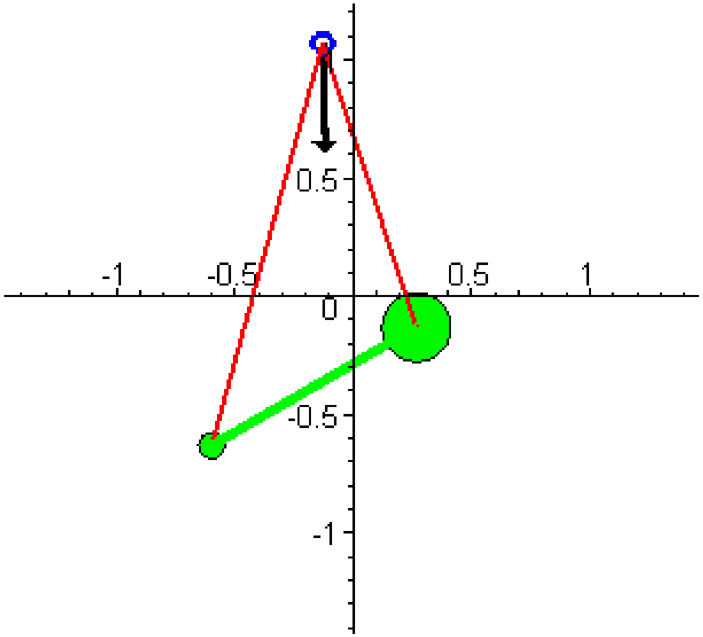
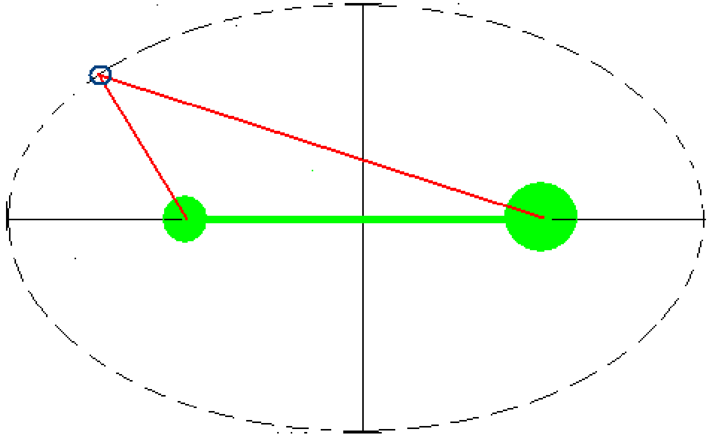
Родников А.В.

О динамике околосепаратрисных вращений гантелевидного спутника с леерной связью

Лееръ - веревка, туго протянутая въ косом или лежачемъ положеніи… леера же протягиваются вдоль палубы… за нихъ люди хватаются на ходу . (Толковый словарь живаго великорусскаго языка Владимира Даля, Москва 1881)

Леер (от голл. ***Leier***), с у д о в о й, трос, служащий для подъема косых парусов, ограждения палубных отверстий или открытых палуб в местах, не защищенных комингсом или фальшбортом, подвески шлангов при передаче жидкого топлива на ходу и др…. (БСЭ, Изд-е 3-е, Москва 1973)



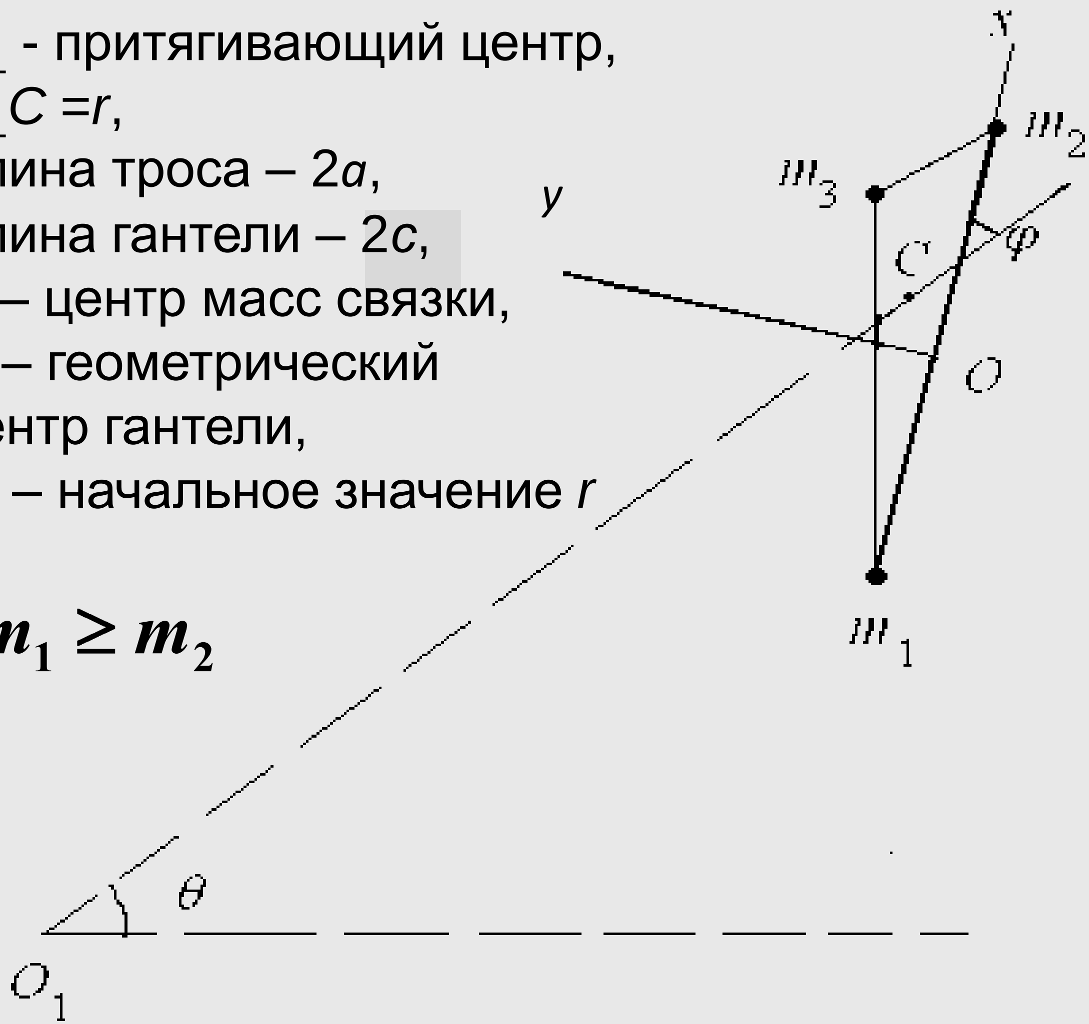


Dutch maritime term **'leier**' means the rope with both fixed ends

Обозначения, переменные, параметры

O_1 - притягивающий центр,
$O_1C = r$,
длина троса – $2a$,
длина гантели – $2c$,
C – центр масс связки,
O – геометрический центр гантели,
r_0 – начальное значение r

$$\boldsymbol{m_1 \geq m_2}$$



$$\kappa \ll 1$$

$$d\tau = \dot{\theta}\,dt, \quad (\;)' = \frac{d}{d\tau}$$

Переменные:

