
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладная математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Геокосмические науки и технологии

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИЖЕНИЯ ГРУППЫ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПОД УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

(бакалаврская работа)

Студент:

Федурина Алёна

(подпись студента)

Научный руководитель:

Иванов Данил Сергеевич,
канд. физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2024

Аннотация

В работе рассматривается задача управления движением группы спутников на околоземной орбите для формирования заданной относительной конфигурации. Алгоритм управления построен на основе прямого метода Ляпунова с использованием криволинейных относительных координат. Алгоритм разделён на два этапа: на первом этапе устраняется относительный дрейф и достигается требуемый относительный сдвиг траекторий, на втором этапе траектории сходятся к требуемым амплитудам в плоскости и вне плоскости орбиты. В работе проводится исследование времени сходимости и точности поддержания требуемого движения с учётом ограничений на величину управляющего ускорения и под влиянием второй зональной гармоники геопотенциала.

Введение	3
Раздел 1. Управление движением группы спутников.....	6
1.1 Постановка задачи	6
1.2 Системы координат	7
1.3 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах.....	8
1.4 Построение двухэтапного управления	10
1.4.1 Нахождение вектора управляющего ускорения	10
1.4.2 Перевод вектора управляющего ускорения в ИСК.....	12
1.4.3 Проблема выбора параметров управления.....	13
1.5 Математическое моделирование.....	14
1.5.1 Кластерный запуск.....	14
1.5.2 Пример работы алгоритма	15
1.5.3 Исследование времени сходимости.	20
Раздел 2. Маневрирование при выходе из строя одного из аппаратов.....	22
2.1 Постановка задачи	22
2.2 Алгоритм перестройки	22
2.3 Пример работы алгоритма	23
2.4 Исследование времени сходимости алгоритма	28
Заключение	30

Введение

Концепция использования групповых полетов космических аппаратов для решения различных задач в околоземном пространстве в настоящее время набирает популярность. Миссии группового полета имеют множество преимуществ перед миссиями одиночных космических аппаратов. К примеру, использование нескольких малогабаритных спутников, летящих на небольших расстояниях друг от друга и поддерживающих определенную конфигурацию, дает возможность для проведения одновременных наблюдений и пространственных измерений.

Групповые полеты начали активно использоваться в области дистанционного зондирования Земли. Преимущество такого подхода заключается в возможности вести съемки Земли одновременно под разными углами, что существенно помогает увеличить точность получаемых данных. Так, были запущены два спутника – TerraSAR-X и TanDEM-X, в групповом полете эти спутники представляют собой настраиваемый SAR-интерферометр [1]. Целью миссии является создание глобальной цифровой модели рельефа с наилучшей точностью.

Еще одной задачей, которую могут решать групповые полеты является задача исследования параметров ионосферы и верхних слоёв атмосферы. В настоящий момент активно разрабатывается миссия CloudCT, в рамках которой планируется запустить 10 наноспутников [2]. Формация предназначена для детального сканирования внутренней структуры небольших облаков, которые не улавливаются современными технологиями дистанционного зондирования. Спутники используют методы компьютерной томографии. Изображения облаков можно будет получать с разных сторон, что поспособствует существенному улучшению моделирования атмосферы и прогнозирования климата.

Еще одно преимущество, которым обладают групповые полеты заключается в том, что внезапный выход из строя одного из аппаратов не приведет к завершению миссии: с помощью управления относительным движением функционирующих аппаратов неработающий аппарат может быть выведен из формации, либо спутники смогут перегруппироваться и миссия продолжится.

Рассматривая групповые полеты с точки зрения динамики движения, можно заметить ряд особенностей. Многие модели, описывающее относительное движение спутников в группе,

получены путем линеаризации уравнений движения в центральном поле, причем использовалось предположение, что относительные расстояния невелики. К таким моделям можно отнести уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира [3,4], модель Швайгарда-Седвика [5]. Однако существуют и нелинейные модели, такие как модель Яна-Альфренда [6]. Относительное движение космических аппаратов даже в линейном приближении не является устойчивым, а при наличии внешних возмущений, например, от второй гармоники геопотенциала J_2 , при учёте влияния атмосферы, влияния давления солнечного излучения спутники начинают разлетаться, даже если в начальный момент относительное движение было замкнутым. Поэтому задача управления состоит не только в том, чтобы построить определенную конфигурацию, но и обеспечить ее сохранение на протяжении некоторого отрезка времени.

Существует множество алгоритмов для управления групповыми полетами – управления относительным движением. Далее будут перечислены некоторые из них и определены достоинства и недостатки данных алгоритмов. Пропорционально-дифференциальный регулятор характеризуется быстроедействием и имеет высокую устойчивость процесса регулирования, однако может иметь статическую ошибку из-за отсутствия компенсации внешних возмущений, что снижает точность регулирования [7]; релейное управление реализует не непрерывное воздействие, а только заданный набор уровня воздействия, но простота реализации может приводить к возрастающей амплитуде автоколебаний, возникающих в системе, и большому времени затухания переходных процессов [8]; управление на основе прямого метода Ляпунова – обеспечивает асимптотическую устойчивость опорного движения за сравнительно большое количество итераций цикла управления [9]. Также существуют скользящее управление [10], линейно-квадратический [11] и нелинейный квадратический регуляторы [12], метод виртуальных потенциалов [13] и оптимальное управление [14]. Как было показано, все алгоритмы имеют свои преимущества и недостатки. В данной работе используется управление на основе прямого метода Ляпунова, так как алгоритм относительно прост в реализации и обеспечивает асимптотическую устойчивость.

Целью настоящей работы является разработка алгоритмов управления движением группы космических аппаратов и получение квалификации в области исследования динамики космических систем. Главными задачами является освоение методов математического

моделирования управляемого движения, получение навыков разработки алгоритмов управления при помощи прямого метода Ляпунова. Также, важной задачей является анализ результатов математического моделирования системы.

Данная работа состоит из введения, основного содержания, разделенного на две главы, заключения и списка использованных источников. В первой главе изложена постановка задачи, описан алгоритм управления на основе прямого метода Ляпунова. В конце главы приведен пример работы алгоритма и исследование времени его сходимости. Вторая глава посвящена построению алгоритма управления при внезапном выходе из строя одного из спутников, также приведен пример математического моделирования и исследование времени сходимости алгоритма.

Раздел 1. Управление движением группы спутников

1.1 Постановка задачи

В данной работе рассматривается движение группы спутников на низкой околоземной орбите, причем спутники находятся на близких расстояниях друг от друга. Будем считать, что каждый спутник оснащен системой определения относительного движения, так что относительное движение любого КА предполагается известным. Также, считается, что каждый спутник имеет систему управления движением центра масс, но не уточняется ее конкретный тип (роль такой системы могут выполнять реактивные двигатели, солнечный парус, использование аэродинамической силы или электромагнитного взаимодействия). Угловое движение в данной работе не рассматривается. В качестве возмущения выступает возмущение, вызванное второй гармоникой в разложении геопотенциала J_2 .

Требуется разработать алгоритм управления относительным движением для обеспечения заданного относительного движения, которое в настоящей работе определяется как движение вдоль орбиты с заданными относительными расстояниями. При моделировании задать начальные условия, соответствующие кластерному запуску, когда из пускового контейнера последовательно с заданным интервалом отделяются вдоль вектора скорости несколько аппаратов. Также необходимо исследовать время сходимости алгоритма в зависимости от максимально возможной величины управляющего ускорения.

1.2 Системы координат

В данной работе используется две системы координат.

Инерциальная система координат (ИСК) $OXYZ$: ее центр совпадает с центром масс Земли. Ось OX направлена на точку весеннего равноденствия; ось OY – направлена вдоль вектора кинетического момента Земли, а ось OZ достраивается до правой тройки векторов. Данная система координат используется для интегрирования орбитального движения.

Следующая система координат – орбитальная (ОСК) $\dot{O}xuz$. В данной работе ее центр движется по круговой орбите; ось $\dot{O}z$ направлена по радиус-вектору этой точки; ось $\dot{O}u$ – вдоль орбитального момента системы, а ось $\dot{O}x$ достраивается до правой тройки векторов. Эта система координат используется для расчета управляющего ускорения и визуализации относительного движения.

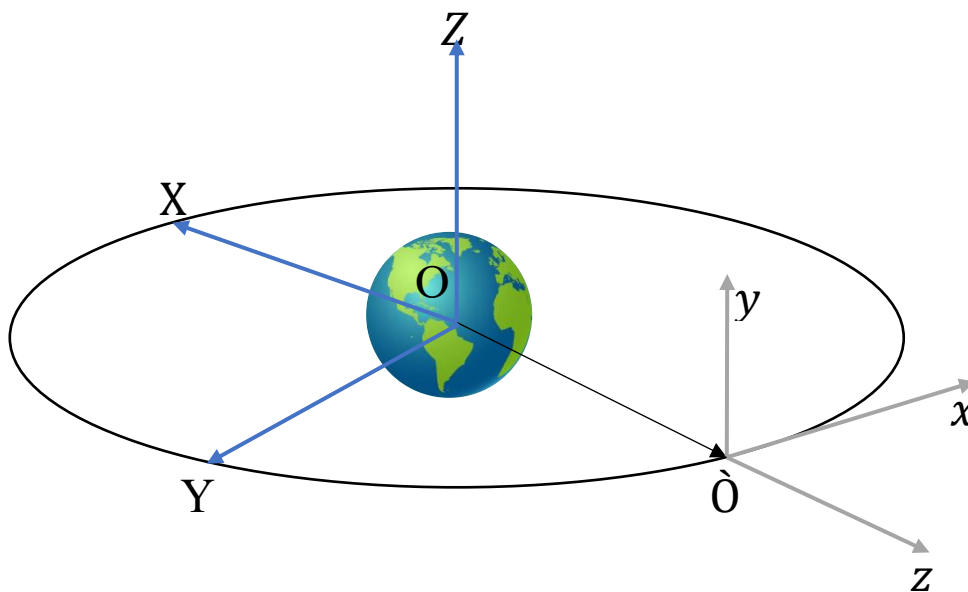


Рис. 1. Используемые системы координат

Для перехода между системами координат используется матрица A , столбцы которой строятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A &= [a_1, a_2, a_3], \\
 a_3 &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \\
 a_2 &= \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}, \\
 a_1 &= a_2 \times a_3,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки \dot{O} , записанный в ИСК а \mathbf{v} – скорость движения ОСК по орбите в ИСК.

