

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
**Направленность (профиль) подготовки:** Математическая физика, компьютерные технологии и  
математическое моделирование в экономике

## ТАБУЛИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКИХ ОРБИТ ЛЯПУНОВА ВОКРУГ ТРЕУГОЛЬНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L5

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Бажан Денис Иванович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Сулов Кирилл Сергеевич,

---

*(подпись научного руководителя)*

**Консультант (при наличии):**

---

*(подпись консультанта)*

Москва 2024

---

## Аннотация

На сегодняшний день основная часть данных, необходимых для мониторинга и прогнозирования солнечной активности, поступает с космических аппаратов (КА), находящихся либо на околоземной орбите, либо в точке Лагранжа  $L_1$  системы «Солнце-Земля». Однако, такое расположение КА сильно ограничивает заблаговременность прогнозов. Помещение же КА в точку  $L_5$  может сильно улучшить данную ситуацию.

В работе производится табулирование семейства плоских периодических траекторий, связанных с точкой либрации  $L_5$ , в системе «Солнце-Земля» в рамках плоской круговой ограниченной задачи трёх тел. Табулирование проводится от положения равновесия в точке  $L_5$  до пересечения с семейством плоских орбит Ляпунова, связанных с коллинеарной точкой либрации  $L_3$ . Построение семейства проводится методами дифференциальной коррекции и продолжения по параметру. В результате работы был получен массив данных, где каждой орбите ставится в соответствие своё значение параметра, вектор начальных условий из фазового пространства, период, константа Якоби и мультипликаторы Флоке.

Полученные результаты могут быть использованы для построения произвольных орбит из соответствующего семейства с помощью дифференциальной коррекции за небольшое число итераций и исследования орбит на устойчивость. Значения константы Якоби и показателей Флоке полезны при проектировании перелётов и разработке алгоритмов поддержания орбит.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Периодические орбиты в окрестности точки либрации L5</b>	<b>7</b>
1.1. Плоская круговая ограниченная задача трёх тел . . . . .	7
1.2. Мультипликаторы Флоке . . . . .	14
<b>2. Построение семейства орбит Ляпунова</b>	<b>16</b>
2.1. Метод дифференциальной коррекции . . . . .	16
2.2. Метод продолжения . . . . .	20
<b>3. Результаты</b>	<b>22</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>29</b>

# Введение

На сегодняшний день данные, необходимые для мониторинга гелиогеофизической обстановки и прогнозирования её развития (такие, как параметры солнечной активности и количественные пространственно-временные характеристики возникновения геоэффективных событий), получают в основном при помощи космических аппаратов (КА). Данные КА расположены главным образом на околоземных орбитах или в точке Лагранжа  $L_1$  системы «Солнце-Земля». Примерами КА, расположенных в точке  $L_1$ , могут послужить SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) [1] — совместный проект NASA и Европейского космического агентства, и «Адитья-L1» [2] — проект Индийской организацией космических исследований (ISRO). Однако, существует проблема в заблаговременности прогнозов, получаемых на основе этих данных. Так, аппараты, находящиеся в точке  $L_1$ , способны регистрировать изменения в межпланетной среде не более чем за час до достижения ими орбиты Земли. Качество долгосрочных прогнозов можно существенно улучшить при помощи КА, размещённого в окрестности точки либрации  $L_5$ . Улучшение достигается в том числе за счёт наблюдения участков Солнца невидимых с Земли и точки  $L_1$  [3].

Целью данной работы является построение и исследование семейства плоских периодических орбит, связанных с точкой либрации  $L_5$ , для системы «Солнце-Земля» в рамках плоской круговой ограниченной задачи трёх тел путём табулирования. Построение семейства проводится методами дифференциальной коррекции и продолжения по параметру. Табулирование проводится от положения равновесия в точке  $L_5$  до пересечения с семейством плоских орбит Ляпунова, связанных с коллинеарной точкой либрации  $L_3$ . Исследуются энергетические характеристики орбит построенного семейства, а также их устойчивость.

Эта работа была представлена на 66-ой Всероссийской научной конфе-

ренции МФТИ на секции динамики и управления движением космических аппаратов в рамках ФПМИ, а также на I Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения» на секции теоретической механики и дифференциальных уравнений направления «Математические методы в аэрокосмической науке и технике».

Первая глава посвящена плоским периодическим орбитам вокруг точки либрации  $L_5$ . В первом параграфе выписываются уравнения движения в рамках плоской круговой ограниченной задачи трёх тел и их линеаризация, а затем производится анализ решений линеаризованной системы: среди них выделяется класс подходящих периодических траекторий и находятся необходимые начальные условия. Во втором параграфе рассказывается о мультипликаторах Флоке. Во второй главе описывается построение семейства плоских периодических орбит в рамках исходных уравнений движения, а не линеаризованных. В первом параграфе данной главы рассматривается метод дифференциальной коррекции и способ его применения для решения поставленной задачи: для фиксированного начального положения методом Ньютона ищутся начальные скорости и период, позволяющие вернуться в стартовую точку с сохранением скоростей в начальный и конечный моменты времени. Указывается, что в качестве начального приближения для орбит близких к точке  $L_5$  используются начальные условия, полученные в предыдущей главе. Во втором параграфе производится описание способа получения качественного начального приближения для орбит, значительно отличающихся от линеаризованного приближения: производится параметризация исследуемого семейства и начальные скорости и период для каждой следующей орбиты получаются экстраполяцией многочленом третьей степени, построенном на четырёх полученных ранее значениях. Все используемые алгоритмы были реализованы на языке программирования Python.

В третьей главе изложены результаты проделанной работы. Описаны полученная база данных и возможности её использования. Представлены ме-

тод получения орбиты произвольного параметра на основе уже построенной таблицы, а также исследование орбит семейства на практическую устойчивость. Приведены и описаны графики зависимостей периода и константы Якоби от параметра, а также зависимости максимального и минимального расстояний от КА до Солнца в зависимости от параметра орбиты.

# 1. Периодические орбиты в окрестности точки либрации L5

## 1.1. Плоская круговая ограниченная задача трёх тел

Плоская круговая ограниченная задача трёх тел — частный случай задачи трёх тел, в котором два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  вращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс, а третье тело массой  $m$  движется под действием притяжения первых двух тел, причём его движение происходит в плоскости их вращения. Без ограничения общности считаем, что  $m_1 \geq m_2$ . То есть имеет место соотношение

$$m_1 \geq m_2 \gg m.$$

Рассмотрим правую прямоугольную систему координат  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ , вращающуюся вокруг оси  $\zeta_1$  с угловой скоростью, равной угловой скорости относительного вращения двух массивных тел (рисунок 1).

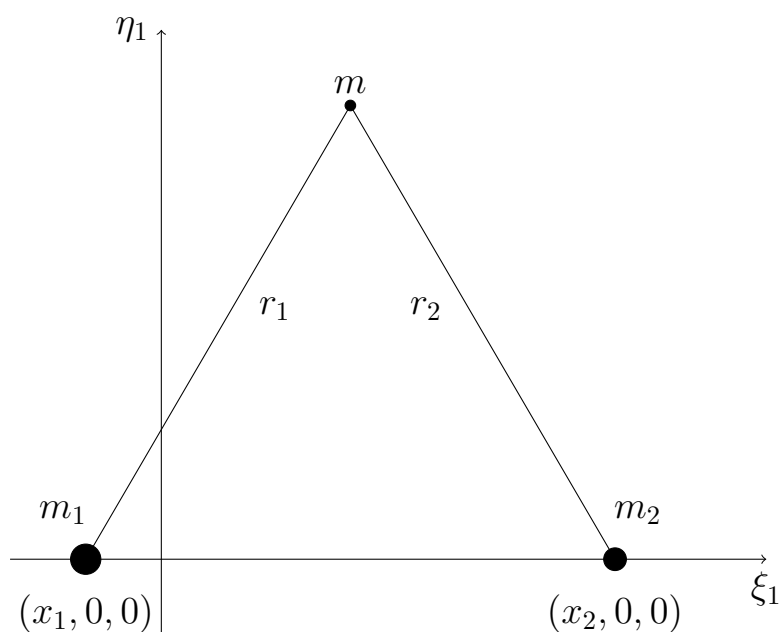


Рисунок 1 – Положение тел в системе  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ .

Вектор угловой скорости сонаправлен с осью  $\zeta_1$ . Начало отсчёта совпадает с центром масс данной системы. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  имеют фиксированные координаты  $(x_1, 0, 0)$  и  $(x_2, 0, 0)$  соответственно.

Перейдём к обезразмеренной задаче. Для этого введём массовый параметр  $\mu$ , который равен

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \leq 0.5.$$

Единицу измерения массы выберем таким образом, чтобы масса первого тела была  $1 - \mu$ , а второго тела  $\mu$ . Единицу измерения длины возьмём так, чтобы расстояние между телами равнялось единице. Таким образом, имеем  $x_1 = -\mu$  и  $x_2 = 1 - \mu$ . Единицу измерения времени выберем так, чтобы гравитационная постоянная была равна единице. Тогда угловая скорость вращения массивных тел относительно их общего центра масс в инерциальной системе отсчёта равна 1.

Уравнения движения в системе координат  $(\xi_1, \eta_1)$  имеют следующий вид:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} - 2\frac{d\eta_1}{dt} = \xi_1 - \frac{(1-\mu)(\xi_1 - x_1)}{r_1^3} - \frac{\mu(\xi_1 - x_2)}{r_2^3},$$

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + 2\frac{d\xi_1}{dt} = \eta_1 - \frac{(1-\mu)\eta_1}{r_1^3} - \frac{\mu\eta_1}{r_2^3},$$

где  $r_1^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + \eta_1^2$ ,  $r_2^2 = (\xi_1 - x_2)^2 + \eta_1^2$ .

Точками Лагранжа (или же точками либрации) называются точки для которых в системе  $(\xi_1, \eta_1)$  справедливо

$$\dot{\xi}_1 = \dot{\eta}_1 = 0,$$

$$\ddot{\xi}_1 = \ddot{\eta}_1 = 0.$$



Всего таких точек пять. Три точки, расположенные на оси  $\xi_1$ , называют коллинеарными. Точка  $L_1$  лежит между притягивающими телами,  $L_2$  лежит правее тела с меньшей массой, а  $L_3$  левее тела с большей массой. Другие две точки, называемые треугольными, расположены в вершинах таких равносторонних треугольников в плоскости  $(\xi_1, \eta_1)$ , что две другие их вершины находятся в центрах массивных тел. Точка  $L_4$  имеет положительную координату  $\eta_1$ , а  $L_5$  – отрицательную. Положение точек Лагранжа показано на рисунке 2.

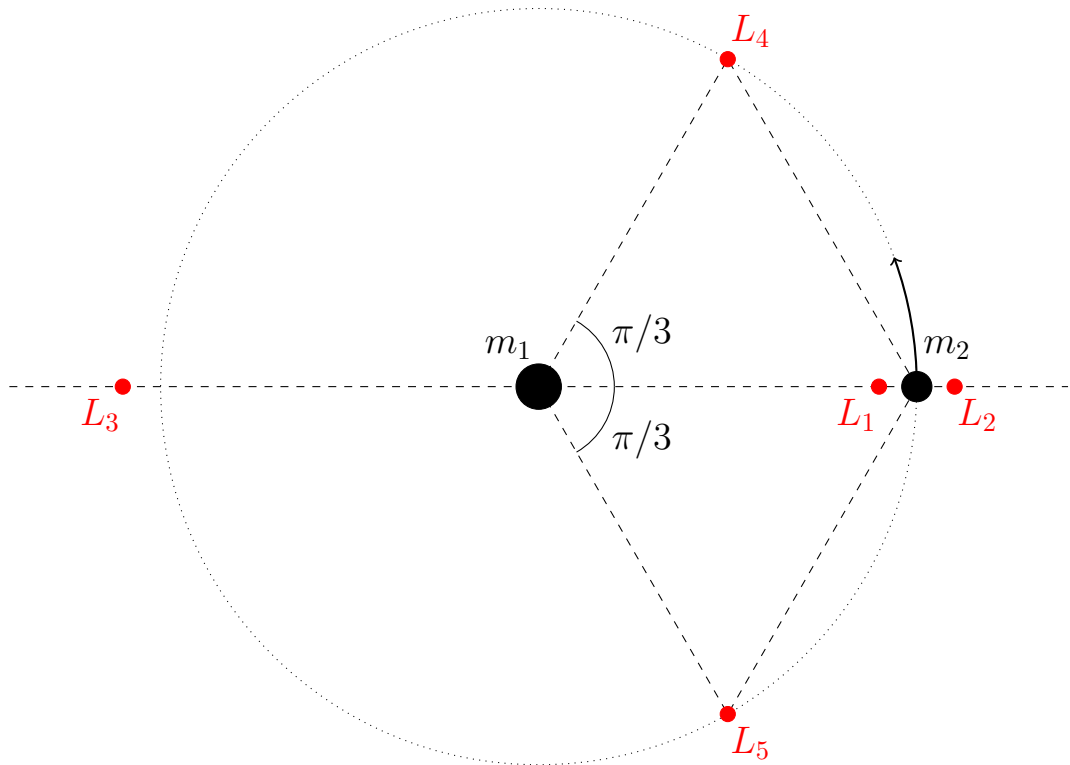


Рисунок 2 – Иллюстрация расположения точек Лагранжа.

Введём новую систему координат  $(\xi_2, \eta_2)$ , оси которой сонаправлены с осями системы  $(\xi_1, \eta_1)$ , а цент расположен в точке Лагранжа  $L_5$ . Тогда линеаризованные уравнения движения в  $(\xi_2, \eta_2)$  будут записаны следующим образом:

$$\frac{d^2\xi_2}{dt^2} - 2\frac{d\eta_2}{dt} = \frac{3}{4}\xi_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\eta_2, \quad (1)$$

$$\frac{d^2\eta_2}{dt^2} + 2\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\xi_2 + \frac{9}{4}\eta_2. \quad (2)$$

Если уравнение (1) умножить на  $d\xi_2/dt$ , уравнение (2) – на  $d\eta_2/dt$ , а затем сложить полученные результаты, получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dt} \frac{d^2\xi_2}{dt^2} + \frac{d\eta_2}{dt} \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = \\ \frac{3}{4}\xi_2 \frac{d\xi_2}{dt} + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu) \left( \eta_2 \frac{d\xi_2}{dt} + \xi_2 \frac{d\eta_2}{dt} \right) + \frac{9}{4}\eta_2 \frac{d\eta_2}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Проинтегрировав данное выражение, получим интеграл Якоби:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\xi_2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta_2}{dt} \right)^2 \right] = \frac{3}{4} \frac{\xi_2^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\xi_2\eta_2 + \frac{9}{4} \frac{\eta_2^2}{2} + \frac{C}{2}.$$

Константа  $C$  определяется из начальных условий. В сущности, различаются три значения  $C$ :  $-1$ ,  $0$  и  $1$ . Поскольку уравнения (1) и (2) линейны относительно  $\eta_2$  и  $\xi_2$ , а (3) – однородное дифференциальное уравнение, то любое другое значение  $C$  может быть сведено к одному из вышеупомянутых трёх значений путём правильного масштабирования осей  $(\xi_2, \eta_2)$ .