θ , r, φ, γ

γ - эксцентрическая аномалия эллипса, по которому движется груз m_3

$$\dot{\theta} = \mathrm{const} \qquad r = \mathrm{const}$$

Параметры

$$\kappa = \frac{a^2 (m_1 + m_2) m_3}{4c^2 m_1 m_2}$$

$$\mu = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \qquad e = \frac{c}{a}$$

$$0 \leq \mu < 1;\ 0 < e < 1$$

Структура Лагранжиана

$$\kappa \ll 1$$

$$L = L_2 + L_1 + L_0$$

$$L_2 = \boxed{\varphi'^2/2} + \kappa L_{21}(\varphi', \gamma', \gamma; e, \mu) \qquad L_0 = \boxed{3/2\cos^2\varphi} + \kappa L_{01}(\varphi, \gamma; e, \mu)$$

$$L_1 = \kappa L_{11}(\varphi', \gamma; e, \mu)$$

Интеграл Якоби

$$L_2 - L_0 = h$$

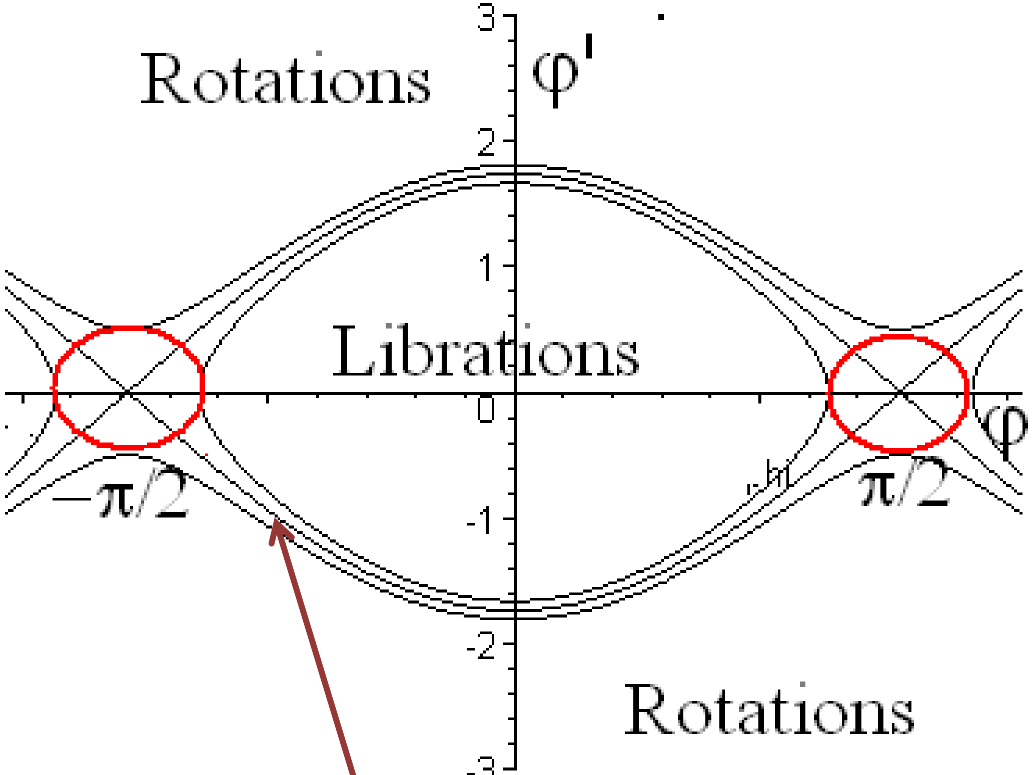
Условия нахождения на связи

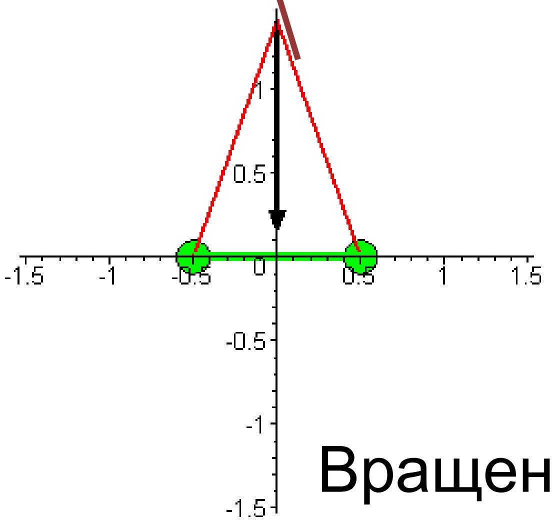
$$\sqrt{1-e^2}\,(1 - e\mu\cos\gamma)(\varphi' + 1)^2 + 2(1 - e^2\cos^2\gamma)(1 + \varphi')\gamma' + \sqrt{1-e^2}\,\gamma'^2 -$$

$$-\frac{3}{2}(1-e^2)\sin 2\gamma \sin 2\varphi +$$

$$+\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(3\cos 2\varphi\cos 2\gamma + 1 - e\mu\cos\gamma(1 + 3\cos 2\varphi)\right) \geq 0$$