1.3 Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшира в криволинейных координатах

Для описания относительного движения в работе используется модель Хилла-Клохесси-Уилтшира. Уравнения получаются путем линеаризации уравнений относительного движения с учетом, что один из спутников (главный) движется по круговой орбите. Также учитывается малость расстояния между спутниками по сравнению с величиной их радиус-векторов.

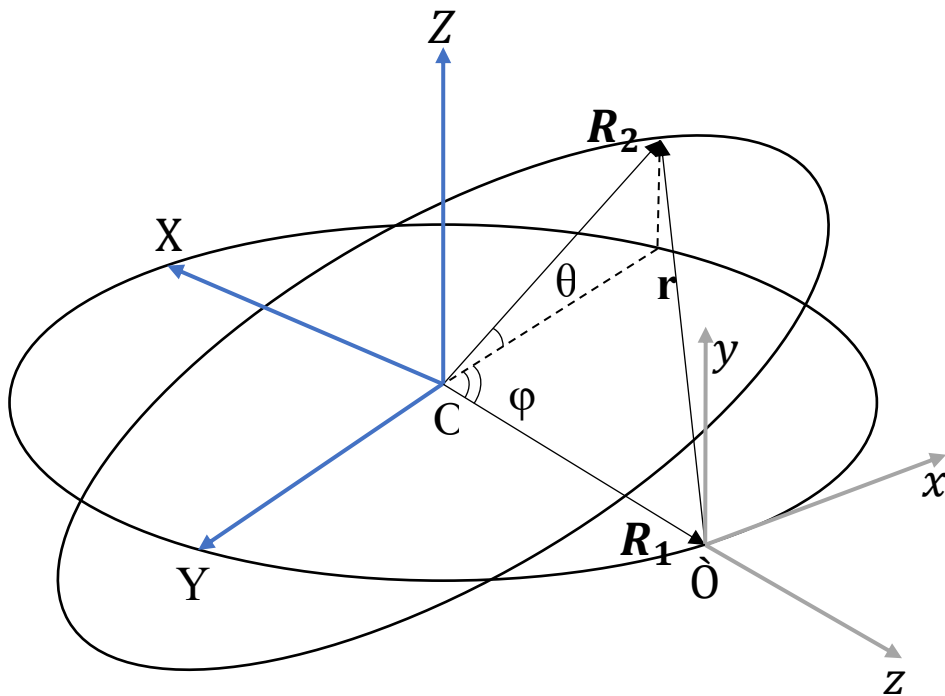


Рис. 2. Криволинейные координаты

Уравнения свободного движения без учета возмущений имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\omega\dot{z} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0, \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $(x, y, z)^T = \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ – разница радиус-векторов двух спутников, а ω – угловая скорость вращения орбитальной системы координат, начало которой совпадает с центром масс главного спутника.

Однако, в работе [15] было показано, что уравнения ХКУ, записанные в криволинейных координатах, на относительных расстояниях не превышающих километр, дают более высокую точность, по сравнению с уравнениями, записанными в декартовых координатах. Это связано с тем, что спутник движется по дуге орбиты, и в таком случае криволинейный базис лучше описывает относительное движение. Ограничение на рассматриваемое относительное расстояние связано с тем, что уравнения ХКУ – это линеаризованные уравнения относительного движения, а линеаризация идет по малому параметру $r \ll R_1, R_2$.

В качестве криволинейных координат рассматривается набор φ, θ и ρ . Угол φ – угол между радиус-вектором главного спутника (R_1) и проекцией радиус-вектора второго спутника (R_2) на плоскость орбиты главного. Угол θ – угол между упомянутой ранее проекцией и радиус-вектором этого же спутника. Разницу модулей радиус-векторов обозначим как $\rho = R_2 - R_1$.

Формулы перехода между координатами:

$$\begin{aligned}x &= (\rho + a_0) \cos \theta \sin \varphi, \\ y &= (\rho + a_0) \sin \theta, \\ z &= (\rho + a_0) \cos \theta \cos \varphi - a_0,\end{aligned}\tag{2}$$

где a_0 – длина радиус-вектора первого КА.

В таком случае уравнения ХКУ в криволинейных координатах переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}a_0\ddot{\varphi} + 2\omega\dot{\rho} &= w_\varphi, \\ a_0\ddot{\theta} + a_0\omega^2\theta &= w_\theta, \\ \ddot{\rho} - 2\omega a_0\dot{\varphi} - 3\omega^2\rho &= w_\rho,\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь уже учтено управляющее ускорение $w_\varphi, w_\theta, w_\rho$, компоненты которого стоят в правой части уравнений. Решая эти уравнения с нулевой правой частью, получаем выражения для изменения φ, θ и ρ с течением времени.

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - C_3 \sin \omega t + C_4, \\
\theta(t) &= C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t, \\
\rho(t) &= 2C_1a_0 + C_2a_0 \sin \omega t + C_3a_0 \cos \omega t,
\end{aligned} \tag{4}$$

где константы движения определяются через начальные условия следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega} + 2\frac{\rho(0)}{a_0}; C_2 = \frac{\dot{\rho}(0)}{\omega a_0}; C_3 = 2\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega} + 3\frac{\rho(0)}{a_0}; \\
C_4 &= -2\frac{\dot{\rho}(0)}{\omega a_0} + \varphi(0); C_5 = \frac{\dot{\theta}(0)}{\omega}; C_6 = \theta(0).
\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения можно переписать, введя новые константы $B_1, B_2, B_3, B_4, \alpha$ и β :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= -3B_1\omega t + 2B_2 \cos(\omega t + \alpha) + B_4, \\
\theta(t) &= B_3 \sin(\omega t + \beta), \\
\rho(t) &= 2B_1a_0 + B_2a_0 \sin(\omega t + \alpha),
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь α, β – фазовые параметры движения, зависящие от начальных условий, а параметры B определяются следующими выражениями:

$$B_1 = C_1; B_2 = \sqrt{(C_2)^2 + (C_3)^2}; B_3 = \sqrt{(C_5)^2 + (C_6)^2}; B_4 = C_4. \tag{7}$$

Данные константы важны для изучения параметров относительного движения. Параметр B_1 отвечает за относительный дрейф между аппаратами. Если $B_1 = 0$, то дрейфа не будет. Параметр B_4 отвечает за сдвиг спутников относительно друг друга. Параметры B_2 и B_3 – соответственно за амплитуду относительного движения в плоскости и вне орбитальной плоскости движения.

1.4 Построение двухэтапного управления

1.4.1 Нахождение вектора управляющего ускорения

При наличии ненулевой правой части в уравнении (2) значения параметров B_1, B_2, B_3, B_4 перестают быть постоянными и начинают изменяться со временем. В этом случае выражения (5) и (7) содержат значения $(\varphi, \theta, \rho, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\rho})$ не в начальный момент времени, а в текущий момент времени t . То есть, подставляя в правую часть уравнения (2) компоненты управляющего ускорения, возможно изменять φ, θ, ρ , и, следовательно B_1, B_2, B_3, B_4 .

Из уравнений (4) видно, что в выражении для φ есть непериодическое слагаемое, содержащее параметр B_1 – оно приводит к относительному дрейфу. Итак, задача первого этапа управления состоит в том, чтобы избавиться от этого слагаемого, тем самым устранив дрейф, а также требуется обеспечить заданный сдвиг, за который отвечает параметр B_4 .

Для этого предлагается рассмотреть следующую кандидат-функцию Ляпунова:

$$V_1 = \frac{1}{2} B_1^2 + \frac{1}{2} \Delta B_4^2,$$

где $\Delta B_4 = (B_4 - B_{4req})$, а B_{4req} – требуемое значение B_4 .

Такая функция положительна везде, кроме положения равновесия ($B_1 = 0$, $B_4 = B_{4req}$) – здесь она обнуляется, и по теореме Барбашина-Красовского [9], производная \dot{V}_1 , вычисленная в силу уравнений движения (2), должна быть неположительна.

$$\dot{V}_1 = B_1 \left(\frac{w_\varphi}{\omega} \right) - \Delta B_4 \left(\frac{2w_\rho}{a_0 \omega} + 3\omega B_1 \right) < 0.$$

Для выполнения этого условия вектор управляющего ускорения должен принимать вид:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} w_{1\varphi} \\ w_{1\theta} \\ w_{1\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_a B_1 \omega \\ 0 \\ \frac{k_b \omega a_0}{2} \Delta B_4 - \frac{3}{2} \omega^2 a_0 B_1 \end{pmatrix}, \quad k_a, k_b > 0. \quad (8)$$

Однако, такого управления недостаточно для управления амплитудами движения спутника, поэтому предлагается модифицировать его. На втором этапе проводится управление всеми четырьмя параметрами движения.

