Задачи и упражнения по случайным процессам

Широбоков М.Г.
ФПМИ МФТИ

21 ноября 2022 г.

Оглавление

Введение

В данном пособии содержатся задачи, упражнения и вопросы по курсу «Случайные процессы», которые предлагаются автором студентам 3-го курса физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ. Задачи посвящены ключевым разделам теории случайных процессов: гауссовским, стационарным, эргодическим, марковским процессам, а также стохастическому анализу. По традиции этот курс делится на две части: первые несколько лекций и семинаров составляют содержание так называемого первого задания, а последующие лекции и семинары посвящаются целиком марковским процессам и называются вторым заданием. В конце пособия читатель может найти списки вопросов на понимание, которые автор предлагает студентам во время приема заданий и экзаменов. Кроме того, в конце приводятся вопросы для проведения диктантов: преподаватель называет пункты из списка, а студенты, не пользуясь материалами, самостоятельно пишут определения и формулировки теорем. Приводятся и списки задач для сдачи заданий в течение семестра, эти задачи касаются всех понятий, вводимых в курсе. Замечания к тексту можно направлять на электронный адрес автора `shirobokov@phystech.edu`.

Список обозначений и сокращений

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство (Ω – множество исходов, $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра, $\mathbb{P}$ – вероятностная мера).
$\mathbb{E}X$ – математическое ожидание случайной величины X.
$\mathbb{D}X$ – дисперсия случайной величины X.
$\mathrm{cov}(X, Y)$ – корреляционный момент (ковариация) случайных величин X и Y.
$\overset{\circ}{X}$ – «центрированная» случайная величина X, то есть $\overset{\circ}{X} = X - \mathbb{E}X$.
$\mathrm{Be}(p)$ – распределение Бернулли.
$\mathrm{Bi}(n, p)$ – биномиальное распределение, $\mathrm{Bi}(1, p) = \mathrm{Be}(p)$.
$\mathrm{Po}(\lambda)$ – распределение Пуассона.
$\mathrm{U}(a, b)$ – равномерное непрерывное распределение на отрезке $[a, b]$.
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ – нормальное (гауссовское) распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$ – показательное распределение с параметром λ, плотность распределения $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$.
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$ – сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$ – сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$ – сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$ – сходимость по распределению.
l.i.m. – предел в среднем квадратичном (limit in mean).
$\overset{d}{=}$ – равенство по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$ – равенство почти наверное.
$\bar{z}$ – комплексное сопряжение комплексного числа z.
$I(A)$ – индикаторная функция события A: $I(A) = 1$, если A верно, и $I(A) = 0$ иначе.
с.к. – в среднем квадратичном.
п.н. – почти наверное.
х.ф. – характеристическая функция.
ЗБЧ – закон больших чисел.
ЦПТ – центральная предельная теорема.
НОД – наибольший общий делитель.

1. Базовые сведения из теории вероятностей

Определение. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$, состоящая из пространства элементарных исходов Ω, сигма-алгебры $\mathfrak{S}$, определенной на Ω, и вероятностной меры $\mathbb{P}$, заданной на $\mathfrak{S}$.

Сигма-алгебра $\mathfrak{S}$ представляет собой множество подмножеств Ω определенной структуры: Ω принадлежит $\mathfrak{S}$, если множество принадлежит $\mathfrak{S}$, то и его дополнение принадлежит $\mathfrak{S}$ и любое счетное объединение множеств из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$. Вероятность определена только на элементах $\mathfrak{S}$. Элементы $\mathfrak{S}$ также называются *событиями.*

Определение. Пересечение всех сигма-алгебр, содержащих некоторый набор множеств, называется *минимальной сигма-алгеброй*, содержащей данный набор множеств.

Определение. *Борелевской сигма-алгеброй* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$ называется минимальная сигма-алгебра, содержащая все интервалы на $\mathbb{R}$. Элементы борелевской сигма-алгебры называются *борелевскими множествами.*

Борелевская сигма-алгебра является чрезвычайно богатой на множества. Она содержит все интервалы вида (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, как конечные, так и бесконечные и полубесконечные, всемозможные их конечные и счетные объединения, отдельные точки $\{a\}$, их конечные и счетные объединения и многое-многое другое. В борелевскую сигма-алгебру входит и всякая экзотика типа множества Кантора. Но борелевская сигма-алгебра – это не множество всех подмножеств на числовой прямой. Существуют примеры множеств, не являющихся борелевскими.

Определение. Пусть $\mathbb{P}(B) > 0$. Тогда *условной вероятностью события A при условии события B* называется

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Теорема. *Пусть даны события $A, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, причем $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $n \leq \infty$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Тогда справедлива так называемая формула полной вероятности*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Определение. *Случайной величиной* ξ, определенной на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{S})$, называется числовая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, такая, что для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполнено $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{S}$. При этом запись $\mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) \in B\})$ обычно сокращают до $\mathbb{P}(\xi \in B)$.

Это определение эквивалентно следующему определению.

Определение. *Случайной величиной* ξ, определенной на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{S})$, называется числовая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{S}$.

Определение. *Борелевской функцией* φ, определенной на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, называется числовая функция $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ выполнено $\{\omega : \varphi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Это определение эквивалентно следующему определению.

Определение. *Борелевской функцией* φ, определенной на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, называется числовая функция $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\{\omega : \varphi(\omega) < x\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Определение. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется числовая функция $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Здесь следует обратить внимание на то, что знак неравенства под вероятностью стоит строгий. Эта договоренность соблюдается во всех наших курсах (теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика). В некоторых других книгах можно встретить нестрогое неравенство, так тоже можно определять функцию распределения, но некоторые факты о функции распределения (например, свойство непрерывности) изменятся. У нас всюду принято строгое неравенство.

Свойства функции распределения.

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
2. Если $x_1 \le x_2$, то $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.
4. Функция $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ непрерывна слева в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Определение. Говорят, что случайная величина обладает *дискретным распределением*, если все ее значения образуют конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, для $n \le \infty$, так, что для всех k выполнено $\mathbb{P}(\xi = x_k) > 0$ и $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\xi = x_k) = 1$.

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *абсолютно непрерывным распределением*, если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$, такая, что

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В этом случае функция $f_\xi(x)$ называется *плотностью* распределения случайной величины ξ.

Определение. Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{P}(\xi < x, \eta < y) = \mathbb{P}(\xi < x)\mathbb{P}(\eta < y).$$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми (в совокупности)*, если для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1)\mathbb{P}(\xi_2 < x_2)\ldots\mathbb{P}(\xi_n < x_n).$$

Следует понимать независимость случайных величин именно в том смысле, в котором написано выше. Следует также помнить, что независимость – это не только свойство случайных величин, но и свойство меры – одни и те же случайные величины (как функции исходов) могут быть независимыми для одной вероятностной меры $\mathbb{P}$, но оказаться зависимыми для другой вероятностной меры $\mathbb{P}'$.

Определение (частное). *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* ξ, принимающей $n \leq \infty$ значений x_1, x_2, $\ldots$, x_k,$\ldots$, называется ряд

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(\xi = x_k),$$

если он сходится абсолютно.

Определение (частное). *Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины* ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется интеграл

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx,$$

если он сходится абсолютно.

Определение (общее). *Математическим ожиданием случайной величины* $\xi = \xi(\omega)$ называется интеграл по вероятностной мере

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Определение (общее). *Математическим ожиданием случайной величины* $\xi = \xi(\omega)$ называется интеграл Стилтьеса–Лебега:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x).$$

Свойства математического ожидания

1. Если a и b постоянные, то $\mathbb{E}(a + b\xi) = a + b\mathbb{E}\xi$.
2. $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2$, если существуют какие-нибудь два участвующих в равенстве математических ожидания.
3. Если $a \le \xi \le b$, то $a \le \mathbb{E}\xi \le b$. Всегда $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$.

Определение. *Дисперсией* случайной величины ξ называется величина

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left(\xi - \mathbb{E}\xi\right)^2 \equiv \mathbb{E}\xi^2 - \left(\mathbb{E}\xi\right)^2.$$

Определение. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называется величина

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) \equiv \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Эту величину также называют *корреляционным моментом.*

Свойства дисперсии и ковариации

1. Если a и b постоянные, то $\mathbb{D}(a + b\xi) = b^2\mathbb{D}\xi$.
2. $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + 2\mathrm{cov}(\xi, \eta) + \mathbb{D}\eta$.
3. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$.
4. Если a и b постоянные, то $\mathrm{cov}(\xi + a, \eta + b) = \mathrm{cov}(\xi, \eta)$.
5. Если a и b постоянные, то $\mathrm{cov}(a\xi, b\eta) = ab \cdot \mathrm{cov}(\xi, \eta)$.
6. Неравенство Коши–Буняковского: $\mathrm{cov}^2(\xi, \eta) \le \mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta$. Равенство достигается в том и только том случае, когда существуют числа a, b, c такие, что $a\xi + b\eta = c$ почти всюду.
7. Для независимых ξ и η выполнено $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$, то есть независимые случайные величины являются некоррелированными.

Определение. *Характеристической функцией* (х.ф.) случайной величины ξ называется числовая функция

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} \equiv \mathbb{E}\cos t\xi + i \cdot \mathbb{E}\sin t\xi,\ t \in \mathbb{R},$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Определение. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины, определенные на общем вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$. Каждому

$\omega \in \Omega$ эти случайные величины ставят в соответствие n-мерный вектор $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$. Отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, задаваемое случайными величинами ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, называется *случайным вектором.*

Определение. *Функцией распределения случайного вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется функция n переменных

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n),$$

где x_1, …, $x_n \in \mathbb{R}$.

Определение. Если существует функция $f_\xi(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ такая, что функция распределения случайного вектора ξ

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_\xi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n \ldots dt_1,$$

то она называется *плотностью распределения случайного вектора* ξ.

Закон больших чисел (Хинчин). *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – *независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием* $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$. *Тогда*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

При тех же самых условиях справедлива более сильная теорема.

Закон больших чисел (Колмогоров). *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – *независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием* $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$. *Тогда*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п.н.}} \mu.$$

Центральная предельная теорема. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – *независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием* $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$ *и дисперсией* $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2$. *Обозначим* $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. *Тогда*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} \mathrm{N}(0, 1).$$

Теорема непрерывности. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *сходится по распределению к случайной величине* ξ *тогда и только тогда, когда последовательность характеристических* *функций* $\varphi_{\xi_1}(t), \ldots, \varphi_{\xi_n}(t), \ldots$ *сходится всюду поточечно к характеристической функции* $\varphi_\xi(t)$.

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *распределением Бернулли* с параметром $p \in (0,1)$, если она принимает значения 0 и 1, причем

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\xi = 1) = p.$$

В этом случае обозначают $\xi \in \mathrm{Be}(p)$. Для такой случайной величины

$$\mathbb{E}\xi = p, \quad \mathbb{D}\xi = p(1-p), \quad \varphi_\xi(t) = 1 - p + pe^{it}.$$

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *биномиальным распределением* с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0,1)$, если она принимает значения 0, 1, …, n, причем

$$\mathbb{P}(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

В этом случае обозначают $\xi \in \mathrm{Bi}(n,p)$. Для такой случайной величины

$$\mathbb{E}\xi = np, \quad \mathbb{D}\xi = np(1-p), \quad \varphi_\xi(t) = (1 - p + pe^{it})^n.$$

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *распределением Пуассона* с параметром $\lambda > 0$, если она принимает целые неотрицательные значения, причем

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

В этом случае обозначают $\xi \in \mathrm{Po}(\lambda)$. Для такой случайной величины

$$\mathbb{E}\xi = \lambda, \quad \mathbb{D}\xi = \lambda, \quad \varphi_\xi(t) = \exp\left(\lambda(e^{it} - 1)\right).$$

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *равномерным непрерывным распределением* с параметрами $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, если ее плотность равна

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, при } x \in [a,b], \\ 0 & \text{, при } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

В этом случае обозначают $\xi \in \mathrm{U}(a,b)$. Для такой случайной величины

$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \varphi_\xi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *нормальным распределением* с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, если ее плотность равна

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

В этом случае обозначают $\xi \in \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Для такой случайной величины

$$\mathbb{E}\xi = \mu, \ \ \mathbb{D}\xi = \sigma^2, \ \ \varphi_\xi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

Определение. Говорят, что случайная величина ξ обладает *показательным* (*экспоненциальным*) *распределением* с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность равна

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \le 0 \end{cases}$$

В этом случае обозначают $\xi \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. Для такой случайной величины

$$\mathbb{E}\xi = \lambda^{-1}, \ \ \mathbb{D}\xi = \lambda^{-2}, \ \ \varphi_\xi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

2. Вероятностные свойства процессов

Задача 1. Найти n-мерную функцию распределения процесса $\xi(t) = t \cdot \eta$, где $\eta \in \mathrm{U}(0,1)$, $t \in (0,1)$.

Решение. Для произвольных $n \ge 1$ и $t_1, \ldots, t_n \in (0,1)$ найдем его n-мерную функцию распределения:

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}(\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n) =$$
$$= \mathbb{P}(t_1\eta < x_1, \ldots, t_n\eta < x_n) = \mathbb{P}\left(\eta < \frac{x_1}{t_1}, \ldots, \eta < \frac{x_n}{t_n}\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\eta < \min_{1 \le k \le n} \frac{x_k}{t_k}\right) = F_\eta\left(\min_{1 \le k \le n} \frac{x_k}{t_k}\right),$$

где функция распределения случайной величины η равна

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y, & y \in (0,1], \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Задача 2. На вероятностном пространстве $\big([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]}\big)$ определен случайный процесс

$$\xi(\omega,t) = \begin{cases} 1, & t \le \omega, \\ 0, & t > \omega. \end{cases}$$

Время задано на множестве $T = [0,1]$. Найти траектории, сечения и двумерное распределение процесса. Исследовать сечения на попарную независимость.

Решение. Чтобы определить траектории процесса, зафиксируем произвольный исход $\omega_0 \in [0,1]$ и изобразим на графике зависимость $\xi(\omega_0,t)$ (рис. 1). По условию задачи, при $t \le \omega_0$ имеем $\xi(\omega_0,t) = 1$, а при $t \in (\omega_0, 1]$ получаем $\xi(\omega_0,t) = 0$.