Рассмотрим траектории с нулевой начальной скоростью. Для этих траекторий  $C = -1$ , а начальное положение лежит на кривой второго порядка

$$\frac{3}{8}\xi_2^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\xi_2\eta_2 + \frac{9}{8}\eta_2^2 = \frac{1}{2}.$$

Если  $0 < \mu < 1$ , то дискриминант

$$D = \left[ \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu) \right]^2 - 4 \left( \frac{27}{64} \right) < 0,$$

а значит данная кривая является эллипсом. Такой эллипс называется эллипсом Якоби.

Уравнения (1) и (2) можно упростить. Для этого введём систему

координат  $(x, y)$  с центром в точке  $L_5$ , которая также является центром эллипса Якоби. Ось  $x$  направлена по большой оси этого эллипса, а ось  $y$  по малой. Это эквивалентно повороту системы координат  $(\xi_2, \eta_2)$  на угол  $\theta$ , где

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ -\sqrt{3}(1 - 2\mu) \right].$$

В системе  $(x, y)$  линеаризованные уравнения (1) и (2) приобретают вид

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \omega_1^2 x, \quad (4)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \omega_2^2 y, \quad (5)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 3\mu + 3\mu^2} \right),$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 3\mu + 3\mu^2} \right).$$

В этой системе координат интеграл Якоби имеет вид

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + C,$$

а эллипс Якоби

$$\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 = 1.$$

Решения уравнений (4) и (5) имеют вид

$$x = K_1 \cos \lambda t + K_2 \sin \lambda t,$$

$$y = M_1 \cos \lambda t + M_2 \sin \lambda t.$$

Решения будут ненулевыми, если  $\lambda$  удовлетворяет характеристическому

уравнению:

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2},$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2},$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1,$$

$$\lambda_4 = -\lambda_2.$$

Рассматриваем только стабильные решения, то есть те, для которых  $\lambda$  действительное и ненулевое. Тогда допустимыми значениями  $\mu$  будут только те, для которых выполняется

$$1 - 27\mu(1 - \mu) > 0,$$

то есть

$$\mu < \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0.0385209.$$

Для системы «Солнце-Земля»  $\mu \approx 3.003481 \cdot 10^{-6}$ .

Стабильные решения уравнений (4) и (5) находятся среди функций вида

$$x = (K_1 \cos \lambda_1 t + K_2 \sin \lambda_1 t) + (K_3 \cos \lambda_2 t + K_4 \sin \lambda_2 t),$$

$$y = N_1 (K_2 \cos \lambda_1 t - K_1 \sin \lambda_1 t) + N_2 (K_4 \cos \lambda_2 t - K_3 \sin \lambda_2 t),$$

где

$$N_1 = \frac{\omega_1^2 + \lambda_1^2}{2\lambda_1}, \quad N_2 = \frac{\omega_2^2 + \lambda_2^2}{2\lambda_2}.$$

Коэффициенты  $K_1, \dots, K_4$  зависят от начальных условий. Пусть в момент

времени  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ,  $\dot{y} = \dot{y}_0$ . Тогда

$$K_1 = \frac{(\omega_1^2 + \lambda_2^2)x_0 + 2\dot{y}_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \quad K_2 = \frac{\lambda_1}{\omega_1^2} \left[ \frac{2\lambda_2^2 y_0 - (\omega_1^2 + \lambda_2^2)\dot{x}_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \right],$$

$$K_3 = -\frac{(\omega_1^2 + \lambda_1^2)x_0 + 2\dot{y}_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \quad K_4 = \frac{\lambda_2}{\omega_1^2} \left[ \frac{(\omega_1^2 + \lambda_1^2)\dot{x}_0 - 2\lambda_1^2 y_0}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \right] \quad [4].$$

Периоды орбит в линеаризованной задаче, соответствующие частотам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , имеют следующие значения:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \approx 6.28 \text{ [ед. времени безразмерной задачи]}, \quad (6)$$

что равно примерно одному году, и

$$T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \approx 1395 \text{ [ед. времени безразмерной задачи]},$$

что равно примерно двумстам двадцати двум годам.

Рассмотрим периодические решения, получаемые при  $K_3 = 0$  и  $K_4 = 0$ . Было принято решение обнулить именно эти коэффициенты, а не  $K_1$  и  $K_2$ , так как  $T_1 \ll T_2$ , а орбиты с меньшим периодом лучше подходят для решения рассматриваемой практической задачи мониторинга солнечной активности. Отсюда можно получить начальные значения скоростей для фиксированных начальных координат:

$$\dot{x}_0 = \frac{2\lambda_1^2 y_0}{\omega_1^2 + \lambda_1^2}, \quad \dot{y}_0 = -\frac{(\omega_1^2 + \lambda_1^2)x_0}{2}. \quad (7)$$

Таким образом, было показано, что в рамках линеаризованных уравнений в плоской круговой ограниченной задаче трёх тел существуют периодические траектории.

## 1.2. Мультипликаторы Флоке

В данном параграфе рассмотрим, что такое мультипликаторы Флоке.

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

где  $A(t)$  — непрерывно дифференцируемая  $T$ -периодическая матрица.

Фундаментальной матрицей решений (ФМР) этой системы называют матрицу  $Y(t)$ , являющуюся решением следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= A(t)Y, \\ Y(0) &= E_{n \times n}, \end{aligned}$$

Здесь и далее  $E_{n \times n}$  — единичная матрица размера  $n$  на  $n$ . Любое решение  $y(t)$  системы (8) может быть представлено в виде  $y(t) = Y(t)y_0$ , где  $y_0 = y(0)$ .

Перейдём непосредственно к теории Флоке. Рассмотрим следующее утверждение:

**Теорема 1.** *ФМР системы (8) представима в виде*

$$Y(t) = P(t)e^{Bt},$$

где  $P(t)$  — некоторая дифференцируемая  $T$ -периодическая матрица,  $P(0) = P(T) = E_{n \times n}$ , а  $B$  — некоторая постоянная матрица.

Собственные значения  $\beta_j$  матрицы  $B$  называются показателями Флоке системы, а собственные числа  $\rho_j$  матрицы  $Y(T)$  мультипликаторами Флоке системы (8) [5].

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (9)$$

Мультипликаторами Флоке решения  $y = \tilde{y}(t)$  (орбиты) будем называть мультипликаторы линеаризованной системы (9) на решении  $y = \tilde{y}(t)$ :

$$\frac{d\xi}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=\tilde{y}(t)} \xi, \quad (10)$$

где  $\xi(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ , а  $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=\tilde{y}(t)}$  — Якобиан с  $T$ -периодическими элементами.

Теперь опишем метод поиска мультипликаторов Флоке. Для поиска матрицы  $Y(T)$  численными методами решаются уравнения в вариациях

$$\frac{dY}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=\tilde{y}(t)} Y, \quad Y(0) = E_{6 \times 6}, \quad (11)$$

на временном промежутке от 0 до  $T$ . Интегрирование производится совместно с уравнениями исходной системы.

Полученные уравнения решаются численно. Реализация происходит на языке программирования Python при помощи функции `solve_ivp` из модуля `integrate` библиотеки `SciPy`. В качестве метода решения был выбран метод Адамса LSODA. Абсолютные и относительные точности `rtol` и `atol` были установлены на уровне  $10^{-13}$  и  $10^{-15}$  соответственно. Собственные значения полученной матрицы  $Y(T)$  ищутся функцией `eig` из модуля `linalg` библиотеки `Numpy`.