Рассмотрим следующую кандидат-функцию Ляпунова:

$$V_2 = \frac{1}{2} B_1^2 + \frac{k_2}{2} \Delta B_2^2 + \frac{1}{2} \Delta B_3^2 + \frac{k_4}{2} \Delta B_4^2. \quad (9)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= w_\varphi \left(\frac{B_1}{\omega} + k_2 \left(\frac{4\Delta B_2 B_1}{\omega B_2} - \frac{2\Delta B_2 \rho}{a_0 \omega B_2} \right) \right) + w_\theta \frac{\Delta B_3 \dot{\theta}}{\omega^2 B_3} \\ &+ w_\rho \left(k_2 \frac{\Delta B_2 \dot{\rho}}{a_0^2 \omega^2 B_2} - k_4 \frac{2\Delta B_4}{a_0 \omega} \right) - 3\omega B_1 \Delta B_4 < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

И управляющее ускорение принимает следующий вид:

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} w_{2\varphi} \\ w_{2\theta} \\ w_{2\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_\varphi B_2^2 \left(\frac{B_1}{\omega} + k_2 \left(\frac{4\Delta B_2 B_1}{\omega B_2} - \frac{2\Delta B_2 \rho}{a_0 \omega B_2} \right) \right) \\ -k_\theta B_3^2 \frac{\Delta B_3 \dot{\theta}}{\omega^2 B_3} \\ -k_\rho B_2^2 \left(k_2 \frac{\Delta B_2 \dot{\rho}}{a_0^2 \omega^2 B_2} - k_4 \frac{2\Delta B_4}{a_0 \omega} \right) \end{pmatrix}, \quad k_2, k_4, k_\varphi, k_\theta, k_\rho > 0. \quad (11)$$

Положительные коэффициенты k_2 и k_4 в формуле (10) введены в качестве коэффициентов пропорциональности между двумя слагаемыми в третьей компоненте вектора управляющего ускорения (11). Дело в том, что при численном моделировании была обнаружена проблема: одно из этих слагаемых (второе) на несколько порядков по величине превосходило первое. Поэтому вклад в компоненту управления по ρ давало рассогласование только по параметру B_4 . Другими словами, $w_{2\rho}$ была нечувствительна к изменениям по B_2 и управление реализовывалось только для сдвига. Введя данные параметры управления, удалось устранить эту проблему.

К тому же, следует обратить внимание на последнее слагаемое в выражении (10). Как видно, оно не содержит в себе управляющих компонент, и может менять свой знак. Это значит, что возможна такая ситуация, когда величина этого слагаемого достигнет такой, при которой производная V_2 станет положительной. Для борьбы с этой проблемой придумано следующее решение: как основное управление используется управление второго этапа и на каждом шаге интегрирования отслеживается знак \dot{V}_2 . Как только производная становится положительной, необходимо переключиться на первый этап управления, скорректировать величины параметров B_1 и B_4 , и когда \dot{V}_2 станет отрицательной, вновь переключиться на второй этап управления.

1.4.2 Перевод вектора управляющего ускорения в ИСК

Так как уравнения орбитального движения интегрируются в ИСК, а расчет управления происходит в ОСК в криволинейных координатах, требуется его перевести в декартовы координаты в ИСК. Для этого используется подход Ламе [16]. Переход из криволинейных

координат в декартовы осуществляются по формулам (2). А для расчета компонент управляющего ускорения используются следующие формулы:

$$u_k = \frac{1}{H_k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial V^2}{\partial q_k} \right], \quad (12)$$

где $q = [\varphi, \theta, \rho]^T$, $k = 1, 2, 3$, а V – абсолютная скорость, которая задается следующим образом:

$$V^2 = \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k^2 H_k^2. \quad (13)$$

А коэффициенты Ламе (H_k) задаются формулами:

$$H_k^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)^2. \quad (14)$$

Таким образом, используя выражения ((2), (12) – (14)) получаем компоненты вектора ускорения u_x, u_y, u_z в декартовых координатах орбитальной системы координат:

$$\begin{aligned} u_x &= 2\dot{\varphi}(-(\rho + a_0)\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\rho} \cos \theta) + (\rho + a_0)\ddot{\varphi} \cos \theta, \\ u_y &= 2\dot{\rho}\dot{\theta} + (\rho + a_0)(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta), \\ u_z &= \ddot{\rho} - (\rho + a_0)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Далее делается пересчет вектора управляющего ускорения в инерциальную систему координат с помощью матрицы перехода (1).

1.4.3 Проблема выбора параметров управления

Как видно из полученных векторов управляющих ускорений (формулы (8) и (11)), построенное управление имеет набор настраиваемых положительных коэффициентов. Возникает задача подбора оптимального набора этих коэффициентов для наилучшей сходимости алгоритма.

Существует два способа поиска оптимального набора: эмпирический и аналитический. Суть эмпирического способа заключается в многочисленном моделировании алгоритма и коррекции коэффициентов управления с каждым новым запуском моделирования. Этот способ довольно прост в исполнении, однако очень затратен по времени.

Второй способ заключается в поиске характеристических чисел линеаризованных вблизи положения равновесия дифференциальных уравнений на V_1, V_2, V_3, V_4 . Для асимптотической устойчивости положения равновесия требуется, чтобы все характеристические числа имели отрицательную действительную часть, а скорость сходимости алгоритма будет определяться характеристическим числом с самой маленькой по модулю действительной частью. Для получения наилучших характеристик алгоритма нужно, чтобы все параметры сходились к своим равновесным значениям с одинаковой скоростью. Поэтому, ставя условие на равенство действительных частей характеристических чисел, можно получить оптимальный набор коэффициентов управления. Этот способ более надежен, но в задачах с большим количеством управляемых величин, которые имеют нелинейный закон изменения со временем, значительно усложняется. В настоящей работе используется первый способ определения коэффициентов управления.

1.5 Математическое моделирование

1.5.1 Кластерный запуск

Для выведения группы спутников на орбиту часто используется кластерный запуск – групповой запуск спутников, после которого они находятся на небольших относительных расстояниях. Поэтому он включен в математическое моделирование системы. При кластерном запуске предполагается, что аппараты запускаются с заданной относительной скоростью со случайной ошибкой и с заданным интервалом времени между запусками.

Скорость аппаратов после запуска моделируется в орбитальной системе координат согласно следующей формуле:

$$\mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \mathbf{V}.$$

Ошибка скорости $\delta \mathbf{V}$ предполагается нормально распределенной векторной величиной с дисперсией $\sigma_{\delta V} = 0.1$ м/с. Интервал времени между запусками $\Delta t = 20$ с.

1.5.2 Пример работы алгоритма

В этом разделе рассматривается пример математического моделирования движения космических аппаратов под действием предложенного управления. Аппараты двигаются в гравитационном поле Земли, и в качестве возмущения выступает вторая гармоника разложения геопотенциала. Уравнения движения в ИСК записываются следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -\mu \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} + \mathbf{a}_{j_2} + \mathbf{u}_i, \quad (15)$$

здесь \mathbf{R}_i – радиус-вектор i -го спутника группы, μ – гравитационный параметр Земли, \mathbf{a}_{j_2} – ускорение, вызванное J_2 , \mathbf{u}_i – управляющее ускорение.

Далее описан общий алгоритм интегрирования движения спутников. В первую очередь задаются начальные условия и параметры спутников. Затем переходим к интегрированию уравнений движения (15) с учетом J_2 . На каждом шаге интегрирования происходит расчет текущих значений параметров $B_1 - B_4$ в ОСК в криволинейных координатах. Далее, с помощью этих значений рассчитывается и выбирается управляющее ускорение:

$$\mathbf{w} = \begin{cases} \mathbf{w}_1, & \text{если } \dot{V}_2 > 0, \\ \mathbf{w}_2, & \text{если } \dot{V}_2 < 0. \end{cases}$$

И в конце шага происходит пересчет управления в ИСК и интегрирование уравнения движения с учетом управления.

Ниже приведены таблицы начальных условий и параметров спутников.

Таблица 1. Параметры математического моделирования

Высота орбиты, км	400
Количество спутников	5
Время интегрирования, ч	10
Δt при кластерном запуске, с	20
Дисперсия ошибки при кластерном запуске, м/с	0.1
Шаг интегрирования, с	1

Таблица 2. Требуемые значения параметров КА

Требуемые значения	Спутник 1	Спутник 2	Спутник 3	Спутник 4	Спутник 5
B_{1req}	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B_{2req}	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B_{3req}	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B_{4req}	0.0	$7.384 \cdot 10^{-6}$	$1.475 \cdot 10^{-5}$	$2.213 \cdot 10^{-5}$	$2.951 \cdot 10^{-5}$

Таблица 3. Начальные параметры движения

Начальные данные	B_1	B_2	B_3	B_4
Для всех спутников	$1.476 \cdot 10^{-6}$	$7.522 \cdot 10^{-6}$	$1.483 \cdot 10^{-5}$	$3.918 \cdot 10^{-11}$

Таблица 4. Параметры управления

Коэффициенты управления	k_a	k_b	k_φ	k_θ	k_ρ	k_2	k_4
Для всех спутников	10^{-3}	10^{-1}	10^{-5}	10^3	10^5	10^2	10^0

Ниже на рис. 3 приведены графики траекторий управляемого движения пяти спутников в ОСК с учетом возмущения от J_2 . Как видно из рис. 3 спутники, выпущенные из одной точки, выстраиваются с определенными интервалами друг относительно друга, а амплитуда в плоскости движения уменьшается практически до нуля, причем на графике справа наглядно показано управление амплитудой вне плоскости.

