



**Использование асимптотических
методов механики для исследования
динамики механической системы
на последовательных стадиях
ее движения**

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра теоретической механики

**Использование асимптотических методов
механики для исследования динамики
механической системы
на последовательных стадиях ее движения**

Учебно-методическое пособие

Составитель ***М. Ю. Овчинников***

МОСКВА
МФТИ
2012

ВВЕДЕНИЕ

При обучении студентов – будущих исследователей в рамках стандартных курсов «Механика космического полета» и «Асимптотические методы нелинейной механики» основное внимание уделяется последовательному изложению понятий и методов этих курсов. В инновационном курсе «Динамика и управление механическими системами» сделана попытка показать связь между теорией и практикой применения математических, компьютерных методов и методов для исследования сложных механических управляемых систем. В пособии на примере пассивной системы ориентации спутника последовательно рассматриваются основные этапы действий исследователя – формирование модели механической системы, вывод уравнений ее движения, переход к безразмерным параметрам и переменным, вывод соотношений между безразмерными параметрами, понижение порядка системы уравнений, описывающих движение механической системы, получение номинальных (рабочих) движений и описание переходных движений на различных этапах функционирования системы. Все это требует, с одной стороны, выбора подходящей задачи, которая допускает наглядную формализацию и интерпретацию в терминах теоретической механики и приложений, с другой стороны, подбора теорем для обоснованного получения основных динамических характеристик механической системы. При выполнении обоих условий удастся показать связь между задачей и методами ее исследования.

В качестве механической системы, подлежащей исследованию, рассматривается искусственный спутник Земли, снабженный пассивной системой ориентации, включающей гравитационную штангу со сферическим магнитным демпфером (рис. 1) [1]. Демпфер представляет собой две концентрические сферы. Внешняя сфера – полая, изготовлена из проводящего немагнитного материала (обычно – это медь или латунь), а внутренняя – это сильный постоянный магнит в виде полосового магнита в сферическом корпусе либо в виде склеенной из небольших магнитов сферы. Физика механизма демпфирования достаточно простая – при относительном вращении сфер полем внутренней сферы наводятся вихревые токи во внешней

сфере, и за счет омических потерь кинетическая энергия относительного вращательного движения сфер рассеивается в виде тепла.

Спутники с описанной выше системой ориентации получили широкое распространение в 70-х–80-х годах прошлого столетия. Их примером могут служить спутники серии Интеркосмос [2]. Спутник с пассивной системой ориентации, включающей гравитационную штангу со сферическим магнитным демпфером, как сложная механическая система допускает построение математической модели его движения в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Физически обоснованные соотношения между параметрами системы позволяют применить различные математические методы анализа, рассмотреть разнообразие форм движения спутника и поплавок демпфера наряду с их наглядной геометрической интерпретацией.

При определенных, но не столь обременительных для понимания сути изложения ограничениях на спутник, начальные условия его движения и модели окружающей среды можно ограничиться изложением частного случая движения спутника и поплавок демпфера относительно центра – движения в плоскости полярной круговой орбиты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Пусть центр масс системы спутник–поплавок демпфера движется по круговой орбите вокруг Земли. Гравитационное поле Земли считаем центральным, ньютоновым. Геомагнитное поле аппроксимируем полем прямого магнитного диполя, расположенного в центре масс Земли и направленного антипараллельно ее оси вращения [3]. Спутник считаем твердым телом. Внешняя сфера демпфера неподвижно закреплена на спутнике (например, на конце жесткой штанги, формирующей вместе с демпфером необходимый момент инерции спутника). Длина штанги может меняться на разных этапах движения спутника. Процессы, происходящие во время изменения длины штанги, в работе не рассматриваются, а считается,

что длина штанги меняется быстро по сравнению с характерными временами протекания остальных процессов. Поплавок демпфера помещен внутрь внешней проводящей немагнитной сферы так, что зазор между поплавком и сферой мал, и смещением поплавка относительно сферы пренебрегаем. Также пренебрегаем кратковременными касаниями поплавка и сферы. Влияние касаний, на самом деле приводящих к увеличению эффективного коэффициента демпфирования, изложено в ставшей уже труднодоступной работе [4]. Поплавок демпфера считаем сферически-симметричным твердым телом, поэтому вращение поплавка не приводит к изменению тензора инерции системы спутник–поплавок.

Введем *орбитальную систему координат* (ОСК) $OX_1X_2X_3$ (O – центр масс системы спутник–поплавок демпфера. Ось OX_2 направлена по нормали к плоскости орбиты, ось OX_3 – вдоль местной вертикали, ось OX_1 дополняет ее до правой ортогональной СК; *связанную со спутником систему координат* $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции системы спутник-поплавок; и *связанную с поплавком демпфера систему координат* $O_ny_1y_2y_3$, O_n – центр масс поплавка, ось O_ny_1 направлена вдоль оси намагниченности поплавка, остальные оси образуют правую “тройку” векторов. Тогда уравнения движения спутника и поплавка имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_s &= 3\omega_0^2 \mathbf{E}_3 \times \mathbf{J}\mathbf{E}_3 + \mathbf{M}_d, \\ \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_d &= \mathbf{m} \times \mathbf{B} - \mathbf{M}_d, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_s = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\Omega}_{s,rel}, \quad \dot{\mathbf{A}}_d = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\Omega}_{d,rel},$$

где \mathbf{J} – тензор инерции спутника, при вычислении которого центр масс поплавка считается неподвижным относительно корпуса спутника; \mathbf{I} – тензор инерции поплавка демпфера; \mathbf{E}_3 – орт местной вертикали в проекциях на оси связанной со спутником СК; \mathbf{A}_s и \mathbf{A}_d – матрицы, преобразующие координаты произвольного вектора в связанной со спутником СК в его координаты в орбитальной СК, и по аналогии для вектора, заданного в связанной с поплавком СК, в связанную со спутником СК. Эти матрицы представим в виде таблиц

$$\begin{array}{ccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & & & y_1 & y_2 & y_3 \\
 X_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & x_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\
 X_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \text{и} & x_2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\
 X_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & x_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33}
 \end{array}$$

a_{jk}, b_{jk} – элементы указанных матриц ($j, k = 1, 2, 3$);

$$\mathbf{\Omega}_{s,rel} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{s,rel,3} & \Omega_{s,rel,2} \\ \Omega_{s,rel,3} & 0 & -\Omega_{s,rel,1} \\ -\Omega_{s,rel,2} & \Omega_{s,rel,1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Omega}_{d,rel} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{d,rel,3} & \Omega_{d,rel,2} \\ \Omega_{d,rel,3} & 0 & -\Omega_{d,rel,1} \\ -\Omega_{d,rel,2} & \Omega_{d,rel,1} & 0 \end{pmatrix}$$

суть матрицы угловых скоростей спутника и демпфера относительно этих СК; $\boldsymbol{\omega}_d = \boldsymbol{\omega}_{орб} + \boldsymbol{\omega}_{s\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}_{d\text{отн}}$ – абсолютная угловая скорость поплавка демпфера; $\boldsymbol{\omega}_{орб}$ – угловая скорость вращения ОСК, ω_0 – величина $\boldsymbol{\omega}_{орб}$; $\boldsymbol{\omega}_{s\text{отн}}$ – угловая скорость спутника относительно ОСК; $\boldsymbol{\omega}_{d\text{отн}}$ – угловая скорость поплавка демпфера относительно спутника; $\mathbf{M}_d = -k(\boldsymbol{\omega}_s - \boldsymbol{\omega}_d)$ – момент, возникающий из-за вращения поплавка относительно спутника, при подходящем выборе параметров системы он является демпфирующим для спутника.

Типовыми с точки зрения приложений являются следующие режимы движения спутника и поплавка, которые могут быть обеспечены при соответствующем подборе начальных условий движения и параметров спутника и поплавка демпфера. Перечислим их:

- спутник ориентирован относительно ОСК, поплавок увлечен во вращение геомагнитным полем и отслеживает вектор индукции поля (штатный режим гравитационной ориентации);
- спутник ориентирован относительно ОСК, поплавок увлечен во вращение спутником (нештатный режим гравитационной ориентации);

- спутник увлечен во вращение поплавком, который в свою очередь увлечен во вращение геомагнитным полем (может служить штатным режимом магнитной ориентации);
- спутник быстро вращается; поплавок увлечен во вращение спутником (нештатный режим успокоения после отделения от носителя);
- спутник быстро вращается; поплавок увлечен во вращение геомагнитным полем (штатный режим успокоения после отделения от носителя).