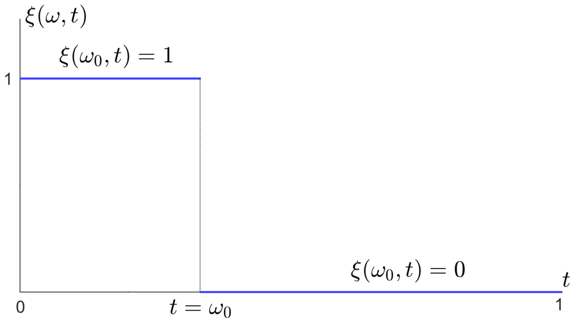


Рис. 1. Траектория процесса

Чтобы определить сечения процесса, зафиксируем момент времени $t_0 \in [0,1]$. Случайная величина $\xi(\omega,t_0)$ может принимать только два значения: 0 и 1. Значит, она имеет распределение Бернулли $\mathrm{Be}(p)$ с некоторым параметром p. Вспомним, что p есть вероятность принятия случайной величиной значения 1. Но случайная величина $\xi(\omega,t_0)$ принимает значение 1 только при $t_0 \le \omega \le 1$. Вероятностная мера на отрезке $[0,1]$ по условию задачи является лебеговой мерой, причем такой, что $\lambda_{[0,1]}([a,b]) = b - a$ для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$. Значит, искомая вероятность

$$p = \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega,t_0) = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega : t_0 \le \omega \le 1\}) = 1 - t_0,$$

поэтому произвольное сечение $\xi(t) \in \mathrm{Be}(1-t)$.

Что касается двумерной функции распределения, то мы просто пишем:

$$F_\xi(x_1,x_2;t_1,t_2) = \mathbb{P}(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2).$$

Остается вычислить эту вероятность, рассмотрев все возможные значения x_1 и x_2, считая, что t_1 и t_2 принадлежат отрезку $T = [0, 1]$. Здесь легко начинать с крайних случаев, когда x_1 и/или x_2 больше 1, или меньше 0. Анализируя по отдельности случаи, можно прийти к выражению

$$F_\xi(x_1, x_2; t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & x_1 > 1 \text{ и } x_2 > 1, \\ 0, & x_1 \le 0 \text{ или } x_2 \le 0, \\ t_2, & x_1 > 1 \text{ и } x_2 \in (0, 1], \\ t_1, & x_2 > 1 \text{ и } x_1 \in (0, 1], \\ \min(t_1, t_2), & x_1 \in (0, 1] \text{ и } x_2 \in (0, 1]. \end{cases}$$

Здесь мы учли, что сечение $\xi(t)$ принимает значение 1 с вероятностью $1 - t$ и значение 0 с вероятностью t. При подсчете первых четырех выражений достаточно было знания того, что сечения $\xi(t)$ имеют распределение Бернулли. При вычислении последнего выражения этого знания недостаточно, требуется воспользоваться конкретным видом функции $\xi(\omega, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2) &= \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega, t_1) = 0, \xi(\omega, t_2) = 0\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{\omega : 0 \le \omega < t_1, 0 \le \omega < t_2\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{\omega : 0 \le \omega < \min(t_1, t_2)\}) = \\ &= \min(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Теперь исследуем произвольные два сечения $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ процесса на независимость. Для этого проверим наличие равенства в выражении

$$\mathbb{P}(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2) = \mathbb{P}(\xi(t_1) < x_1)\mathbb{P}(\xi(t_2) < x_2)$$

для всех x_1 и x_2 из $\mathbb{R}$. Если $x_1 \notin (0, 1]$ или $x_2 \notin (0, 1]$, то это равенство очевидно выполнено, причем для любых t_1 и t_2. При $x_1 \in (0, 1]$ и $x_2 \in (0, 1]$ это равенство равносильно

$$\min(t_1, t_2) = t_1 t_2,$$

что верно лишь в случаях, когда хотя бы одно из значений t_1 или t_2 равно нулю или единице. В таких случаях $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ являются независимыми случайными величинами. В остальных случаях, то есть когда $t_1 \ne 0, 1$ и $t_2 \ne 0, 1$, сечения $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ являются зависимыми случайными величинами.

З а д а ч а 3. Пусть дан тот же самый процесс, что и в предыдущей задаче, и мы можем его наблюдать. Пусть на отрезке времени $[0, t_0]$

значение процесса все еще равно единице. С какой вероятностью скачок до нуля произойдет на интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$, где $\Delta t < 1 - t_0$?

Решение. Нам доступна информация о том, что на отрезке $[0, t_0]$ траектория процесса $\xi(\omega, t_0) = 1$. Ясно, что скачок может произойти почти сразу после t_0 или позже. Таким образом, данная нам предыстория процесса не позволяет однозначно определить поведение траектории в будущем. Однако *вероятность* скачка на наперед заданном интервале времени можно рассчитать точно. Для этого надо воспользоваться аппаратом условных вероятностей. Пусть событие A состоит в том, что скачок произойдет в интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$, а событие B состоит в том, что на интервале времени $[0, t_0]$ скачка не было. Тогда по условию задачи необходимо вычислить условную вероятность

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Заметим, что из события A следует событие B, значит, $A \cap B = A$. Кроме того, заметим что скачок происходит в момент $\tau(\omega) = \omega$, что является случайной величиной. Отсюда

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega : t_0 \le \tau(\omega) \le t_0 + \Delta t\}) = \Delta t,$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{\omega : t_0 \le \tau(\omega) \le 1\}) = 1 - t_0.$$

В результате получаем ответ:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\Delta t}{1 - t_0}.$$

Это и есть вероятность того, что скачок произойдет в ближайшее время Δt при условии, что до момента t_0 скачка не было. Отметим, что если скачок до момента t_0 произошел, то будущее процесса определено однозначно – его значение так и останется равным нулю.

Задача 4. Дан случайный процесс $\xi(t) = X^2 + 2tY + t^2$, $t \ge 0$, X, Y – независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение $\mathrm{N}(0, 1)$. Найти вероятность того, что

1) процесс $\xi(t)$ не убывает для всех $t \ge 0$;

2) $\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \ge 0$;

3) $\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in D$, где $D \subset [0, \infty)$ – конечно или счетно.

Решение.

1) Для каждого фиксированного исхода ω_0 функции $\xi(\omega_0, t)$ являются квадратичными. Они будут не убывать тогда и только тогда,

когда $\xi'(\omega_0, t) = 2Y(\omega_0) + 2t \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $Y(\omega_0) \geq 0$. Остается найти вероятностную меру всех ω_0, для которых $Y(\omega_0) \geq 0$:

$$\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1/2.$$

Итак, процесс $\xi(t)$ не убывает на полуоси $t \geq 0$ с вероятностью $1/2$.

2) Как и в предыдущем пункте здесь мы ищем меру всех исходов ω_0, для которых функция $\xi(\omega_0, t)$ удовлетворяет нужному требованию – равен нулю, в данном случае. Из условия на существование корня и то, что один из них должен быть больше нуля, следует, что нужное нам условие выполнится тогда и только тогда, когда одновременно $Y(\omega_0) \leq 0$ и $|X(\omega_0)| \leq |Y(\omega_0)|$. Итак, остается найти вероятность $\mathbb{P}(Y \leq 0, |Y| \geq |X|)$, но она равна $1/4$ в силу симметрии плотности совместного распределения X и Y. Итак, процесс $\xi(t)$ будет равен нулю хотя бы для одного $t \geq 0$ с вероятностью $1/4$.

3) Введем обозначение для множества интересуемых исходов

$$A = \{\omega : \xi(\omega, t) = 0 \text{ хотя бы для одного } t \in D\}.$$

Тогда по свойствам вероятностной меры

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t \in D} \{\omega : \xi(\omega, t) = 0\}\right) \leq \sum_{t \in D} \mathbb{P}(\omega : \xi(\omega, t) = 0).$$

Теперь поймем, для каких исходов процесс $\xi(\omega, t) = 0$ в *фиксированной* точке $t \in D$. Равенство нулю $\xi(\omega, t) = 0$ в фиксированной точке $t \in D$ выполняется тогда и только тогда, когда $X(\omega)^2 + 2tY(\omega) + t^2 = 0$, то есть когда $(X(\omega), Y(\omega)) \in B$, где $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2ty + t^2 = 0\}$, но (X, Y) имеет непрерывное распределение на $\mathbb{R}^2$, поэтому вероятность попадания на множество B (кривую) имеет меру нуль. Получается, что вероятность $\mathbb{P}(A)$ ограничена сверху конечной или счетной суммой из нулей, поэтому тоже равна нулю. Итак, процесс $\xi(t)$ равен нулю хотя бы для одного $t \in D \subset [0, \infty)$, где D – конечное или счетное множество, с вероятностью 0.

3. Моментные функции

Задача 1. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t) = X \cos(t + Y)$, где $t \in \mathbb{R}$ и $X \in \mathrm{N}(0, 1)$ и $Y \in \mathrm{U}(-\pi, \pi)$ независимы.

Р е ш е н и е. Сначала найдем математическое ожидание $\xi(t)$. Для этого зафиксируем момент времени $t \in \mathbb{R}$ и вычислим математическое ожидание сечения

$$\mathbb{E}\xi(t) = \mathbb{E}X \cos{(t+Y)}.$$

По условию задачи случайные величины X и Y независимы, значит,

$$\mathbb{E}X \cos{(t+Y)} = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}\cos{(t+Y)}.$$

Так как $X \in \mathrm{N}(0,1)$, то $\mathbb{E}X = 0$, откуда $\mathbb{E}\xi(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Найдем теперь корреляционную функцию

$$R_\xi(t,s) = \mathbb{E}\xi(t)\xi(s) - \mathbb{E}\xi(t)\mathbb{E}\xi(s).$$

Из $\mathbb{E}\xi(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ следует, что

$$R_\xi(t,s) = \mathbb{E}\xi(t)\xi(s) = \mathbb{E}X^2 \cos{(t+Y)} \cos{(s+Y)}.$$

Снова воспользуемся независимостью X и Y и получим

$$R_\xi(t,s) = \mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}\cos{(t+Y)}\cos{(s+Y)}.$$

Второй момент посчитаем через дисперсию:

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{D}X + (\mathbb{E}X)^2 = 1.$$

Второй множитель вычислим прямо:

$$\mathbb{E}\cos{(t+Y)}\cos{(s+Y)} = \frac{1}{2}\mathbb{E}(\cos(t+s+2y) + \cos(t-s)) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(t-s) + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t+s+2y) f_Y(y)\,dy,$$

где функция плотности равномерного распределения

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & y \in (-\pi,\pi) \\ 0, & y \notin (-\pi,\pi) \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$R_\xi(t,s) = \frac{1}{2}\cos(t-s) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos{(t+s+2y)}dy = \frac{1}{2}\cos{(t-s)}.$$

Итак, в результате имеем $m_\xi(t) \equiv 0$, $R_\xi(t,s) = \frac{1}{2}\cos{(t-s)}$.

Задача 2. На вероятностном пространстве $\big([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]}\big)$ определен случайный процесс

$$\xi(\omega, t) = \begin{cases} 1, & t \le \omega, \\ 0, & t > \omega. \end{cases}$$

Время задано на множестве $T = [0,1]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$.

Решение. Мы уже выяснили раньше, что произвольное сечение $\xi(t) \in \mathrm{Be}(1-t)$. Значит, математическое ожидание $m_\xi(t) = 1 - t$, дисперсия равна $D_\xi(t) = t(1-t)$. Корреляционная функция

$$R_\xi(t,s) = \mathbb{E}\xi(t)\xi(s) - \mathbb{E}\xi(t)\mathbb{E}\xi(s).$$

Для вычисления первого слагаемого удобно воспользоваться общей формулой для математического ожидания через интеграл по мере:

$$\mathbb{E}\xi(t)\xi(\tau) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega,t)\xi(\omega,\tau)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_0^1 \xi(\omega,t)\xi(\omega,\tau) d\omega = 1 - \max(t,\tau).$$

Другой подход состоит в том, чтобы заметить, что случайная величина $\xi(t)\xi(\tau)$ имеет распределение Бернулли $\mathrm{Be}(1 - \max(t,s))$, стало быть, ее математическое ожидание равно $1 - \max(t,s)$. В любом случае получаем

$$R_\xi(t,s) = 1 - \max(t,s) - (1-t)(1-s).$$

Для упрощения полученного выражения удобно воспользоваться выражениями

$$\min(x,y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2},$$

$$\max(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2},$$

из которых следует, что

$$R_\xi(t,s) = \min(t,s) - ts.$$

Кстати говоря, из того, что $R_\xi(t,s) \ne 0$ при $t \ne 0,1$ и $s \ne 0,1$, выходит, что $\xi(t)$ и $\xi(s)$ являются зависимыми случайными величинами.

Замечание. Общая формула для математического ожидания случайной величины ξ выражается через интеграл Лебега:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Другими словами, математическое ожидание случайной величины – это интеграл случайной величины по вероятностной мере. В примере выше вероятностная мера являлась мерой Лебега на отрезке $[0, 1]$, поэтому вместо формального обозначения $\mathbb{P}(d\omega)$ мы использовали привычное $d\omega$, а интеграл вычисляли как интеграл Римана, потому что подынтегральная функция достаточно «хорошая», и интеграл Римана от нее совпадает с интегралом Лебега. Заметим, что на практике интегралы Лебега чаще всего сводят к интегралу Римана, правила работы с которым нам хорошо известны еще со школы.

4. Пуассоновский процесс

Определение. *Пуассоновским процессом с интенсивностью* $\lambda > 0$ называется случайная функция $\{K(t), t \geq 0\}$, удовлетворяющая свойствам:

1) $K(0) = 0$ п.в.
2) $K(t)$ – процесс с независимыми приращениями.
3) $\forall t > s \geq 0$ выполнено $K(t) - K(s) \in \mathrm{Po}(\lambda(t - s))$.

Простейшие свойства пуассоновского процесса

1) $\mathbb{E}(K(t) - K(s)) = \mathbb{D}(K(t) - K(s)) = \lambda(t - s)$ для любых $t > s \geq 0$.
2) $\mathbb{E}K(t) = \mathbb{D}K(t) = \lambda t$ для любых $t \geq 0$.
3) Корреляционная функция $R_K(t, s) = \lambda \min(t, s)$ для любых $t, s \geq 0$.
4) $\mathbb{P}(K(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ для любых $t \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
5) $\mathbb{P}(K(t) - K(s) = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$ для любых $t > s \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
6) Так как для любых $t > s \geq 0$ приращение $K(t) - K(s) \in \mathrm{Po}(\lambda(t - s))$ неотрицательно и может принимать лишь значения $0, 1, 2, \ldots$, то траектории пуассоновского процесса – неубывающие кусочно-постоянные функции. Эти функции начинаются в нуле, так как $K(0) = 0$ п.в., и испытывают прыжки (скачки́) вверх в случайные моменты времени.