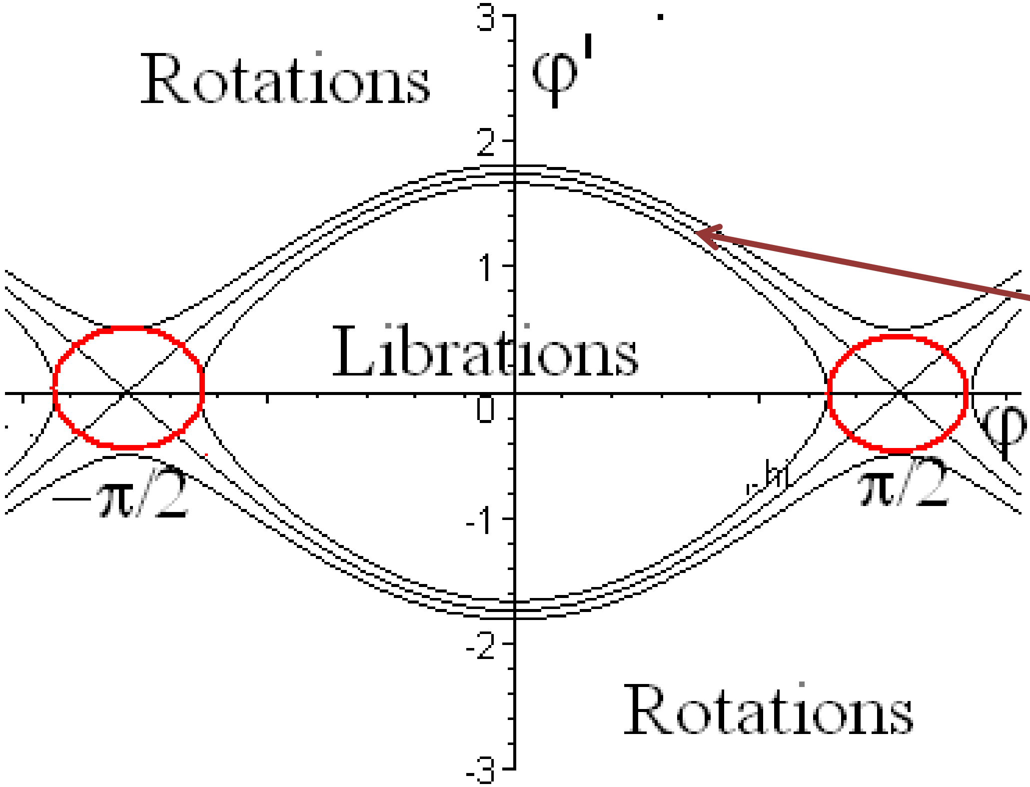
Околосепаратрисные движения гантели

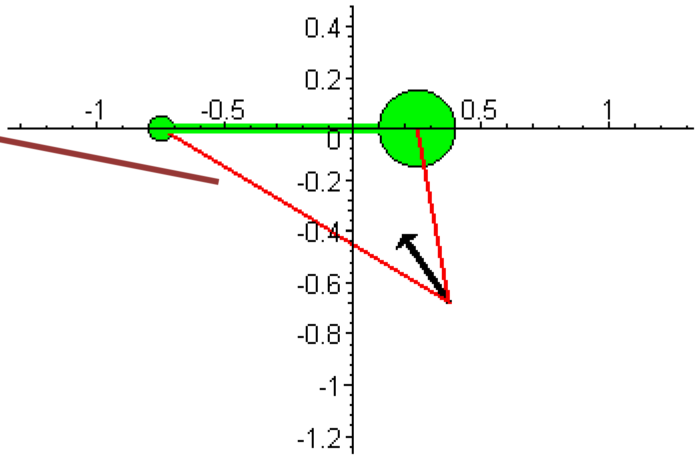




Вращения

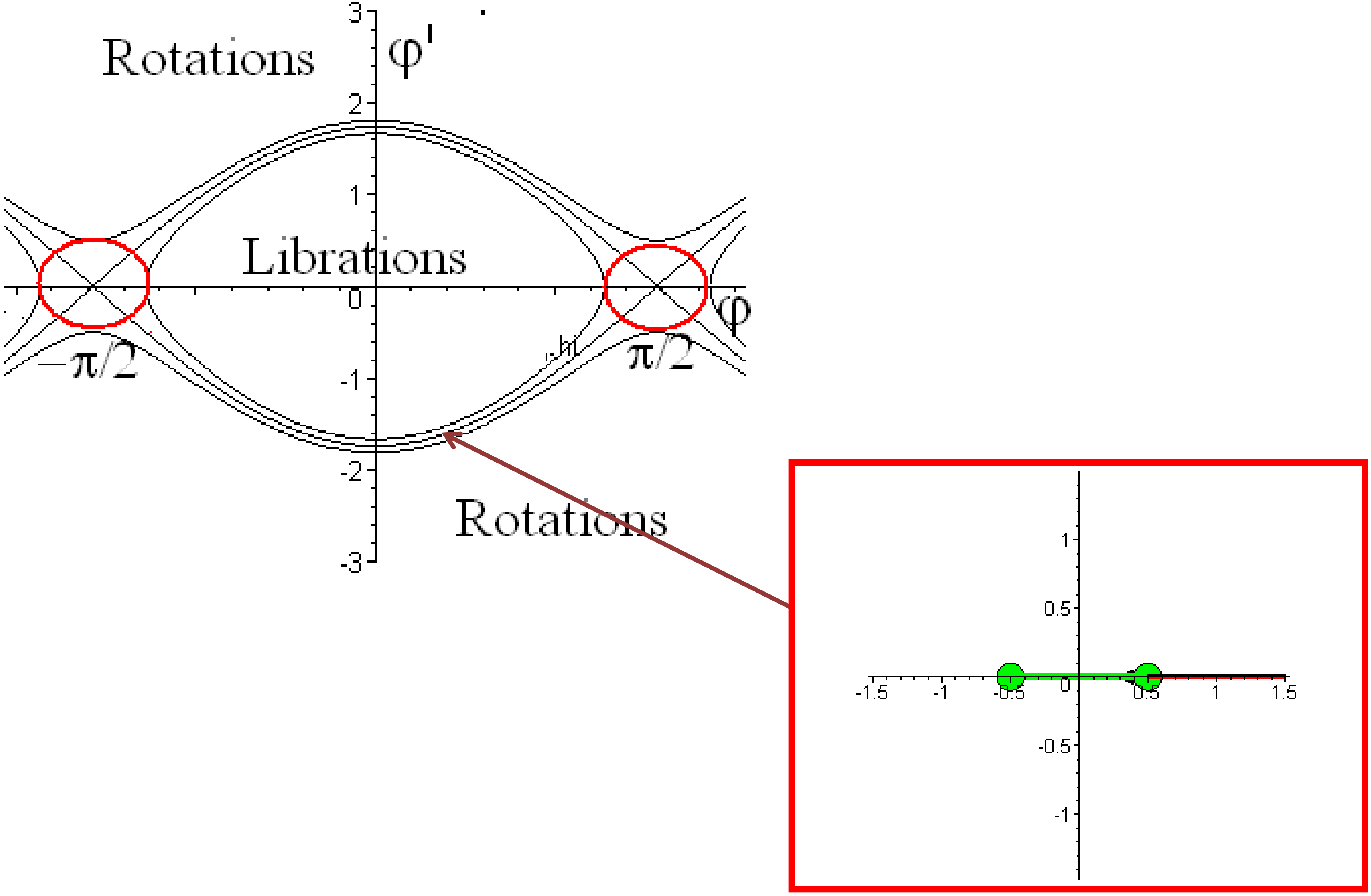
Околосепаратрисные движения гантели





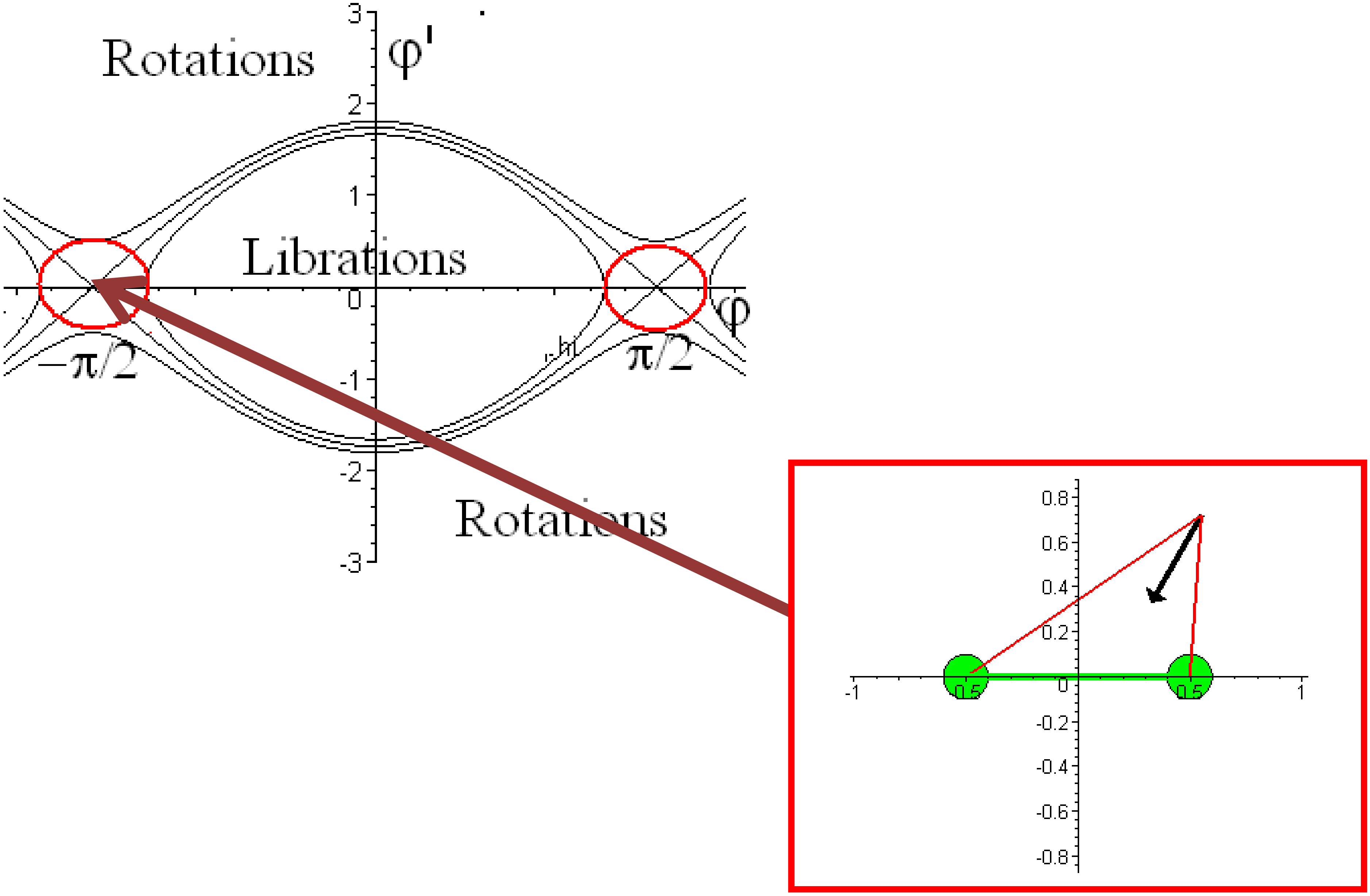
Колебания

Околосепаратрисные движения гантели



‘Tumbling motions’

Околосепаратрисные движения гантели



Асимптотическое (?) движение

Замечания и простейшие выводы.