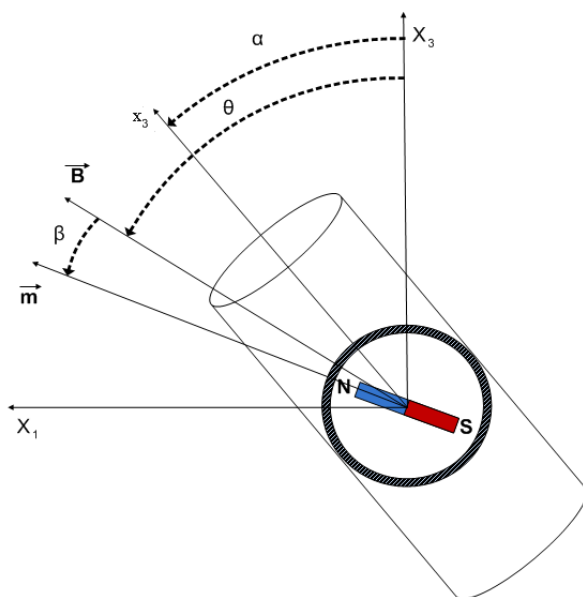


Рис. 1. Схематичное изображение спутника со сферическим магнитным демпфером и системы координат и переменные, необходимые для описания его движения в плоскости полярной орбиты

В зависимости от рассматриваемого режима движения необходимо выбирать матрицы перехода для удобной и наглядной записи уравнений движения спутника и поплавка, а для подходящего применения асимптотических методов – выбирать соотношения

между параметрами, являющимися наряду с начальными условиями движения определяющими в реализации того или иного режима движения.

Ограничимся относительно простым частным случаем движения. На полярной орбите существует частное решение системы (1), при котором вращение спутника и демпфера происходит в плоскости орбиты. Именно такое движение наглядно описывается изображенными на рис. 1 углами.

Итак, исследуем движение спутника относительно центра масс в плоскости круговой полярной орбиты, когда оси Ox_1 и Ox_3 лежат в этой плоскости. Связанную со спутником СК выберем так, чтобы в ней тензор инерции системы спутник–поплавок имел диагональный вид, $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$. Уравнения, описывающие движение системы в плоскости орбиты, принимают вид

$$J_2 \dot{\omega}_{s2} = -3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \sin \alpha \cos \alpha + M_{d2},$$

$$I_2 \dot{\omega}_{d2} = -mB \sin \beta - M_{d2},$$

$$\omega_{s2} = \omega_0 + \dot{\alpha},$$

$$\omega_{d2} = \omega_0 + \dot{\theta} + \dot{\beta},$$

(2)

где $M_{d2} = -k(\dot{\alpha} - \dot{\theta} - \dot{\beta})$ – проекция демпфирующего момента от демпфера на ось Ox_2 , вокруг которой происходит вращение спутника

и поплавок демпфера, $B_1 = \mu_0 \frac{\mu_m}{R^3} \cos u$, $B_3 = -2\mu_0 \frac{\mu_m}{R^3} \sin u$ – проекции

вектора геомагнитной индукции на одноименные оси ОСК, необходимые для вычисления его модуля. Введем обозначения:

$\frac{\mu_g}{R^3} = \omega_0^2$, $\mu_0 \frac{\mu_m}{R^3} = B_0$, $B = B_0 \sqrt{1 + 3\sin^2 u}$ и $u = \omega_0(t - t_0)$, где t_0 –

время первого прохождения спутника над экватором. Здесь μ_g , μ_m –

соответственно гравитационный и магнитный параметры Земли.

Получим выражение для θ – угла между осью Ox_3 и вектором \mathbf{B} из цепочки равенств

$$\text{tg } \theta = \frac{B_1}{B_3} = -\frac{\cos u}{2 \sin u}, \quad \theta = -\text{arctg} \frac{\cos u}{2 \sin u}.$$

Таким образом, после дифференцирования по времени выражения для θ имеем формулы для угловой скорости и углового ускорения спутника:

$$\dot{\theta} = \frac{2\omega_0}{1+3\sin^2 u}, \quad \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \frac{6\sin 2u}{(1+3\sin^2 u)^2}.$$

Подставив выражения для θ и её производных в (2), получим

$$J_2 \ddot{\alpha} + 3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \sin \alpha \cos \alpha = M_{d2},$$

$$I_2 \left[\ddot{\beta} - \frac{\omega_0^2 6\sin 2u}{(1+3\sin^2 u)^2} \right] + mB_0 \sqrt{1+3\sin^2 u} \sin \beta = -M_{d2}.$$

Перейдем к безразмерному времени u (дифференцирование по нему обозначим штрихом):

$$J_2 \omega_0^2 \alpha'' + 3\omega_0^2 (J_1 - J_3) \sin \alpha \cos \alpha = M_{d2},$$

$$I_2 \left[\omega_0^2 \beta'' - \omega_0^2 \frac{6\sin 2u}{(1+3\sin^2 u)^2} \right] + mB_0 \sqrt{1+3\sin^2 u} \sin \beta = -M_{d2}.$$

Приведем эти уравнения к безразмерному виду

$$\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = \frac{M_d}{J_2 \omega_0^2},$$

$$\beta'' + \frac{mB_0}{I_2 \omega_0^2} \sqrt{1+3\sin^2 u} \sin \beta = -\frac{M_d}{I_2 \omega_0^2} + \frac{6\sin 2u}{(1+3\sin^2 u)^2},$$

где введен безразмерный инерционный параметр спутника $\mu = 3(A-C)/J_2$. Подставляя сюда выражение для M_{d2} , получим

$$\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{k}{J_2 \omega_0} (\alpha' - \theta' - \beta'),$$

$$\beta'' + \frac{mB_0}{I_2 \omega_0^2} \sqrt{1+3\sin^2 u} \sin \beta = \frac{k}{I_2 \omega_0} (\alpha' - \theta' - \beta') + \frac{6\sin 2u}{(1+3\sin^2 u)^2}.$$

(3)

Способ введения и вид остальных безразмерных параметров будут зависеть от рассматриваемого режима движения.

2. Понижение порядка системы уравнений. Теорема Тихонова

Попытаемся упростить систему (3), например, понизив ее порядок. Воспользуемся теоремой А.Н. Тихонова [5, 6]. При изложении теоремы ограничимся рассмотрением системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = X(x, y, t), \quad \varepsilon \dot{y} = Y(x, y, t),$$

(4)

где x и y – векторы размерности n и m соответственно, ε – малый положительный параметр. Периодичности по переменной y не требуется. Естественно рассмотреть более простую систему

$$\dot{x} = X(x, y, t), \quad 0 = Y(x, y, t),$$

(5)

называемую *порождающей* (в теории сингулярных возмущений ее еще называют *вырожденной*, так как ее порядок ниже порядка исходной системы уравнений (4)).

Необходимо изучить, при каких условиях решение порождающей системы близко к решению возмущенной системы (4) и построить процедуру уточнения решения порождающей системы. Рассмотрим задачу Коши с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

(6)

Отметим, что размерность системы (5) меньше размерности системы (4). Из второго уравнения системы (5) получим выражение $y = y^0(x, t)$ и подставим его в первое. Тогда получаем систему

$$\dot{x} = X(x, y^0(x, t), t)$$

(7)

порядка n . Используем первое условие из (6) и получаем из (7) решение

$$x = x^0(t),$$

(8)

удовлетворяющее условию Коши (6). Вторая искомая функция $y(t)$ определяется однозначно:

$$y(t) = y^0(x^0(t), t) = y^0(t).$$

(9)

Функции (8) и (9) являются решением порождающей системы (5). Будем его называть *порождающим* решением. Легко видеть, что разность $y^0(0) - y_0$ может оказаться сколь угодно большой. Таким образом, решение y^0, x^0 может аппроксимировать решение системы только на отрезке $[t^*, T]$, не содержащем начало координат, то есть $0 < t^* \leq t < T$, где t^* – сколь угодно малая постоянная величина. Перейдем к теореме.

