$\operatorname{tg} \theta_{opt} = \frac{\sin(i - i_0)}{\cos(i - i_0) - \sqrt{\frac{1 \pm e_0}{1 \pm e}}} \quad (9)$$

3.в. уравнение связи углов отклонения вектора тяги и наклона орбиты

$$\theta - i = \theta_0 - i_0 \quad (10)$$

3.г. выражение для затрат характеристической скорости

$$V_x = \sqrt{\frac{\mu}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)}} \cdot \sqrt{2 \pm e_0 \pm e_k - 2 \cdot \sqrt{(1 \pm e_0) \cdot (1 \pm e_k)} \cdot \cos \Delta i} \quad (11)$$

Определение угла отклонения вектора тяги от плоскости орбиты

4. Определение радиуса апогея переходных орбит

4.а. начальный угол отклонения вектора тяги

от плоскости орбиты

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\sin \Delta i}{\cos \Delta i - \sqrt{\frac{1+e_1}{1+e_2}}}$$

$$e_1 = \frac{r_{\alpha \text{ пер}} - r_{\pi 0}}{r_{\alpha \text{ пер}} + r_{\pi 0}} \quad (12)$$

$$e_2 = \frac{r_{\alpha \text{ пер}} - r_{\pi \kappa}}{r_{\alpha \text{ пер}} + r_{\pi \kappa}}$$

4.б. условие монотонного изменения Δ , e

$$\cos \Delta i - \sqrt{\frac{1+e_1}{1+e_2}} \geq 0 \quad (13)$$

4.в. радиус апогея переходных орбит

$$r_{\alpha \text{ пер}} \geq \frac{\sin^2 \Delta i}{\frac{\cos^2 \Delta i}{r_{\pi 0}} - \frac{1}{r_{\pi \kappa}}} \quad (14)$$