## 2. Построение семейства орбит Ляпунова

В предыдущей главе было показано существование периодических орбит для линеаризованных уравнений движения. Можно предположить их существование и в рамках исходной задачи. Для построения периодических орбит в круговой ограниченной задаче трёх тел используется метод дифференциальной коррекции [6].

### 2.1. Метод дифференциальной коррекции

Метод дифференциальной коррекции заключается в решении уравнения с помощью итерационной процедуры, начинающейся с некоторого начального приближения.

Для периодической траектории с периодом  $T$  справедливо, что положение и скорость в моменты времени  $t = 0$  и  $t = T$  совпадают, то есть невязка фазового вектора в начальный и конечный моменты времени равна 0. Таким образом, если для фиксированных начальных координат  $x$  и  $y$  найти вектор начальной скорости и период, приравнивающие данную невязку к нулю, то такой фазовый вектор однозначно задаст орбиту.

Зафиксируем начальные координаты  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . Искомые компоненты скорости  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$  и период  $T$  являются решением уравнения

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0, \quad (12)$$

где  $\mathbf{z} = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, T)^\top \in \mathbb{R}^3$  — вектор, составленный из начальных скоростей по координатам  $x$  и  $y$  и периода  $T$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})^\top$  — четырёхмерный фазовый вектор,  $\boldsymbol{\varphi}_0 = (x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)^\top$  — его начальное значение,  $\mathbf{F}(\mathbf{z}) \equiv \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_0, T) - \boldsymbol{\varphi}_0$  — невязка между фазовыми векторами в начальный и конечный моменты времени.

Для решения уравнения (12) используется метод Ньютона. Метод



Ньютона — итерационный численный метод решения нелинейных уравнений, который заключается в следующем: если есть уравнение вида (12), где  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ , то итерации записываются в следующем виде:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z}_k)}{\partial \mathbf{z}} \right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{z}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbf{z}_0$  — заданное начальное приближение. Если же имеет место случай, когда  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$  и  $n > m$ , то, применяя метод Ньютона и решая получающуюся систему линейных уравнений, минимизируя квадрат невязки, получается схема

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k - \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z}_k)}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z}_k)}{\partial \mathbf{z}}^\top \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z}_k)}{\partial \mathbf{z}}^\top \mathbf{F}(\mathbf{z}_k). \quad (13)$$

Поскольку  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^4$ , а  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ , то для решения уравнения (12) будет использоваться схема (13).

Для применения схемы (13) необходимы частные производные функции  $\mathbf{F}$  по  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{y}_0$  и  $T$ . Для этого рассмотрим производные решений обыкновенных дифференциальных уравнений по параметрам. То есть, если дана система вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{p}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , а  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$  — вектор параметров, то в таком случае производная решения данной системы по параметру  $\mathbf{p}$  находится из решения уравнений в вариациях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{p})) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}}(t, \mathbf{y}(t, \mathbf{p})), \\ \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}} \right|_{t=t_0(\mathbf{p})} = \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{f}(t_0(\mathbf{p}), \mathbf{y}_0(\mathbf{p}), \mathbf{p}) \frac{\partial t_0}{\partial \mathbf{p}}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Данные уравнения интегрируются совместно с уравнениями исходной системы. В результате получается  $n + nm$  уравнений, которые дают функции  $\mathbf{y}(t, \mathbf{p})$  и  $\partial \mathbf{y}(t)/\partial \mathbf{p}$  для  $t \in [t_0(\mathbf{p}), t_f(\mathbf{p})]$ .

В нашем случае параметрами являются  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, T$ , а  $\mathbf{f}$  — функция правых частей в плоской круговой ограниченной задаче трёх тел. Рассматриваем два случая: когда параметром  $\mathbf{p}$  является вектор начальных условий  $\mathbf{y}_0$  (а значит,  $\dot{x}_0$  и  $\dot{y}_0$  в том числе), и когда параметром является конечное время интегрирования  $t_f = T$ . В первом случае уравнения (14) приобретают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0}, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_0} \right|_{t=t_0} = E_{n \times n}, \end{array} \right. \quad (15)$$

а во втором

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t_f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t_f}, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t_f} \right|_{t=t_0} = \mathbf{f}(T, \mathbf{y}_0). \end{array} \right. \quad (16)$$

Интегрирование в обоих случаях происходит на временном промежутке от 0 до  $T$  [7].

Численное интегрирование производится теми же методами с теми же

настройками, что и интегрирование уравнений (11), описанными во втором параграфе первой главы.

Для координат  $x = x_0$  и  $y = y_0$ , близких к точке  $(0, 0)$  в качестве начального приближения скоростей используется результат линейного приближения (7), а в качестве начального значения периода берётся период орбиты, полученной в результате линеаризации, который равен (6).

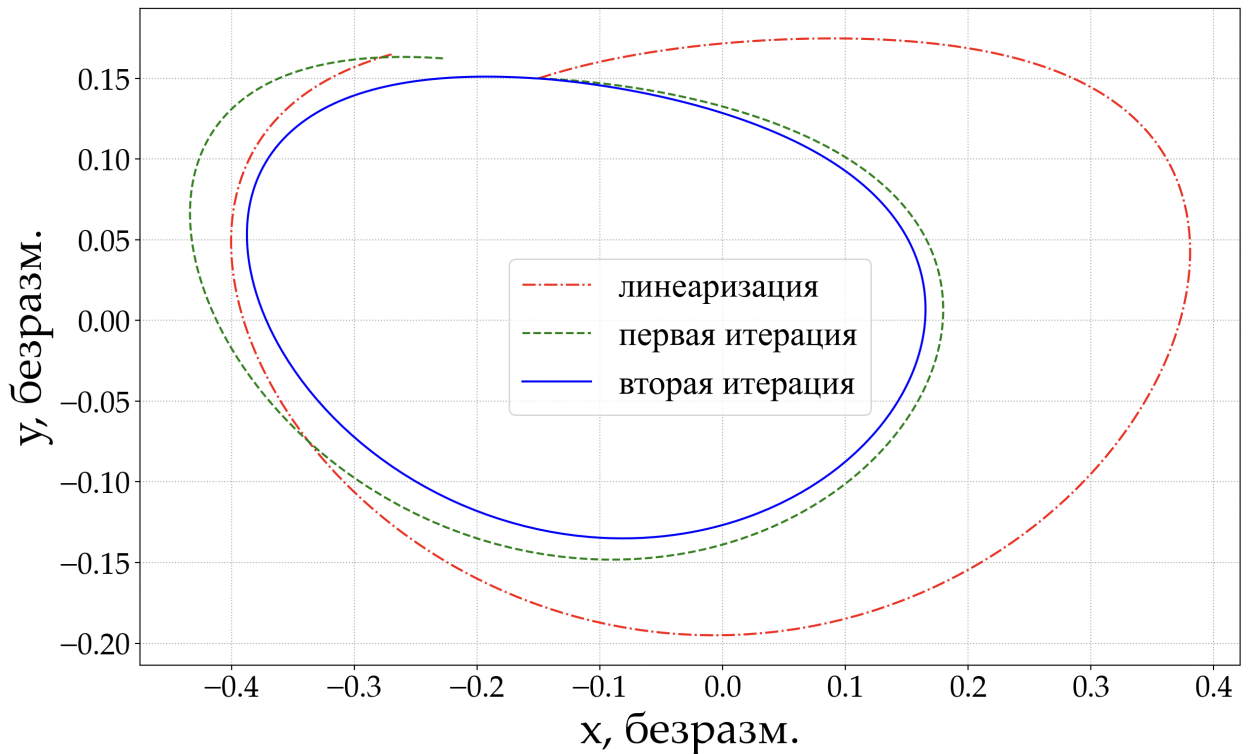


Рисунок 3 – Пример первых итераций сходимости метода дифференциальной коррекции для  $(x_0, y_0) = (-0.15, 0.15)$ .