Теорема Тихонова

Пусть

- 1) *функции X, Y аналитичны по x, y, t в некоторой области пространства переменных;*
- 2) *второе уравнение из (5) имеет корень (6), и этот корень изолированный;*
- 3) *функция $Y(x, y^0(x, t), t)$ аналитична по x, t ;*
- 4) *начальные условия y_0 лежат в области влияния¹ корня $y = y(x, t)$ присоединенной системы*

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(x, y, t),$$

(10)

где $\varepsilon\tau = t$, а x и t считаются параметрами;

- 5) *стационарная точка $y = y(x, t)$ уравнения (10) является асимптотически устойчивой по Ляпунову для $\forall x, t$, для которых определен корень уравнения $0 = Y(x, y, t)$,*

тогда найдется такое ε_0 , что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решение системы (4) существует, единственно и удовлетворяет равенствам

¹ Еще говорят “в области притяжения корня”, подразумевая, что при попадании начального условия в эту область решение будет асимптотически стремиться к выбранному корню – решению $y = y(x, t)$.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = x^0(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = y^0(t), \quad 0 < t \leq T.$$

(11)

Как отсюда видно, решение $y(t, \varepsilon)$ из (11) не определено в точке $t = 0$. Фактически – это исключение *пограничного слоя* бесконечно малой протяженности, где разность $y - y^0$ велика. Наиболее существенным является условие теоремы о притяжении траекторий исходной системы поверхностью $Y(x, y, t)$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ СПУТНИК–ПОПЛАВОК В ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРНОЙ ОРБИТЫ. Понижение порядка системы уравнений

Обратимся к исходной системе (3), введя безразмерную функцию $f(u) = 2/(1 + 3 \sin^2 u)$. Тогда получим уравнения

$$\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{k}{J_2 \omega_0} (\alpha' - \beta' - f(u)),$$

$$\beta'' + \frac{mB_0}{I_2 \omega_0^2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 u} \sin \beta = \frac{k}{I_2 \omega_0} (\alpha' - \beta' - f(u)) + \frac{6 \sin 2u}{(1 + 3 \sin^2 u)^2}.$$

(12)

Возникает вопрос: каким образом ввести малый параметр в уравнениях (12), чтобы эта процедура была согласована с физикой процесса и с ожидаемыми по выбранным критериям движениями спутника и демпфера, а также позволила использовать теорему Тихонова для строгого обоснования “экзекуции” над уравнениями? В рассматриваемом случае речь идет о понижении порядка рассматриваемой системы (12). Будем следовать методологической цепочке понятий, сформулированных известным механиком и замечательным художником И.В. Новожиловым [4]:

Постановка задачи рождает класс движений. Класс движений рождает структуру малых параметров. Структура малых параметров рождает предельную модель.

Именно такая цепочка порождается ожидаемым или требуемым движением системы, исходящим из физической природы явления и ее прикладным смыслом. На формальном языке требование малости тех или членов уравнения или, наоборот, их доминирующее действие на систему позволяет установить соотношение между ними в виде малого параметра. В соответствии с введенной структурой малых параметров появляется динамическая модель и цепь замыкается – предельная модель допускает требуемые движения.

Следуя этой идеологии, чтобы применить теорему Тихонова, введем малый параметр ε и безразмерные параметры следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{mB_0}{J_2\omega_0^2}, \quad \frac{k}{J_2\omega_0} = \varepsilon^2, \quad \frac{I_2}{J_2} = \varepsilon^3.$$

Малость параметра ε отражает слабое влияние магнита демфера на движение спутника, когда бы магнит был зафиксирован в его теле. Вязкое трение между поплавком и спутником обеспечивает демпфирование возмущенных движений на этапе переходных процессов, но, с другой стороны, возмущает движение спутника на установившемся этапе (увлеченный магнитным полем поплавок “тянет” за собой спутник, чему препятствует восстанавливающий гравитационный момент, действующий на спутник). Поэтому и введено отношение ε^2 характерных величин демпфирующего ($k\omega_0$) и восстанавливающего гравитационного ($J_2\omega_0^2$) моментов, отражающее слабое возмущающее влияние момента от поплавка на установившееся движение спутника. Последнее в основном определяется гравитационным восстанавливающим моментом, имеющим порядок $J_2\omega_0^2$, если считать спутник осесимметричным, достаточно вытянутым и пренебречь коэффициентом 3, присутствующим в выражении для гравитационного момента. Малость отношения моментов инерции поплавка с магнитом и спутника отражается его пропорциональностью параметру ε^3 . Конечно, у читателя может возникнуть естественный вопрос – почему введено такое распределение отношений по степеням малого

параметра? Ответ простой – они отражают качественно указанные выше отношения между механическими моментами, действующими на спутник и поплавков, и отношение между моментами инерции, что позволяет применить теорему Тихонова. Следует отметить, по-видимому, это не единственный способ введения соотношений между физическими параметрами системы, позволяющий применить названную теорему.

Подставим введенные отношения параметров в (12) и получим систему уравнений

$$\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = -\varepsilon^2 [\alpha' - \beta' - f(u)],$$

$$\beta'' + \varepsilon \frac{1}{\varepsilon^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 u} \sin \beta = \varepsilon^2 \frac{1}{\varepsilon^3} [\alpha' - \beta' - f(u)] + \frac{6 \sin 2u}{(1 + 3 \sin^2 u)^2},$$

и после упрощений:

$$\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = -\varepsilon^2 [\alpha' - \beta' - f(u)],$$

$$\varepsilon^2 \beta'' + \sqrt{1 + 3 \sin^2 u} \sin \beta = \varepsilon [\alpha' - \beta' - f(u)] + \varepsilon^2 \frac{6 \sin 2u}{(1 + 3 \sin^2 u)^2}.$$

(13)

Приводим систему (13) к “тихоновскому” виду (4):

$$\alpha' = p,$$

$$p' = -\mu \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon q - \varepsilon^2 [p - f(u)],$$

$$\varepsilon \beta' = q,$$

$$\varepsilon q' = -\sqrt{1 + 3 \sin^2 u} \sin \beta - q + \varepsilon [p - f(u)] + \varepsilon^2 \frac{6 \sin 2u}{(1 + 3 \sin^2 u)^2}.$$

Запишем соответствующую ей порождающую систему вида (5):

$$\alpha' = p,$$

$$p' = -\mu \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$0 = q,$$

$$0 = -\sqrt{1 + 3 \sin^2 u} \sin \beta - q.$$

(14)

Из последних двух уравнений имеем систему

$$q = 0, \quad \sin \beta = 0.$$

Рассмотрим одно из ее изолированных решений

$$q = \beta = 0.$$

(15)

Запишем присоединенное уравнение типа (10) в скалярном виде

$$\frac{d\beta}{d\tau} = q, \quad \frac{dq}{d\tau} = -\sqrt{1+3\sin^2 u} \sin \beta - q.$$

Сведем его к одному уравнению

$$\frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{d\beta}{d\tau} + \sqrt{1+3\sin^2 u} \sin \beta = 0, \quad (16)$$

которое можно линеаризовать (обозначим $s(u) = \sqrt{1+3\sin^2 u}$ и считаем u постоянной, так как при исследовании присоединенного уравнения независимая переменная полагается постоянной) в окрестности решения (15):

$$\frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \frac{d\beta}{d\tau} + s\beta = 0.$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda + s = 0$$

имеет решение

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{4s-1}}{2}.$$

Тем самым в линейном приближении решение (15) является асимптотически устойчивым.

Вернемся к нелинейному уравнению (16). Умножая обе его части

на $2\frac{d\beta}{d\tau}$, получаем

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 - 2s \cos \beta \right] = -2 \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2.$$

Введем функцию Ляпунова в виде

$$V = \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 - 2s \cos \beta + 2s = \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 + 2s(1 - \cos \beta)$$

для исследования асимптотической устойчивости решения (15). Тогда в положении равновесия ($\beta = 0$) $V = 0$, а ее производная

$\frac{dV}{d\tau} = -2 \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 \leq 0$. По теореме Барбашина–Красовского [8] имеем

асимптотическую устойчивость указанного решения и тогда можно ожидать выполнение условий теоремы Тихонова. Для $t \neq 0$ с точностью до $O(\varepsilon)$ положим $q = \beta = 0$ и подставим его в первое уравнение системы (13):

$$\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = -\varepsilon^2 (\alpha' - f). \quad (17)$$

Тогда получаем уравнение второго порядка, согласно теореме совместно с решением (15) описывающее движение системы спутник–поплавок вне пограничного слоя окрестности точки $t = 0$, которое может быть сколь угодно малым.