Пусть h_0 – наименьшее значение константы интеграла Якоби если $\varphi=\pm\pi/2$ (гантель – горизонтальна).

1. Груз на леере существенно влияет на движение гантели только если h близко к h_0.

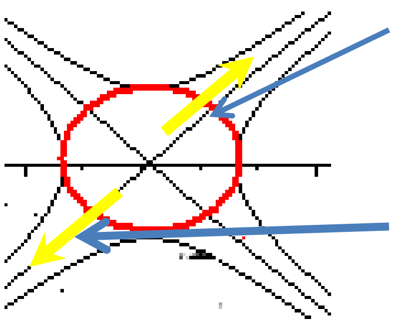
2. Если $h<h_0$ возможны только колебания

3. Околосепаратрисное движение гантели есть последовательность полуоборотов по и против часовой стрелки, начинающихся в окрестности горизонтального равновесия

Локальная задача: определение направления очередного полуоборота

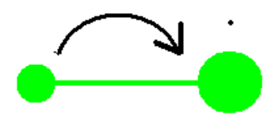
Рассмотрим движение гантели в окрестности горизонтального равновесия. Подставляя $\boxed{\varphi = \pm\pi/2 + \sqrt{\kappa}\psi}$ в уравнения движения и пренебрегая слагаемыми порядка κ и более, получим ЛДУ для φ. Его решение имеет вид

$$\boxed{\psi(\tau) = Ce^{\tau\sqrt{3}} + < \text{ограниченн аяфункция } \tau >}$$



Если $C > 0$ то

Если $C < 0$ то

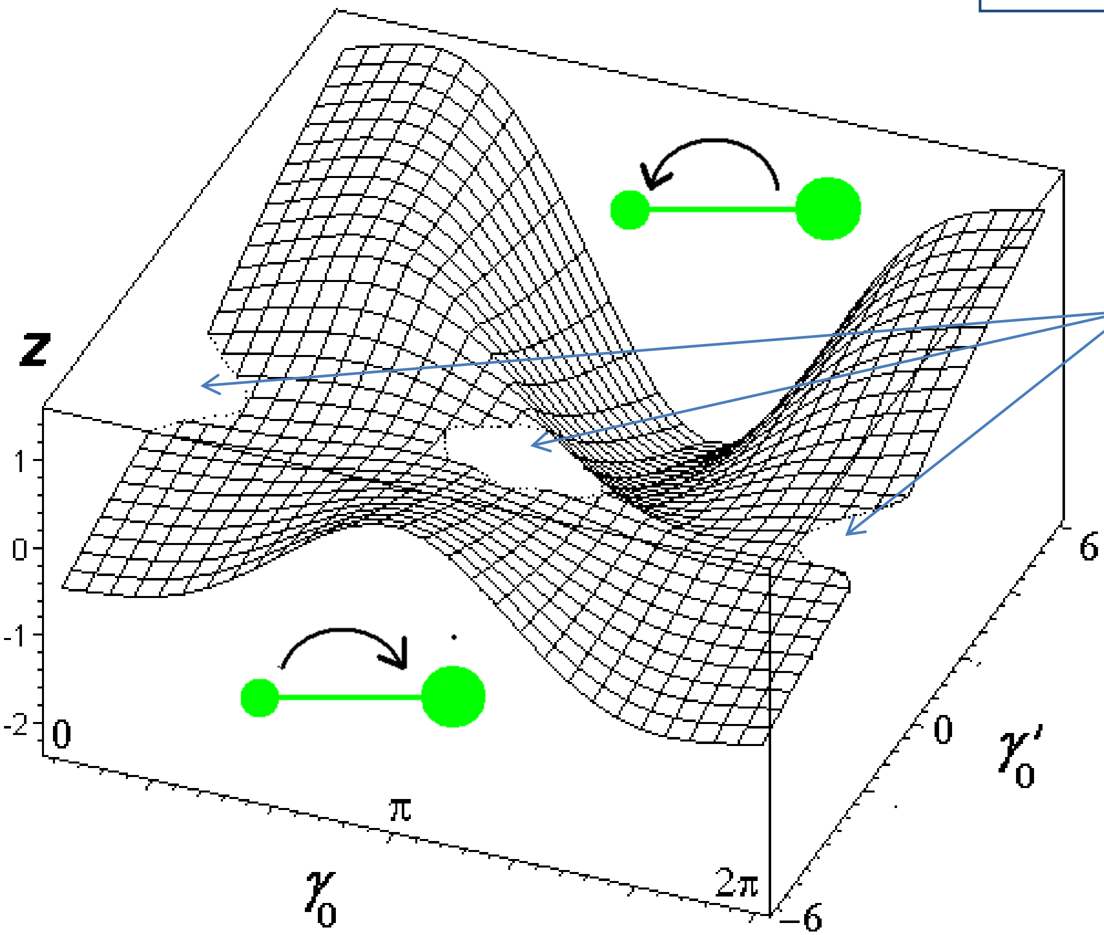


Если $C_1 = 0$ то имеют место асимптотические решения укороченных уравнений. В этом случае гантель некоторое время остается в окрестности горизонтального равновесия

Поверхность асимптотических движений

$$C=0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa^{-1}\left(\sqrt{3}\varphi_0+\sqrt{3}\pi/2+\varphi_0'\right)=A\left(\gamma_0,\gamma_0\right)$$

$$z=\kappa^{-1}\left(\sqrt{3}\varphi_0+\sqrt{3}\pi/2+\varphi_0'\right)$$



Области, где связное движение невозможно, вырезаны (фактически, здесь необходимо вырезать целые цилиндры, параллельные оси z

В нашем случае укороченное уравнение для γ не зависит от φ и интегрируется независимо

Некоторые свойства функции *A*

1. A_+ является линейной функцией μ, т. е. $A_+ = A_0 + \mu A_\mu$, причем A_0 есть π-периодическая функция γ_0, A_μ есть 2π-периодическая функция $\gamma 0$.

2. Если $\gamma_0 = 0$ или $\gamma_0 = \pi$ и $\gamma_0' = 0$, то $A_+ = 0$. Если же $\gamma_0 = \pi/2$ и $\gamma_0' = 0$, то $A_+ = \mu e\sqrt{3(1-e^2)}$.

3. Если $\gamma_0' = \pm\sqrt{3(1-e^2)}/e$, то

$$A_+ = \frac{(2e \pm \sqrt{3})\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{4-3e^2}} \left(2\mu\sqrt{4-3e^2}\cos(\gamma_0 \mp \arcsin e) - e\cos\left(2\gamma_0 \mp \arcsin\frac{e}{\sqrt{4-3e^2}}\right)\right).$$

4. Если $\gamma_0' \to \infty$, то A_+ стремится к линейной по γ_0' функции, т. е. $A_+ = A_{1+}\gamma_0' + A_{0+} + o(1/\gamma_0')$, где

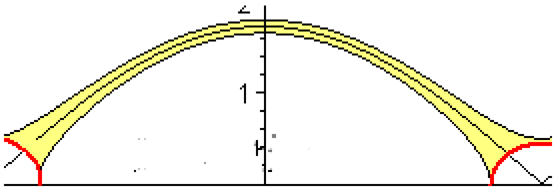
$$A_{1+} = \sqrt{1-e^2}\left(\mu e\cos\gamma_0 - 1 + \frac{\pi\sqrt{1-e^2\cos^2\gamma_0}}{2E(e)}\right),$$

$$A_{0+} = (1-e^2)\frac{K(e)}{E(e)} + \sqrt{3(1-e^2)}\left(\frac{\pi\int_0^{\gamma_0}\sqrt{1-e^2\cos^2 x}\,dx}{2E(e)} - \gamma_0 + \mu e\sin\gamma_0\right) +$$

$$+2\mu e\cos\gamma_0 + e^2\sin^2\gamma_0 - \frac{e^2+1}{3},$$

где $K(e)$ и $E(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем e соответственно.