Задача 3. Пусть $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ – положения всех скачков пуассоновского процесса с интенсивностью λ. «Проредим» эту последовательность, оставляя каждую точку независимо от остальных лишь с вероятностью $p \in (0, 1)$. Доказать, что полученная последовательность скачков соответствует другому пуассоновскому процессу, и найти интенсивность этого процесса.

Решение. Пусть $K(t)$ обозначает исходный пуассоновский процесс, а $N(t)$ – новый процесс. По построению точку 0 мы не трогали, так что $N(0) = K(0) = 0$ п.н. Докажем теперь, что приращение $N(t) - N(s)$ при $t > s \geq 0$ имеет распределение Пуассона и найдем параметр этого распределения. Введем обозначения $\Delta_{s,t}N = N(t) - N(s)$ и $\Delta_{s,t}K = K(t) - K(s)$. По формуле полной вероятности

$$\mathbb{P}(\Delta_{s,t}N = k) = \sum_{m=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\Delta_{s,t}N = k \mid \Delta_{s,t}K = m)\mathbb{P}(\Delta_{s,t}K = m).$$

Событие $\{\Delta_{s,t}K = m\}$ означает, что на интервале $[s,t]$ пуассоновский процесс совершил ровно m скачков, а событие $\{\Delta_{s,t}N = k\}$ значит, что только k из них осталось после прореживания. Каждый из m скачков мы независимо друг от друга и от процесса $K(t)$ оставляем с вероятностью p. Введем независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_m$ из распределения $\mathrm{Be}(p)$, которые будут означать следующее: $\xi_i = 1$, если i-й скачок остался, и $\xi_i = 0$, если его не было. Тогда суммарное число скачков, оставшихся после прореживания, равно $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_m \in$ $\in \mathrm{Bi}(m,p)$. Поэтому

$$\mathbb{P}(\Delta_{s,t}N = k \mid \Delta_{s,t}K = m) = \mathbb{P}(\xi = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}.$$

Введем обозначение $\Delta t = t - s$ и подставим выражение выше в сумму

$$\sum_{m=k}^{+\infty} C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \frac{(\lambda\Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda\Delta t} =$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k} \frac{(\lambda\Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda\Delta t} =$$

$$= \frac{p^k (\lambda\Delta t)^k e^{-\lambda\Delta t}}{k!} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{m-k}(\lambda\Delta t)^{m-k}}{(m-k)!} =$$

$$= \frac{(\lambda p\Delta t)^k e^{-\lambda\Delta t}}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m(\lambda\Delta t)^m}{m!} =$$

$$= \frac{(\lambda p\Delta t)^k e^{-\lambda\Delta t}}{k!} e^{(1-p)\lambda\Delta t} = \frac{(\lambda p\Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda p\Delta t}.$$

Мы получили, что $N(t) - N(s) \in \mathrm{Po}(\lambda p(t-s))$.

Докажем теперь независимость приращений процесса $N(t)$. Для этого возьмем моменты времени $0 \le t_1 < \dots < t_n$ и рассмотрим вероятность

$$\mathbb{P}(\Delta_{0,t_1}N = k_1, \Delta_{t_1,t_2}N = k_2, \dots, \Delta_{t_{n-1},t_n}N = k_n) = \\ = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\Delta_{t_{i-1},t_i}N = k_i\}\right).$$

Совершенно аналогично применим формулу полной вероятности, обусловив по приращениям исходного пуассоновского процесса:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\Delta_{t_{i-1},t_i}N = k_i\}\right) =$$

$$= \sum_{m_1=k_1}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=k_n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\Delta_{t_{i-1},t_i}N = k_i\} \mid \bigcap_{i=1}^{n}\{\Delta_{t_{i-1},t_i}K = m_i\}\right) \times \\ \times \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\Delta_{t_{i-1},t_i}K = m_i\}\right).$$

Теперь введем случайные величины $\xi_{t,s}$, равные количеству удаленных из пуассоновского процесса $K(t)$ скачков на интервале $[t, s]$. Тогда выражение выше равно

$$\sum_{m_1=k_1}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=k_n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{t_{i-1},t_i} = m_i - k_i\}\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{\Delta_{t_{i-1},t_i}K = m_i\}\right).$$

Воспользуемся тем, что числа удаленных скачков на разных интервалах независимы в совокупности и приращения пуассоновского процесса независимы в совокупности. Выражение выше будет равно

$$\sum_{m_1=k_1}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=k_n}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\xi_{t_{i-1},i} = m_i - k_i\right) \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i}K = m_i\right).$$

Теперь вернемся к терминам исходного и нового процессов:

$$\sum_{\substack{m_1=k_1 \\ \dots \\ m_n=k_n}}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i}N = k_i \mid \Delta_{t_{i-1},t_i}K = m_i\right) \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i}K = m_i\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \sum_{m_i=k_i}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i} N = k_i \mid \Delta_{t_{i-1},t_i} K = m_i\right) \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i} K = m_i\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i} N = k_i\right).$$

Итак, мы получили, что

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\Delta_{t_{i-1},t_i} N = k_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\Delta_{t_{i-1},t_i} N = k_i\right),$$

что и означает независимость в совокупности приращений нового процесса.

Принимая во внимание все вышесказанное, заключаем, что по определению процесс $N(t)$ является пуассоновским процессом с интенсивностью λp.

Замечание. Процесс $N(t)$ в этой задаче можно записать в виде:

$$N(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} \xi_k,$$

где $\xi_k \in \mathrm{Be}(p)$ – независимые между собой и с процессом $K(t)$ случайные величины. Вообще такие процессы с произвольными ξ_k называются *сложными пуассоновскими процессами*, в литературе они хорошо изучены. В нашем случае сложный пуассоновский процесс $N(t)$ оказался обычным пуассоновским процессом, но для произвольных случайных величин ξ_k это может оказаться не так.

Эту задачу можно было решать и другим способом. Можно было бы найти характеристическую функцию сложного пуассоновского процесса $N(t)$ и обнаружить ее совпадение с характеристической функций пуассоновского процесса интенсивности λp. В общем случае, конечно, равенство характеристических функций процессов не влечет совпадение n-мерных распределений, однако в нашем случае это действительно так и одномерное распределение однозначно определяет многомерные распределения! Дело в том, что у пуассоновского и сложного пуассоновского процессов независимые приращения и распределение этих приращений зависит только от разности моментов времени, в которые взяты сечения, а для таких процессов можно доказать, что одномерные распределения определяют многомерные.

5. Винеровский процесс

Определение. Случайная функция $\{w(t), t \geq 0\}$ называется *винеровским процессом*, если она удовлетворяет условиям:

1) $w(0) = 0$ почти всюду.
2) $w(t)$ – процесс с независимыми приращениями.
3) Для любых $t, s \geq 0$ выполнено $w(t) - w(s) \in \mathrm{N}(0, |t-s|)$.

Задача 1. Для винеровского процесса $w(t)$, $t \geq 0$, вычислить для $t, s \geq 0$:

$$\mathbb{E}w^2(t)w(s),\ \mathbb{E}w^2(t)w^2(s).$$

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся теоремой Вика. Заметим, что вектор $(w(t), w(t), w(s))$ является нормальным случайным вектором, так как винеровский процесс является нормальным, причем с нулевым математическим ожиданием. Кроме того, в выражении $w^2(t)w(s)$ нечетное число множителей. По теореме Вика это значит, что $\mathbb{E}w^2(t)w(s) = 0$.

Далее, вектор $(w(t), w(t), w(s), w(s))$ тоже является нормальным вектором с нулевым математическим ожиданием. Если обозначить $(w(t), w(t), w(s), w(s)) = (X_1, X_2, X_3, X_4) = X$, то по теореме Вика

$$\mathbb{E}X_1X_2X_3X_4 = R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} + R_{14}R_{23},$$

где $R_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$. В нашем случае

$$R_{12} = \mathrm{cov}(w(t), w(t)) = t,\ R_{34} = \mathrm{cov}(w(s), w(s)) = s,$$

$$R_{13} = \mathrm{cov}(w(t), w(s)) = R_w(t, s) = \min(t, s) = R_{24} = R_{14} = R_{23},$$

Итак, получается, что

$$\mathbb{E}w^2(t)w^2(s) = ts + 2\min^2(t, s).$$

Иногда в задачах удобно воспользоваться тем, что все (по исходам) траектории винеровского процесса всюду (по времени) непрерывны. Откуда это следует? На первой лекции была сформулирована теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации случайного процесса, то есть о существовании процесса с семейством конечномерных распределений, соответствующих данному случайному процессу, но при этом со всеми непрерывными траекториями.

Теорема Колмогорова существования непрерывной модификации*. *Пусть* $\{\xi(t),\ t \in T\}$ *– случайный процесс и* $T = [a, b]$.

Если существуют $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $c < \infty$, такие, что при всех t, $t + h \in [a, b]$ выполнено неравенство

$$\mathbb{E}\,|\xi(t+h) - \xi(t)|^{\alpha} \leq c|h|^{1+\beta},$$

то $\xi(t)$ имеет непрерывную модификацию.

Задача 2. Доказать, что винеровский процесс имеет непрерывную модификацию на любом отрезке времени.

Решение. Возьмем произвольный отрезок $[a, b]$ и произвольные $t, t+h$ из этого отрезка. Подберем $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $c < \infty$ такие, чтобы

$$\mathbb{E}|w(t+h) - w(t)|^{\alpha} \leq c|h|^{1+\beta}.$$

Возьмем $\alpha = 4$, тогда

$$\mathbb{E}|w(t+h) - w(t)|^{4} = \mathbb{E}w^4(h) = 3h^2,$$

эта формула была выведена из теоремы Вика еще на лекции. Но тогда достаточно взять $c = 3$, $\beta = 1$ и воспользоваться теоремой Колмогорова.

Задача 3. Пусть $\{X(t), t \geq 0\}$ – это процесс с независимыми приращениями. Доказать, что для любых моментов времени $t > t_0 \geq 0$ случайная величина $X(t) - X(t_0)$ не зависит $\sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq t_0\}$, то есть что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $C \in \sigma\{X(s) : : 0 \leq s \leq t_0\}$:

$$\mathbb{P}(\{X(t) - X(t_0) \in B\} \cap C) = \mathbb{P}(X(t) - X(t_0) \in B)\mathbb{P}(C).$$

Комментарий. По-бытовому говоря, это значит, что события, связанные с приращением $X(t) - X(t_0)$, не зависят от событий, связанных с процессом до момента t_0. В качестве процесса $X(t)$ могут выступать, например, винеровский или пуассоновский процессы.

Решение. Брать по произвольному множеству B и C из сигма-алгебр и проверять для них указанное равенство довольно проблематично. Мы поступим следующим образом. Во-первых, заметим, что $X(t) - X(t_0)$ не зависит от случайного вектора из приращений

$$(X(s_1), X(s_2) - X(s_1), \ldots, X(s_n) - X(s_{n-1})),\ s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t_0,$$

так как $X(t)$ – процесс с независимыми приращениями. Отсюда следует, что независимы и любые функции от $X(t) - X(t_0)$ и этого вектора. Например, независимыми получаются $X(t) - X(t_0)$ и вектор

$$(X(s_1), X(s_2), \ldots, X(s_n)),$$

потому что такой вектор получается просто в результате линейного преобразования над вектором из приращений. Но дело в том, что сигма-алгебра $\sigma\{X(s) : 0 \le s \le t_0\}$ порождена событиями, связанными с векторами из сечений процесса на интервале $[0, t_0]$. Из теории вероятностей[1] известно, что тогда $X(t) - X(t_0)$ не зависит и от элементов сигма-алгебры $\sigma\{X(s) : 0 \le s \le t_0\}$.

Задача 4. Доказать, что при $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{u\in[0,t]} w(u) \ge x\right) = 2\mathbb{P}\left(w(t) \ge x\right).$$

Найти плотность распределения $\tau(x) = \inf\{t : w(t) = x\}$.

Решение. Сначала применим формулу полной вероятности:

$$\mathbb{P}(w(t) \ge x) = \int\limits_0^t \mathbb{P}(w(t) \ge x|\tau(x) = y) f_{\tau(x)}(y)dy =$$

$$= \int\limits_0^t \mathbb{P}(w(t) - w(y) \ge 0|\tau(x) = y) f_{\tau(x)}(y)dy.$$

Теперь нужно заметить, что величина $w(t) - w(y)$ касается будущего процесса (после момента времени y), его приращения на интервале времени $[y, t]$, а условие $\tau(x) = y$ касается только прошлого процесса, то есть связано только со случайными величинами $w(u)$ на интервале $0 \le u \le t$. Принимая во внимание предыдущую задачу и тот факт, что винеровский процесс – это процесс с независимыми приращениями, хочется заключить, что $\{w(t) - w(y) \ge 0\}$ и $\{\tau(x) = y\}$ независимы и условие убрать. Так оно и есть, нужно только доказать, что $\{\tau(x) = y\}$ является *событием* в строгом смысле слова, то есть элементом сигма-алгебры $\sigma\{w(u) : 0 \le u \le y\}$. Это несложно показать.

Введем обозначение $\hat{w}(t) = \max\limits_{u\in[0,t]} w(u)$ и заметим, что

$$\{\tau(x) = y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\hat{w}\left(y - \frac{1}{n}\right) < x, w(y) = x\right\}.$$

Учтем, что винеровский процесс имеет непрерывные траектории (см. задачу 2), поэтому для любого y

$$\{\hat{w}(y) > x\} = \bigcup_{p\in\mathbb{Q}\cap[0,y]} \{w(p) > x\} \in \sigma\{w(s), 0 \le s \le y\}$$

[1] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. С. 20.