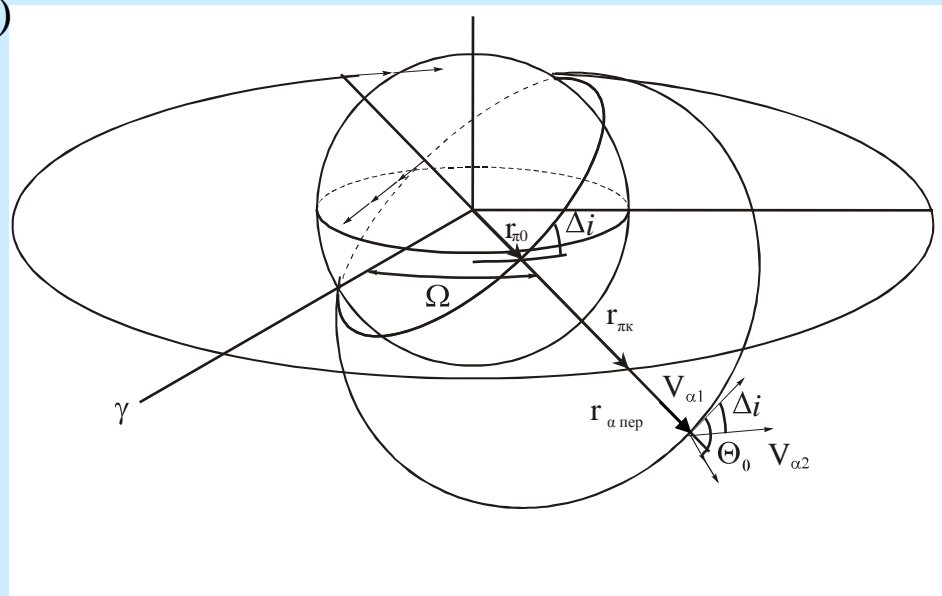


Рисунок 2

Треугольник скоростей

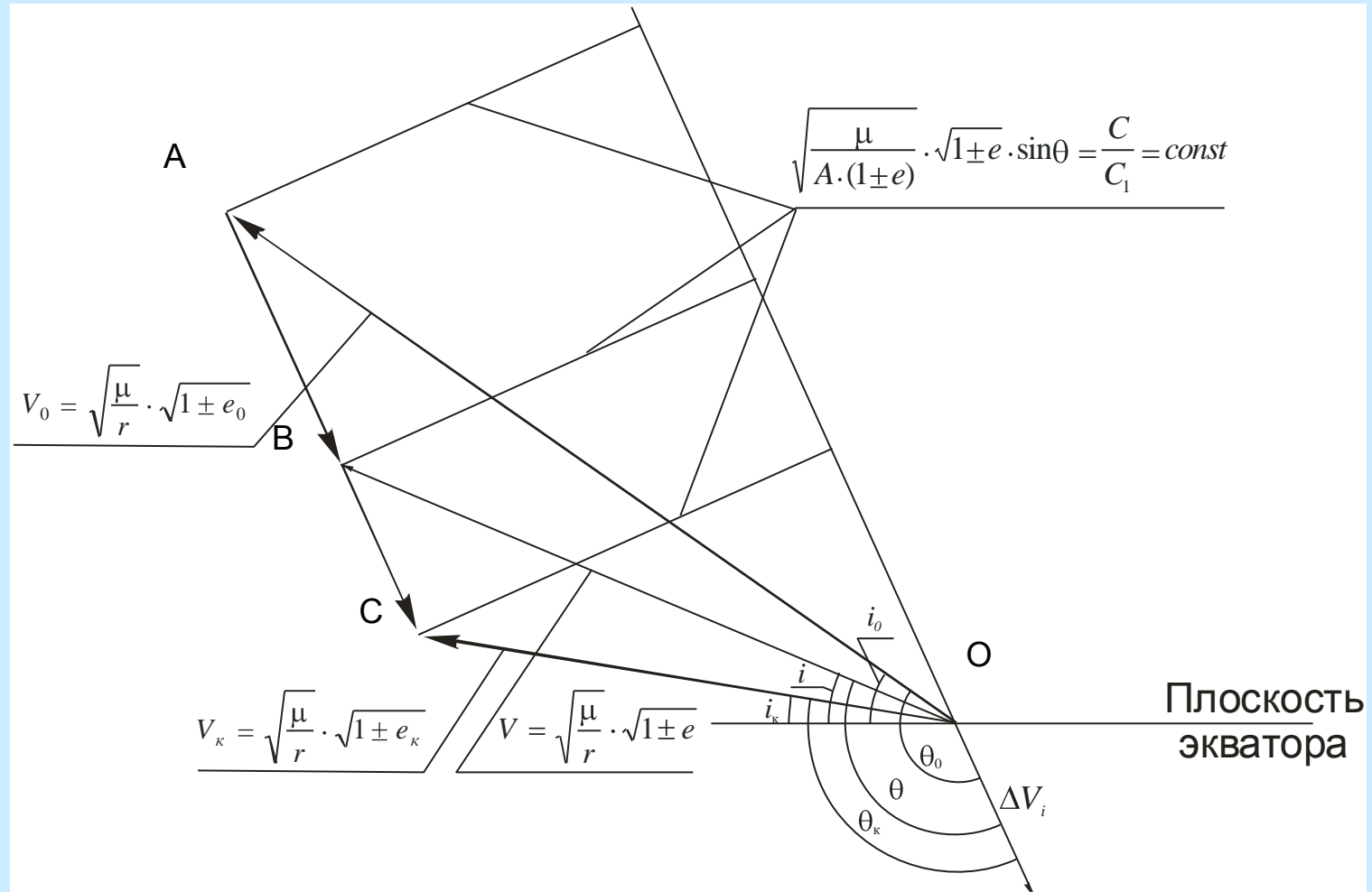


Рисунок 3

Зависимости параметров орбит от затрат характеристической скорости

Определение эксцентриситета с применением теоремы косинусов

$$\begin{aligned}
 OB^2 &= \frac{\mu \cdot (1 \pm e)}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)} = \\
 &= \frac{\mu \cdot (1 \pm e_0)}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)} + \Delta V^2 - 2 \cdot \Delta V \cdot \frac{\sqrt{\frac{\mu \cdot (1 \pm e_0)}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)}} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)}} \cdot \left(\sqrt{1 \pm e_0} - \sqrt{1 \pm e_\kappa} \cdot \cos \Delta i \right)}{V_x} = \\
 &= \frac{\mu}{A_0 \cdot (1 \mp e_0)} \cdot (1 \pm e_0 + \Delta V^2 \cdot \frac{A_0 \cdot (1 \mp e_0)}{\mu} - \frac{2 \cdot \Delta V \cdot \sqrt{(1 \pm e_0)} \cdot \left(\sqrt{1 \pm e_0} - \sqrt{1 \pm e_\kappa} \cdot \cos \Delta i \right)}{V_x})
 \end{aligned} \tag{15}$$

Эксцентриситет

$$e(\Delta V) = e_0 \pm \Delta V^2 \cdot \frac{A_0 \cdot (1 \mp e_0)}{\mu} \mp \frac{2 \cdot \Delta V \cdot \sqrt{(1 \pm e_0)} \cdot \left(\sqrt{1 \pm e_0} - \sqrt{1 \pm e_\kappa} \cdot \cos \Delta i \right)}{V_x} \tag{16}$$