Обозначим $\varepsilon^2 = \delta$ и представим α в виде формального ряда по степеням δ :

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \delta + \alpha_2 \delta^2 + \dots \quad (18)$$

Подставим разложение (18) в выражение (17), получим

$$\alpha_0'' + \delta \alpha_1' + \dots + \mu (\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \delta \alpha_1 \cos 2\alpha_0 + \dots) = -\delta (\alpha_0' - f) + \dots$$

и приравняем члены при одинаковых степенях δ :

$$\begin{aligned} \delta^0: \quad & \alpha_0'' + \mu \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0, \\ \delta^1: \quad & \alpha_1'' + \mu \alpha_1 \cos 2\alpha_0 = -(\alpha_0' - f), \\ \delta^2: \quad & \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Каждое уравнение в (19) содержит только те α_i , у которых $i < k$, где k – номер уравнения. Таким образом, эту систему можно последовательно разрешить. Пусть $\alpha_0 = \text{const}$, то есть должно выполняться равенство $\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0$, откуда получаем $\alpha_0 = \pi k / 2$. Рассмотрим $\alpha_0 = 0$. В соответствии с (19) имеем уравнение

$$\alpha_1'' + \mu \alpha_1 = f, \quad f = \frac{2}{1 + 3 \sin^2 u}.$$

Решение его однородной части имеет вид

$$\alpha_1 = A_1 \cos \sqrt{\mu} u + A_2 \sin \sqrt{\mu} u.$$

Вынужденное решение этого уравнения можно найти в виде квадратуры с использованием функции Грина. Однако целесообразнее воспользоваться теоремой Пуанкаре для демонстрации общего подхода при поиске вынужденного движения системы.

4. ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ

Обратимся к *теореме Пуанкаре* [6]. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon),$$

(20)

где x – вектор, ε – малый положительный параметр, f – аналитическая функция x и ε (обозначения, совпадающие с обозначениями, использованными в предыдущем разделе, например f , считаем случайными). Ставим задачу Коши для системы (20): определить решение $x(t, \varepsilon)$ уравнения (20) при условии

$$x(t_0) = x_0.$$

(21)

Наряду с (20) запишем *порождающее* уравнение:

$$\dot{z} = f(z, t, 0).$$

(22)

Рассматриваем одну и ту же задачу Коши для $x(t)$ и $z(t)$, то есть $z(t_0) = x_0$. В (20) сделаем замену $x = z + y$, тогда

$$\dot{y} = f(z + y, t, \varepsilon) - f(z, t, 0),$$

(23)

$$y(0) = 0.$$

(24)

Разложим правую часть уравнения (23) в ряд Тейлора по y и ε

$$\dot{y} = f(z, t, 0) - f(z, t, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{z=z_0 \\ \varepsilon=0}} y + \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0 \\ \varepsilon=0}} \varepsilon + B(y, t, \varepsilon),$$

где $B(y, t, \varepsilon) = O(y^2, \varepsilon^2)$. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon \left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0 \\ \varepsilon=0}} + B. \quad (25)$$

Здесь $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{z=z_0 \\ \varepsilon=0}}$. Считаем, что решение задачи Коши для порождающего уравнения (22) известно. Тогда A и $\left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z=z_0 \\ \varepsilon=0}}$ – известные функции t . Будем искать решение уравнения (25) в виде формального ряда

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \varepsilon^i, \quad (26)$$

где y_i – искомые функции. Подставляя (26) в (25) и приравнивая множители при одних и тех же степенях ε , имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Ay_1 + D_1, \\ \dot{y}_2 &= Ay_2 + D_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (27)$$

для определения y_i . Здесь $D_1 = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_0 \right)$ – известная функция времени.

Функция D_2 содержит квадратичные члены разложения функции $B(y, t, \varepsilon)$ по y и ε , то есть в нее входят лишь y_1 и не входят y_k для $k > 1$. Аналогично и для остальных D_i – в выражение для D_i будут входить только y_k с $k > i$. Тем самым D_i – известные функции времени и

$$y_i(t_0) = 0, \dots \quad (28)$$

Теорема Пуанкаре:

- 1) Если общий интеграл порождающей системы (22) известен, то решение системы (27) может быть найдено при помощи операций дифференцирования и вычисления квадратур.

- 2) Решение уравнения (20) – аналитическая функция параметра ε , то есть ряды (26) сходятся при достаточно малых по абсолютной величине значениях ε и представляют собой интеграл уравнения (20), разложенный по степеням ε .

Ряд будем называть *формальным решением*, если он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений. Этот ряд – *решение*, если он где-то сходится. Докажем только первое утверждение теоремы Пуанкаре. Пусть $z = F(t, c)$, c – вектор, составленный из констант. Это значит, что F удовлетворяет уравнению (22)

$$\frac{dF}{dt} = f(F(t, c), t, 0) \quad (29)$$

при любом c . Обозначим $\xi_i = \frac{\partial F(t, c)}{\partial c^i}$, c^i – i -я компонента вектора

c . Вычислим

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial c^i} = \frac{\partial}{\partial c^i} \frac{dF}{dt}. \quad (30)$$

Тогда, используя (29), имеем

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial c^i} f(F(t, c), t, 0) = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c^i} = \frac{\partial f}{\partial F} \xi_i.$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial F}$ – квадратичная матрица и очевидно, что $\frac{\partial f}{\partial F} \equiv A$, то

есть $\dot{\xi}_i = A \xi_i$, где A – функция времени. Система

$$\dot{u} = Au \quad (31)$$

называется *системой в вариациях* для (20). Общих алгоритмов ее решения нет, но есть свойство, описываемое в следующей лемме.

Лемма

Если общий интеграл порождающего уравнения известен, то частные решения уравнения в вариациях могут быть выписаны в явном виде при помощи операции дифференцирования:

$$\xi_i = \frac{\partial F(t, c)}{\partial c^i}.$$

(32)

Формулы (32) определяют систему фундаментальных решений для (31). Используем метод вариации постоянных для решения системы (27):

$$\dot{y} = Ay + D.$$

(33)

Решение (33) ищем в виде

$$y = Y\alpha, \tag{34}$$

где α – неизвестный вектор, $Y = \{\xi_i^j\}$ – матрица фундаментальных решений уравнения в вариациях, тогда

$$\frac{dY}{dt} = AY.$$

(35)

Дифференцируя (34) и подставляя в (33), получим

$$\dot{\alpha} = Y^{-1}D.$$

Откуда следует, что

$$y = Y(t) \left\{ \int_0^t Y^{-1}(\tau)D(\tau)d\tau + C^* \right\}.$$

Для удовлетворения начальным условиям (28) берем $C^* = 0$, тогда

$$y = \int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)D(\tau)d\tau,$$

(36)

где $Y(t)Y^{-1}(\tau)$ – функции Грина.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ

Вернемся к уравнению (17). Перепишем его в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\alpha' &= \omega, \\ \omega' &= -\mu \sin \alpha \cos \alpha - \delta(\omega - f).\end{aligned}\tag{38}$$

Найдем решение порождающей системы

$$\begin{aligned}\alpha' &= \omega, \\ \omega' &= -\mu \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Сводя ее к одному уравнению $\alpha'' + \mu \sin \alpha \cos \alpha = 0$, умножим его на $2\alpha'$ и получим

$$(\alpha')^2 + \mu \sin^2 \alpha = h.$$

Далее, $\alpha' = \pm \sqrt{h - \mu \sin^2 \alpha}$, $\frac{d\alpha}{\sqrt{h - \mu \sin^2 \alpha}} = \pm du$ или, вводя $k^2 = \left(\frac{\mu}{h}\right)^{-1}$

и полагая $k^2 < 1$, имеем уравнение

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha}} = \pm \sqrt{\mu} du.$$

Выполним замену переменных $\sin \alpha = k \sin \phi$ в этом уравнении. После дифференцирования имеем $\cos \alpha d\alpha = k \cos \phi d\phi$. Подставляя отсюда выражение для $d\alpha$ в уравнение в дифференциалах, имеем

$$\frac{k \cos \phi d\phi}{\cos \alpha \sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha}} = \pm \sqrt{\mu} du.$$

После подстановки сюда $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$, $\sin \alpha = k \sin \phi$ и сокращения числителя и знаменателя на $\cos \phi$ получаем окончательно

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\mu} du.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \sqrt{\mu}(u - u_0).$$

Вспользуемся символическим соотношением $\int_{\phi_0}^{\phi} \dots = \int_0^{\phi} \dots - \int_0^{\phi_0} \dots$ для замены пределов интегрирования и используем традиционное

обозначение $\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = F(\phi, k)$ для эллиптического интеграла