Околосепаратрисное движение *симметричной* гантели *вне* окрестности горизонтального равновесия в случае *относительно длинного* троса



Пусть $\boxed{\mu=0}$ (гантель симметрична) и $\boxed{e \le \sqrt[4]{\kappa}}$ (трос относительно длинный,

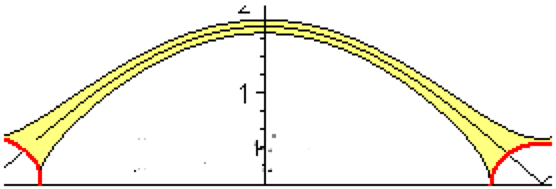
например,при к=.01 можно взять e<0.32)

Подставляя $\pi/2 - 2\arctan e^{\mp t\sqrt{3}} + \sqrt{\kappa}\psi$ вместо φ в уравнения движения и пренебрегая слагаемыми порядка к и более, получим

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\tau) = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{1}{\sqrt{p}}\right) + \frac{\sqrt{\kappa}\psi_1(p^2+4\tau p\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{3p}(1+p)} \pm \\ \pm\left(\frac{\kappa\psi_1^2\left(24p\tau^2(1-p)+4\tau\sqrt{3}(p+1)(p^2+p+1)+3(p+1)^2(1-p)\right)}{96\sqrt{p}(1+p)^2}\right)\end{aligned}}$$

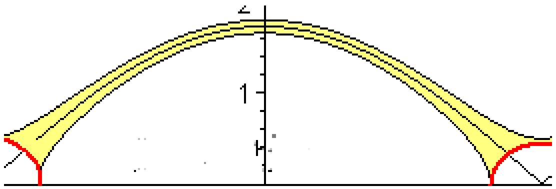
$+$ против часовой стрелки, $-$ по часовой стрелке $\quad \boxed{p = \exp\left(2\tau\sqrt{3}\right)}$

Околосепаратрисное движение *симметричной* гантели *вне* окрестности горизонтального равновесия в случае *относительно длинного* троса



Из $\varphi(-t)=-\varphi(-t)$ следует, что в нашем случае **каждый полуоборот приблизительно симметричен.** Точнее, можно считать, что если гантель покидает окрестность одного из горизонтальных равновесий с $\varphi = \varphi_1, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$ то вход в окрестность другого горизонтального равновесия будет происходить с $\varphi = -\varphi_1, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1$

Околосепаратрисное движение *симметричной* гантели *вне* окрестности горизонтального равновесия в случае *относительно длинного* троса

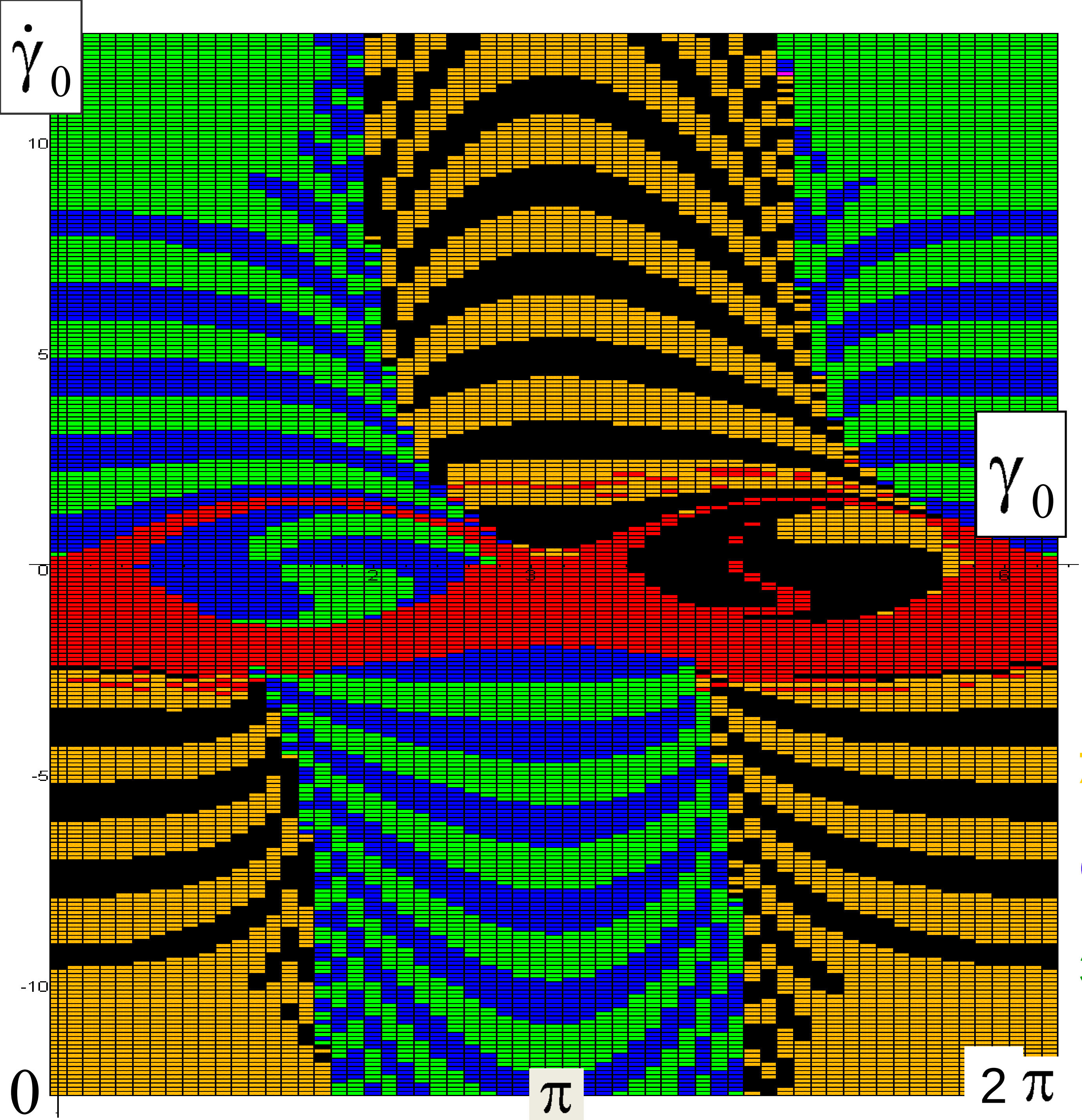


Для интегрирования второго уравнения вводя переменную $v = \varphi + \gamma$ получим уравнение