Рисунок 3 показывает, что начальное приближение, полученное в рамках линеаризованной модели, даёт незамкнутую траекторию, и метод дифференциальной коррекции итерационно исправляет её, приближая к замкнутой орбите.

## 2.2. Метод продолжения

Для точек, находящихся на значительном расстоянии от начала координат системы  $(x, y)$ , начальное приближение, полученное путём линеаризации уравнений движения, не является достаточно точным для сходимости метода, описанного в предыдущем параграфе. Для получения более точных начальных приближений используется метод продолжения по параметру [8].

Введём параметризацию орбит исследуемого семейства, то есть каждой орбите из семейства сопоставим определённое значение параметра. Для этого рассмотрим окружность радиуса 1 (в безразмерной задаче) с центром в более массивном притягивающем теле. В качестве параметра выберем угол  $\alpha$ . Отсчёт ведётся по часовой стрелке от луча, начинающегося в точке расположения тела массой  $m_1$  и проходящего через точку Лагранжа  $L_5$ . Каждому значению параметра  $\alpha_k$  ставится в соответствие точка  $(x_{0_k}, y_{0_k})$  на окружности (рисунок 4).

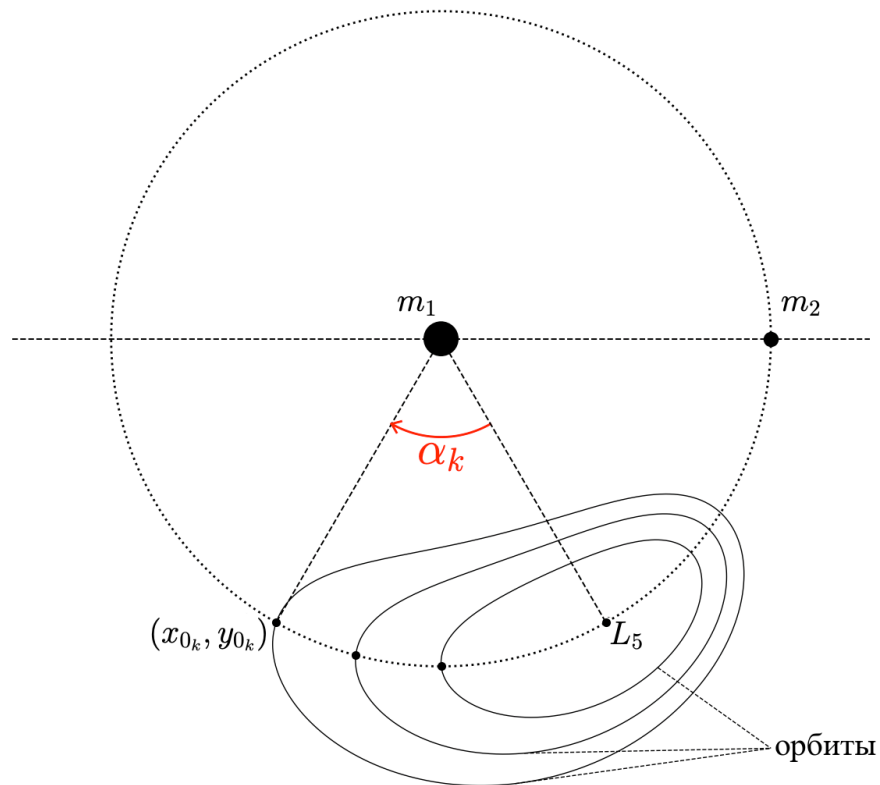


Рисунок 4 – Иллюстрация параметризации семейства орбит.

После этого с помощью метода дифференциальной коррекции, описанного в предыдущем параграфе, строится периодическая орбита, начинающаяся и заканчивающаяся в этой точке.

В качестве начального значения параметра было выбрано значение  $\alpha_0 = 0.001$  радиана. Шаг параметра  $\Delta\alpha$  также равен 0.001 радиана. Для первых четырёх значений параметра в качестве начального приближения используется результат линеаризации: для скоростей – выражение (7), а для периода – выражение (6). В дальнейшем в качестве начального приближения используется результат экстраполяции многочленом третьей степени, построенном на предыдущих четырёх значениях. Обозначим начальные приближения переменных для  $k$ -ой орбиты из таблицы как  $\dot{x}_{0_k}$ ,  $\dot{y}_{0_k}$ ,  $T_{0_k}$ , а значение параметра для этой орбиты как  $\alpha_k$ . Тогда начальные приближения для  $k$ -ой орбиты при  $k > 4$  вычисляются как

$$\begin{aligned}\dot{x}_{0_k} &= a_{11}\alpha_k^3 + a_{12}\alpha_k^2 + a_{13}\alpha_k + a_{14}, \\ \dot{y}_{0_k} &= a_{21}\alpha_k^3 + a_{22}\alpha_k^2 + a_{23}\alpha_k + a_{24}, \\ T_{0_k} &= a_{31}\alpha_k^3 + a_{32}\alpha_k^2 + a_{33}\alpha_k + a_{34},\end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $i \in \overline{1,3}$ ,  $j \in \overline{1,4}$  рассчитываются путём решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{i1}\alpha_{k-1}^3 + a_{i2}\alpha_{k-1}^2 + a_{i3}\alpha_{k-1} + a_{i4} = b_{k-1}^i, \\ a_{i1}\alpha_{k-2}^3 + a_{i2}\alpha_{k-2}^2 + a_{i3}\alpha_{k-2} + a_{i4} = b_{k-2}^i, \\ a_{i1}\alpha_{k-3}^3 + a_{i2}\alpha_{k-3}^2 + a_{i3}\alpha_{k-3} + a_{i4} = b_{k-3}^i, \\ a_{i1}\alpha_{k-4}^3 + a_{i2}\alpha_{k-4}^2 + a_{i3}\alpha_{k-4} + a_{i4} = b_{k-4}^i, \end{cases} \quad (17)$$

где  $b_k^1 = \dot{x}_k$ ,  $b_k^2 = \dot{y}_k$ ,  $b_k^3 = T_k$ . Здесь  $\dot{x}_k$ ,  $\dot{y}_k$  и  $T_k$  – значения начальных скоростей и периода после применения метода дифференциальной коррекции для  $k$ -ой орбиты из таблицы.

### 3. Результаты

В результате проделанной работы была получена база данных орбит для системы «Солнце-Земля». Рисунок 5 показывает форму и относительное расположение орбит из построенного семейства. База данных состоит из более чем четырёх тысяч строк и девятнадцати столбцов: в первом столбце содержится параметр, задающий данную орбиту, в следующих четырёх столбцах — начальные координаты и скорости, в шестом — период, в седьмом — константа Якоби, в следующих восьми столбцах действительные и комплексные части четырёх мультипликаторов Флоке. Для каждой орбиты норма невязки фазовых векторов в начальный и конечный моменты времени не превышает  $10^{-8}$ . Табулирование проводилось до симметричной орбиты относительно линии Солнце-Земля. Данная орбита — пересечение с семейством плоских периодических орбит Ляпунова, связанного с точкой либрации  $L_3$ .