Лежандра 1-го рода. Обращая $z = F(\phi, k)$, получаем эллиптические функции $\phi = am z$ и $sn z = \sin(am z)$. Тогда $\sin \phi = \sin(am z) = sn z$, и окончательно

$$\sin \alpha = k sn \left[\sqrt{\mu}(u - u_0) + F(\phi_0, k^2) \right].$$

(39)

Дифференцирование α из (39) по u_0 и k , как это требует теорема Пуанкаре, приводит к плохо обозримому выражению. Поэтому упростим систему (38), линеаризовав ее в окрестности $\alpha = 0$,

$$\alpha' = \omega,$$

$$\omega' = -\mu\alpha - \delta(\omega - f).$$

(40)

Порождающее уравнение $a'' + \mu a = 0$ имеет общее решение:

$$\alpha = A \cos(\sqrt{\mu}u + \psi), \quad \omega = -\sqrt{\mu}A \sin(\sqrt{\mu}u + \psi), \quad A \text{ и } \psi \text{ — постоянные.}$$

Для сокращения записей введем обозначение $\tilde{\psi} = \sqrt{\mu}u + \psi$. Используя его, строим фундаментальное решение системы в вариациях:

$$\xi_1 = \frac{\partial F}{\partial A} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} \\ -\sqrt{\mu} \sin \tilde{\psi} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{\partial F}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} -A \sin \tilde{\psi} \\ -\sqrt{\mu}A \cos \tilde{\psi} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y(u) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & -A \sin \tilde{\psi} \\ -\sqrt{\mu} \sin \tilde{\psi} & -\sqrt{\mu}A \cos \tilde{\psi} \end{pmatrix}.$$

Строим обратную функцию $Y^{-1}(u)$. С этой целью вычислим алгебраические дополнения матрицы $Y(u)$:

$$Y'(u) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mu}A \cos \tilde{\psi} & \sqrt{\mu} \sin \tilde{\psi} \\ A \sin \tilde{\psi} & \cos \tilde{\psi} \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\det Y(u) = -\sqrt{\mu}A \cos^2 \tilde{\psi} - \sqrt{\mu}A \sin^2 \tilde{\psi} = -\sqrt{\mu}A$, тогда

$$Y^{-1}(u) = \frac{1}{-\sqrt{\mu}A} Y'(u) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & -\frac{1}{A} \sin \tilde{\psi} \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin \tilde{\psi} & -\frac{1}{\sqrt{\mu}A} \cos \tilde{\psi} \end{pmatrix}^T.$$

(41)

Теперь вычислим функцию $D(\tau)$, которая входит в (36). Для этого подставляем в (40) ряд

$$\alpha = \delta\alpha_1 + \delta^2\alpha_2 + \dots,$$

$$\omega = \delta\omega_1 + \delta^2\omega_2 + \dots.$$

(42)

Приравниваем члены при одинаковых степенях ε :

$$\alpha'_1 = \omega_1,$$

$$\omega'_1 = -\mu\alpha_1 + f$$

и т.д., то есть $D = (0, f)^T$. Таким образом:

$$Y^{-1}(u) = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin \tilde{\psi} \\ -\frac{1}{A} \sin \tilde{\psi} & -\frac{1}{\sqrt{\mu}A} \cos \tilde{\psi} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем для $y(u) = Y \int_0^u Y^{-1}(\tau) D(\tau) d\tau$ выражение

$$Y^{-1}D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin \tilde{\psi} \cdot f(u) \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu}A} \cos \tilde{\psi} \cdot f(u) \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & -A \sin \tilde{\psi} \\ -\sqrt{\mu} \sin \tilde{\psi} & -\sqrt{\mu}A \cos \tilde{\psi} \end{pmatrix} \int_0^u \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin \tilde{\psi} \cdot f(\tau) \\ -\frac{1}{\sqrt{\mu}A} \cos \tilde{\psi} \cdot f(\tau) \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \cos \tilde{\psi} \int_0^u f(\tau) \sin \tilde{\psi} d\tau + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin \tilde{\psi} \int_0^u f(\tau) \cos \tilde{\psi} d\tau \\ \sin \tilde{\psi} \int_0^u f(\tau) \sin \tilde{\psi} d\tau + \cos \tilde{\psi} \int_0^u f(\tau) \cos \tilde{\psi} d\tau \end{array} \right). \quad (43)$$

Аналогично получают и следующие приближения α_i и ω_i ($i = 2, 3, \dots$). Здесь не надо забывать, что у выражения $\tilde{\psi}$, стоящего под знаком интеграла, аргументом является переменная интегрирования τ , а в тригонометрических функциях, стоящих перед знаком интеграла, – переменная u .

Для анализа эволюционных параметров движения целесообразно использовать метод усреднения.

6. СВЕДЕНИЯ О МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ

Метод усреднения является одним из широко применяемых асимптотических методов, позволяющих получить приближенное решение сложных дифференциальных уравнений, возникающих при изучении задач физики, механики, теории колебаний [9]. Сущность этого метода состоит в том, что изучаемая система дифференциальных уравнений вида $\dot{x}_i = f_i$ ($i = 1, \dots, n$), где правые части f_i могут зависеть от переменных x_j ($j = 1, \dots, n$) независимого аргумента t и различных физических параметров, заменяется системой уравнений $\dot{x}_i = \bar{f}_i$, где \bar{f}_i подбираются таким образом, чтобы, с одной стороны, новая система уравнений не зависела от t явно и была в этом смысле проще исходной, а с другой стороны, чтобы решения новой системы достаточно точно описывали решения исходной системы. При изложении материала этого раздела будем следовать книге [10]. Для построения функций \bar{f}_i используют осреднение правых частей дифференциальных уравнений по времени. Эти методы играют большую роль при исследовании уравнений вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y, \varepsilon),$$

$$\dot{y} = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon),$$

$$(44)$$

где x – вектор медленных переменных, а y – вектор быстрых переменных, ε – малый положительный параметр, когда X и Y – периодические по быстрым переменным с периодом 2π функции.

Поставим задачу отыскания такой замены переменных, которая позволила бы отделить быстрые движения от медленных. Для простоты рассмотрим случай, когда x и y – скаляры. Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \dots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(x, y) + \varepsilon^2 v_2(x, y) + \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

где \bar{x}, \bar{y} – новые переменные, а u_i, v_i подлежат определению и должны быть выбраны так, чтобы переменные \bar{x}, \bar{y} удовлетворяли новой системе уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots, \\ \dot{\bar{y}} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots. \end{aligned} \quad (46)$$

Взяв то или иное количество членов в (45), получаем решение с той или иной степенью точности. Ясно, что система (46) гораздо проще исходной системы (44), так как быстрые и медленные переменные разделены (точнее, медленные отделены от быстрых, но не наоборот). Поэтому уравнение, определяющее \bar{x} , интегрируется независимо от уравнения, определяющего \bar{y} . Поскольку производная $\dot{\bar{x}}$ мала, а правые части не зависят от \bar{y} , то оно может интегрироваться с большим шагом по времени. Определив $\bar{x}(t)$, мы найдем $\bar{y}(t)$, вычислив квадратуру.

Для того чтобы сделать задачу определенной, подчиним функции u_i и v_i дополнительному ограничению: будем их считать периодическими функциями \bar{y} (в этом случае каждый последующий член в (45) будет меньше предыдущего). Итак, задача отыскания преобразования (45) состоит в определении функций $u_i(\bar{x}, \bar{y}), v_i(\bar{x}, \bar{y}), A_i(\bar{x}), B_i(\bar{x})$.

Подставим (45) в (44) с учетом (46) и соберем члены при одинаковых степенях ε . Получим систему уравнений в частных

производных с известными правыми частями. Выпишем только уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= X(\bar{x}, \bar{y}, 0) - A_1(\bar{x}), \\ \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} u_1(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}).\end{aligned}\tag{47}$$

Уравнения последующих приближений имеют такой же вид.