и, следовательно, по определению сигма-алгебры,

$$\{\hat{w}(y) \le x\} \in \sigma\{w(s), 0 \le s \le y\},$$

$$\left\{\hat{w}\left(y - \frac{1}{n}\right) < x\right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\hat{w}\left(y - \frac{1}{n}\right) \le x - \frac{1}{m}\right\} \in \sigma\{w(s), 0 \le s \le y\}.$$

В результате получаем, что $\{\tau(x) = y\}$ представляет собой счетное пересечение событий, связанных с сечениями $w(s)$ при $s \le y$ (значит, оно лежит в сигма-алгебре $\sigma\{w(s), 0 \le s \le y\}$). Но тогда при $t > y$ приращение $w(t) - w(y)$ не зависит от $\sigma\{w(s), 0 \le s \le y\}$, поэтому событие $\{w(t) - w(y) \ge 0\}$ не зависит от события $\{\tau(x) = y\}$. Значит,

$$\mathbb{P}(w(t) - w(y) \ge 0 | \tau(x) = y) = \mathbb{P}(w(t) - w(y) \ge 0) = \frac{1}{2}$$

и тогда

$$\mathbb{P}(w(t) \ge x) = \frac{1}{2}\int_0^t f_{\tau(x)}(y)dy = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau(x) \le t) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\hat{w}(t) \ge x),$$

откуда и следует доказываемое утверждение. Теперь выпишем функцию распределения случайной величины $\tau(x)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau(x) \le t) &= 2\mathbb{P}(w(t) \ge x) = \\ &= 2\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)dy = \\ &= 2\int_{x/\sqrt{t}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz.\end{aligned}$$

Остается вычислить производную по t, чтобы найти плотность:

$$f_{\tau(x)}(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{x}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),\ t > 0.$$

Графики функции $f_{\tau(x)}(t)$ при различных x изображены на рис. 2.

Замечание. Аналогично можно показать, что момент $\tau(x)$ первого пересечения винеровским процессом уровня $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеет плотность распределения

$$f_{\tau(x)}(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{|x|}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),\ t > 0.$$

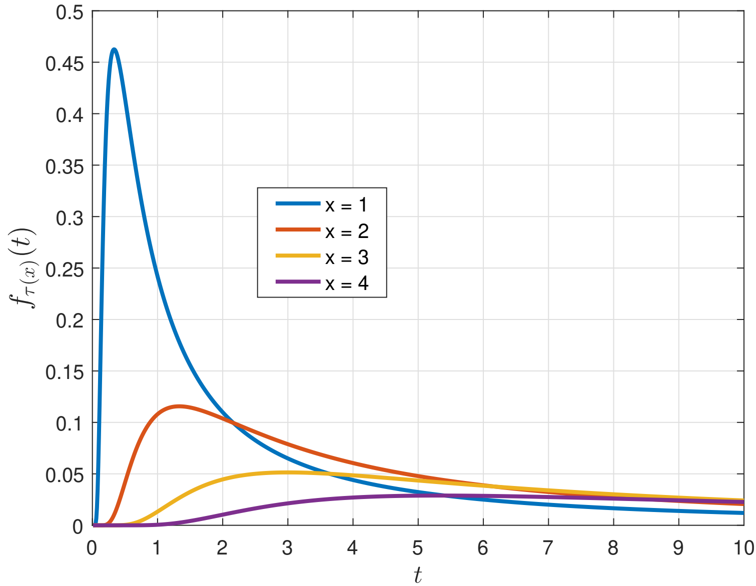
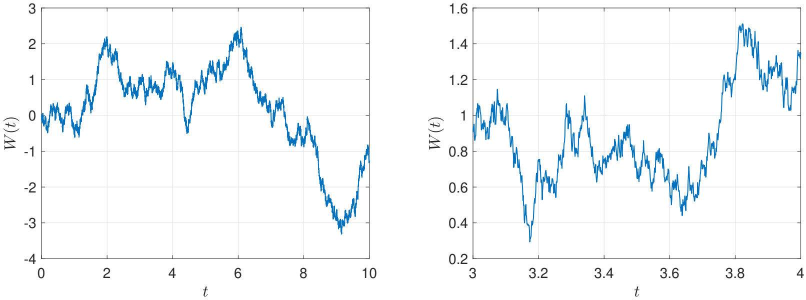


Рис. 2. График плотности случайной величины $\tau(x)$ при различных x; максимум достигается при $t = x^2/3$

Отметим также, что $\mathbb{P}(\tau(x) < \infty) = 1$. Это значит, что при любом $x > 0$ траектория процесса рано или поздно (с вероятностью 1) пересечет уровень x. Среднего у $\tau(x)$, тем не менее, не существует, так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t f_{\tau(x)}(t)dt$ расходится.

Вид траекторий. Типичная траектория винеровского процесса изображена на рис. 3а и 3б (строго говоря, здесь изображены траектории случайных блужданий для большого n, см. Лекцию 3 и утверждение о сходимости случайных блужданий к винеровскому процессу). А на рис. 4 показаны 1000 реализаций процесса. Хорошо видно, что они с большой вероятностью попадают в область между графиками функций $y = \pm 3\sqrt{t}$, которые отвечают правилу трех сигм нормального распределения: если $\xi \in \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, то $\mathbb{P}(-3\sigma \le \xi \le 3\sigma) \approx 0.9973$. В нашем случае $\xi = w(t)$, $\sigma^2 = t$.



(а) (б)

Рис. 3. Пример траектории винеровского процесса на а) интервале $t \in [0, 10]$ и б) интервале $t \in [3, 4]$

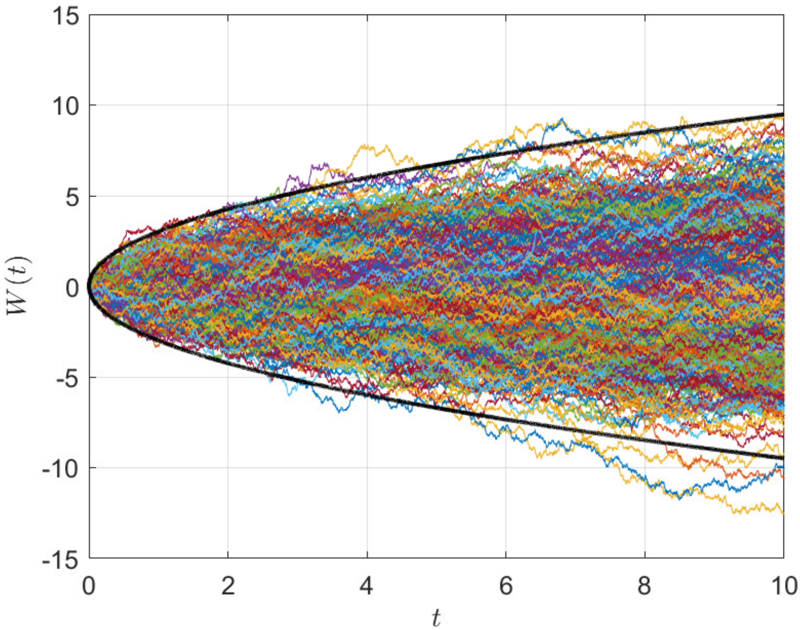


Рис. 4. Реализации винеровского процесса с вероятностью приблизительно 99.7% попадают в область между графиками функций $y = \pm 3\sqrt{t}$

6. Стохастический анализ

В этом разделе мы коснемся свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов по отношению ко времени. Каждое из этих свойств опирается на понятие *предела*. Так как случайные процессы $X = X(\omega, t)$ зависят от двух переменных (исхода и времени), то предел по времени можно определить по-разному в зависимости от того, как он относится к исходу. В теории вероятностей выделяют несколько видов пределов/сходимостей.

1) Говорят, что случайный процесс $X = X(t)$ сходится к случайной величине X_0 *в среднем квадратичном* при $t \to t_0$, если

$$\mathbb{E}(X(t) - X_0)^2 \to 0,\ t \to t_0.$$

При этом пишут $X(t) \xrightarrow{\text{с.к.}} X_0,\ t \to t_0$. Будем называть это с.к.-сходимостью.

2) Говорят, что случайный процесс $X = X(t)$ сходится к случайной величине X_0 *почти наверное* (или *почти всюду*) при $t \to t_0$, если

$$\mathbb{P}(\omega :\ X(\omega, t) \to X_0(\omega),\ t \to t_0) = 1.$$

При этом пишут $X(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} X_0,\ t \to t_0$. Будем называть это п.н.-сходимостью.

3) Говорят, что случайный процесс $X = X(t)$ сходится к случайной величине X_0 *по вероятности* при $t \to t_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \mathbb{P}(|X(t) - X_0| > \varepsilon) \to 0,\ t \to t_0.$$

При этом пишут $X(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} X_0, t \to t_0$. Будем называть это $\mathbb{P}$-сходимостью.

4) Говорят, что случайный процесс $X = X(t)$ сходится к случайной величине X_0 *по распределению* при $t \to t_0$, если в каждой точке непрерывности функции распределения $F_{X_0}(x)$

$$F_{X(t)}(x) \to F_{X_0}(x),\ t \to t_0.$$

При этом пишут $X(t) \xrightarrow{d} X_0, t \to t_0$. Будем называть это d-сходимостью.

Вспомним, что сходимость в среднем квадратичном влечет сходимость по вероятности, причем – к тому же самому пределу. Сходимость почти наверное тоже влечет сходимость по вероятности, к тому же самому пределу. Сходимость по вероятности влечет сходимость по распределению, к тому же самому пределу.

Кроме того, сходимость по распределению к неслучайной величине (то есть не зависящей от исхода) влечет сходимость по вероятности к тому же пределу. А еще сходимость по распределению равносильна поточечной сходимости характеристических функций:

$$\varphi_{X(t)}(s) \to \varphi_{X_0}(s),\ t \to t_0$$

в каждой точке $s \in \mathbb{R}$.

На рис. 5 показана диаграмма сходимостей и следствий из них.

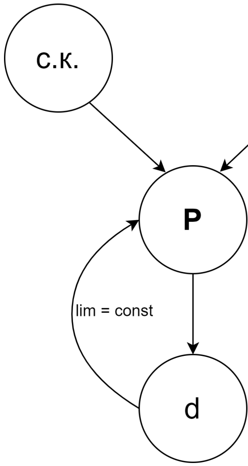


Рис. 5. Диаграмма сходимостей

Для каждого из этих четырех видов сходимости можно ввести свой вид непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайного процесса. На лекции эти понятия введены для случая с.к.-сходимости. Чтобы определить другие виды непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, нужно всюду вместо «с.к.» подставить «п.н.», «$\mathbb{P}$» или «d».

Определение. Процесс $\{X(t), t \in T\}$ называется *с.к.-непрерывным* (*непрерывным в среднеквадратическом смысле*) в точке $t_0 \in T$, если

$$X(t_0 + \varepsilon) \xrightarrow{\text{с.к.}} X(t_0),\ \varepsilon \to 0,$$

то есть, по определению с.к.-предела,

$$\mathbb{E}(X(t_0 + \varepsilon) - X(t_0))^2 \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Критерий с.к.-непрерывности. *Процесс $\{X(t), t \in T\}$ с.к.-непрерывен в точке $t_0 \in T$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) *Функция* $\mathbb{E}X(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

2) *Функция* $R_X(t,s)$ *непрерывна в точке* (t_0, t_0).

Определение. Процесс $\{X(t), t \in T\}$ называется *с.к.-дифференцируемым* в точке $t_0 \in T$, если существует случайная величина η такая, что

$$\frac{X(t_0+\varepsilon) - X(t_0)}{\varepsilon} \xrightarrow{\text{с.к.}} \eta, \ \varepsilon \to 0.$$

Случайная величина η называется *с.к.-производной процесса* $X(t)$ *в точке* t_0 и обозначается $\eta = X'(t_0)$.

Критерий с.к.-дифференцируемости. *Процесс* $\{X(t), t \in T\}$ *с.к.-дифференцируем в точке* $t_0 \in T$ *тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) *Функция* $\mathbb{E}X(t)$ *дифференцируема в точке* t_0.

2) *Существует конечный предел*

$$\lim_{\delta,\varepsilon \to 0} \frac{1}{\delta\varepsilon}(R_X(t_0+\delta, t_0+\varepsilon) - R_X(t_0+\delta, t_0) - \\ - R_X(t_0, t_0+\varepsilon) + R_X(t_0,t_0)).$$

Замечание 1. Предел из пункта 2, если существует и конечен, называется в литературе также *обобщенной смешанной производной* (к обобщенным функциям она отношение не имеет!). Из существования обобщенной смешанной производной следует существование и обычных смешанных производных. Достаточным условием пункта 2 является непрерывность хотя бы одной из смешанных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R_X(t,s)}{\partial s}\right) \text{ или } \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial R_X(t,s)}{\partial t}\right).$$

Определение. Пусть процесс $\{X(t), t \in T\}$ определен на отрезке $[a,b] \subseteq T$. На отрезке $[a,b]$ построим некоторое разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, и на каждом из промежутков этого разбиения выберем произвольную точку $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, n$. Если при $n \to \infty$ и $\max\limits_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$ существует предел в среднеквадратическом

$$\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{\text{с.к.}} \eta, \ \mathbb{E}\eta^2 < \infty,$$

не зависящий от разбиения $\{t_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$, то процесс $X(t)$ называется *с.к.-интегрируемым по Риману на* $[a,b]$, а случайная величина η называется его *с.к.-интегралом Римана* на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\eta = \int\limits_a^b X(t)\, dt.$$

Критерий с.к.-интегрируемости по Риману. *Случайный процесс $\{X(t), t \in T\}$ с.к.-интегрируем по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существуют конечные интегралы Римана:*

$$\int\limits_a^b \mathbb{E}X(t)\, dt, \qquad \int\limits_a^b \int\limits_a^b R_X(t, s)\, dtds.$$

Замечание 2. Если процесс является с.к.-дифференцируемым в точке, то он является с.к.-непрерывным в той же точке. Если процесс с.к.-непрерывен в каждой точке некоторого отрезка, то он является с.к.-интегрируемым на этом отрезке.

Замечание 3. П.н.-производная, если существует, вычисляется проще всего: нужно взять процесс $X(\omega, t)$, зафиксировать ω и продифференцировать его по t. Например, п.н.-производная процесса $X(\omega, t) = \eta(\omega)t$ существует и совпадает почти наверное со случайной величиной $\eta(\omega)$. У процесса

$$X(\omega, t) = A(\omega) \sin(B(\omega)t + \varphi(\omega))$$

очевидно существует п.н.-производная, она равна

$$X(\omega, t) = A(\omega)B(\omega) \cos(B(\omega)t + \varphi(\omega))$$

всюду, а не только почти наверное. В общем случае п.н.-производная не обязана совпадать с с.к.-производной. Но если п.н.-производная и с.к.-производные существуют, то они почти наверное совпадают, просто потому что они обе обязаны быть равны $\mathbb{P}$-производной. Все, что сказано выше, аналогично переносится и на п.н.- и с.к.-интегралы.

Задача. Исследовать винеровский процесс $W(t), t \geq 0$, на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость во всех смыслах.

Решение.