Наклонение

$$i(\Delta V) = i_0 \pm \arcsin \left(\sin \Delta i \cdot \frac{\Delta V}{V_x} \sqrt{\frac{1 \pm e_\kappa}{1 \pm e}} \right) \tag{17}$$

Алгоритм построения оптимальной траектории

Граничные условия перелёта между круговыми орбитами

$$A_0 = 6471 \text{ км}, \quad i_0 = 62,8^\circ$$

$$A_k = 42241 \text{ км}, \quad i_k = 0^\circ$$

1. Определение радиуса апогея переходных орбит

$$r_{\alpha \text{ пер}} = 98126,3 \text{ км}$$

2. Определение эксцентриситетов переходных орбит

$$e_1 = 0,868 \quad e_2 = 0,465$$

3. Определение затрат характеристической скорости по этапам

$$V_{x1} = \sqrt{\frac{\mu}{A_0}} \cdot \left(\sqrt{(1+e_1)} - 1 \right) = 2,879 \text{ км/с}$$

$$V_{x2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\alpha \text{ пер}}}} \cdot \sqrt{2 - e_1 - e_2 - 2 \cdot \sqrt{(1-e_1) \cdot (1-e_2)} \cdot \cos \Delta i} = 1,471 \text{ км/с}$$

$$V_{x3} = \sqrt{\frac{\mu}{A_k}} \cdot \left(\sqrt{(1+e_2)} - 1 \right) = 0,523 \text{ км/с}$$

4. Построение графиков зависимостей по формулам (16), (17)