$$v'' + \frac{3}{2}\sin 2v + e^2 q\left(v, v', \tau\right) = 0$$

Которое может быть приближенно проинтегрировано в виде

$$\tau = g_0\left(v\right) + e^2 g_{11}\left(v\right)$$



$e = 1/3$

$\mu = 1/3$

$\kappa = 0.01$

$\varphi_0 = -\pi/2$

$\varphi'_0 = 0$

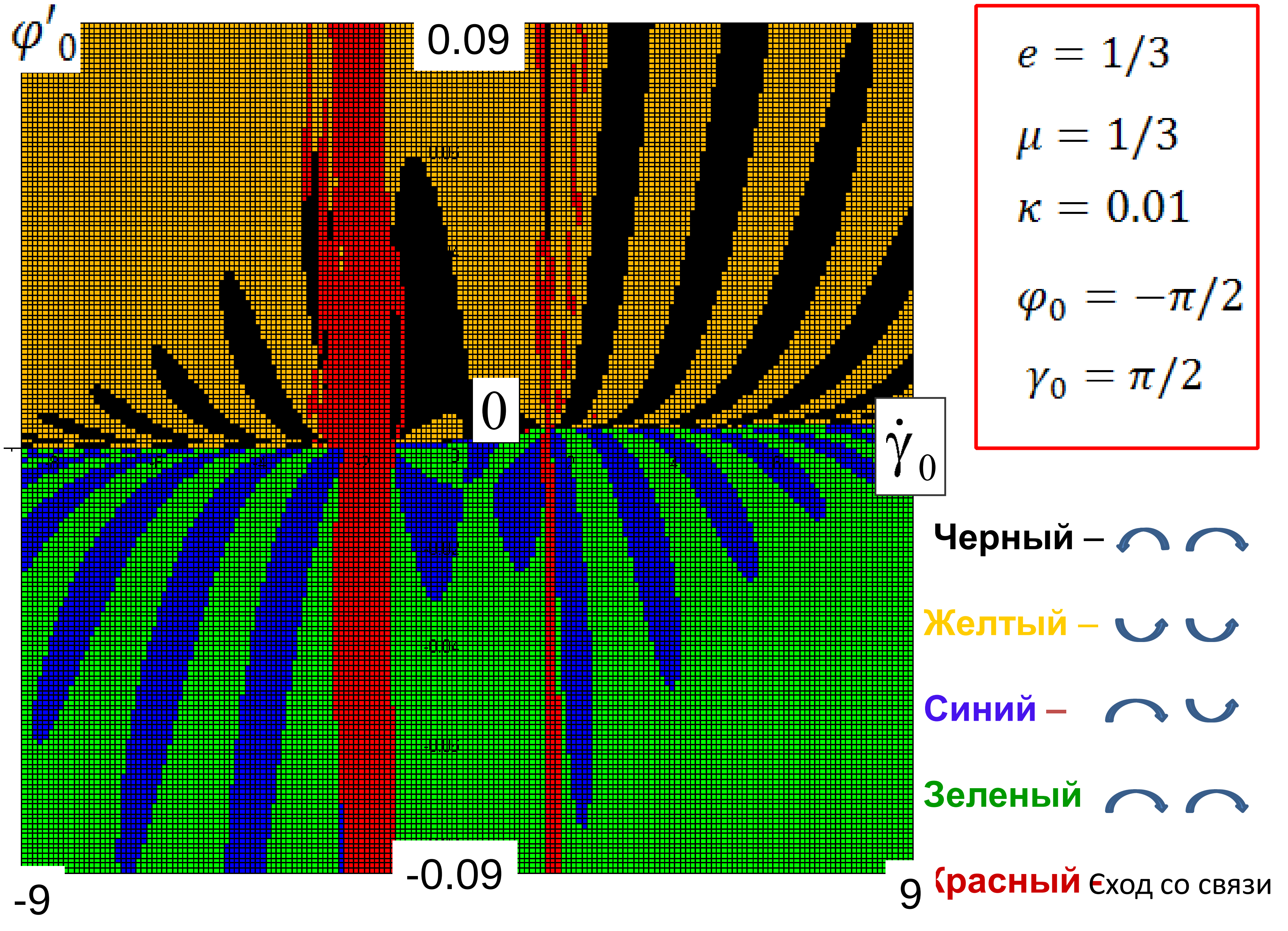
Черный –

Желтый –

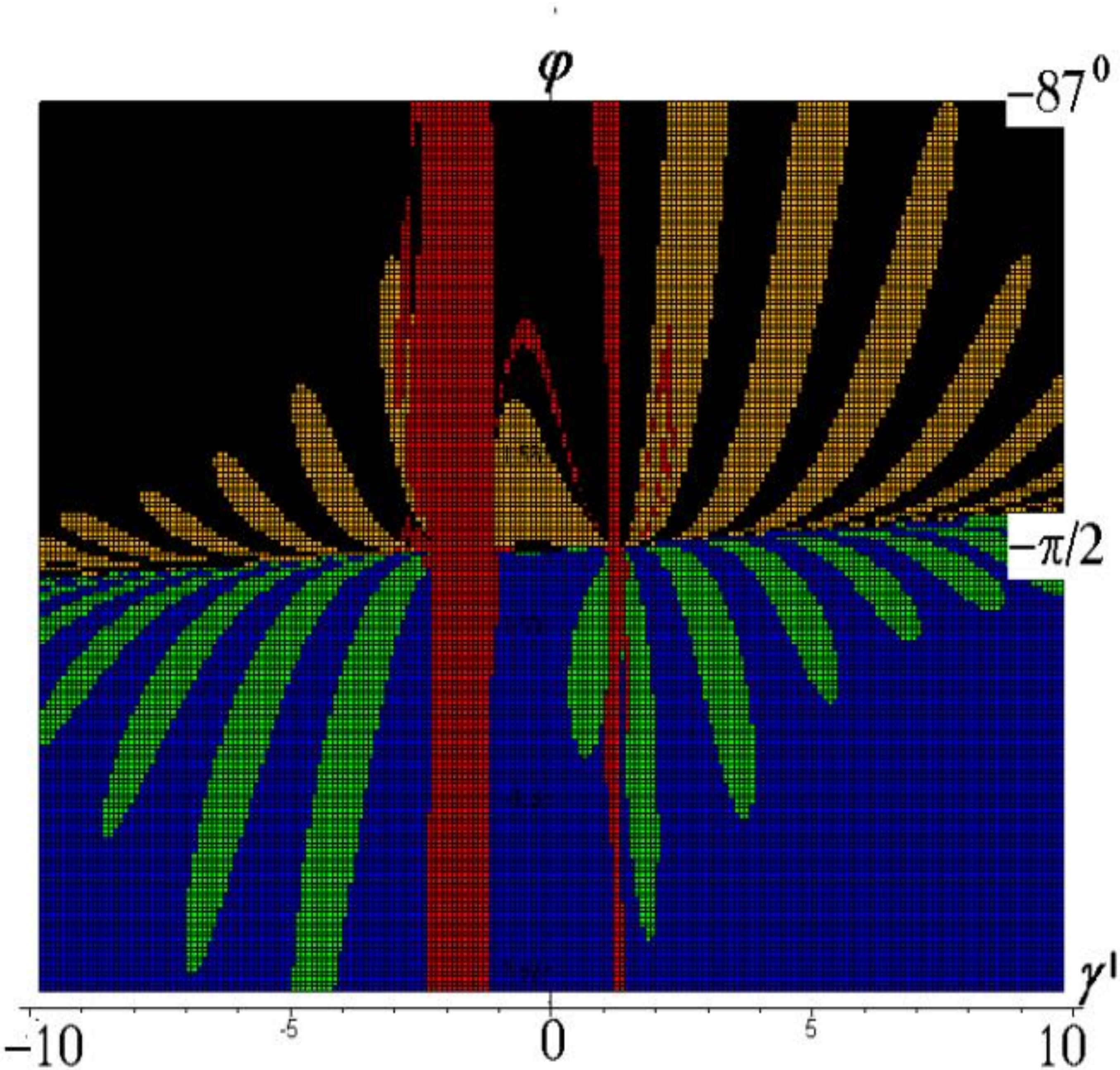
Синий –

Зеленый

Красный Єход со связи



φ'_0
0.09
0
$\dot{\gamma}_0$
-0.09
-9
9
$e = 1/3$
$\mu = 1/3$
$\kappa = 0.01$
$\varphi_0 = -\pi/2$
$\gamma_0 = \pi/2$
Черный –
Желтый –
Синий –
Зеленый
расный
ход со связи