1) Начнем со свойства непрерывности. Математическое ожидание $\mathbb{E}W = 0$ является константой и поэтому – непрерывной функцией времени. Корреляционная функция $R_W(t, s) = \min(t, s)$ является всюду непрерывной функцией двух переменных. Согласно критерию с.к.-непрерывности, винеровский процесс является с.к.-непрерывным

в каждой точке. Значит, согласно диаграмме на рис. 5, процесс является $\mathbb{P}$-непрерывным и d-непрерывным в каждой точке. Так как у винеровского процесса существует непрерывная модификация (см. предыдущий раздел), то можно считать, что этот процесс является и п.н.-непрерывным в каждой точке.

2) Перейдем к свойству интегрируемости на отрезке. Так как винеровский процесс является с.к.-непрерывным в любой точке, он является с.к.-интегрируемым на любом отрезке. Согласно диаграмме на рис. 5, процесс является $\mathbb{P}$-интегрируемым и d-интегрируемым на любом отрезке. Так как почти все траектории этого процесса непрерывные, то на любом отрезке они интегрируемые. Значит, винеровский процесс является п.н.-интегрируемым на любом отрезке.

3) Разберемся, наконец, с дифференцируемостью процесса. Покажем сначала, что процесс не является с.к.-дифференцируемым ни в какой точке, так как не выполнен п. 2 критерия с.к.-дифференцируемости. А именно, возьмем произвольную точку t_0 и рассмотрим предел

$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0}\frac{1}{\delta\varepsilon}\left(R_w(t_0+\delta,t_0+\varepsilon)-R_w(t_0+\delta,t_0)-R_w(t_0,t_0+\varepsilon)+R_w(t_0,t_0)\right).$$

В нашем случае $R_w(t,s)=\min(t,s)=(t+s-|t-s|)/2$, поэтому данный предел равен пределу

$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0}\frac{|\varepsilon|+|\delta|-|\delta-\varepsilon|}{2\delta\varepsilon}.$$

Конечный предел не существует, так как при $\varepsilon=\delta>0$ он равен $+\infty$. На самом деле винеровский процесс не является дифференцируемым ни в каком из четырех смыслов! Для этого достаточно показать, что он не является дифференцируемым в d-смысле, потому что согласно диаграмме 5 отсутствие d-сходимости влечет отсутствие всех других видов сходимости.

d-дифференцируемость процесса $W(t)$ в точке t_0 означает существование предела

$$F_{\frac{W(t_0+\varepsilon)-W(t_0)}{\varepsilon}}(x)\to F_\eta(x)$$

для некоторой случайной величины η во всех точках непрерывности ее функции распределения $F_\eta(x)$. Этот вид сходимости равносилен поточечной сходимости характеристических функций

$$\varphi_{\frac{W(t_0+\varepsilon)-W(t_0)}{\varepsilon}}(s)\to\varphi_\eta(s)$$

в каждой точке $s \in \mathbb{R}$. Теперь вспомним, что $W(t_0+\varepsilon)-W(t_0) \in \mathrm{N}(0,|\varepsilon|)$, и тогда $(W(t_0+\varepsilon)-W(t_0))/\varepsilon \in \mathrm{N}(0,1/|\varepsilon|)$, откуда

$$\varphi_{\frac{W(t_0+\varepsilon)-W(t_0)}{\varepsilon}}(s) = \varphi_{\mathrm{N}(0,1/|\varepsilon|)}(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{2|\varepsilon|^2}\right),\ s \in \mathbb{R}.$$

При $s = 0$ эта функция равна 1. Если же $s \neq 0$, то она сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, предельная функция получается такая:

$$\varphi_\eta = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Это разрывная в нуле функция, она не может быть характеристической функцией ни для какой случайной величины η, потому что характеристические функции – непрерывные (и даже равномерно непрерывные) на $\mathbb{R}$ функции. Итак, мы доказали отсутствие d-дифференцируемости винеровского процесса в произвольной точке. Отсюда следует, что он не является дифференцируемым ни в каком другом смысле ни в какой точке.

З а д а ч а. Исследовать пуассоновский процесс $K(t), t \geq 0$, на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость во всех смыслах.

Р е ш е н и е.

1) Начнем с непрерывности. Математическое ожидание $\mathbb{E}K(t) = \lambda t$ является всюду непрерывной функцией. Корреляционная функция $R_K(t,s) = \lambda \min(t,s)$ тоже является всюду непрерывной функцией двух переменных. Согласно критерию с.к.-непрерывности, пуассоновский процесс является с.к.-непрерывным в любой точке. Отсюда следует, что он является $\mathbb{P}$-непрерывным и d-непрерывным в любой точке. Известно, что почти все (по исходам) траектории пуассоновского процесса не являются всюду (по времени) непрерывными функциями, так как процесс испытывает скачки в некоторые случайные моменты времени, причем хотя бы первый скачок обязательно наступит, так как $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ для момента первого скачка $\tau_1 \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. Это значит, что пуассоновский процесс не является п.н.-непрерывным на множестве $t \geq 0$. Однако легко показать, что он является п.н.-непрерывным в любой точке множества $t \geq 0$. Действительно, зафиксируем точку $t_0 \geq 0$ и запишем условие, которые мы хотим доказать:

$$\mathbb{P}(\omega:\ K(\omega,t) \to K(\omega,t_0),\ t \to t_0) = 1.$$

Другими словами, мы хотим доказать, что мера множества исходов, для которых траектории непрерывны в фиксированной точке t_0, равна 1. Траектории испытывают разрыв в точке t_0, только если она совпадает с каким-нибудь моментом скачка, то есть только на тех исходах ω, для которых $\tau_1(\omega) = t_0$, или $\tau_2(\omega) = t_0$, или $\tau_3(\omega) = t_0$ и так далее. Это множество исходов можно записать так:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega : \ \tau_k(\omega) = t_0\}.$$

Вероятность этого события не превосходит сумму вероятностей событий $\tau_k(\omega) = t_0$. Но вероятности этих событий равны нулю, потому что случайные величины τ_k имеют абсолютно непрерывное распределение (распределение Эрланга, см. раздел 4). Так что мера множества исходов, для которых пуассоновский процесс непрерывен в точке t_0, равна единице, это и означает п.н.-непрерывность процесса в точке t_0. Как и винеровский процесс, пуассоновский процесс является непрерывным в любой точке в любом из четырех смыслов. У винеровского процесса свойство непрерывности более сильное – его траектории п.н.-непрерывны не просто в любой точке $t \geq 0$, но и на любом отрезке.

2) Так как процесс является с.к.-непрерывным в любой точке, то он является с.к.-интегрируемым на любом отрезке. Отсюда следует, что он является и $\mathbb{P}$-интегрируемым, и d-интегрируемым на любом отрезке. Теперь докажем, что процесс является п.н.-игрегрируемым на любом отрезке. Для этого достаточно заметить, что на любом отрезке у пуссоновского процесса с вероятностью 1 происходит только конечное число прыжков, а все такие траектории интегрируемы по Риману. Чтобы показать конечность числа прыжков на любом отрезке, достаточно доказать, что ряд из сумм интервалов между прыжками расходится п.н., то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \infty, \ \xi_k \in \mathrm{Exp}(\lambda).$$

Для этого заметим, что

$$\mathbb{E} \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \exp(-\xi_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (1/\lambda)} = 0,$$

откуда и следует расходимость ряда из ξ_k почти наверное.

3) Перейдем к свойству дифференцируемости. Корреляционная функция процесса $R_K(t, s) = \lambda \min(t, s)$ не имеет обобщенную смешанную производную (как было показано еще в предыдущей задаче), поэтому пункт 2 критерия с.к.-дифференцируемости не выполнен. Значит, этот процесс не является с.к.-дифференцируемым ни в какой точке.

Исследуем теперь процесс на d-дифференцируемость. Для этого выясним, к чему поточечно сходится характеристическая функция от $(K(t_0+\varepsilon)-K(t_0))/\varepsilon$. Вспомним, что $K(t_0+\varepsilon)-K(t_0)=\xi_\varepsilon\in\mathrm{Po}(\lambda\varepsilon)$ для $\varepsilon>0$. Для $\varepsilon<0$ будет $K(t_0+\varepsilon)-K(t_0)=-\xi_{|\varepsilon|}$. В общем случае

$$\mathrm{sign}(\varepsilon)(K(t_0+\varepsilon)-K(t_0))\in\mathrm{Po}(\lambda|\varepsilon|).$$

Далее,

$$\varphi_{\frac{K(t_0+\varepsilon)-K(t_0)}{\varepsilon}}(s)=\varphi_{K(t_0+\varepsilon)-K(t_0)}(s/\varepsilon)=$$
$$=\varphi_{\mathrm{sign}(\varepsilon)(K(t_0+\varepsilon)-K(t_0))}(\mathrm{sign}(\varepsilon)s/\varepsilon)=$$
$$=\varphi_{\mathrm{Po}(\lambda|\varepsilon|)}(\mathrm{sign}(s/|\varepsilon|)=\exp\left(\lambda|\varepsilon|\left(e^{is/|\varepsilon|}-1\right)\right),\ s\in\mathbb{R}.$$

Если $s=0$, это выражение равно 1. Если $s\neq 0$, то при $\varepsilon\to 0$ мы имеем произведение бесконечно малой $\lambda|\varepsilon|$ на ограниченную функцию $e^{is/|\varepsilon|}-1$. Предел такого произведения равен нулю. Значит, все выражение стремится к 1. Получается, что для любого $s\in\mathbb{R}$ это выражение сходится поточечно к 1. Такую характеристическую функцию имеет (не)случайная величина $\eta=0$. Итак, мы доказали, что пуассоновский процесс d-дифференцируем в любой точке и более того – его d-производная равна 0. Так как 0 – неслучайная величина, то согласно диаграмме на рис. 5 имеет место и $\mathbb{P}$-сходимость, то есть процесс является $\mathbb{P}$-дифференцируемым в любой точке. Кстати говоря, $\mathbb{P}$-дифференцируемость можно было показать и прямо: возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и тогда

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{K(t_0+\delta)-K(t_0)}{\delta}-0\right|>\varepsilon\right)=\mathbb{P}(\xi_{\mathrm{Po}(\lambda|\delta|)}>\varepsilon|\delta|),$$

где $\xi_{\mathrm{Po}(\lambda|\delta)}\in\mathrm{Po}(\lambda|\delta|)$ и мы в качестве $\mathbb{P}$-производной подставили 0. При малых δ получаем

$$\mathbb{P}(\xi_{\mathrm{Po}(\lambda|\delta|)}>\varepsilon|\delta|)=1-\mathbb{P}(\xi_{\mathrm{Po}(\lambda|\delta|)}=0)=1-e^{-\lambda|\delta|}\to 0,\delta\to 0,$$

что и означает по определению $\mathbb{P}$-дифференцируемость в любой точке t_0. Точно так же, как мы доказали п.н.-непрерывность пуассоновского процесса в произвольной точке, доказывается п.н.-дифференцируемость процесса в произвольной точке, потому что дифференцируемость нарушается только в моменты скачков, но множество исходов, для которых это случается, имеет меру ноль. Итак, пуассоновский процесс является дифференцируемым в произвольной точке в $\mathbb{P}$-, d- и п.н.-смыслах и не является дифференцируемым ни в какой точке в с.к.-смысле. Винеровский процесс – недифференцируем ни в какой точке ни в каком из четырех смыслов.

7. Эргодические случайные процессы

Примеры. Пуассоновский процесс $K(t)$ не является эргодическим, так как его математическое ожидание λt не постоянно. Винеровский процесс $W(t)$ имеет постоянное математическое ожидание, конечный второй момент $\mathbb{E}W^2(t) < \infty$ и с.к.-интегрируем на любом отрезке $[0,T]$. Но он все равно не является эргодическим, так как для его корреляционной функции $R_W(t,s) = \min(t,s)$ выражение

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T R_W(t,s)\,dtds = \frac{T}{3}$$

не стремится к нулю с ростом T. Поэтому винеровский процесс не эргодический.

Задача 1. Дан случайный процесс

$$S(t) = S(0)\exp\left(at + \sigma W(t)\right),\ t \geq 1,$$

где $S(0)$, a и $\sigma > 0$ – неслучайные постоянные величины, $W(t)$ – винеровский процесс. Воспользовавшись понятием эргодичности случайных процессов, оценить величину a.

Замечание. Если процесс $X(t)$ определен только при $t \geq t_0$, то под его эргодичностью понимают все то же самое, но все нижние пределы интегрирования в определении эргодичности и критерии эргодичности берутся равными t_0, а с.к.-интегрируемость требуется лишь на отрезках вида $[t_0,T]$, $T \geq t_0$. Множители перед интегралами можно оставить без изменения.

Решение. Сначала перейдем от процесса $S(t)$ к процессу

$$X(t) = \frac{1}{t}\ln\frac{S(t)}{S(0)} = a + \sigma\frac{W(t)}{t},\ t \geq 1.$$

Исследуем его на эргодичность по математическому ожиданию. Во-первых, заметим, что математическое ожидание процесса $\mathbb{E}X(t) = a$ постоянно. Корреляционная функция процесса

$$R_X(t,s) = \operatorname{cov}\left(a + \sigma\frac{W(t)}{t}, a + \sigma\frac{W(s)}{s}\right) = \sigma^2\operatorname{cov}\left(\frac{W(t)}{t}, \frac{W(s)}{s}\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{ts}\operatorname{cov}(W(t),W(s)) = \sigma^2\frac{R_W(t,s)}{ts} = \sigma^2\frac{\min(t,s)}{ts}$$

существует и определена всюду при $t, s \geq 1$. Функция $R_X(t,s)$ непрерывна на любом квадрате вида $[1,T] \times [1,T]$, $T > 1$, поэтому она интегрируема на любом таком квадрате. Из критерия с.к.-интегрируемости следует, что процесс $X(t)$ с.к.-интегрируем на любом отрезке вида $[1,T]$. Итак, все базовые предположения о кандидате в эргодические процессы выполнены.