Один из способов решения этой задачи – метод Фурье. Фактически задача сводится к определению периодической по y функции F , такой, что

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = V(x, y) - D(x),\tag{48}$$

где $V(x, y)$ – периодическая функция y периода 2π . Следовательно, она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$V(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k(x) e^{iky},\tag{49}$$

причем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(x, y) dy = \bar{V}(x, y).$$

Тогда уравнение (48) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{k \neq 0} b_k(x) e^{iky} + \bar{V}(x) - D(x).\tag{50}$$

Функция F может быть представлена в форме ряда

$$F(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k(x) e^{iky} + c(x)y + \phi(x),\tag{51}$$

где $\phi(x)$ – произвольная функция. Если подставить ряд (51) в уравнение (50) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, то получим

$$b_k(x) = \frac{a_k(x)}{ik} (k \neq 0), \quad c(x) = \bar{V}(x) - D(x).$$

Для того чтобы решение уравнения (48) было ограниченным при $y \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $c \equiv 0$, то есть должно выполняться равенство

$$D(x) = \bar{V}(x).$$

Таким образом, мы получили, что

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, \bar{y}, 0) dy = \bar{X},$$

$$u_1 = \sum \frac{a_k(\bar{x})}{ik} e^{iky} + b_0(\bar{x}).$$

(52)

Функция $b_0(\bar{x})$ произвольна и может быть определена и из других соображений. Аналогично находятся B_1 и v_1 и так далее. В случае нескольких быстрых переменных (y – вектор) возможно явление резонанса. Если же условие нерезонансности выполнено, то, обрывая ряды на членах ε^n , получим на интервале времени $t \propto 1/\varepsilon$ точность определения медленных переменных порядка ε^n и быстрых переменных порядка ε^{n-1} , так что выполняются неравенства

$$|x - \bar{x}| \propto \varepsilon^n, \quad |y - \bar{y}| \propto \varepsilon^{n-1}.$$

Используем изложенную методику для анализа быстрого вращения спутника в плоскости орбиты.

7. БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА

Вернемся к уравнениям (38):

$$\alpha' = \omega,$$

$$\omega' = -\mu \sin \alpha \cos \alpha - \delta(\omega - f).$$

Как и ранее, здесь знаком (\prime) обозначена операция дифференцирования по u , ω – относительная угловая скорость. Рассмотрим эволюцию быстрых вращений. В этом случае угол α

меняется монотонно и его можно выбрать в качестве независимой переменной:

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{\omega},$$

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{-\mu \sin \alpha \cos \alpha - \delta(\omega - f)}{\omega}.$$

Мерой быстроты вращения пусть служит величина, обратная некоторому абстрактному малому параметру $0 < \eta \ll 1$, то есть

$\omega = \frac{x}{\eta}$, где $x = O(1)$, тогда (38) принимает вид

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{\eta}{x}, \quad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{\eta^2 \left[-\mu \sin \alpha \cos \alpha - \delta \left(\frac{x}{\eta} - f \right) \right]}{x},$$

или

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{\eta}{x}, \quad \frac{dx}{d\alpha} = \eta \left[-\delta + \frac{\eta(\delta f - \mu \sin \alpha \cos \alpha)}{x} \right].$$

(53)

Для использования метода Крылова–Боголюбова [10] необходимо сделать замену

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + \eta X_1(\tilde{x}, \tilde{u}, a) + \dots, \\ u &= \tilde{u} + \eta U_1(\tilde{x}, \tilde{u}, \alpha) + \dots, \end{aligned} \quad (54)$$

где X_i, U_i – 2π -периодические по α функции, приводящие систему (53) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{d\alpha} &= \eta P_1(\tilde{x}, \tilde{u}) + \dots, \\ \frac{d\tilde{u}}{d\alpha} &= \eta Q_1(\tilde{x}, \tilde{u}) + \dots. \end{aligned} \quad (55)$$

Выполним в (53) замену переменных (54):

$$\frac{d\tilde{u}}{d\alpha} + \eta \left(\frac{\partial U_1}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\alpha} + \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{d\alpha} + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \right) + \dots = \eta \frac{1}{\tilde{x}} \left(1 - \frac{\eta X_1}{\tilde{x}} + \dots \right),$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{x}}{d\alpha} + \eta \left(\frac{\partial X_1}{\partial \tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{d\alpha} + \frac{\partial X_1}{\partial \tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{d\alpha} + \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} \right) + \dots = \\ & = \eta \left[-\delta + \eta (\delta f(u) - \mu \sin \alpha \cos \alpha) \frac{1}{\tilde{x}} \left(1 - \frac{\eta X_1}{\tilde{x}} + \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляем сюда систему (55):

$$\begin{aligned} \eta Q_1 + \dots + \eta \left[\frac{\partial U_1}{\partial \tilde{x}} (\eta P_1 + \dots) + \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{u}} (\eta Q_1 + \dots) + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \right] + \dots = \\ = \eta \frac{1}{\tilde{x}} \left[1 - \frac{\eta}{\tilde{x}} X_1 + \dots \right], \\ \eta P_1 + \dots + \eta \left[\frac{\partial X_1}{\partial \tilde{x}} (\eta P_1 + \dots) + \frac{\partial X_1}{\partial \tilde{u}} (\eta Q_1 + \dots) + \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} \right] + \dots = \\ = \eta \left\{ -\delta + \eta \left[\delta \left(f(\tilde{u}) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=\tilde{u}} \eta U_1 + \dots \right) - \mu \sin \alpha \cos \alpha \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\tilde{x}} \left(1 - \eta \frac{X_1}{\tilde{x}} + \dots \right) \right\}. \end{aligned}$$

Приравняем слагаемые при одинаковых степенях η :

$$\begin{aligned} \eta^1 : \quad Q_1 + \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\tilde{x}}, \\ P_1 + \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} &= (-\delta - \mu \sin \alpha \cos \alpha) \frac{1}{\tilde{x}}, \\ \eta^2 : \quad Q_2 + \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{x}} P_1 + \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{u}} Q_1 + \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} &= -\frac{X_1}{\tilde{x}^2}, \\ P_2 + \frac{\partial X_1}{\partial \tilde{x}} P_1 + \frac{\partial X_1}{\partial \tilde{u}} Q_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \alpha} &= (\delta f(\tilde{u}) - \mu \sin \alpha \cos \alpha) \frac{1}{\tilde{x}}, \\ \dots\dots\dots \\ (56) \end{aligned}$$

Решаем систему (56) с учетом 2π -периодичности по α функций X_i, U_i . Решаем первое уравнение:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{\tilde{x}} - Q_1(\tilde{x}, \tilde{u}).$$

Здесь $U_1 - 2\pi$ -периодическая по α функция, то есть $U_1(\tilde{x}, \tilde{u}, 2\pi) - U_1(\tilde{x}, \tilde{u}, 0) = 0$. Тогда

$$U_1(2\pi) - U_1(0) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\tilde{x}} - Q_1(\tilde{x}, \tilde{u}) \right) \Big|_{\tilde{x}, \tilde{u} = \text{const}} d\alpha$$

и имеем решение первого уравнения

$$\int_0^{2\pi} Q_1 d\alpha + U_1(\tilde{x}, \tilde{u}, 2\pi) - U_1(\tilde{x}, \tilde{u}, 0) = \frac{2\pi}{\tilde{x}}.$$

Откуда получаем $Q_1 = \frac{1}{\tilde{x}}$. Для следующего уравнения

$$\int_0^{2\pi} P_1 d\alpha + \underbrace{X_1(\tilde{x}, \tilde{u}, 2\pi) - X_1(\tilde{x}, \tilde{u}, 0)}_{=0} = -\frac{\delta}{\tilde{x}} 2\pi - \frac{\mu}{\tilde{x}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha}_{=0},$$

тогда $P_1 = -\frac{\delta}{\tilde{x}}$. Из этих же уравнений получаем для определения

U_1, X_1 следующие цепочки выражений:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{\tilde{x}} - Q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} = (-\delta - \mu \sin \alpha \cos \alpha) \frac{1}{\tilde{x}} - P_1 = -\frac{\delta}{\tilde{x}} - \frac{\mu \sin \alpha \cos \alpha}{\tilde{x}} + \frac{\delta}{\tilde{x}} = -\frac{\mu \sin \alpha \cos \alpha}{\tilde{x}},$$

то есть

$$\frac{\partial U_1}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} = -\frac{\mu \sin \alpha \cos \alpha}{\tilde{x}}.$$

Отсюда $U_1 = \text{const}, X_1 = -\frac{\mu}{2\tilde{x}} \sin^2 \alpha + \text{const}$. Потребуем еще

выполнения условий $\int_0^{2\pi} U_1 d\alpha = \int_0^{2\pi} X_1 d\alpha = 0$ (ограниченность x и u).