$e = 1/3$

$\mu = 1/3$

$\kappa = 0.01$

$\varphi'_0 = 0$

$\gamma_0 = 12\pi/7$

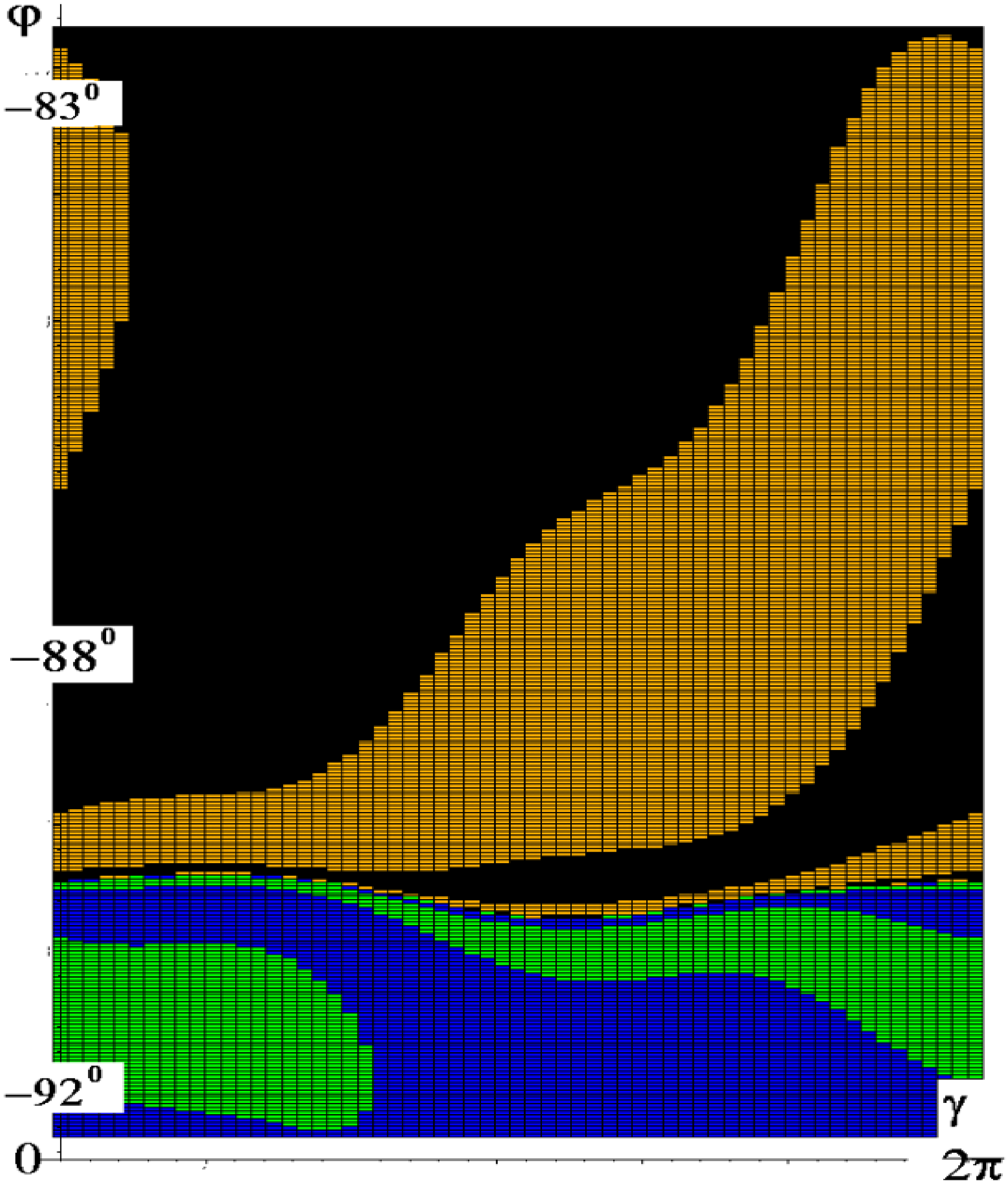
Черный –

Желтый –

Синий –

Зеленый

Красный Єход со связи



$$e = 1/3$$

$$\mu = 1/3$$

$$\kappa = 0.01$$

$$\gamma'_0 = 3$$

$$\varphi'_0 = 0$$

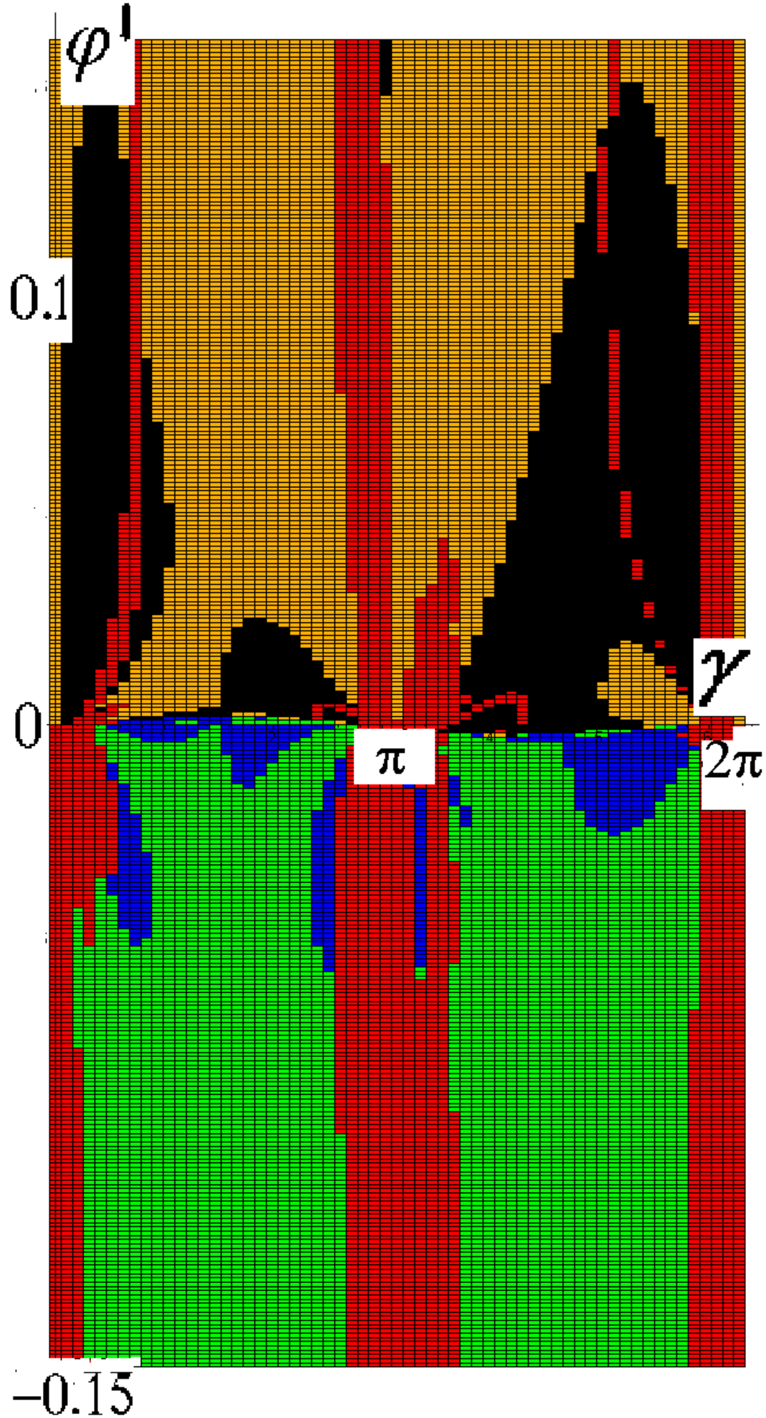
Черный –

Желтый –

Синий –

Зеленый

Красный Єход со связи



$$e = 1/3$$

$$\mu = 1/3$$

$$\kappa = 0.01$$

$$\gamma_0' = 0$$

$$\varphi_0 = -\pi/2$$

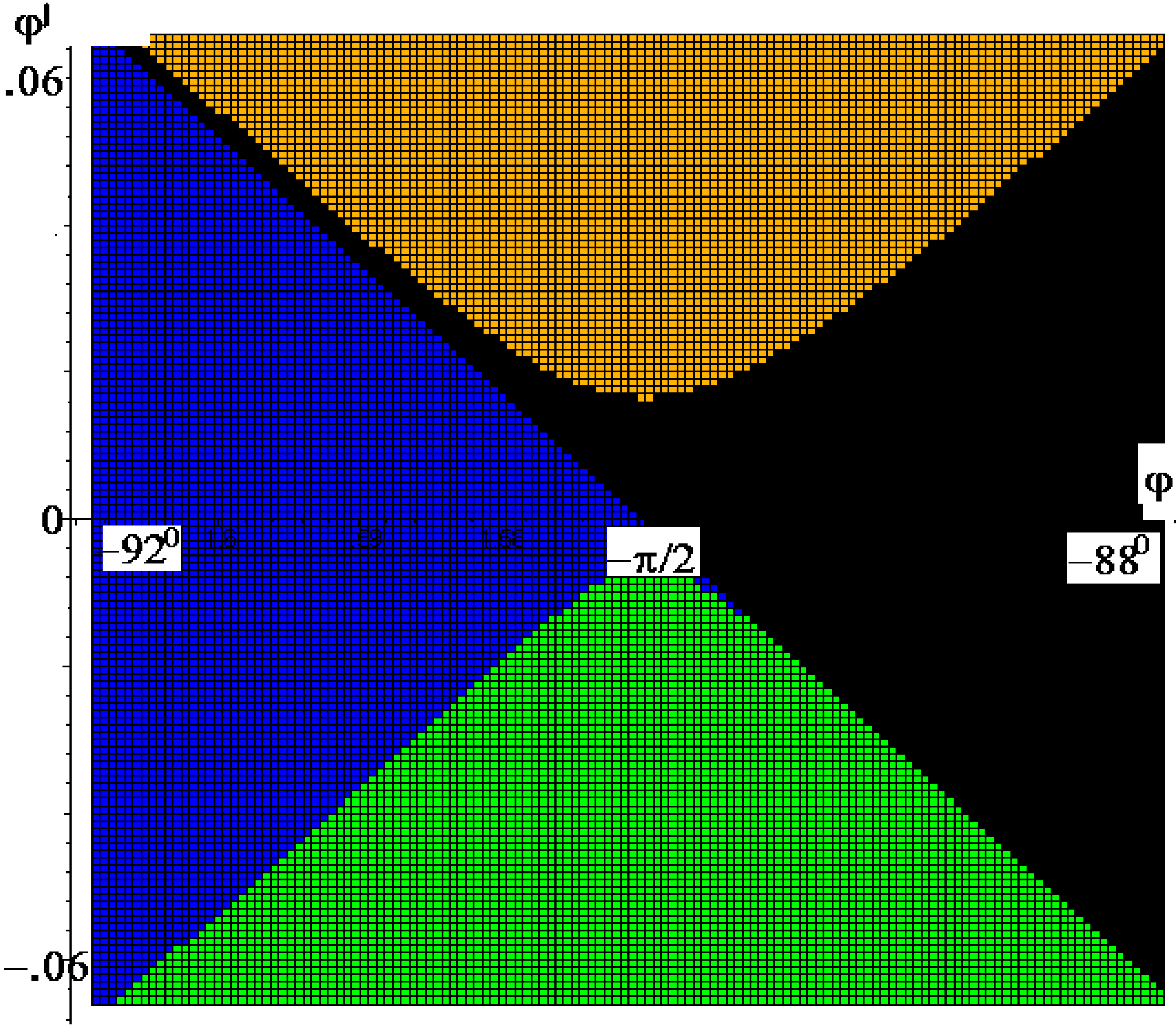
Черный –

Желтый –

Синий –