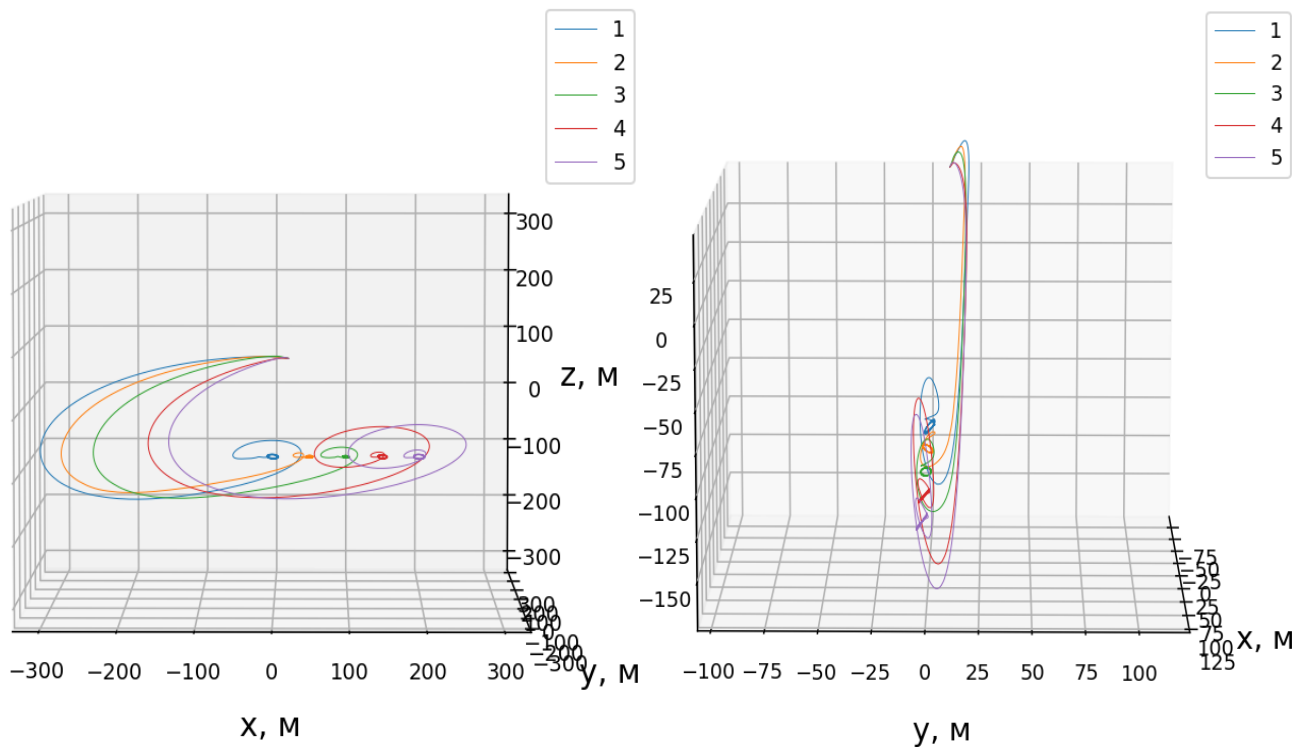


Рис. 3. Траектории спутников в ОСК

На рис. 4 продемонстрировано измерение параметров V_1 , V_2 , V_3 , V_4 под действием управления. Параметры V_1 и V_3 сходятся довольно быстро к требуемым значениям – это занимает примерно 2.5-3 часа. Однако, параметр V_3 сходится к своему требуемому значению с некоторой точностью: $\pm 4 \cdot 10^{-7}$. Параметры V_2 и V_4 сходятся медленнее, примерно за 4.7 часа. Хуже всех сходится параметр V_2 – с точностью $\pm 1.5 \cdot 10^{-5}$. Неидеальная сходимость к требуемым значениям вызвана наличием возмущения и особенностями алгоритма управления: частые переключения между этапами управления приводят к ошибкам достижения требуемых значений параметров.

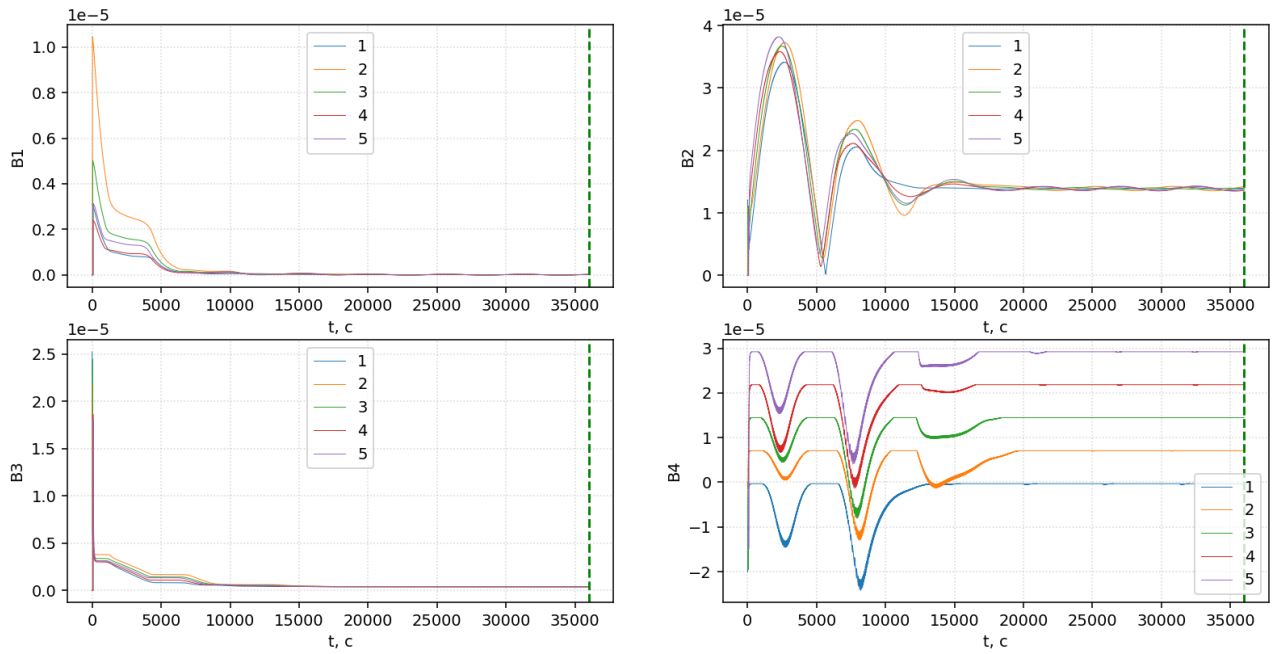


Рис. 4. Изменение параметров V_1, V_2, V_3, V_4 в зависимости от времени

Далее на рис.5 представлены графики изменения функции Ляпунова для всех спутников, и для одного спутника показан индикатор переключений между этапами управления.

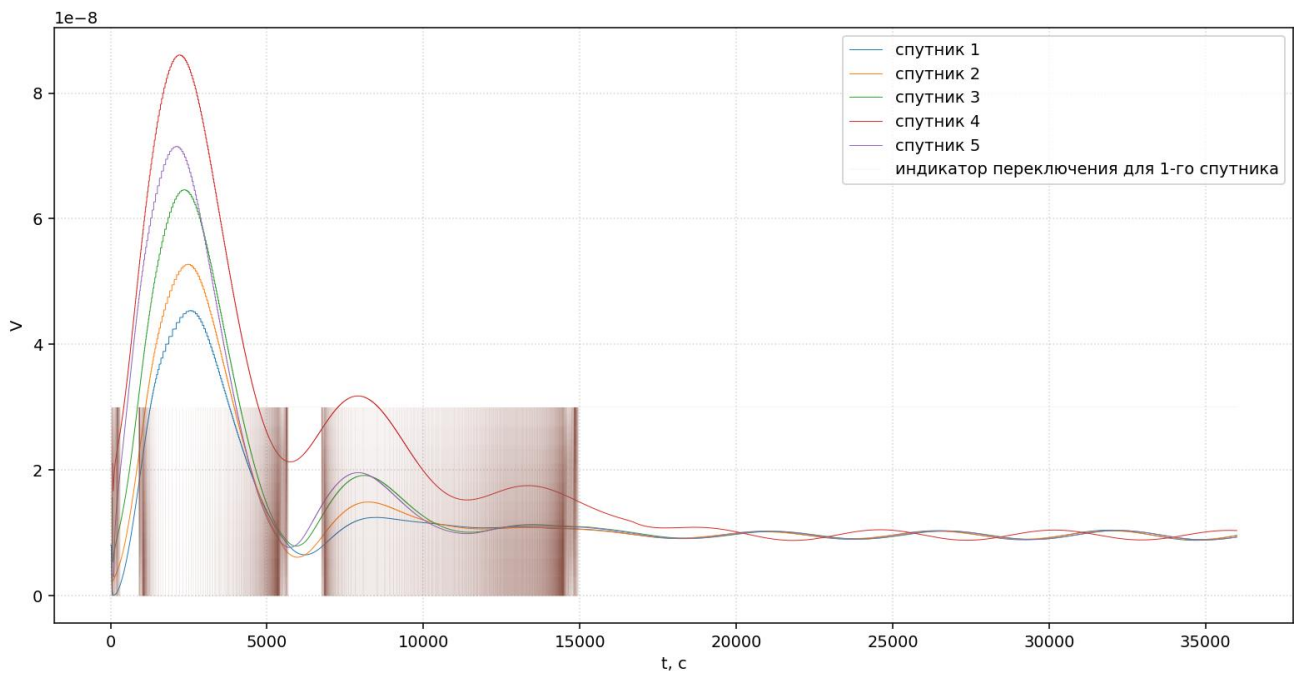


Рис. 5. Функция Ляпунова и индикатор переключения управлений

Индикатор переключения – вертикальные столбики, показывает, когда происходит управление первым этапом. При приближении графика можно заметить, что при переключении сама функция Ляпунова локально уменьшается. Так, первый этап управления замедляет рост функции Ляпунова, стараясь сделать ее производную вновь отрицательной.

Следует отметить, что значение производной функции Ляпунова имеет порядок 10^{-32} , причем смена ее знака происходит очень часто – иногда на каждом шаге интегрирования знак меняется на противоположный, это означает, что между этапами управления также приходится переключаться с частотой 1 Гц. Такое частое переключение в реальных аппаратах реализовать очень сложно, поэтому условие на отрицательность функции Ляпунова было скорректировано: переключение на первый этап алгоритма осуществлялось при значении функции Ляпунова $V_2 < -3.7 \cdot 10^{-34}$, где число подбиралось в ходе моделирования. Введение такого условия позволило алгоритму переключаться между этапами управления с меньшей частотой.