Тогда $U_1 = 0$, а из равенства $\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\mu}{2\tilde{x}} \sin^2 \alpha + \text{const} \right) d\alpha = 0$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \left[-\frac{\mu}{2\tilde{x}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + \text{const} \right] d\alpha = 0,$$

$$-\frac{\mu}{4\tilde{x}}2\pi + \text{const} \cdot 2\pi = 0, \quad \text{const} = \frac{\mu}{4\tilde{x}},$$

тогда $X_1 = -\frac{\mu}{2\tilde{x}}\sin^2\alpha + \frac{\mu}{4\tilde{x}} = \frac{\mu}{4\tilde{x}}(1 - 2\sin^2\alpha)$. Продолжим вычисление следующих приближений:

$$Q_2 + 0 \cdot \left(-\frac{\delta}{\tilde{x}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} = -\frac{\mu}{4\tilde{x}^3}(1 - 2\sin^2\alpha),$$

$$P_2 - \frac{\mu}{4\tilde{x}^2}(1 - 2\sin^2\alpha) \left(-\frac{\delta}{\tilde{x}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{\partial X_2}{\partial \alpha} = (\delta f(\tilde{u}) - \mu \sin\alpha \cos\alpha) \frac{1}{\tilde{x}}.$$

После преобразований имеем

$$Q_2 + \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} = -\frac{\mu}{4\tilde{x}^3}(1 - 2\sin^2\alpha),$$

$$P_2 + \frac{\mu\delta}{4\tilde{x}^3}(1 - 2\sin^2\alpha) + \frac{\partial X_2}{\partial \alpha} = (\delta f(\tilde{u}) - \mu \sin\alpha \cos\alpha) \frac{1}{\tilde{x}}.$$

Интегрируем первое уравнение

$$\int_0^{2\pi} Q_2(\tilde{x}, \tilde{u}) d\alpha + \underbrace{U_2(\tilde{x}, \tilde{u}, 2\pi) - U_2(\tilde{x}, \tilde{u}, 0)}_{=0} = -\frac{\mu}{4\tilde{x}} \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2\alpha) d\alpha$$

,

или

$$\int_0^{2\pi} Q_2(\tilde{x}, \tilde{u}) d\alpha = -\frac{\mu}{4\tilde{x}} \int_0^{2\pi} (1 - 1 + \cos 2\alpha) d\alpha = 0,$$

то есть $Q_2 = 0$, и далее

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_2 d\alpha + \frac{\mu\delta}{4\tilde{x}^3} \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2\alpha) d\alpha + \underbrace{X_2(\tilde{x}, \tilde{u}, 2\pi) - X_2(\tilde{x}, \tilde{u}, 0)}_{=0} = \\ = \frac{\delta f(\tilde{u})}{\tilde{x}} 2\pi - \frac{\mu}{\tilde{x}} \int_0^{2\pi} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Тогда $\int_0^{2\pi} P_2 d\alpha = \frac{\delta f(\tilde{u})}{\tilde{x}} 2\pi$, $P_2 = \frac{\delta f(\tilde{u})}{\tilde{x}}$. Тем самым имеем для

медленных переменных

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}}{d\alpha} &= -\eta \frac{\delta}{\tilde{x}} + \eta^2 \frac{\delta f(\tilde{u})}{\tilde{x}} + O(\eta^3), \\ \frac{d\tilde{u}}{d\alpha} &= \eta \frac{1}{\tilde{x}} + O(\eta^3).\end{aligned}\tag{57}$$

Отбросим в обоих уравнениях слагаемые $O(\eta^3)$ и поделим первое уравнение на второе, тогда получим

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{u}} = -\delta + \eta \delta f(\tilde{u}).\tag{58}$$

Подставим выражение $f(\tilde{u}) = 2/(1+3\sin^2 \tilde{u})$ и запишем решение уравнения (58) в виде квадратуры:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 = -\delta(\tilde{u} - \tilde{u}_0) + \eta \delta \int_{\tilde{u}_0}^{\tilde{u}} \frac{2}{1+3\sin^2 \tau} d\tau.$$

Представим единицу в знаменателе дроби под знаком интеграла в виде суммы квадратов синуса и косинуса τ , разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 \tau$, перейдем к переменной интегрирования $\operatorname{tg} \tau$. В результате получаем после вычисления квадратуры выражение

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 = -\delta(\tilde{u} - \tilde{u}_0) + \eta \delta (\operatorname{arctg} 2 \operatorname{tg} \tilde{u} - \operatorname{arctg} 2 \operatorname{tg} \tilde{u}_0).$$

После подстановки отсюда выражения для \tilde{x} во второе уравнение из (57) имеем решение последнего в виде

$$\begin{aligned}\eta(\alpha - \alpha_0) &= (x_0 + \delta \tilde{u}_0 - \operatorname{arctg} 2 \operatorname{tg} \tilde{u}_0)(\tilde{u} - \tilde{u}_0) + \\ &+ \eta \delta \int_{\tilde{u}_0}^{\tilde{u}} \operatorname{arctg} 2 \operatorname{tg} \tau d\tau - \frac{1}{2} \delta (\tilde{u}^2 - \tilde{u}_0^2),\end{aligned}$$

содержащем квадратуру, вычислить которую в элементарных функциях не удастся. Если же в системе (57) сохранить слагаемые до $O(\eta)$, то ее решение находится в элементарных функциях.

8. МЕТОД ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Рассмотрим теперь частный случай, когда x, y – скаляры, а ω – постоянная величина. Ограничимся при этом рассмотрением только первого члена ряда (46); тогда считаем

$$x = \bar{x}, y = \bar{y},$$

причем

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} = \varepsilon X, \dot{\bar{y}} = \dot{y} = \omega + \varepsilon \bar{Y}. \quad (59)$$

Эти уравнения называются уравнениями Ван-дер-Поля.

Рассмотрим пример. Допустим, что на линейный осциллятор с собственной частотой ω действует малая возмущающая нелинейная сила, зависящая от координаты z , характеризующей состояние осциллятора, и его скорости \dot{z} . Такой колебательный процесс может быть описан уравнением вида

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon \phi(z, \dot{z}), \quad (60)$$

где ε – параметр, характеризующий малость возмущающей силы. Для уравнения

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (61)$$

описывающего гармонические колебания, общее решение имеет следующий вид:

$$z = x \cos y, \quad (62)$$

где $y = \omega(t + t_0)$, x и t_0 — произвольные постоянные. Постоянная x называется амплитудой, а функция $y(t)$ — фазой.

Естественно предположить, что в случае малых значений ε решение уравнения (60) будет описывать также некоторый колебательный процесс вида (62). Однако следует ожидать, что амплитуда этого процесса x уже не будет (в общем случае) постоянной, а будет изменяться, причем тем медленнее, чем меньше число ε . Скорость изменения фазы также будет изменяться со временем. Таким образом, если в каждый момент времени исследуемый процесс носит колебательный характер, то его полностью определяют мгновенные значения амплитуды x и фазы y . Поэтому в качестве переменных, описывающих процесс, можно принять амплитуду колебаний и фазу. Тогда одна из переменных – амплитуда – будет меняться медленно.

Итак, в задаче (60) будем в качестве новых переменных рассматривать функции $x(t)$ и $y(t)$. Для того чтобы определить эти

переменные, к соотношению (62) надо добавить еще одно соотношение.

Используя идею вариации произвольных постоянных, потребуем, чтобы величины x и y были связаны, кроме (62), еще соотношением

$$\dot{z} = -\omega x \sin y, \quad (63)$$

которое всегда имеет место для постоянной амплитуды. Составим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $x(t)$ и $y(t)$. Дифференцируя (62) и приравнявая к (63), получим

$$\dot{x} \cos y - x \dot{y} \sin y + \omega x \sin y = 0. \quad (64)$$

Условие (64) – это условие совместности формул (62) и (63). Дифференцируя далее (63) и подставив в (60), получим еще одно уравнение:

$$-\dot{x} \omega \sin y - \omega x \dot{y} \cos y + x \omega^2 \cos y = \varepsilon \phi(x \cos y, -\omega x \sin y). \quad (65)$$

Система (64) – (65) – это два уравнения первого порядка относительно двух неизвестных функций x и y . Разрешая ее относительно производных и вводя функции ϕ_1 и ϕ_2 , имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \phi(x \cos y, -x \omega \sin y) \sin y = \frac{\varepsilon}{\omega} \phi_1(x, y), \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x} \phi(x \cos y, -x \omega \sin y) \cos y = \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x} \phi_2(x, y). \end{aligned} \quad (66)$$

Система двух уравнений (66) полностью эквивалентна уравнению (60). Роль медленной переменной здесь играет амплитуда x , а роль быстрой переменной – фаза y . Заметим, что правые части системы (66) являются периодическими функциями фазы y , какова бы ни была функция $\phi(x, y)$ в (60).