Зеленый

Красный Єход со связи



$e = 1/3$

$\mu = 1/3$

$\kappa = 0.01$

$\gamma_0' = 0$

$\gamma_0 = \pi/2$

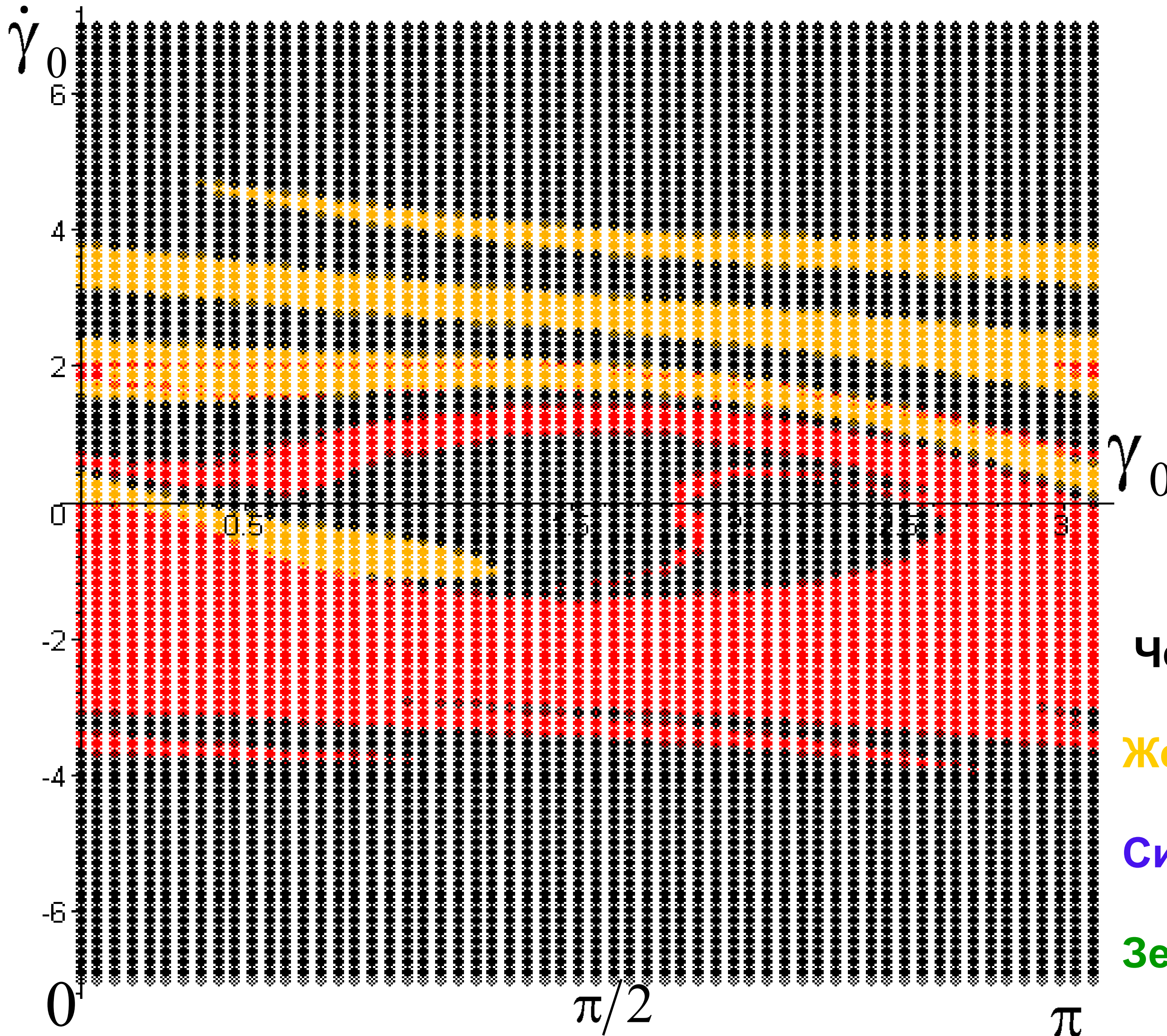
Черный –

Желтый –

Синий –

Зеленый

Красный Єход со связи



$$e = \frac{1}{2}$$

$$\mu = 0$$

$$\varphi_0 = -87^0 8'$$

$$\dot{\varphi}_0 = 0$$

Черный –

Желтый –

Синий –

Зеленый

Красный - Сход со связи

Автор благодарен В.В.Белецкому, Ю.Ф.Голубеву, И.И.Косенко, В.В.Сазонову, С.Я.Степанову за полезные обсуждения и замечания

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