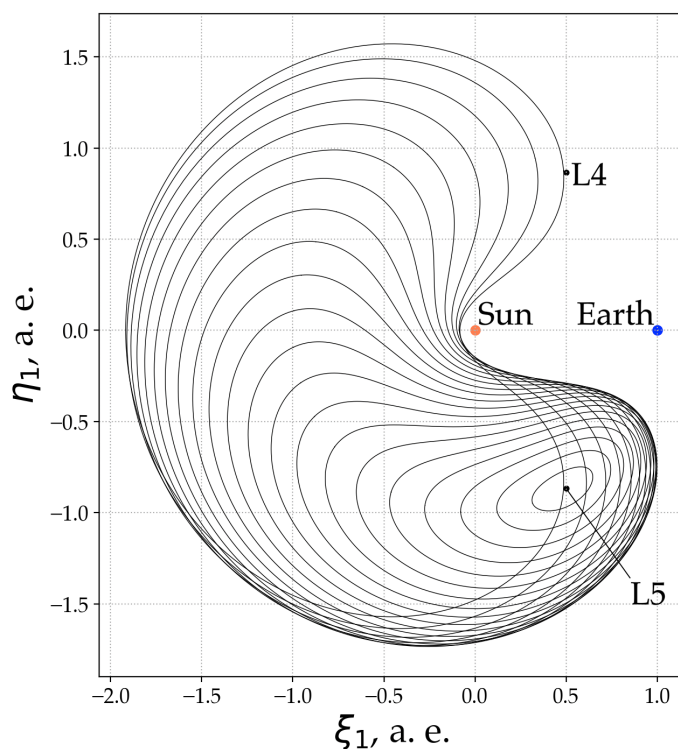


Рисунок 5 – Изображение каждой двухсотой орбиты из таблицы.

Были исследованы зависимости периода и константы Якоби от параметра  $\alpha$ . Они проиллюстрированы на рисунках 6 и 7 соответственно. Как можно видеть, значение периода у орбит всего семейства практически равно году, отклонения от этого значения составляют не более шести минут.

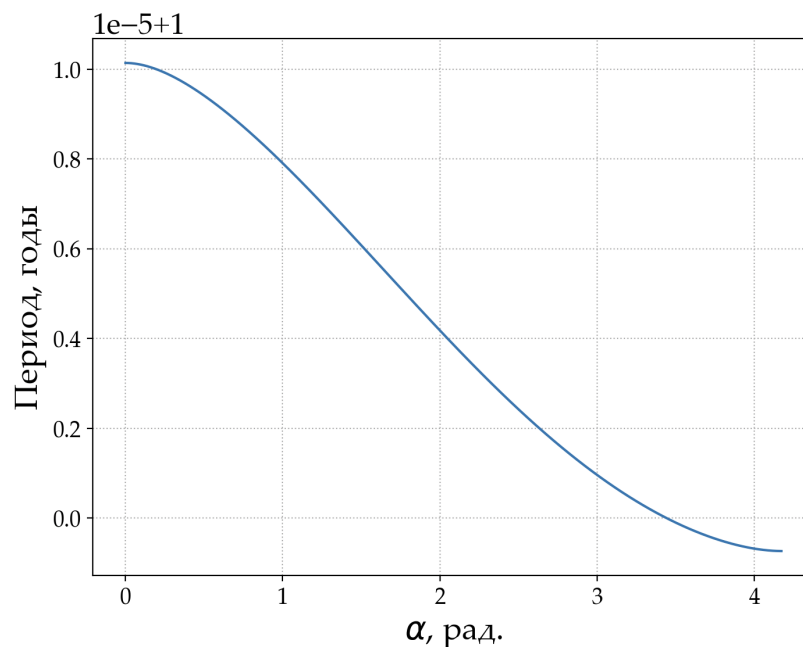


Рисунок 6 – Зависимость периода от параметра  $\alpha$ .

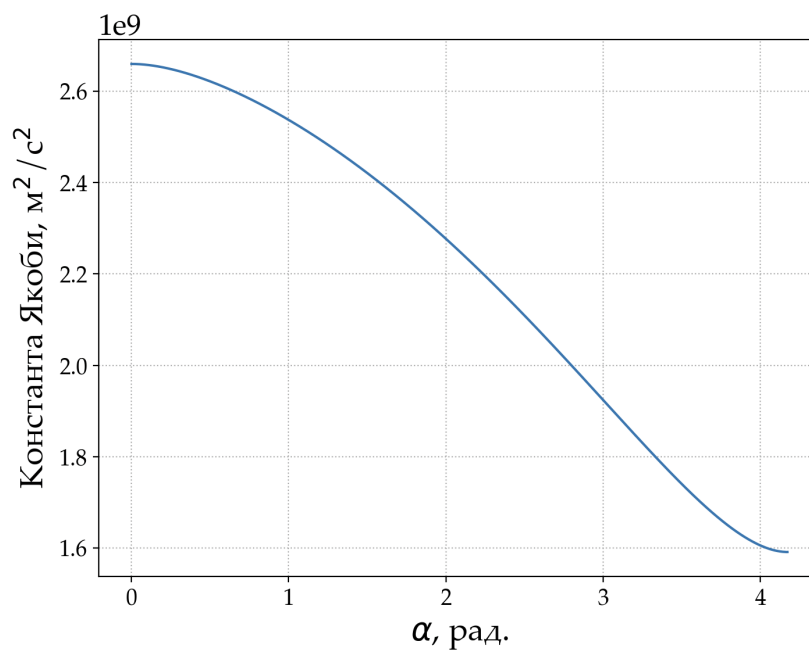


Рисунок 7 – Зависимость константы Якоби от параметра  $\alpha$ .

Обе рассматриваемые величины монотонно уменьшаются с увеличением параметра. Так как для точки  $L_4$  ситуация будет аналогична, то параметр симметричной орбиты, до которой осуществляется построение, может быть вычислен как параметр, соответствующий орбите минимального периода.

Также орбиты из семейства были исследованы на минимальное и максимальное расстояние от Солнца. Эта информация может быть полезна при выборе орбиты, так как КА может сгореть при слишком сильном сближении с Солнцем, а на слишком большом расстоянии энергия, получаемая от солнечных панелей, может быть недостаточной. Зависимость максимального и минимального расстояний от КА до Солнца в зависимости от параметра  $\alpha$  орбиты представлена на рисунке 8.