Для исследования на эргодичность воспользуемся критерием эргодичности. Для этого просто заметим, что всегда $\min(t,s) \leq t$, поэтому

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T R_X(t,s)\,dtds = \frac{\sigma^2}{T^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T \frac{\min(t,s)}{ts}\,dtds \leq \frac{\sigma^2}{T^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T \frac{t}{ts}\,dtds =$$

$$= \sigma^2\frac{\ln T}{T^2}(T-1) \to 0,\ T \to +\infty.$$

Отсюда следует, что исходный процесс является эргодическим, поэтому

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T X(t)\,dt \xrightarrow{\text{с.к.}} a,\ T \to +\infty.$$

Если нам требуется на практике оценить параметр a, то мы можем попробовать наблюдать за одной траекторией $X(\omega_0, t)$ для того исхода ω_0, который реально реализовался, и ожидать того, чтобы для этого исхода

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T X(\omega_0,t)\,dt \to a.$$

Из закона повторного логарифма для винеровского процесса

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty}\sup\left|\frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}\right| = 1\right) = 1.$$

Предел под вероятностью равен единице для почти всех исходов. Естественно ожидать, что и для нашего наблюдаемого исхода ω_0 этот предел равен единице. Предположим, что это так, то есть

$$\lim_{t\to\infty}\sup\left|\frac{W(\omega_0,t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}\right| = 1.$$

Значит, найдется T_0 такой, что

$$|W(\omega_0,t)| \leq 2\sqrt{2t\ln\ln t},\ t \geq T_0.$$

Но тогда

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T \left(a+\sigma\frac{W(\omega_0,t)}{t}\right)dt = a+\frac{\sigma}{T}\int\limits_1^{T_0}\frac{W(\omega_0,t)}{t}\,dt+\frac{\sigma}{T}\int\limits_{T_0}^{T}\frac{W(\omega_0,t)}{t}\,dt,$$

и первые два слагаемые стремятся к a при $T\to\infty$. Последнее слагаемое оценивается так:

$$\left|\frac{\sigma}{T}\int\limits_{T_0}^{T}\frac{W(\omega_0,t)}{t}\,dt\right| \le \frac{\sigma}{T}\int\limits_{T_0}^{T}\left|\frac{W(\omega_0,t)}{t}\right|dt \le \frac{\sigma}{T}\int\limits_{T_0}^{T}\frac{2\sqrt{2t\ln\ln t}}{t}\,dt =$$

$$= \frac{\sigma}{T}\int\limits_{\ln T_0}^{\ln T} 2\sqrt{2e^{\tau}\ln\tau}\,d\tau \le \sigma\frac{\ln(T/T_0)}{T}2\sqrt{2T\ln\ln T}\to 0,\ T\to\infty.$$

Так что мы доказали, что искомый предел равен a. Все это справедливо вообще для всякого исхода, для которого верхний предел в законе повторного логарифма равен 1. Поэтому, по сути, мы доказали, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T X(t)\,dt \xrightarrow{\text{п.н.}} a,$$

что можно назвать п.н.-эргодичностью процесса $X(t)$.

8. Стационарные случайные процессы

Примеры. Является ли винеровский процесс $\{w(t), t\ge 0\}$ стационарным в каком-либо смысле? Нет, потому что его дисперсия $\mathbb{D}w(t)=t$ зависит от времени, так что нет ни узкой стационарности, ни широкой. Можно также заметить, что корреляционная функция $R_W(t,s)=\min(t,s)$ меняется, если к t и s прибавить одну и ту же величину τ. Является ли пуассоновский процесс $\{K(t), t\ge 0\}$ стационарным в каком-либо смысле? Тоже нет, так как $\mathbb{E}K(t)=\lambda t$ зависит от времени.

Задача 2. Пусть $\{w(t), t\ge 0\}$ – винеровский процесс. Показать, что процесс

$$\{Z(t)=w(t+a)-w(t),\ t\ge 0\}$$

при $a>0$ является стационарным в широком и узком смыслах.

Решение. Сначала вычисляем математическое ожидание процесса

$$\mathbb{E}Z(t) = \mathbb{E}w(t+a) - \mathbb{E}w(t) = 0 - 0 = 0$$

и убеждаемся, что оно не зависит от времени t. Теперь вычислим корреляционную функцию процесса

$$\begin{aligned} R_Z(t,s) &= \mathbb{E}Z(t)Z(s) - \mathbb{E}Z(t)\mathbb{E}Z(s) = \\ &= \mathbb{E}Z(t)Z(s) = \\ &= \mathbb{E}(w(t+a) - w(t))(w(s+a) - w(s)). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и воспользуемся тем, что $R_w(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$:

$$R_Z(t,s) = \min(t+a, s+a) - \min(t+a, s) - \min(t, s+a) + \min(t, s).$$

Теперь видно, что если к t и s прибавить произвольное число τ, то каждое слагаемое изменится на τ, а сумма не изменится. Отсюда следует, что процесс является стационарным в широком смысле.

Так как процесс $Z(t)$ является нормальным процессом (векторы его сечений – это линейные преобразования векторов сечений винеровского процесса, который является гауссовским), то из стационарности в широком смысле следует его стационарность в узком смысле.

Задача 3. Дан случайный процесс $Z(t) = A\cos(Bt + \varphi)$, $t \geq 0$, в котором A, B и φ являются случайными величинами, причем φ не зависит от A и B и распределено равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$. Про A и B известно, что они имеют совместную плотность распределения $f(a,b)$. Исследовать процесс $Z(t)$ на стационарность в узком смысле.

Решение. Возьмем произвольные $n \geq 1$ сечений процесса $Z(t)$ в моменты времени $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ и произвольный сдвиг по времени τ. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ есть функция распределения вектора $(Z(t_1), \ldots, Z(t_n))$, тогда стационарность в узком смысле означает, что

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau),$$

или, в терминах вероятности,

$$\mathbb{P}(Z(t_1) < x_1, \ldots, Z(t_n) < x_n) = \mathbb{P}(Z(t_1 + \tau) < x_1, \ldots, Z(t_n + \tau) < x_n).$$

Подставим выражение для $Z(t)$ и получим

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A\cos(Bt_1 + \varphi) < x_1, \ldots, A\cos(Bt_n + \varphi) < x_n) = \\ &\quad = \mathbb{P}(A\cos(Bt_1 + B\tau + \varphi) < x_1, \ldots, A\cos(Bt_n + B\tau + \varphi) < x_n). \end{aligned}$$

Обусловим полученные выражения по A и B:

$$\iint\limits_{(a,b)} \mathbb{P}(a\cos(bt_1+\varphi)<x_1,\dots,a\cos(bt_n+\varphi)<x_n)f(a,b)\,da\,db =$$

$$=\iint\limits_{(a,b)} \mathbb{P}(a\cos(bt_1+b\tau+\varphi)<x_1,\dots,a\cos(bt_n+b\tau+\varphi)<x_n)f(a,b)\,da\,db,$$

где интегралы берутся по всем $a, b \geq 0$. Чтобы интегралы были равны, *достаточно*, чтобы были равны при любых $a > 0$, $b > 0$ вероятности

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(a\cos(bt_1+\varphi)<x_1,\dots,a\cos(bt_n+\varphi)<x_n) = \\ =&\mathbb{P}(a\cos(bt_1+b\tau+\varphi)<x_1,\dots,a\cos(bt_n+b\tau+\varphi)<x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

В этом выражении a и b – это некоторые неслучайные величины, случайной же величиной является лишь $\varphi \in \mathrm{U}(0, 2\pi)$. Теперь заметим, что левая часть выражения (1) равна

$$\int\limits_I f_\varphi(y)dy = \frac{\lambda(I)}{2\pi},$$

где $f_\varphi(y)$ – плотность вероятности φ, множество

$$I = \{y \in [0, 2\pi] : a\cos(bt_1+y)<x_1,\dots,a\cos(bt_n+y)<x_n\},$$

а $\lambda(\cdot)$ – мера Лебега[2]. Аналогично, правую часть выражения (1) можно выразить через интеграл

$$\int\limits_{I'} f_\varphi(z)dz = \frac{\lambda(I')}{2\pi},$$

где множество

$$I' = \{z \in [0, 2\pi] : a\cos(bt_1+b\tau+z)<x_1,\dots,a\cos(bt_n+b\tau+z)<x_n\}.$$

Теперь заметим, что множества I и I' представляют собой объединение конечного числа непересекающихся интервалов на $[0, 2\pi]$. Далее, если $z \in I'$, то

$$(z + b\tau \mod 2\pi) \in I$$

[2]Про меру Лебега здесь достаточно знать, что $\lambda([p, q]) = q - p$ для любого интервала $[p, q]$ и что мера конечного или счетного объединения непересекающихся интервалов равна сумме мер этих интервалов.

Это преобразование сдвига сохраняет длины интервалов. Следовательно, меры Лебега множеств I и I' совпадают, то есть $\lambda(I) = \lambda(I')$. Это равносильно выполнению равенства (1), откуда следует равенство интегральных выражений и равенство функций распределения, что означает узкую стационарность процесса.

Задача 4. Построить примеры (не)стационарных и (не)эргодических процессов.

Решение.

1) Стационарный эргодический процесс: тривиальный пример – процесс $X(t) = \mathrm{const}$. Этот процесс является стационарным и в широком, и в узком смыслах. Нетривиальный пример процесса: нормальный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $R_X(t,s) = \exp(-|t-s|)$.

2) Стационарный неэргодический процесс: $X(t) = \xi \in \mathrm{N}(0,1)$. Векторы из сечений не зависят от времени, поэтому это стационарный в узком смысле процесс, кроме того, существует его второй момент, так что он стационарен и в широком смысле. Его неэргодичность очевидна из критерия эргодичности, так как $R_X(t,s) = \mathrm{const} \neq 0$.

3) Нестационарный эргодический процесс: $W(t)/t$, $t \geq 1$. Его эргодичность была доказана в задаче 1. Это процесс второго порядка, и он не является стационарным в широком смысле, так как его дисперсия $1/t$ зависит от времени. Поэтому он не является стационарным и в узком смысле.

4) Нестационарный неэргодический процесс: пуассоновский процесс $K(t)$, винеровский процесс $W(t)$.

9. Корреляционные функции стационарных процессов

Задача 1. Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = \xi f(t)$$

с какой-нибудь (быть может комплексной) неслучайной и непостоянной непрерывной функцией $f(t)$ и случайной величиной ξ с конечным вторым моментом. Вывести необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на случайную величину и функцию, чтобы процесс был стационарным в широком смысле.

Решение. Математическое ожидание $\mathbb{E}X(t) = f(t)\mathbb{E}\xi$ не будет зависеть от времени тогда и только тогда, когда $\mathbb{E}\xi = 0$, в этом случае

$\mathbb{E}X(t) = 0$. Корреляционная функция этого процесса равна

$$R_X(t,s) = \mathbb{E}X(t)\overline{X(s)} - \mathbb{E}X(t)\mathbb{E}\overline{X(s)} = f(t)\overline{f(s)} \cdot \mathbb{E}|\xi|^2.$$

Выясним, в каких случаях $R_X(t+h,t)$ не зависит от t. Пусть сначала $h = 0$, тогда $R_X(t,t) = R_X(0,0) = \text{const}$ приводит к $|f(t)|^2 = \text{const}$, откуда сразу следует $f(t) = r\exp(i\varphi(t))$ для произвольных ненулевых $r, \varphi(t) \in \mathbb{R}$. Функция $R_X(t+h,t)$ не будет зависеть от t тогда и только тогда, когда

$$\varphi(t+h) - \varphi(t)$$

не зависит от t и, как следствие,

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \varphi(h) - \varphi(0).$$

Если ввести обозначение $g(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, то мы имеем непрерывную функцию $g(t)$, во всех точках удовлетворяющую функциональному уравнению Коши:

$$g(t+h) = g(t) + g(h),\ \forall t,h \in \mathbb{R}.$$

Можно доказать, что решением этого уравнения являются функции вида $g(t) = \omega t$, где $\omega \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная, не зависящая от t. Обозначив $\theta = -\varphi(0)$, мы приходим к выражению для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \omega t + \theta,\ \text{где } \omega, \theta \in \mathbb{R}.$$

Итак, мы выяснили, что процесс вида $X(t) = \xi f(t)$ будет стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда

$$X(t) = \xi \cdot re^{i(\omega t+\theta)},\ \mathbb{E}\xi = 0.$$

Случайная величина ξ в этом выражении может быть и комплексная. Мы только что доказали следующую теорему.

Теорема. *Случайный процесс вида $X(t) = \xi f(t)$ для $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$ и непрерывной неслучайной функции $f(t)$ будет стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда $X(t) = \xi\exp(i\omega t)$ для неслучайной $\omega \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{E}\xi = 0$.*

Задача 2. Являются ли эти функции корреляционными функциями для некоторых стационарных в широком смысле процессов? Ответ обосновать.

$$\sin t,\ e^t,\ t^2,\ \sin^2 t,\ 0,\ 1,\ \cos t,\ \cos^2 t.$$

Решение. Первые четыре функции не являются корреляционными, так как не выполнено свойство $|f(t)| \le f(0)$ для всех t. Кроме того, первые две функции вещественны, но не являются четными. Функция $f(t) = 0$ является корреляционной, например для процесса $X(t) = 0$ для всех t. Функция $f(t) = 1$ тоже является корреляционной, например для гауссовского случайного процесса $X(t) = \xi \in \mathrm{N}(0, 1)$.

Функция $\cos t$ является корреляционной функцией случайного процесса

$$X(t) = \xi_1 e^{it} + \xi_2 e^{-it},$$

где ξ_1 и ξ_2 некоррелированны, имеют нулевое математическое ожидание и второй момент, равный $1/2$. Для этого достаточно было заметить, что

$$\cos t = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it}.$$

Это же замечание касается и функции $\cos^2 t$, которая тоже представляет собой линейную комбинацию гармоник с положительными коэффициентами, а следовательно, для нее тоже можно подобрать процесс в виде линейной комбинации гармоник и некоррелированных с нулевыми средними коэффициентами.

Задача 3.

1) Может ли функция

$$R(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T, T], \\ 0, & t \notin [-T, T], \end{cases}$$

быть характеристической функцией некоторой случайной величины?

2) А корреляционной функцией некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса?

3) Изменится ли ответ, если сгладить разрывы функции $R(t)$ в точках $t = \pm T$?

4) Верно ли, что если функция является неотрицательно определенной, то она является характеристической функцией некоторой случайной величины? А корреляционной функцией случайного процесса?

5) Какой физический смысл имеет спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса?

Решение.

1) Нет, функция $R(t)$ не может быть характеристической ни для какой случайной величины, так как эта функция имеет разрывы в точках $t = \pm T$. Характеристические функции любой случайной величины всюду непрерывны и даже равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

2) Нет, так как функция $R(t)$ непрерывна в нуле, но имеет разрывы в точках $t = \pm T$.