На рис.6 изображены компоненты вектора управляющего ускорения в инерциальной системе координат. Видно, как управление постепенно убывает и далее находится в окрестности нуля. Так как на аппараты действует возмущение, которое приводит к разлету спутников, требуется постоянное поддерживающее управление, поэтому в ноль оно никогда не придет.

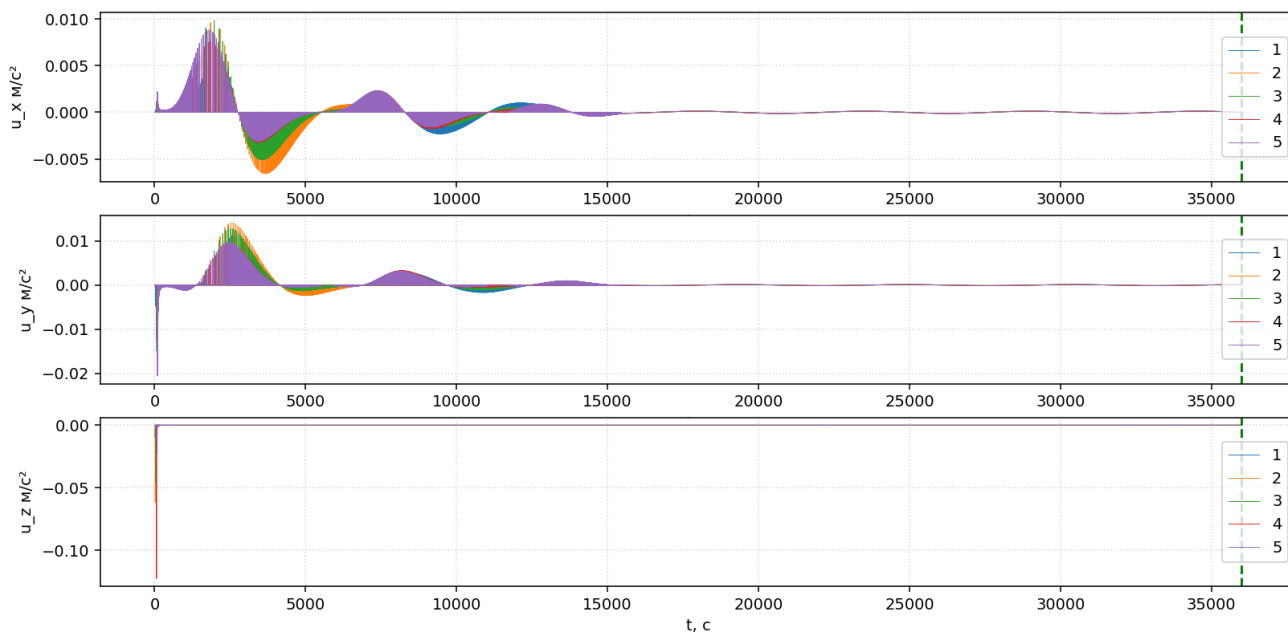


Рис. 6. Вектор управляющего ускорения в ИСК

1.5.3 Исследование времени сходимости

В данной части работы проводится исследование времени сходимости алгоритма при ограничении на величину управляющего ускорения. Для того, чтобы провести это исследование необходимо задать критерий сходимости, так как наличие возмущений не позволяет параметрам V_1, V_2, V_3, V_4 точно сойтись к их требуемым значениям. Для этого был придуман индикатор сходимости. Он состоит из трех шагов. Проводится моделирование и на первом шаге визуально определяется сходимость параметра V_4 для всех спутников, рассчитывается точность сходимости этого параметра как модуль разницы между текущим и требуемым значением в данный момент времени, и фиксируется время t_{conv}^0 , при котором эти параметры сошлись к требуемым. Далее определяется точность сходимости остальных параметров на момент времени t_{conv}^0 . В итоге при последующих моделированиях отслеживаются величины параметров и при достижении порогового каждого из значений останавливается моделирование и таким образом определяется время сходимости алгоритма t_{conv} .

При проведение моделирования величина управляющего ускорения ограничивается следующим образом. В начале задается максимальная величина для управляющего ускорения u_{max} , и на каждом шаге интегрирования отслеживаются компоненты вектора управляющего ускорения. Если какая-либо из компонент превышает это значение, вектор нормируется на свою величину и умножается на максимально возможную, заданную вначале: если $u_i > u_{max}$, то проводится перерасчет $\mathbf{u} = \mathbf{u}/u \cdot u_{max}$.

Исследование проводились с учетом возмущения от J_2 . Всего бралось 5 максимальных величин управляющего ускорения и на каждую проводилось по 15 моделирований. На графиках на рис. 7 был замечен интересный эффект. Ожидалось, что время сходимости будет монотонно возрастать с уменьшением максимально возможной величины управляющего ускорения. Однако видно, что график имеет минимум в точке $u_{max} = 0.002 \text{ м/с}^2$. Предполагается, что это вызвано особенностью алгоритма двухэтапного управления. Величина управления на двух этапах различна, и поэтому систему может “разбалтывать” при переключениях, а при уменьшении u_{max} величины действующих на двух этапах управлений начинают сравниваться. Дальнейшее уменьшение u_{max} , как и ожидалось, ведет к увеличению времени сходимости.

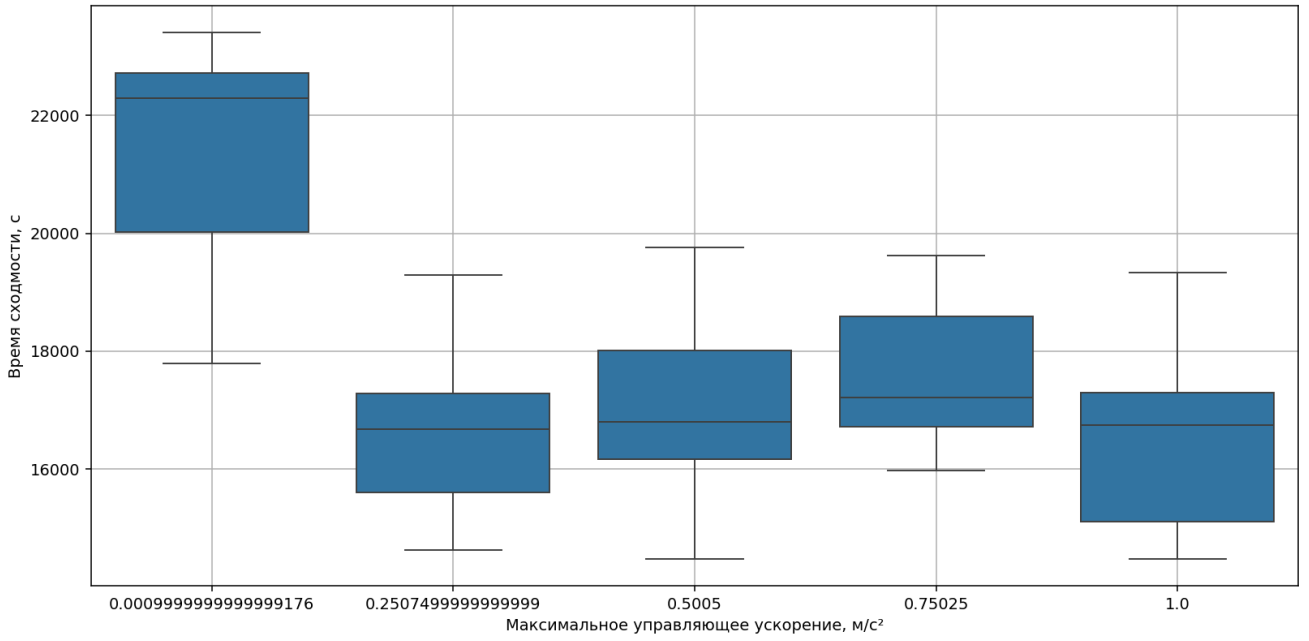


Рис. 7. Время сходимости с учетом возмущения

Раздел 2. Маневрирование при выходе из строя одного из аппаратов

Существуют ситуации, в которых один из спутников группы выходит из строя, и в таких случаях необходимо перегруппировать функционирующие спутники так, чтобы они могли продолжать выполнение миссии. Поэтому, в данном разделе будет рассмотрен алгоритм по перестроению спутников при внезапной поломке одного из них.

2.1 Постановка задачи

Группа спутников движется по все той же низкой околоземной орбите на заданных небольших расстояниях относительно друг друга. Спутники по-прежнему оснащены системами управления и определения относительного движения. Угловое движение в данном разделе также не рассматривается, а в качестве возмущения выступает возмущение, вызванное второй гармоникой в разложении геопотенциала J_2 . В какой-то момент один из аппаратов выходит из строя – теперь его движение неуправляемо, однако, благодаря системе определения относительного движения, удастся определить параметры его относительного движения.

Требуется создать такое управление, которое приводит работающие спутники в положение с прежним заданным относительным расстоянием. Таким образом все спутники выстраиваются относительно неработающего и продолжают групповой полет.