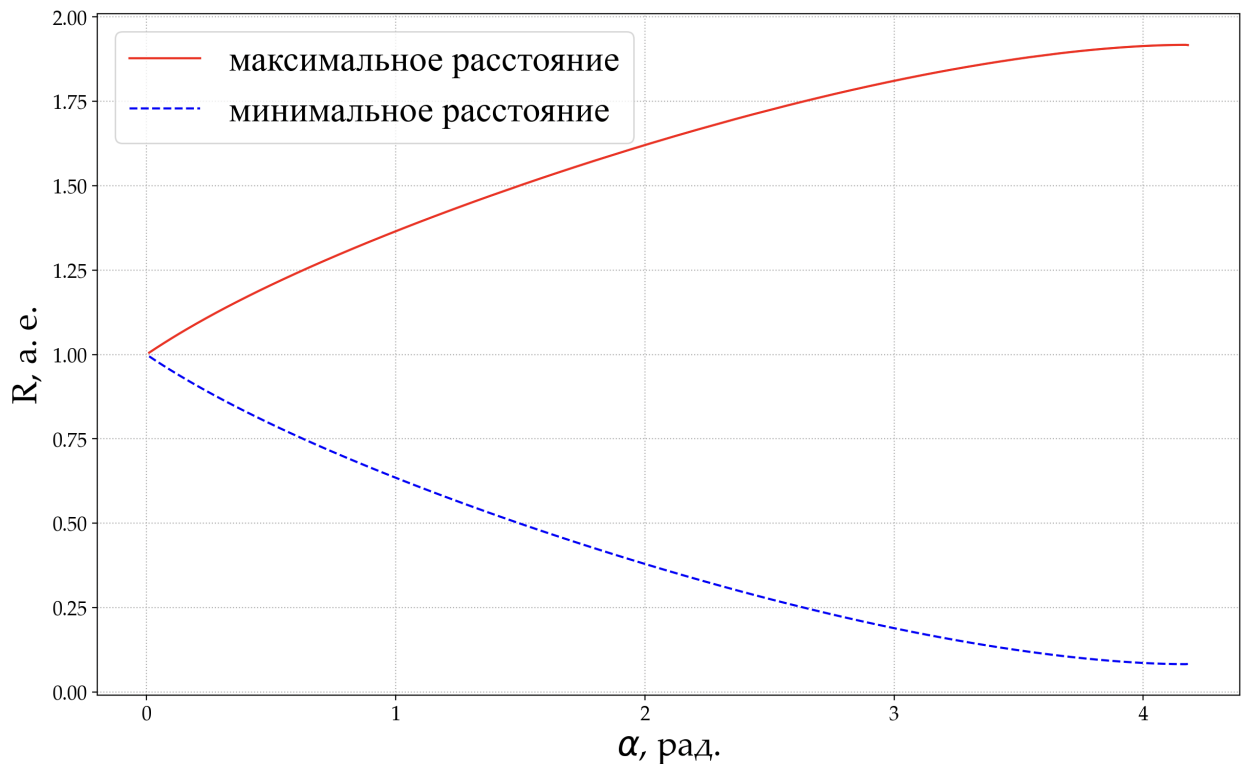


Рисунок 8 – Зависимость максимального и минимального расстояний от КА до Солнца в зависимости от параметра  $\alpha$  орбиты.

Были также получены значения мультипликаторов Флоке для каждой построенной орбиты. Оказалось, что для всех орбит семейства два мультипликатора с высокой точностью равны единице, а два других лежат на



единичной окружности комплексной плоскости.

Орбиты семейства были исследованы на практическую устойчивость. Для этого орбиты, соответствующие параметрам  $\alpha$  0.001, 0.01, 0.1 и 1.0, были проинтегрированы на временном промежутке, равном ста периодам, то есть примерно одному веку. При этом начальное положение аппарата бралось с одинаковым отклонением  $\Delta x$  по обеим осям относительно расчётного начального положения.

Графики, изображённые на рисунках 9–12 показывают, что возмущения начального положения приводят к потере периодичности, однако при малых значениях отклонения аппарат движется в малой окрестности периодических орбит, что свидетельствует в пользу их практической устойчивости.

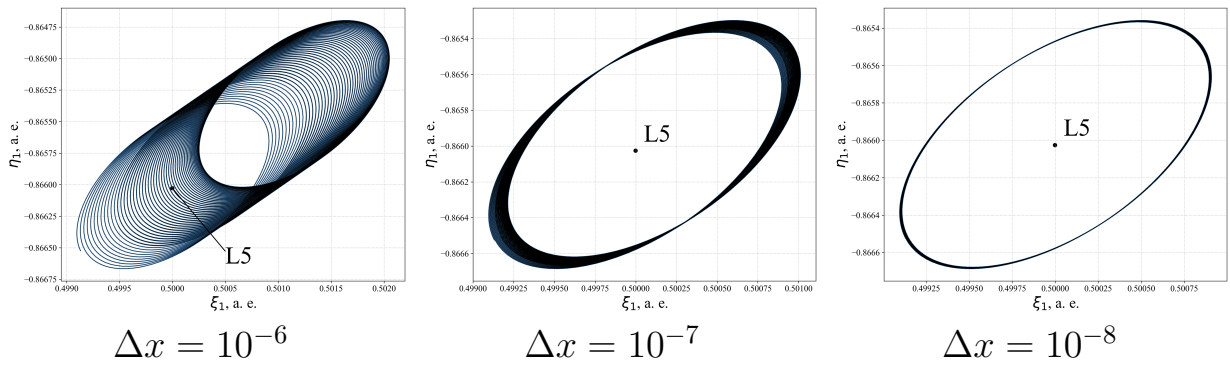


Рисунок 9 – Эволюция орбиты параметра  $\alpha = 0.001$ .

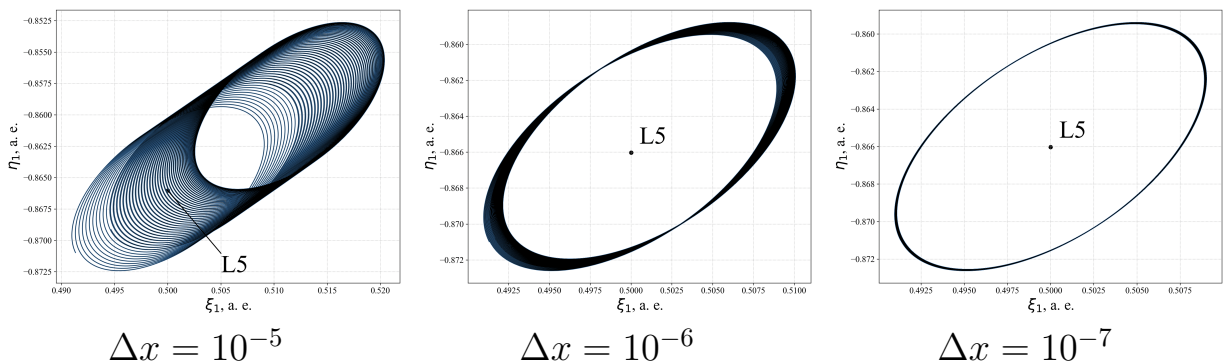


Рисунок 10 – Эволюция орбиты параметра  $\alpha = 0.01$ .

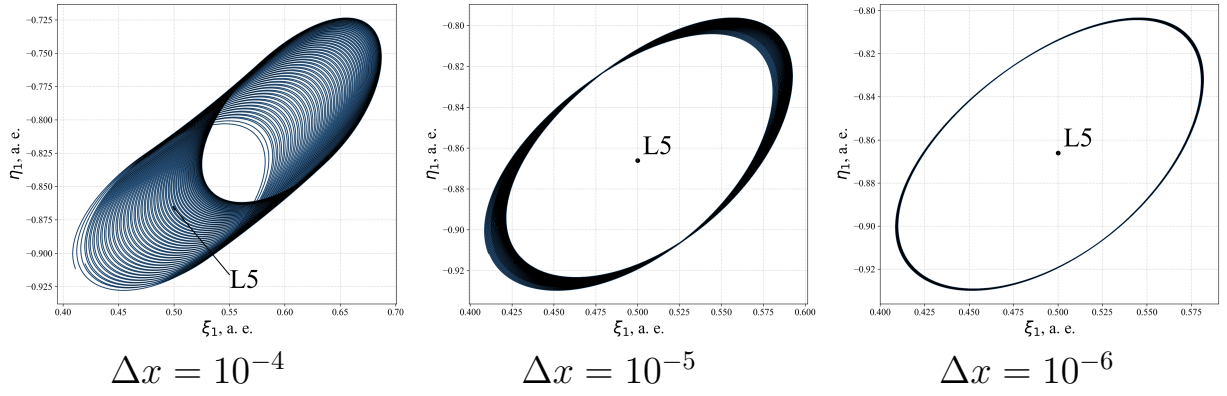


Рисунок 11 – Эволюция орбиты параметра  $\alpha = 0.1$ .