Графики зависимостей параметров орбит от затрат характеристической скорости

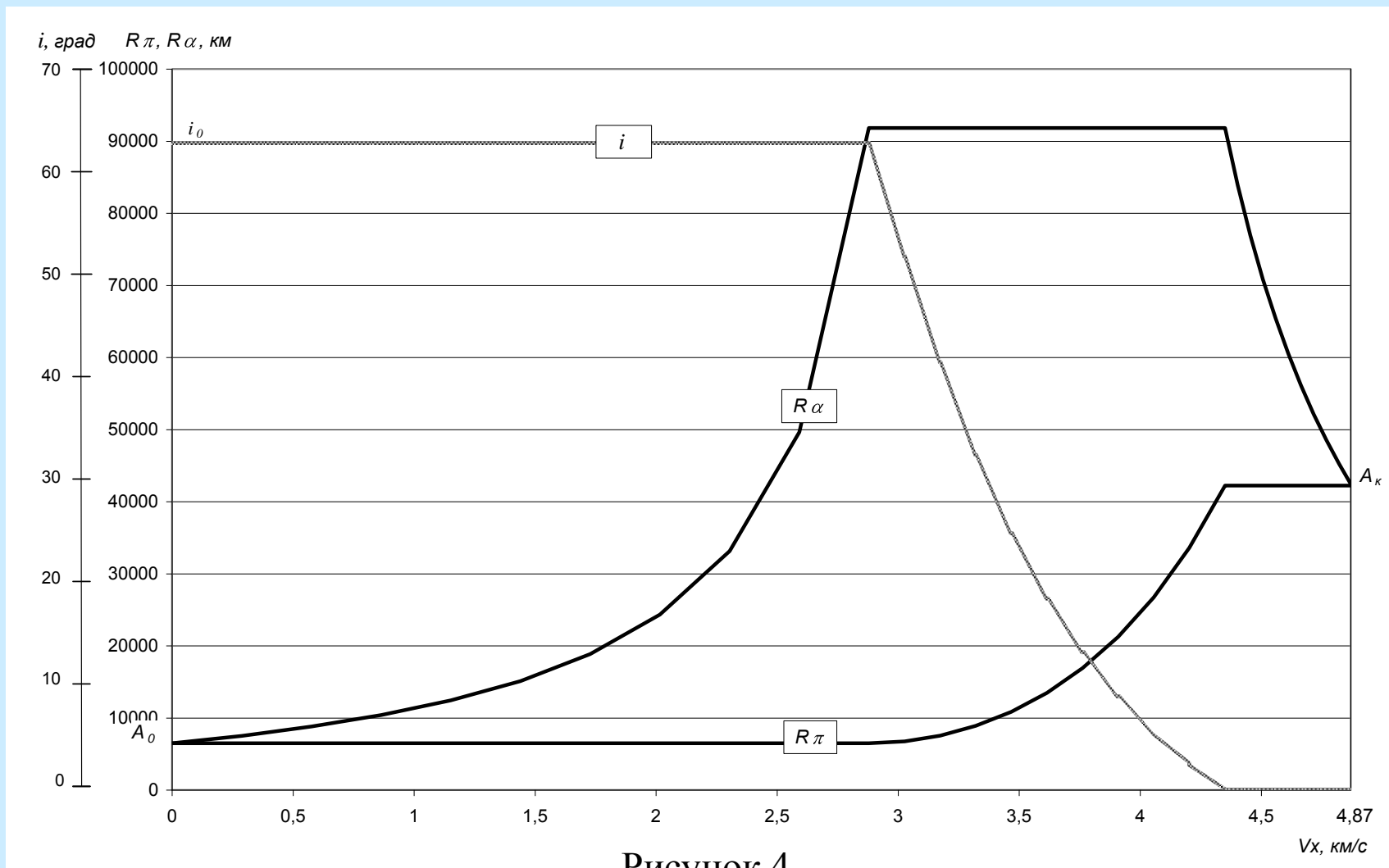


Рисунок 4

Графики зависимостей параметров орбит от затрат характеристической скорости