2.2 Алгоритм перестройки

Пусть имеется 5 спутников, которые выстроились вдоль орбиты с одинаковым относительным расстоянием, и пусть второй спутник внезапно выходит из строя. Цель алгоритма перестроения – сохранить прежние относительные расстояния между спутниками. Траектория вышедшего из строя спутника считается известной, следовательно, известен его свободно изменяющийся параметр $V_4[x](t)$. В данном случае $V_{4_{req}}[j]$ – требуемое значение параметра V_4 для каждого j -го функционирующего аппарата есть функция от $V_4[x](t)$. Для сохранения заданного расстояния необходимо применить управление для перемещения к сломавшемуся спутнику его соседних на расстояние, равное половине заданного – $\frac{a}{2}$. Остальные спутники требуется переместить в соответствии с требованием сохранения относительных расстояний (Рис. 8)

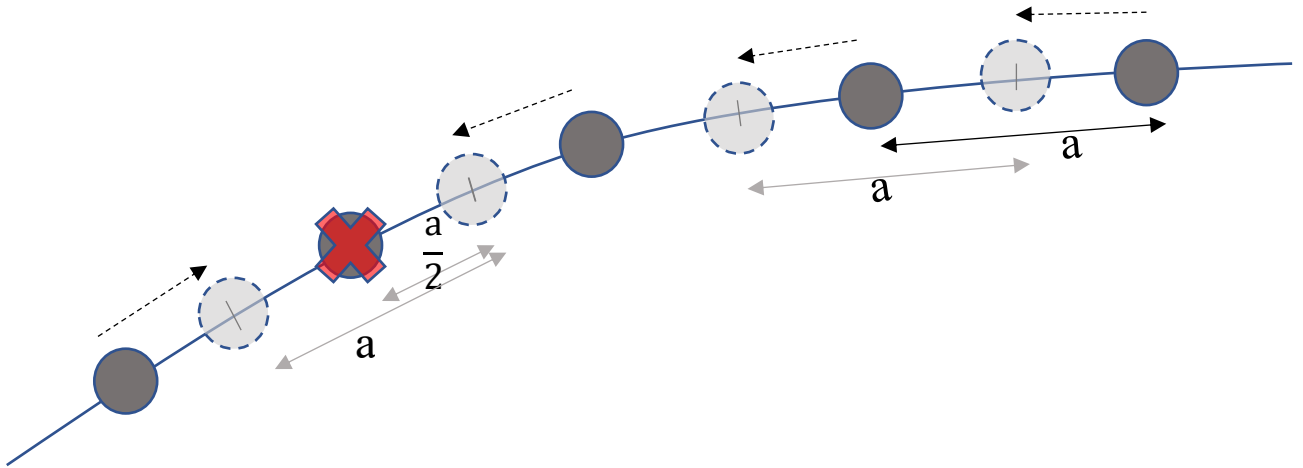


Рис. 8. Схема перегруппировки спутников

Алгоритм при численном моделировании выглядит следующим образом. Движение вышедшего из строя аппарата интегрируется как свободное движение с учетом возмущений. На каждом шаге интегрирования находится $V_{4req}[j]$ для каждого из работающих спутников, используя текущее значение параметра $V_4[x]$ сломавшегося спутника. Далее рассчитывается управление для каждого работающего аппарата по схеме, предложенной в предыдущем разделе ($V_{1req}[j]$, $V_{2req}[j]$, $V_{3req}[j]$ равны нулю). И в конце интегрируем движение всех спутников с учетом рассчитанного управления для работающих спутников.

2.3 Пример работы алгоритма

Математическое моделирование будет разделено на 2 части. Как и в прошлом разделе моделируется кластерный запуск, и спутники выстраиваются с заданными относительными расстояниями в линию (Рис. 3) – это первая часть. Сломавшийся спутник выбирается случайным образом и далее применяется алгоритм перестройки – это вторая часть.

Ниже приведены таблицы с начальными данными и параметрами управления.

Таблица 5. Параметры моделирования

Высота орбиты, км	400
Количество спутников	5
Время интегрирования первой части, ч	10

Время интегрирования второй части, ч	7
Требуемое расстояние между спутниками, м	50
Δt при кластерном запуске, с	20
Дисперсия ошибки при кластерном запуске, м/с	0.1
Шаг интегрирования, с	1

Таблица 6. Коэффициенты управления

Коэффициенты управления для первой части	k_a	k_b	k_φ	k_θ	k_ρ	k_2	k_4
Для всех спутников	10^{-3}	10^{-1}	10^{-5}	10^3	10^5	10^2	10^0
Коэффициенты управления для второй части	k_a	k_b	k_φ	k_θ	k_ρ	k_2	k_4
Для всех спутников	10^{-3}	10^{-1}	10^{-5}	10^6	10^{-1}	10^2	10^{-1}

Ниже представлены графики траекторий спутников на протяжении всего моделирования. На рис. 9 представлены траектории спутников при выходе из строя 3-го спутника без учета возмущения, а на рис. 10 – с учетом действия возмущения. Амплитуда движения спутников в плоскости орбиты значительно увеличилась, и на втором графике видно, эллипсы отстоят друг от друга, так, как и ожидалось, то есть соседние спутники-соседи сломавшегося подвинулись к нему на расстояние, равное половине расстояния между спутниками 1 и 2 или 4 и 5. Из сравнения рис. 9 и рис. 10 видно, что наличие возмущения приводит к небольшому дрейфу группы.

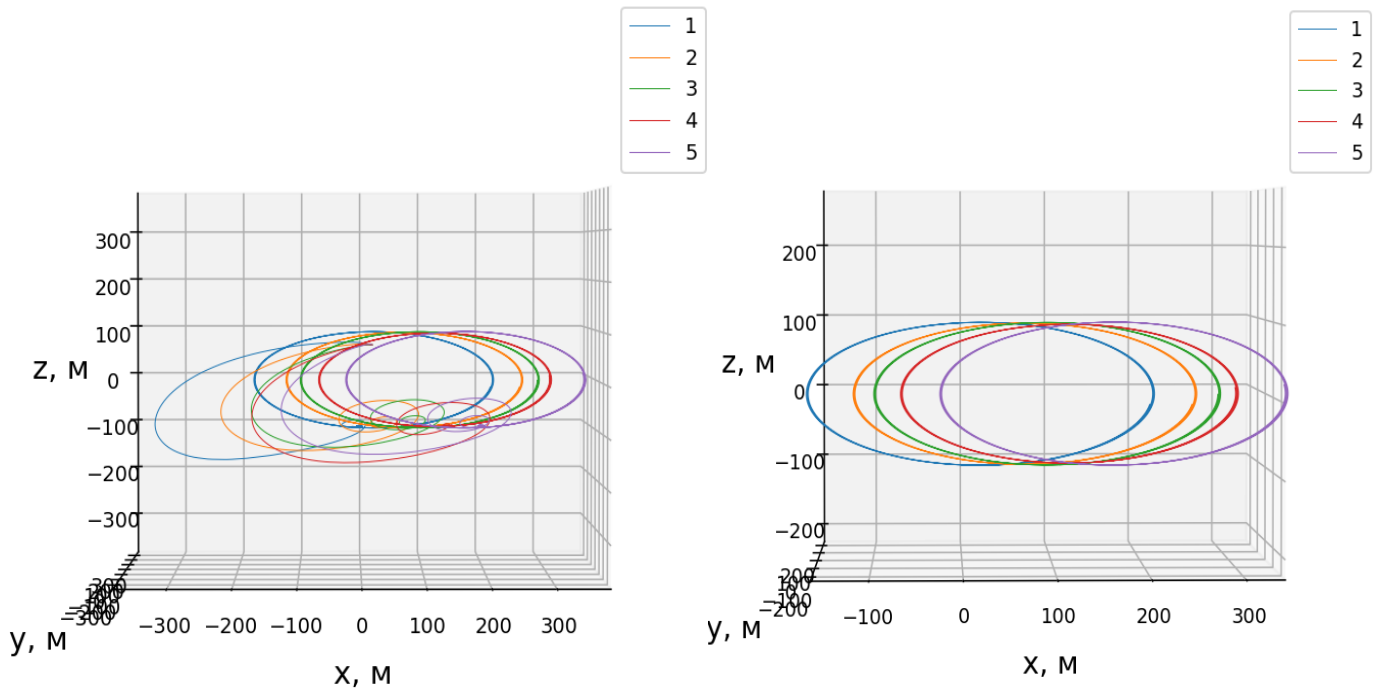


Рис. 9. Траектории спутников при выходе из строя 3-го спутника без учета возмущения

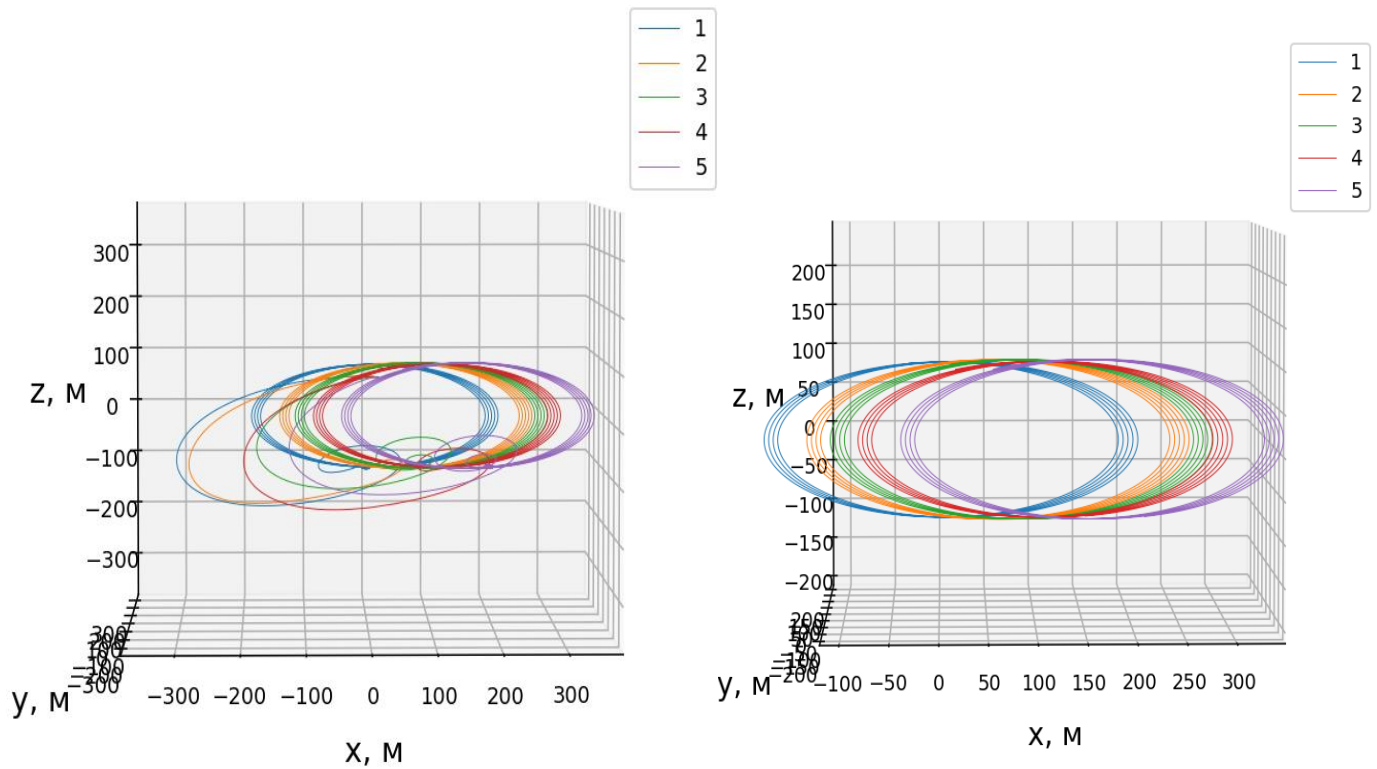


Рис. 10. Траектории спутников при выходе из строя 3-го спутника с учетом возмущения