3) Нет, ответ не изменится, эта функция все равно не будет корреляционной ни для какого стационарного случайного процесса. Докажем это. Вместо функции $R(t)$ рассмотрим ее «сглаженную версию»:

$$R^*(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T, \\ f(t), & T < |t| \leq \tau, \\ 0, & |t| > \tau, \end{cases}$$

где $f(t)$ – непрерывная функция, такая, что $f(T) = 1$ и $f(\pm\tau) = 0$, а $\tau > T$ – произвольное число. Тогда $R(t) = R^*(t)$ на отрезке $[-T, T]$ и вне интервала $[-\tau, \tau]$. Если функция $R^*(t)$ не является четной, то есть сглаживание проводится не симметрично для $t > 0$ и $t < 0$, то эта функция не может быть корреляционной функцией, так как не будет являться эрмитовой. Рассмотрим случай, когда сглаживание таково, что функция $R^*(t)$ четная.

Предположим, что существует стационарный процесс $X(t)$, для которого функция $R^*(t)$ является корреляционной. Тогда функция $R^*(t)$ является неотрицательно определенной и, в частности, для $t_1 = 0$, $t_2 = T$, $t_3 = 2T$ матрица

$$\|R^*(t_i - t_j)\|_{i,j=1}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & R^*(2T) \\ 1 & 1 & 1 \\ R^*(2T) & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

является неотрицательно определенной. Здесь мы учли, что $R^*(-t) = R^*(t)$. Определитель этой матрицы равен

$$-1(1 - R^*(2T)) + R^*(2T)(1 - R^*(2T)) \geq 0,$$

что равносильно $(R^*(2T) - 1)^2 \leq 0$. Это возможно, только если $R^*(2T) = 1$.

Кроме того, неотрицательная определенность функции $R^*(t)$ влечет для $t_1 = 0$, $t_2 = T$, $t_3 = 3T$ неотрицательную определенность матрицы

$$\|R^*(t_i - t_j)\|_{i,j=1}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & R^*(3T) \\ 1 & 1 & 1 \\ R^*(3T) & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы учли, что $R^*(2T) = 1$. Из неотрицательной определенности этой матрицы следует, что необходимо $R^*(3T) = 1$.

И вообще, необходимо, чтобы $R^*(kT) = 1$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому найдется такое k, что $kT > \tau$ и тогда $R^*(kT) = 1$, но функция

$R^*(t)$ равна нулю при $t > \tau$. Мы получили противоречие. Это значит, что какую бы область сглаживания $(-\tau, -T) \cup (T, \tau)$ мы ни выбрали и какую бы функцию сглаживания $f(t)$ на ней мы ни определили, функция $R^*(t)$ не может быть корреляционной функцией ни для какого стационарного процесса $X(t)$.

Замечание. Мы только что доказали очень известный факт: если найдется точка $t_0 \neq 0$ такая, что $f(t_0) = f(0)$ для неотрицательно определенной функции $f(t)$, то для любого целого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено $f(kt_0) = f(0)$. Обратим также внимание на то, что функция $R(t)$ равна $R(0)$ на интервале $t \in [-T, T]$. Тогда если предположить, что эта функция является неотрицательно определенной, то получится, что $R(t) = R(0)$ и на множестве $[-2T, 2T]$, и на множестве $[-3T, 3T]$ и так далее. То есть такая функция всюду на $\mathbb{R}$ должна быть равна всюду $R(0)$, но это противоречит виду функции $R(t)$ в этой задаче.

4) Неотрицательно определенная функция не обязана быть характеристической функцией для какой-либо случайной величины. Например, пусть $f(t) = 0$ всюду. Очевидно, что она является неотрицательно определенной. Однако она не является характеристической, так как для характеристической функции необходимо $f(0) = 1$. На самом деле для характеристический функций известна следующая теорема.

Теорема. *Функция $\varphi(t)$ является характеристической функцией для некоторой случайной величины, если 1) $\varphi(0) = 1$, 2) $\varphi(t)$ всюду непрерывна, 3) она является неотрицательно определенной.*

Если функция является неотрицательно определенной, то она является корреляционной функцией для некоторого стационарного процесса.

5) Спектральная плотность – это плотность частотного распределения мощности сигнала. Поясню детальнее, что это значит. Рассмотрим простейший стационарный с.к.-непрерывный (и п.н.-непрерывный) процесс-гармонику

$$H(t) = \xi e^{i\lambda t},$$

где ξ – случайная величина (возможно комплексная) с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией, частота $\lambda \in \mathbb{R}$. Корреляционная функция этого процесса равна

$$R_H(t) = \mathbb{E}|\xi|^2 e^{i\lambda t}.$$

Амплитуда сигнала (процесса) $H(t)$ равна $|\xi|$, а $\mathbb{E}|\xi|^2$ – средний квадрат амплитуды. Мощность произвольного сигнала $X(t)$ определяется по формуле

$$N = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T |X(t)|^2 \, dt,$$

где предел понимается и в с.к.-, и п.н.-смыслах. В нашем случае

$$N = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T |\xi|^2 \, dt = |\xi|^2.$$

Итак, мощность сигнала $H(t)$ равна квадрату его амплитуды. Значит, средняя мощность сигнала $H(t)$ равна среднему квадрату его амплитуды, то есть равна амплитуде корреляционной функции.

Как следует из теоремы Хинчина, корреляционную функцию любого непрерывного стационарного процесса $X(t)$, обладающего спектральной плотностью $\rho(\lambda)$, можно представить в виде

$$R_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \rho(\lambda) d\lambda.$$

Кроме того, по теореме Крамера, любой с.к.-непрерывный стационарный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием можно представить в виде

$$X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, dV(\lambda),$$

где $V(\lambda)$ – некоторый комплекснозначный случайный процесс (что это за процесс и что это за интеграл пока не важно). Другими словами, процесс $X(t)$ складывается из простейших с.к.-непрерывных стационарных процессов-гармоник вида $H(t)$, причем амплитуда этих процессов $|dV(\lambda)|$ зависит в общем случае от частоты λ. Мы выяснили, что средний квадрат амплитуды $\mathbb{E}|dV(\lambda)|^2$ равен средней мощности сигнала с частотой λ, но она же равна амплитуде корреляционной функции процесса-гармоники, то есть $\rho(\lambda)d\lambda$.

Значит, $\mathbb{E}|dV(\lambda)|^2 = \rho(\lambda)d\lambda$, где $\rho(\lambda)$ – спектральная плотность. Вот и выходит, что спектральная плотность есть средняя мощность сигнала, приходящаяся на частоту λ, то есть есть плотность частотного распределения мощности сигнала.

10. Спектральное разложение процессов

Задача 1. Определить процесс $V_X(\lambda)$ с ортогональными приращениями, соответствующий стационарному процессу $X(t) = \xi e^{i\omega t}$, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$.

Решение. Нужно подобрать такой центрированный процесс с ортогональными приращениями $V_X(\lambda)$, чтобы

$$e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dV_X(\lambda).$$

Рассмотрим такой процесс:

$$V_X(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < \omega, \\ \xi, & \lambda \geq \omega. \end{cases}$$

Очевидно, что он является центрированным. Если взять $\lambda_1 < \lambda_2 < < \lambda_3 < \lambda_4$, то хотя бы один из интервалов (λ_1, λ_2) или (λ_3, λ_4) будет соответствовать месту, где $V_X(\lambda)$ равен тождественно нулю или тождественно ξ, а значит, приращение на этом интервале будет равно нулю, так что

$$\mathbb{E}(V(\lambda_2) - V(\lambda_1))\overline{(V(\lambda_4) - V(\lambda_3))} = 0,$$

и процесс $V_X(\lambda)$ имеет ортогональные приращения. Наконец, видно, что частичные суммы для интеграла выше равны

$$S = e^{i\bar{\lambda}_j t}\xi,$$

разбиение отрезка $[a, b]$ есть $a = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = b$, а $\bar{\lambda}_j \in (\lambda_j, \lambda_j]$, $V(\lambda_j) = 0$, $V(\lambda_{j+1}) = \xi$. Предел частичных сумм в точности равен $e^{i\omega t}$ и даже не зависит от отрезка $[a, b]$, лишь бы $a < \omega < b$.

Замечание. Аналогично можно показать, что для стационарного процесса

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{i\omega_k t}$$

с некоррелированными центрированными ξ_k с конечным вторым моментом соответствующим процессом с ортогональными приражениями является процесс

$$V_X(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i, \ \lambda \in (\omega_k, \omega_{k+1}), \ k = 0, \ldots, n,$$

где для удобства считается $\omega_0 = -\infty$, $\omega_{n+1} = +\infty$.

Задача 2. Найти частотную характеристику преобразования $Y(t) = X(t+\tau)$, $t, \tau > 0$, и спектральную плотность процесса $Y(t)$, если известна спектральная плотность $\rho_X(\lambda)$ центрированного с.к.-непрерывного стационарного процесса $X(t)$.

Решение. Представим процесс $X(t)$ в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dV_X(\lambda).$$

Тогда исследуемый процесс

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} e^{i\lambda\tau}\, dV_X(\lambda).$$

По определению, частотной характеристикой будет функция $\Phi(\lambda) == e^{i\lambda\tau}$. Спектральные плотности процессов X и Y связаны соотношением

$$\rho_Y(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 \rho_X(\lambda),$$

откуда для нашего случая $\rho_Y(\lambda) = \rho_X(\lambda)$, то есть спектральные плотности этих процессов совпадают. Это и не удивительно, так как процесс $X(t)$ является стационарным, поэтому корреляционная функция

$$R_Y(t,s) = \mathbb{E}Y(t)\overline{Y(s)} = \mathbb{E}X(t+\tau)\overline{X(s+\tau)} = \mathbb{E}X(t)\overline{X(s)} = R_X(t,s).$$

Задача 3. Те же вопросы про преобразование

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k X(t+t_k),\ c_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \ldots, n,$$

для центрированого с.к.-непрерывного стационарного процесса $X(t)$.

Решение. В этом случае

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda(t+t_k)}\, dV_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k}\right) e^{i\lambda t}\, dV_X(\lambda),$$

значит, частотной характеристикой такого преобразования является функция $\Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k}$. Спектральные плотности в этом случае связаны соотношением

$$\rho_Y(\lambda) = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k}\right|^2 \rho_X(\lambda).$$

Здесь всюду предполагается, что $\Phi(\lambda) \in H(X)$.

Задача 4. Дана линейная система

$$a_1\dot{X}(t) + a_0X(t) = Y(t)$$

с входным сигналом $Y(t)$ и выходным сигналом $X(t)$ и где $a_0, a_1 \neq 0$. Пусть $\mathbb{E}Y(t) = 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Считая известным спектральную плотность $\rho_Y(\lambda)$ процесса $Y(t)$, вычислить спектральную плотность процесса $X(t)$.

Решение. Будем искать стационарное с.к.-дифференцируемое решение $X(t)$ указанного уравнения и считать, что п.н.-производная совпадает с с.к.-производной (типичное и часто справедливое предположение на практике). Так как $\mathbb{E}X = \text{const}$, то $\mathbb{E}\dot{X} = 0$, и так как $\mathbb{E}Y = 0$, то необходимо $\mathbb{E}X = 0$. Поэтому представим процесс $X(t)$ в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dV_X(\lambda)$$

и подставим это выражение в уравнение, воспользовавшись возможностью вносить дифференцирование под знак интеграла (см. лекцию),

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_1 i\lambda + a_0)e^{i\lambda t} dV_X(\lambda) = Y(t),$$

предположив, что для решения, которое мы ищем, выполняется

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a_1 i\lambda + a_0|^2 dS_X(\lambda) < \infty, \tag{2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dS_X(\lambda) < \infty. \tag{3}$$

Тогда спектральные функции $S_Y(\lambda)$ и $S_X(\lambda)$ связаны друг с другом соотношением

$$dS_Y(\lambda) = |a_1 i\lambda + a_0|^2 dS_X(\lambda),$$

откуда следует

$$\rho_X(\lambda) = \frac{\rho_Y(\lambda)}{|a_1 i\lambda + a_0|^2} = \frac{\rho_Y(\lambda)}{a_1^2\lambda^2 + a_0^2}. \tag{4}$$

В результате мы получаем, что если условия (2) и (3) выполнены, то спектральная плотность процесса $X(t)$ существует и удовлетворяет (4).

Заметим, что для функции (4) оба условия оказываются выполнены. Действительно, условие (2) равносильно условию абсолютной интегрируемости спектральной плотности $\rho_Y(\lambda)$, а условие (3) выполнено, как следует из оценки

$$\frac{\lambda^2 \rho_Y(\lambda)}{a_1^2\lambda^2 + a_0^2} \leq \frac{1}{a_1^2}\,\rho_Y(\lambda)$$

и, опять же, интегрируемости функции $\rho_Y(\lambda)$.

Задача 5. Пусть случайная функция

$$X(t) = f(t) + \xi(t),$$

где $f(t)$ – некоторая неслучайная дифференцируемая функция (полезный сигнал), а $\xi(t)$ – центрированная стационарная случайная функция (помеха) с дисперсией σ^2 и спектральной плотностью

$$\rho_\xi(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\lambda_0}, & |\lambda| \leq \lambda_0, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_0 \end{cases}$$

подвергается численному дифференцированию с шагом $h > 0$:

$$X_h(t) = \frac{X(t+h) - X(t)}{h}.$$

Вычислить $\mathbb{E}X_h(t)$, $\mathbb{D}X_h(t)$ при $h \to 0$.

Решение. В силу линейности данного преобразования,

$$X_h(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}.$$

Математическое ожидание второго слагаемого в этом выражении равно нулю, поэтому

$$\mathbb{E}X_h(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \to f'(t),\ h \to 0.$$

Что касается дисперсии,

$$\mathbb{D}X_h(t) = \mathbb{D}\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = \frac{1}{h^2}(\sigma^2 + \sigma^2 - 2\mathbb{E}\xi(t+h)\overline{\xi(t)}) = \frac{2}{h^2}(\sigma^2 - R_\xi(h)),$$

где $R_\xi(h)$ – это корреляционная функция процесса $\xi(t)$. По теореме Хинчина,

$$R_\xi(h) = \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} e^{i\lambda h} \frac{\sigma^2}{2\lambda_0}\, d\lambda = \frac{\sigma^2}{\lambda_0} \frac{e^{i\lambda_0 h} - e^{-i\lambda_0 h}}{2ih} = \sigma^2 \frac{\sin \lambda_0 h}{\lambda_0 h},\ h \neq 0.$$

Отсюда
$$\mathbb{D}X_h(t) = \frac{2\sigma^2}{h^2}\left(1 - \frac{\sin\lambda_0 h}{\lambda_0 h}\right) \to \frac{\sigma^2\lambda_0^2}{3},\ h \to 0.$$
Таким образом, при численном дифференцировании дисперсия шума выходного сигнала мало зависит от шага дифференцирования h, а определяется в основном шириной λ_0 спектра помехи во входном сигнале. Более того, даже при очень малой дисперсии σ^2 этой помехи дисперсия выходного сигнала может быть большой, если помеха – широкополосный белый шум (то есть $\lambda_0 \gg 1$). Полученный результат объясняет неудачные попытки продифференцировать сигнал прежде, чем он отфильтрован от помехи.