Первое уравнение системы (66) показывает, что переменная x меняется медленно, так как ее производная имеет порядок ε . Следовательно, за одно колебание (то есть за время, в течение которого фаза y изменится на 2π) амплитуда и характер колебаний изменяются мало. Поэтому можно ожидать, что мы не сделаем

большой ошибки, если заменим правые части системы (66) их средними значениями за период и вместо системы (66) станем рассматривать систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \bar{\phi}_1(x), \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x} \bar{\phi}_2(x),\end{aligned}\tag{67}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x \cos y, -x\omega \sin y) \sin y dy, \\ \bar{\phi}_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x \cos y, -x\omega \sin y) \cos y dy.\end{aligned}\tag{68}$$

Уравнения (67) и есть уравнения Ван-дер-Поля. Они значительно проще исходной системы (66), поскольку первое уравнение может быть проинтегрировано независимо от второго. В системе (67) медленные и быстрые движения разделены. Интегрируя первое уравнение этой системы, находим закон изменения амплитуды. Очень часто в прикладных задачах бывает достаточно найти только зависимость амплитуды от времени. В рассматриваемой теории для этого достаточно найти решение уравнения первого порядка (в общем случае нелинейного).

Определение фазы сводится к квадратурам. Наибольший интерес обычно представляет не сама фаза, а скорость ее изменения в зависимости от амплитуды. Ответ на этот вопрос дает непосредственно второе уравнение системы (67).

Итак, метод Ван-дер-Поля решения уравнения (60) состоит в переходе от переменной z к переменным x и y , которые называются переменными Ван-дер-Поля, и к замене точных уравнений (66) усеченной системой (67).

Рассмотрим другой подход, называемый иногда методом В.М. Волосова [11], для решения уравнения вида

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon \phi(z, \dot{z}),\tag{69}$$

где ε – малый параметр, $f(z)$ – периодическая функция периода 2π . Порождающее уравнение допускает следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \dot{z}^2 + U(z) &= \alpha, \\ \psi(z, \alpha) &\equiv \frac{1}{T(\alpha)} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}} = \frac{t}{T(\alpha)} + \text{const} = \beta, \end{aligned} \quad (70)$$

где $U(z) = 2 \int f(z) dz$.

Примем в качестве новых переменных при изучении уравнения (69) величины α и β . Они характеризуют колебательный процесс с той же полнотой, что и величины x и y , введенные выше. Но, дифференцируя (70), в силу уравнения (69) всегда можно составить уравнения для α и β . Итак,

$$\dot{\alpha} = 2\dot{z}\ddot{z} + \frac{dU}{dz} \dot{z},$$

но

$$\ddot{z} = -f(z) + \varepsilon\phi(z, \dot{z}), \quad \frac{dU}{dz} = 2f(z),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 2\varepsilon\phi(z, \sqrt{\alpha - U(z)})\sqrt{\alpha - U(z)}, \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial\psi}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \dot{\alpha} = \frac{1}{T(\alpha)} + 2\varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \phi(z, \sqrt{\alpha - U(z)})\sqrt{\alpha - U(z)}. \end{aligned} \quad (71)$$

Правые части системы (71) являются периодическими функциями t периода $T(\alpha)$, а следовательно, и переменной β . Поэтому для того, чтобы получить уравнения первого приближения, достаточно усреднить правые части системы (71) по переменной β :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int_0^T \phi^*(z, \alpha) \sqrt{\alpha - U(z)} d\beta, \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{T(\alpha)} + \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int_0^T \phi^*(z, \alpha) \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \sqrt{\alpha - U(z)} d\beta. \end{aligned} \quad (72)$$

Но дифференциалы dz и $d\beta$ связаны соотношением

$$dz = \pm \sqrt{\alpha - U(z)} d\beta, \quad (73)$$

где плюс соответствует движению в верхней полуплоскости, минус – движению в нижней полуплоскости фазовой плоскости. Поэтому, произведя в уравнениях (72) замену (73), получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \pm \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \phi^*(z, \alpha) dz, \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{T(\alpha)} \pm \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \phi^*(z, \alpha) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} dz. \end{aligned} \quad (74)$$

Интегрирование в этих выражениях выполняется вдоль фазовой траектории, ордината которой в случае вращения является периодической функцией переменной z периода 2π . Поэтому в качестве \underline{z} можно взять $z = 0$, тогда $\bar{z} = 2\pi$.

Вычисление периода $T(\alpha)$ также сводится к квадратуре:

$$T(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}}.$$

Для величин $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ можно получить и другие приближенные формулы, опираясь на уравнения (71). Так как правые части этих уравнений являются в случае вращательных движений периодическими функциями z периода 2π , то, усредняя по z , мы получим аналог формул (74):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(z, \alpha) \sqrt{\alpha - U(z)} dz, \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi^*(z, \alpha) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \sqrt{\alpha - U(z)} dz. \end{aligned}$$

В качестве упражнения студент может сам попробовать применить метод Ван-дер-Поля для описания малых колебаний спутника в окрестности его положения равновесия относительно орбитальной системы координат.

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

В пособии не затронуты вопросы резонансов в теории усреднения для многочастотных систем, усреднения уравнений с разрывными правыми частями, встречающиеся при исследовании движения механических систем, например, с сухим трением. Эти и другие смежные вопросы вдумчивый читатель найдет в многочисленных книгах и журнальных статьях. Их малая часть перечислена ниже. Многие актуальные книги были подвергнуты стереотипному переизданию в последние годы и появились в широком доступе в Интернете. Автор постарался дать ссылки на первоисточники. Представляют особый интерес книга [12], в которой соединилась строгая наука с популярным изложением материала, а также богатая подборка препринтов Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН [13]. Асимптотические методы являются эффективным инструментом исследователя, с помощью которых можно получить общее представление о поведении механических систем. Зачастую они предваряют использование численных методов и позволяют повысить эффективность последних.

Литература

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников Земли. Итоги науки и техники. Сер.: Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ АН СССР, 1972. Т. 11. 223 с.
2. http://technicamolodezhi.ru/rubriki_tm/233/1580 (актуально на 26.06.2012 г.)
3. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли. Итоги науки и техники. Сер.: Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ АН СССР. 1985. Т. 23. 104 с.
4. Садов Ю.А., Тетерин А.Д. Влияние поступательных степеней свободы поплавок магнитного демпфера на динамику спутника с гравитационной системой ориентации: препринт / Институт прикладной математики АН СССР. 1974. № 104. 46 с.
5. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник. 1948. 22(64). № 2. С. 193–204.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
7. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во Мех.-мат. факультета МГУ, 1995.
8. Барбашин Е.Н., Красовский Н.Н. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18. № 3. С. 345–350.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
10. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1981. 400 с.
11. Волосов В.М. Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанных с усреднением // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3. № 1. С. 3–53.
12. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 432 с.
13. <http://library.keldysh.ru/preprints/> (актуально на 26.06.2012 г.)

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи. Уравнения движения	4
2. Понижение порядка системы уравнений. Теорема Тихонова	10
3. Исследование уравнений движения системы спутник–поплавок в плоскости полярной орбиты. Понижение порядка системы уравнений.....	12
4. Теорема Пуанкаре	17
5. Применение теоремы Пуанкаре.....	20
6. Сведения о методе усреднения	24
7. Быстрые вращения спутника	27
8. Метод Ван-дер-Поля	32
Вместо заключения	38
Литература	39

УДК 629.136: 517.928

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор *Ю. А. Садов*

Использование асимптотических методов механики для исследования динамики механической системы на последовательных стадиях ее движения: учебно-методическое пособие / сост.: М. Ю. Овчинников. — М.: МФТИ, 2012. — 40 с.

Пособие появилось в процессе чтения лекций и проведения практических занятий в рамках инновационного курса «Динамика и управление механическими системами» на кафедре теоретической механики МФТИ, направленного на формирование у студентов интереса, профессиональной ориентации и подготовки к участию в научно-исследовательской работе. Оно будет полезно слушателям инновационного курса, студентам и аспирантам, интересующимся методологией исследования механических задач.

Учебное издание

**Использование асимптотических методов механики
для исследования динамики механической системы
на последовательных стадиях ее движения**

Составитель **Овчинников** Михаил Юрьевич

Редактор *О. П. Котова*. Корректор *Л. В. Волкова*.

Подписано в печать 27.08.2012. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 2,5. Уч.- изд. л. 2,0.

Тираж 100 экз. Заказ № 213.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@miptic.ru

© Федеральное государственное, автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2012

© М. Ю. Овчинников, 2012