Далее представлены графики изменения параметров V_1 , V_2 , V_3 , V_4 для всех спутников. Третий из них является нефункционирующим. Для наглядности здесь помещены два случая: без учета (рис. 11) и с учетом возмущения (рис. 12). Если обратить внимание на параметр V_4 третьего спутника после поломки можно увидеть, как его значение плавно изменяется. В первом случае это обусловлено ненулевым значением параметра дрейфа для третьего спутника. Во втором случае аналогично, но наклон графика для V_4 всех спутников круче, к тому же возмущение сказывается на поведении параметров в виде небольших колебаний.

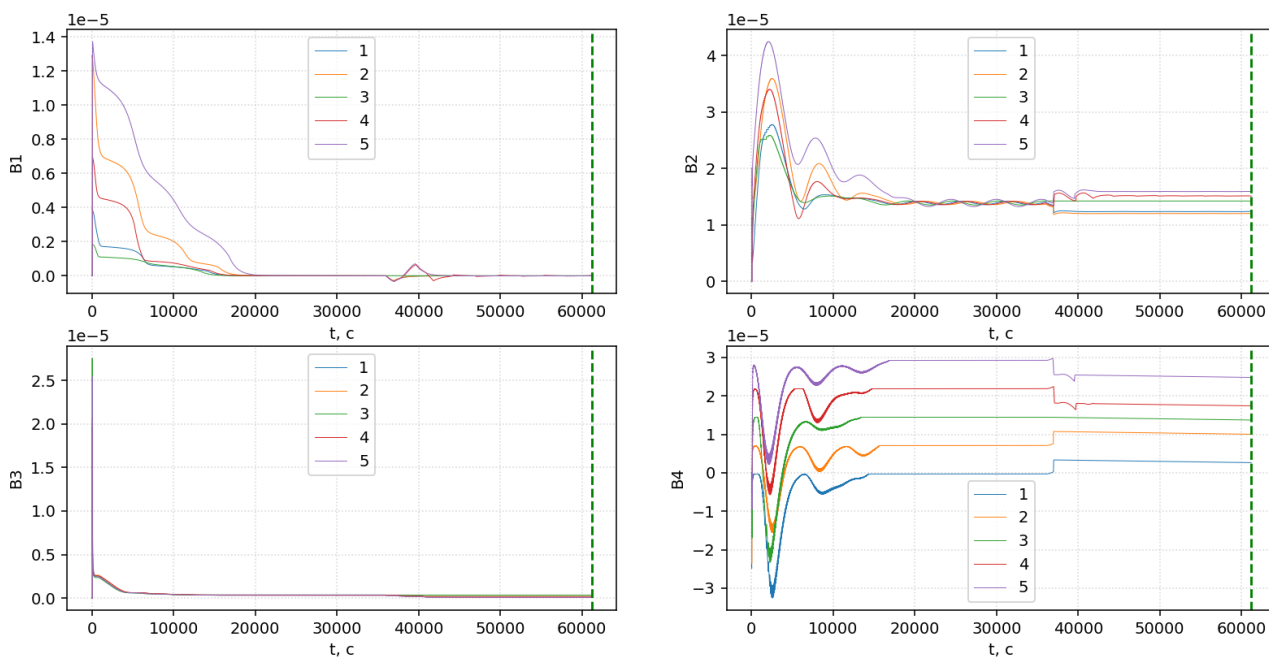


Рис. 11. Параметры V_1 , V_2 , V_3 , V_4 при поломке 3-го спутника без учета возмущения

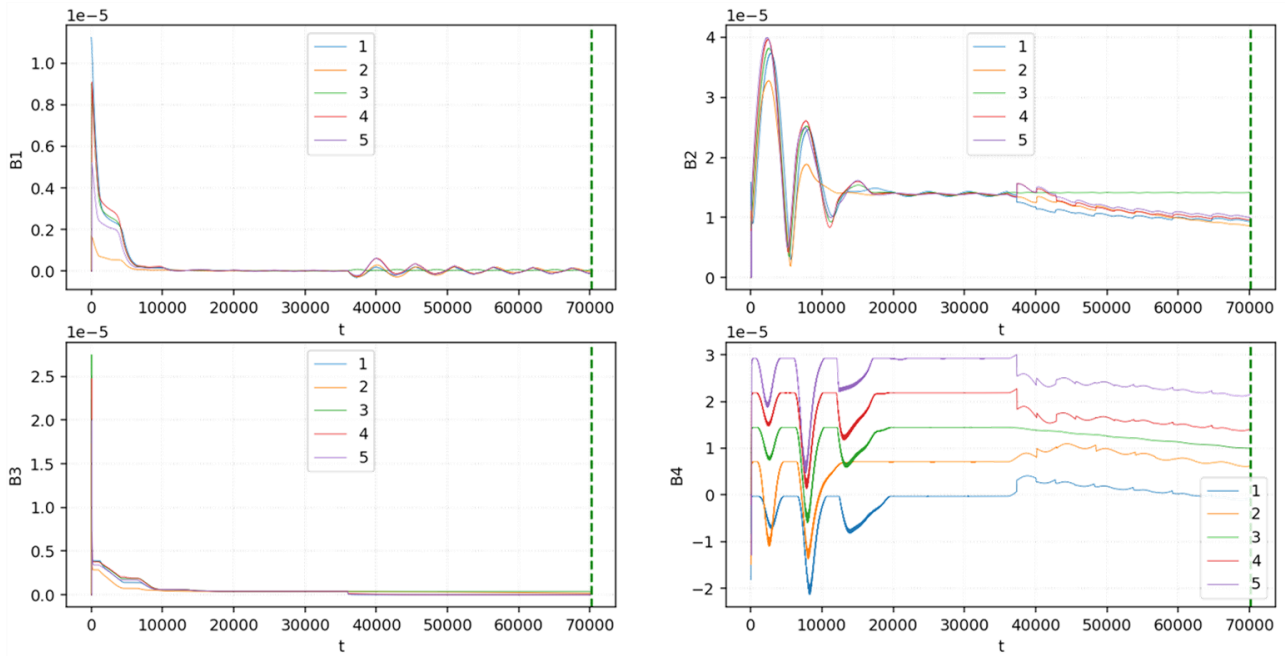


Рис. 12. Параметры B_1 , B_2 , B_3 , B_4 при поломке 3-го спутника с учетом возмущения

Графики на рис. 13 и 14 ниже демонстрирует управляющее ускорение. Можно заметить, что величина управляющего ускорения при выстраивании спутников в линию после запуска (до 39600-ой секунды) меньше, чем на этапе маневрирования при поломке. Это объясняется тем, что по большей части управление второго этапа является поддерживающим, так как разница между требуемыми и текущими значениями параметров невелика. Также видно, что в случае отсутствия возмущений управление для перестроение прилагается минимальное.