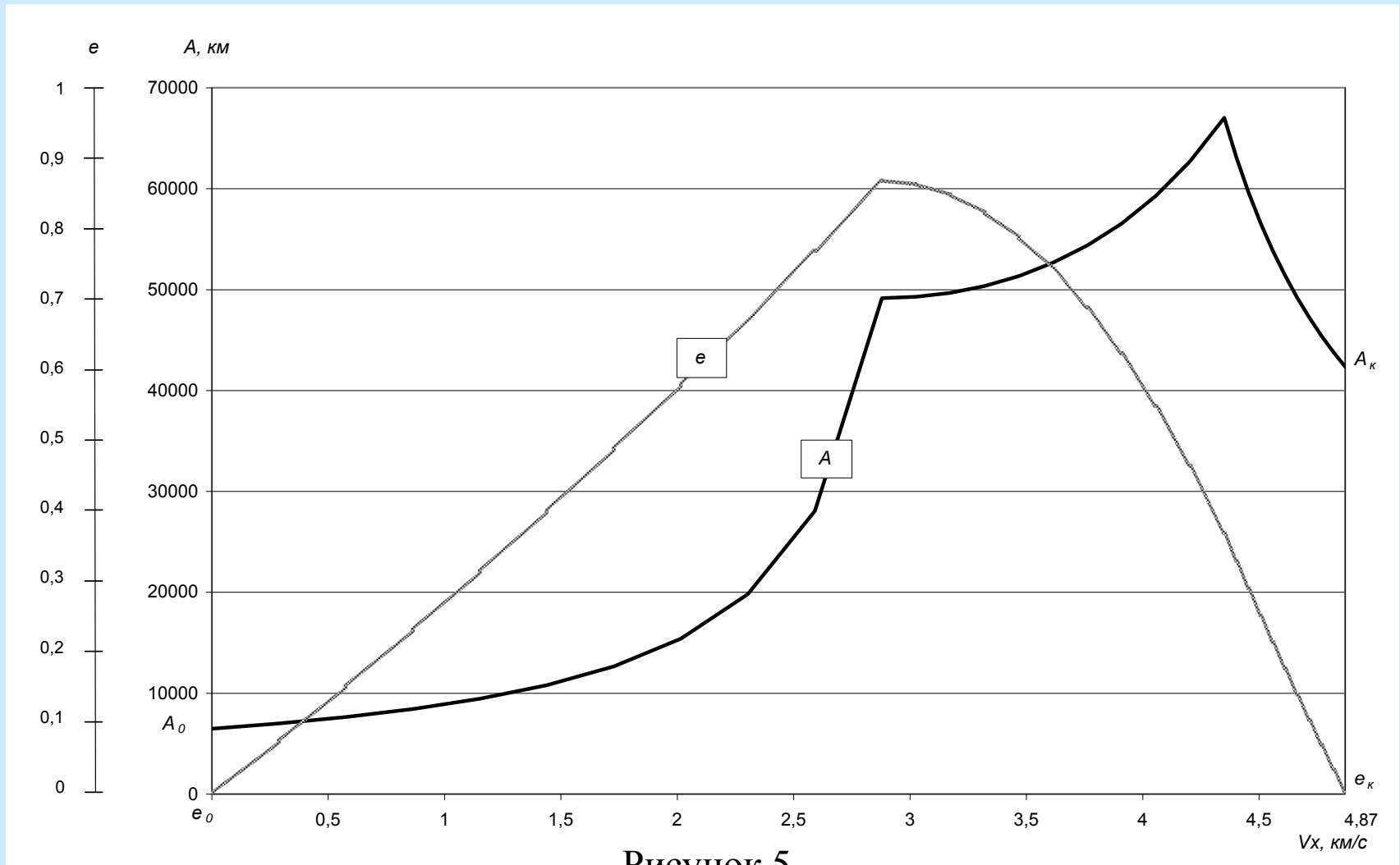


Рисунок 5

Графики зависимостей параметров орбит от времени перелёта

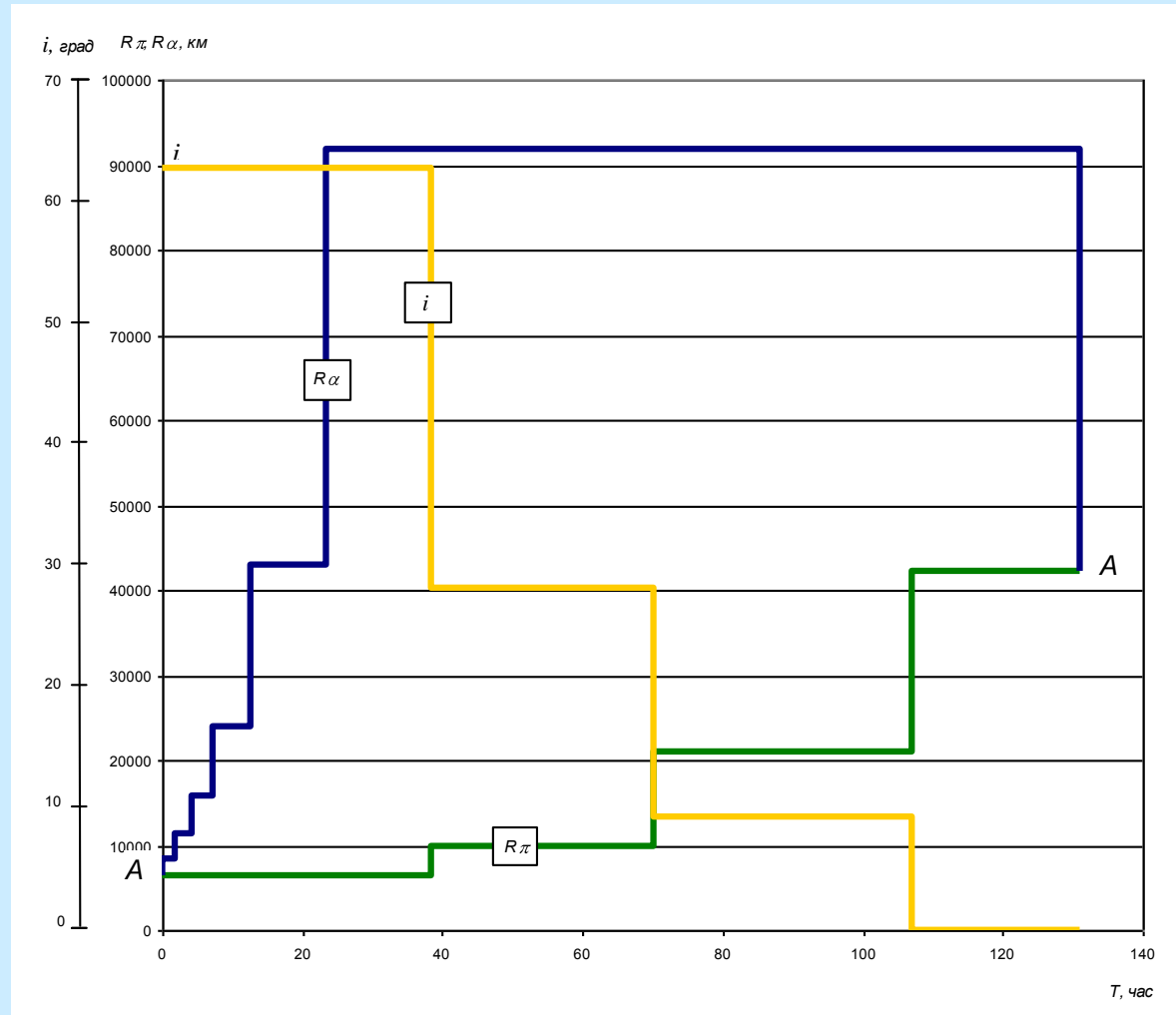


Рисунок 6