

# Динамические системы

## Разделы курса

### 1. Основные понятия теории динамических систем

Понятие динамической системы (ДС). Пространство состояний, оператор эволюции ДС. Дискретные и непрерывные динамические системы. Инвариантные множества ДС. Фазовый портрет ДС.

### 2. Линейные системы

Общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами. Классификация двумерных линейных систем. Устойчивое, неустойчивое и центральное подпространства. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке.

### 3. Локальное поведение нелинейных систем

Существование и единственность локального решения нелинейной ДС. Линеаризация. Теорема об устойчивом многообразии. Теорема Гробмана-Хартмана. Теорема о центральном многообразии.

### 4. Глобальное поведение нелинейных систем

Существование и единственность глобального решения нелинейной ДС. Предельные множества и аттракторы. Положения равновесия, предельные и сепаратрисные циклы. Гомо- и гетероклинические траектории. Динамические системы на плоскости. Теорема Пуанкаре-Бендиксона.

### 5. Структурно устойчивые системы и элементы теории бифуркаций

Эпсилон-возмущение. Грубая система. Теорема о грубости одномерной системы. Теорема о грубости двумерной системы (Андропова-Понтрягина).

### 6. Бифуркации в непрерывных динамических системах

Локальная и глобальная бифуркация. Теорема о гладкой зависимости положения равновесия от параметра системы. Гиперболическая, негиперболическая и транскритическая бифуркации. Бифуркация типа вилки. Седло-узловая бифуркация. Бифуркационная диаграмма. Бифуркация Андронова Хопфа. Бифуркации периодических решений. Бифуркация рождения двумерного тора.

### 7. Бифуркации в дискретных динамических системах

Неподвижные точки, циклы, фазовые портреты дискретных динамических систем. Диаграмма Ферхюльста. Топологическая эквивалентность и классификация линейных систем. Устойчивость линейных систем, неподвижных точек и циклов. Аттракторы дискретных ДС. Бифуркация положений равновесия (транскритическая бифуркация, бифуркация типа вилки, седло-узловая бифуркация). Бифуркация удвоения периода. Бифуркация Андронова-Хопфа. Бифуркация в окрестностях циклов.

### 8. Фракталы и хаос в динамических системах. Модели нелинейных систем

Понятие хаоса. Хаотический аттрактор. Детерминированный хаос. Топологическая и фрактальная размерности. Размерности Минковского и Хаусдорфа. Фрактальное множество. Комплексные

динамические системы. Множества Жюлиа. Модель Лотки-Вольтерры. Модели Ван-дер-Поля, Рэля и Льенара. Модель Лоренца. Модель Энона и логистическая модель.

### **Литература по курсу**

- 1) Perko, L. Differential Equations and Dynamical Systems. 3rd ed. – Springer, 2001. – 557 p.
- 2) Guckenheimer, J., Holmes, P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. 1st ed. – Springer, 1983. – 478 p.
- 3) Fradkov, A.L., Pogromsky, A.Y. Introduction to Control of Oscillations and Chaos. World Scientific Nonlinear Science Series. – World Scientific Publishing Company, 1998. – 408 p.
- 4) Юмагулов М.Г. Введение в теорию динамических систем: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 272 с.
- 5) Verhulst, F. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. 2nd revised ed. – Springer, 1996. – 306 p.