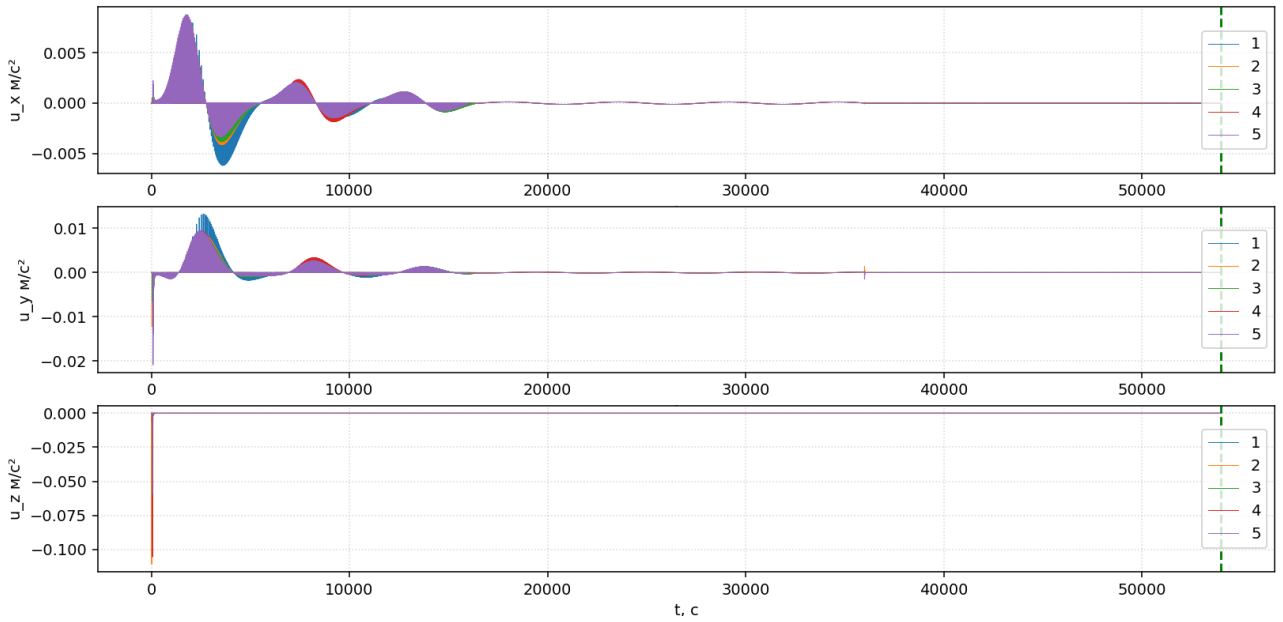


Рис. 14. Вектор управляющего ускорения в ИСК без учета возмущения

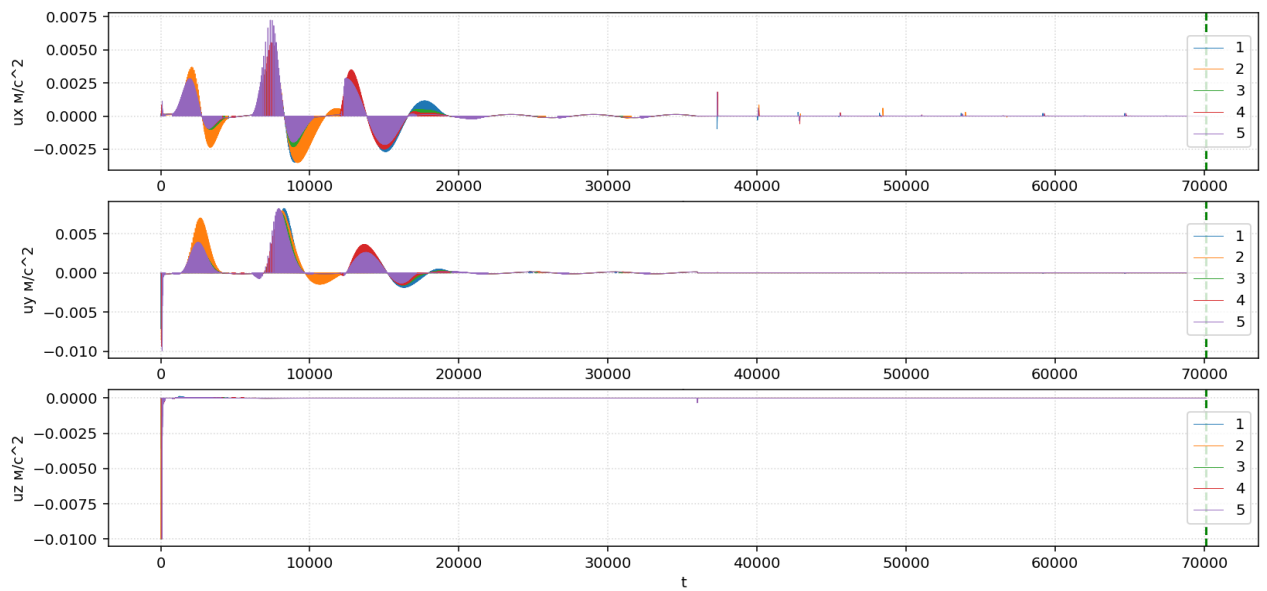


Рис. 13. Вектор управляющего ускорения в ИСК с учетом возмущения

2.4 Исследование времени сходимости алгоритма

В этом разделе вводится индикатор сходимости, аналогичным образом как в первом отделе. Только теперь параметр V_4 имеет изменяющееся во времени требуемое значение и в данном случае на каждом шаге проверяется их разница: если ее модуль становится меньше,

чем $1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, и выполнены условия для остальных параметров, определяющиеся как в прошлом разделе, то считается, что алгоритм сошелся.

Ниже на рис. 15 представлен график сходимости алгоритма. Всего бралось 5 максимальных величин управляющего ускорения и моделирование для каждой из них проводилось 15 раз. Здесь наблюдается та же ситуация, которая подробно была описана в разделе 1 – из-за переключений между этапами алгоритмов существует значение максимального управляющего ускорения, при котором время сходимости минимально.

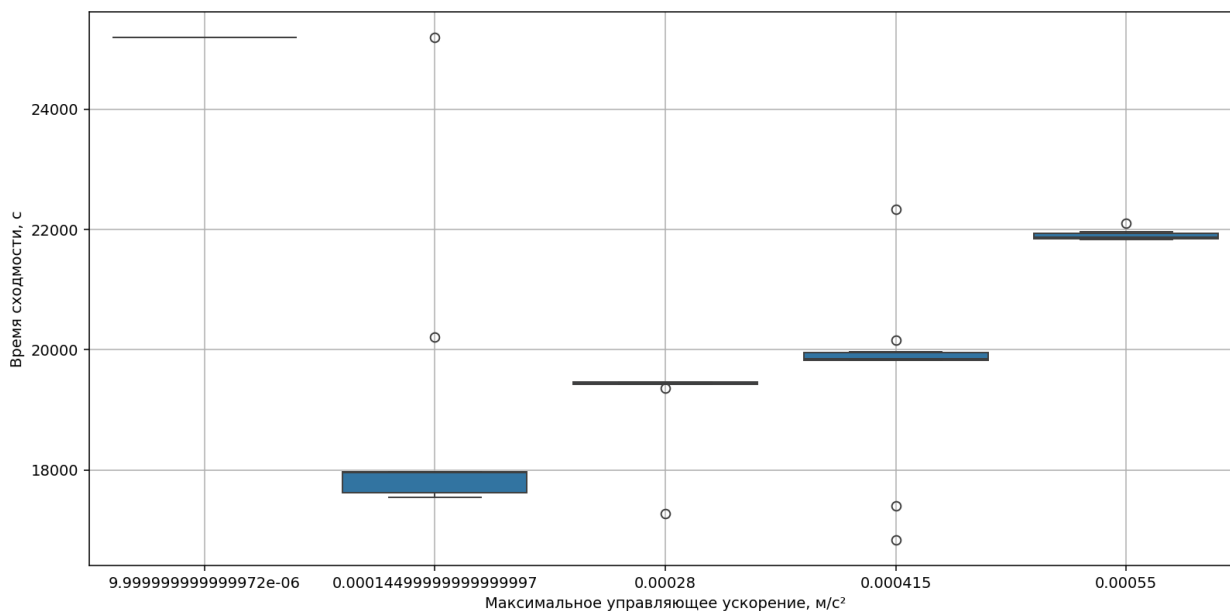


Рис. 15. Время сходимости с учетом возмущения

Заключение

В настоящей квалификационной бакалаврской работе было разработано двухэтапное управление на основе прямого метода Ляпунова в криволинейных координатах и было реализовано математическое моделирование относительного движения группы спутников под действием разработанного алгоритма управления. Было проведено исследование времени сходимости в зависимости от величины ограничения управляющего ускорения. В ходе исследования был выявлен следующий эффект – вследствие особенности переключения между этапами алгоритма до определенного предела время сходимости уменьшается с уменьшением допустимой величины управляющего ускорения, а с дальнейшим уменьшением управления время сходимости начинает возрастать. Также была реализована стратегия перестроения группы при выходе из строя одного из аппаратов и исследованы характеристики управляемого движения при ограничениях на управляющее воздействие.

Литература

1. R. Kahle; H. Runge; J.-S. Ardaens; S. Suchandt; R. Romeiser. Formation flying for along-track interferometric oceanography – First in-flight demonstration with TanDEM-X // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 99. P. 130–142.
2. Tzabari M. et al. CloudCT 3D volumetric tomography: considerations for imager preference, comparing visible light, short-wave infrared, and polarized imagers // *Proc. SPIE 11833, Polariz. Sci. Remote Sens. X. SPIE*, 2021. Vol. 11833. P. 19–26.
3. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // *J. Astronaut. Sci.* 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–678.
4. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // *Am. J. Math.* 1878. Vol. 1, № 1. P. 5–26.
5. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
6. Alfriend K. et al. Spacecraft formation flying: dynamics, control and navigation. Elsevier/Butterworth-Heinemann, 2010. 382 p.
7. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // *Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol.* 1986. 202 p.
8. Kumar B.S., Ng A. A bang-bang control approach to maneuver spacecraft in a formation with differential drag // *Proc. AIAA Guid. Navig. Control Conf. Exhib.* 18-21 August 2008, Honolulu, Hawaii. 2008. № August. P. AIAA 2008-6469.
9. Barbashin E.A. On construction of Lyapunov functions for non-linear systems // *Proc. First Congr. IFAK, Moscow.* 1961. P. 742–751.
10. Prabhat H. et al. Fault-tolerant sliding mode satellite attitude stabilization using magneto-Coulombic torquers // *Aerosp. Sci. Technol.* 2022. Vol. 121. P. 107316.
11. Ivanov D. et al. Decentralized Control of Nanosatellite Tetrahedral Formation Flying Using Aerodynamic Forces // *Aerosp.* 2021, Vol. 8, 21 p.

12. Akhloumadi M., Ivanov D. Influence of Satellite Motion Control System Parameters on Performance of Space Debris Capturing // *Aerospace*, 2020. Vol. 7, № 11. 18 p.
13. Bigelli L., Polenta F., Fiori S. Virtual Attractive-Repulsive Potentials Control Theory: A Review and an Extension to Riemannian Manifolds // *Symmetry*, 2022. Vol. 14, № 2, 20 p.
14. Huang X., Yan Y., Zhou Y. Optimal spacecraft formation establishment and reconfiguration propelled by the geomagnetic Lorentz force // *Adv. Sp. Res.*, 2014. Vol. 54, № 11. P. 2318–2335.
15. Suslova I.A., Mashtakov Y. V., Shestakov S.A. Comparison of Relative Motion Models for Spacecraft Flying in Formation // *Math. Model. Comput. Simulations*. 2023. Vol. 15, № 1. P. 47–58.
16. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999. 572 с.