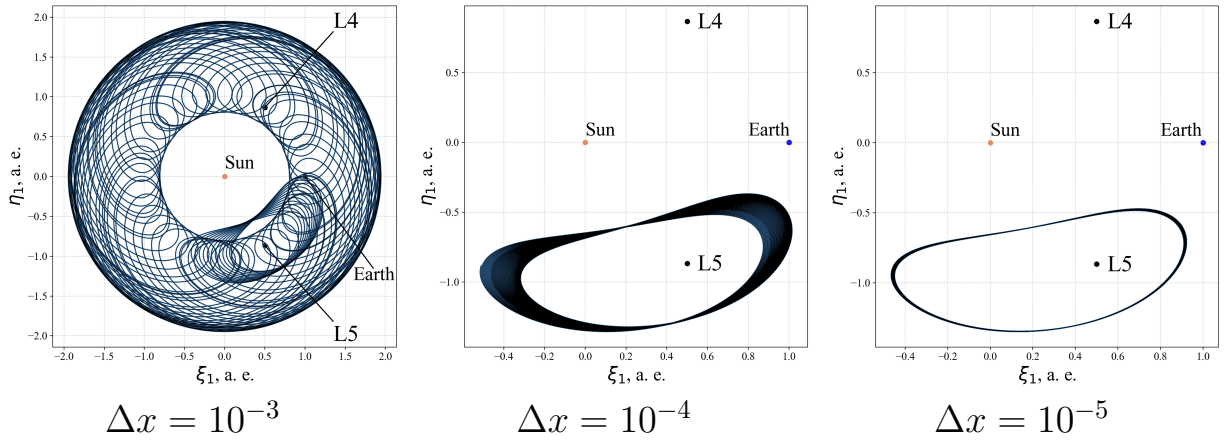


Рисунок 12 – Эволюция орбиты параметра  $\alpha = 1.0$ .

Полученная база данных может быть использована для построения орбиты произвольного параметра  $\alpha$  за малое число итераций метода дифференциальной коррекции. Начальные приближения для новой орбиты можно получать из интерполяции многочленом третьей степени, который строится на параметрах четырёх орбит с параметром наиболее близким к данному: параметры двух орбит меньше данного, а двух больше. То есть, если дан параметр  $\alpha_*$ , то для него начальные приближения скоростей и периода вычисляются как

$$\dot{x}_{0*} = a_{11}\alpha_*^3 + a_{12}\alpha_*^2 + a_{13}\alpha_* + a_{14},$$

$$\dot{y}_{0*} = a_{21}\alpha_*^3 + a_{22}\alpha_*^2 + a_{23}\alpha_* + a_{24},$$

$$T_{0*} = a_{31}\alpha_*^3 + a_{32}\alpha_*^2 + a_{33}\alpha_* + a_{34},$$

где  $\dot{x}_{0_*}$ ,  $\dot{y}_{0_*}$ ,  $T_{0_*}$  — начальные приближения переменных для орбиты, соответствующей параметру  $\alpha_*$ . Коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $i \in \overline{1,3}$ ,  $j \in \overline{1,4}$  рассчитываются путём решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{i1}\alpha_{k-1}^3 + a_{i2}\alpha_{k-1}^2 + a_{i3}\alpha_{k-1} + a_{i4} = b_{k-1}^i, \\ a_{i1}\alpha_k^3 + a_{i2}\alpha_k^2 + a_{i3}\alpha_k + a_{i4} = b_k^i, \\ a_{i1}\alpha_{k+1}^3 + a_{i2}\alpha_{k+1}^2 + a_{i3}\alpha_{k+1} + a_{i4} = b_{k+1}^i, \\ a_{i1}\alpha_{k+2}^3 + a_{i2}\alpha_{k+2}^2 + a_{i3}\alpha_{k+2} + a_{i4} = b_{k+2}^i. \end{cases}$$

Обозначения  $\alpha_k$  и  $b_k^i$  такие же как в системе (17). Здесь берётся такое значение  $k$ , что  $\alpha_k < \alpha_* < \alpha_{k+1}$ . Был проведён численный эксперимент по определению числа итераций метода дифференциальной коррекции для набора орбит с начальным значением параметра  $4.5 \cdot 10^{-3}$  и шагом  $10^{-3}$ . Максимальная допустимая норма невязки фазовых векторов в начальный и конечный моменты времени была установлена на значении  $10^{-8}$ . Результаты эксперимента представлены в таблице 1.

Число итераций	Количество орбит
0	4103
1	62
2	2
3	5
4	0
5	1

Таблица 1 – Соотношение количества итераций метода дифф. коррекции и количества орбит, которые были получены за соответствующее число итераций.

Нулевое количество итераций означает, что требуемая точность была достигнута за счёт лишь начального приближения, без использования метода дифференциальной коррекции.

## Заключение

В ходе работы при помощи методов дифференциальной коррекции и продолжения по параметру было построено семейство плоских периодических орбит Ляпунова, связанных с точкой либрации  $L_5$  для системы «Солнце-Земля». Для данных орбит был рассчитан период, константа Якоби и Мультипликаторы Флоке. Было проведено исследование полученных орбит на устойчивость, которое показало, что при небольших отклонениях начального положения траектории КА лежат вблизи построенных периодических орбит. Был написан код, позволяющий на основе полученной базы данных строить произвольные орбиты из рассматриваемого семейства за малое число итераций. Также были исследованы зависимости максимального и минимального расстояний от КА до Солнца в зависимости от параметра  $\alpha$  орбиты.

В дальнейшем планируется продолжение данной работы, включающее в себя изучение и построение других семейств периодических орбит в плоской круговой ограниченной задаче трёх тел, более подробное их исследование на устойчивость, а также проектирование перелётов к этим орбитам и алгоритмов их поддержания.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Исследование космической обсерватории SOHO. [Электронный ресурс] URL: <https://soho.nascom.nasa.gov/about/about.html> (дата обращения: 08.06.2024)
- [2] Исследование программы ADITYA-L1. [Электронный ресурс] URL: [https://www.isro.gov.in/Aditya\\_L1.html](https://www.isro.gov.in/Aditya_L1.html) (дата обращения: 08.06.2024).
- [3] *Богачев С.А., Карелин А.В., Кузин С.В.* [и др.]. Рационализация задач и оптимизация комплекса аппаратуры космического аппарата в точке Лагранжа L5 для мониторинга геоэффективных процессов солнечной активности // Космонавтика и ракетостроение. 2020. №4 (115). С. 108-123.
- [4] *Mittleman D.* Motion about the Stable Libration Points in the Linearized, Restricted Three-Body Problem // Stability of the Solar System and Its Minor Natural and Artificial Bodies / V.G. Szebehely (eds). — NATO ASI Series, vol 154. — Dordrecht : Springer, 1985.
- [5] *Юмагулов М. Г.* Введение в теорию динамических систем: Учебное пособие. — Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015. — 272 с.
- [6] *Koon W., Lo M., Marsden J.* [et al.] Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design. — New York: Springer Publishing, 2017.
- [7] *Широбоков М. Г.* Лекции и задачи по численным методам в механике космического полета : учеб. пособие // М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). — Москва : МФТИ, 2023. — 112 с.

- [8] *Gómez G., Simó C., Llibre J.* [et al.]. Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Volume II: Fundamentals: The Case of Triangular Libration Points. — Singapore: World Scientific Publishing, 2001.