11. Дискретные цепи Маркова

Определение. Случайная последовательность $\{X_k\}$, каждая компонента которой принимает значения из некоторого множества
$$S \subseteq \mathbb{Z},\ |S| \leq \infty,$$
и обладающая свойством
$$\mathbb{P}(X_{m_n} = x_n \,|\, X_{m_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{m_0} = x_0) = \\ = \mathbb{P}(X_{m_n} = x_n \,|\, X_{m_{n-1}} = x_{n-1})$$
для каждого $n \geq 1$, $m_0 < m_1 < \cdots < m_n$ и $x_0, \ldots, x_n \in S$, для которых указанные условные вероятности определены, называется *дискретной цепью Маркова.*

Разберем две задачи. В них спрашивается, является ли некоторая цепь при определенных условиях марковской или не является. Эти задачи традиционно вызывают у студентов невероятные трудности. Связано это с тем, что в них есть некоторый элемент творчества – нужно при определенных условиях подобрать цепи, не являющиеся марковскими.

Задача 1. Пусть X_0, X_1,... и Y_0, Y_1,... – две марковские цепи. Будет ли марковской цепью последовательность $X_0 + Y_0$, $X_1 + Y_1$, $\ldots$?

Замечания. Последовательность марковской может быть, а может и не быть. Например, если цепи $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ совпадают, то $\{X_i + Y_i\} = \{2X_i\}$ является марковской цепью. Мне встречалось несколько случаев, когда сумма не является марковской.

Решение 1. Пусть $X = (\xi, 0, 0, \ldots)$ и $Y = (0, 0, \xi, 0, \ldots)$ – две последовательности, где $\xi \in \{-1, 1\}$ и $\mathbb{P}(\xi = -1) = \mathbb{P}(\xi = 1) = 1/2$. Заметим, что все компоненты каждой из цепей – независимые случайные величины. Значит, эти последовательности – марковские цепи. Теперь рассмотрим $Z = X + Y = (\xi, 0, \xi, 0, \dots)$. Тогда

$$\mathbb{P}(X_2 + Y_2 = 1 \,|\, X_1 + Y_1 = 0, X_0 + Y_0 = -1) = \mathbb{P}(\xi = 1 \,|\, \xi = -1) = 0,$$

$$\mathbb{P}(X_2 + Y_2 = 1 \,|\, X_1 + Y_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi = 1) = 1/2.$$

Следовательно, цепь $Z = X + Y$ не является марковской.

Это самое простое из всех решений этой задачи, которые я знаю. Но в этом решении есть три тонкости. Во-первых, здесь цепи X и Y *неоднородные*, впрочем, в условии задачи ничего про однородность и не сказано. Во-вторых, студенты почему-то часто приносят решение с непрерывной ξ. Но тогда X и Y не являются *цепями*. И в-третьих, в этих цепях существуют *не все* условные вероятности. Это нормально. Марковское свойство в определении марковской цепи пишется для всех состояний, для которых условные вероятности имеют смысл, то есть всегда когда условия имеют ненулевую вероятность.

Решение 2. Теперь рассмотрим решение для случая, когда обе цепи являются однородными. Пусть $X = (\xi, \xi, \dots)$, где $\xi \in \mathrm{Be}(1/2)$. По определению можно показать, что это марковская цепь: либо она все время находится в состоянии 0, либо все время находится в состоянии 1. Теперь рассмотрим марковскую цепь $Y = (Y_0, Y_1, \dots)$, принимающую значения из $S = \{-1, 0, 1\}$ с переходной матрицей

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

и начальным распределением $\pi(0) = [0, 1, 0]$, то есть $\mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1$. Пусть X и Y независимы и $Z = X + Y$. Тогда $Z_k = \xi + Y_k$ и $Z_0 = \xi$. Начнем с вычисления условной вероятности

$$\mathbb{P}(Z_2 = 0 \,|\, Z_1 = 1, Z_0 = 1) = \frac{\mathbb{P}(Z_2 = 0, Z_1 = 1, Z_0 = 1)}{\mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_0 = 1)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_2 + \xi = 0, Y_1 + \xi = 1, \xi = 1)}{\mathbb{P}(Y_1 + \xi = 1, \xi = 1)} = \frac{\mathbb{P}(Y_2 = -1, Y_1 = 0, \xi = 1)}{\mathbb{P}(Y_1 = 0, \xi = 1)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_2 = -1, Y_1 = 0)\mathbb{P}(\xi = 1)}{\mathbb{P}(Y_1 = 0)\mathbb{P}(\xi = 1)} = \mathbb{P}(Y_2 = -1 | Y_1 = 0) = \frac{1}{4}.$$

С другой стороны,

$$\mathbb{P}(Z_2 = 0 \,|\, Z_1 = 1, Z_0 = 0) = \frac{\mathbb{P}(Z_2 = 0, Z_1 = 1, Z_0 = 0)}{\mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_0 = 0)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_2 + \xi = 0, Y_1 + \xi = 1, \xi = 0)}{\mathbb{P}(Y_1 + \xi = 1, \xi = 0)} = \frac{\mathbb{P}(Y_2 = 0, Y_1 = 1, \xi = 0)}{\mathbb{P}(Y_1 = 1, \xi = 0)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y_2 = 0, Y_1 = 1)\mathbb{P}(\xi = 0)}{\mathbb{P}(Y_1 = 1)\mathbb{P}(\xi = 0)} = \mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 1) = 0.$$

Так как $\mathbb{P}(Z_2 = 0 \,|\, Z_1 = 1, Z_0 = 1) \neq \mathbb{P}(Z_2 = 0 \,|\, Z_1 = 1, Z_0 = 0)$, то цепь Z не является марковской.

Задача 2. Пусть X_0, X_1, ... – последовательность случайных величин, образующих марковскую цепь, $\psi(x)$ – некоторая функция. Будет ли последовательность $\psi(X_0)$, $\psi(X_1)$, ... марковской?

Замечания. Последовательность марковской может и не быть. Студенты здесь мне приносят решения с $X_n = \sin(\pi n/4) + A$, где A – это либо константа, либо случайная величина, и какой-нибудь функцией ψ, но правильных решений я не видел. В большинстве случаев студенты сами говорят, что нашли ошибку. Часто они предлагают решение с непрерывно распределенной A. Но тогда X_n не цепь, так как принимает непрерывное множество значений.

Решение. При $\psi(x) = x$ последовательность $\psi(X_0)$, $\psi(X_1)$, ... марковская. Рассмотрим случай, когда эта последовательность не является марковской.

Пусть $X = (X_0, X_1, \dots)$ – однородная марковская цепь со значениями в $S = \{1, 2, 3\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и начальным распределением $\pi(0) = [1/3, 1/3, 1/3]$. Пусть функция ψ задается так: $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = \psi(3) = 2$. Тогда

$$\mathbb{P}(\psi(X_2) = 1 \,|\, \psi(X_1) = 2, \psi(X_0) = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \,|\, X_1 \in \{2, 3\}, X_0 = 1) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 \in \{2, 3\}, X_0 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 \in \{2, 3\}, X_0 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_0 = 1)}{\mathbb{P}(X_0 = 1)} = 1.$$

С другой стороны,

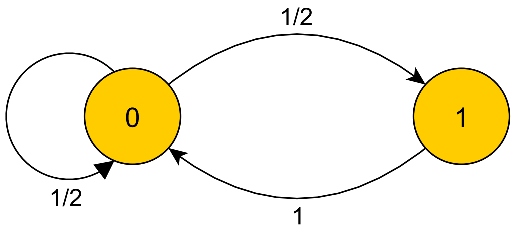
$$\mathbb{P}(\psi(X_2) = 1 \,|\, \psi(X_1) = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \,|\, X_1 \in \{2, 3\}) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 \in \{2, 3\})}{\mathbb{P}(X_1 \in \{2, 3\})} = \frac{\mathbb{P}(X_0 = 1)}{\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 3)} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что цепь $\{\psi(X_k)\}$ не является марковской. Заметим, что при вычислении всех вероятностей здесь удобно просто нарисовать граф цепи X и смотреть, какие переходы возможны и не возможны.

Разберем теперь задачу на эволюцию цепи Маркова.

Задача 3. Найти матрицу вероятностей перехода за произвольное число шагов и распределение состояний на произвольном шаге в однородной дискретной цепи Маркова со стохастическим графом



и начальным распределением $\pi(0) = [0, 1]^T$.

Решение. В произвольных однородных дискретных цепях Маркова $\{X_n\}$ матрица перехода $P(n)$ за n шагов и распределение $\pi(n)$ на шаге n удовлетворяют равенствам

$$P(n) = \left(P^T\right)^n, \ \pi(n) = P^T \pi(n-1) = \left(P^T\right)^n \pi(0) = P(n)\pi(0),$$

$$P(n) = \|p_{ij}(n)\|_{i,j=1}^N, \ p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_0 = i),$$

$$\pi(n) = \|\pi_i(n)\|_{i=1}^N, \ \pi_i(n) = \mathbb{P}(X_n = i),$$

где P – это матрица перехода за один шаг. Предложенному стохастическому графу соответствует матрица переходов за один шаг:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

По условию начальное распределение $\pi(0) = [0, 1]^T$. Это значит, что в момент времени $n = 0$ цепь находится в состоянии 0 с вероятностью 0 и в состоянии 1 с вероятностью 1. Найдем распределение на следующем шаге:

$$\pi(1) = P^T \pi(0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Еще через шаг распределение станет таким:

$$\pi(2) = P^T \pi(1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

А еще через шаг таким:

$$\pi(3) = P^T \pi(2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Попробуем теперь вычислить распределение в произвольный момент времени, то есть $\pi(n)$, $n \geq 0$. Для этого воспользуемся следующим соображением: если матрица A может быть представлена в виде $A = SDS^{-1}$, где D – диагональная матрица, то $A^n = SD^nS^{-1}$. Иногда это удается сделать, решив задачу на собственные числа и векторы матрицы A. Так как в нашем случае

$$\pi(n) = \left(P^T\right)^n \pi(0),$$

то попробуем найти собственные числа и собственные векторы матрицы P^T:

$$\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

При $\lambda = 1$ получаем

$$P^T - \lambda I = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix},$$

откуда собственный вектор $\boldsymbol{v}_1 = [2,1]^T$. При $\lambda = -1/2$ получаем

$$P^T - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

откуда собственный вектор $\boldsymbol{v}_2 = [1,-1]^T$. Значит, в нашем случае

$$P^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}}_{S^{-1}}.$$

Далее

$$\left(P^T\right)^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2+(-1/2)^n & 2-2(-1/2)^n \\ 1-(-1/2)^n & 1+2(-1/2)^n \end{bmatrix}.$$

Это и есть матрица перехода за n шагов. Распределение состояний в момент n для начального распределения $\pi(0) = [0,1]^T$ равно

$$\pi(n) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2-2(-1/2)^n \\ 1+2(-1/2)^n \end{bmatrix}.$$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$\left(P^T\right)^n \to \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Поэтому если взять произвольное начальное распределение $\pi(0) = = [\pi_0(0), \pi_1(0)]$, то в пределе

$$\pi(n) \to \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0(0) \\ \pi_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

так как $\pi_0(0) + \pi_1(0) = 1$. Это значит, что в каком бы состоянии не находилась цепь изначально и вообще каким бы ни было начальное распределение вероятностей состояний, в пределе вероятность оказаться в состоянии 0 равна $2/3$, а в состоянии 1 она равна $1/3$. Это проявление *эргодичности* цепи, свойства, которое по определению означает, что для каждого $i, j \in S$ существует положительный предел $p_{ij}(n) \to p_j > 0$, не зависящий от i. Свойства эргодических цепей, а также критерии эргодичности подробно обсуждаются в следующих разделах, но уже сейчас можно понять, как получается, что $P(n)$ сходится к матрице, все строки которой одинаковые.

Для этого мы проанализируем собственные числа произвольной матрицы P.

Теорема. *Матрицы P и P^T всегда имеют собственное значение, равное 1. Остальные собственные значения по модулю не превосходят единицу.*

Доказательство. Так как сумма компонент матрицы P в каждой ее строке равна 1, то достаточно взять вектор $\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]^T$ и увидеть

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Значит, матрица P имеет собственное значение $\lambda = 1$, а соответствующий собственный вектор равен $\mathbf{1}$. Отсюда следует, что и матрица P^T имеет собственное значение $\lambda = 1$, так как определители произвольной матрицы и ее транспонированной совпадают:

$$\det(P - \lambda I) = \det(P^T - \lambda I) = 0.$$

Конечно, вектор $\mathbf{1}$ не обязан быть собственным вектором матрицы P^T. Теперь предположим, что нашлось собственное значение λ матрицы P с $|\lambda| > 1$, а $\boldsymbol{v}$ – соответствующий собственный вектор. Но тогда $|P^n \boldsymbol{v}| = |\lambda|^n |\boldsymbol{v}|$ и правая часть растет экспоненциально с ростом n. Это невозможно, так как $P^n = P(n)$ – стохастическая матрица, и поэтому левая часть ограничена, а правая часть увеличивается с ростом n. Мы пришли к противоречию, значит, для всех собственных значений λ выполнено $|\lambda| \leq 1$. $\square$

Теперь предположим для простоты, что матрица P – двумерная и представляется в виде $P = SDS^{-1}$, где D – диагональная матрица с собственными числами $\lambda_1 = 1$ и λ_2 на диагонали. Тогда

$$P^n = SD^nS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & v_{21} \\ 1 & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v_{21} \\ 1 & v_{22} \end{bmatrix}^{-1},$$

где $\boldsymbol{v}_2 = [v_{21}, v_{22}]^T$ – собственный вектор для λ_2. Обращая матрицу справа, получаем

$$P^n = \frac{1}{v_{22} - v_{21}} \begin{bmatrix} 1 & v_{21} \\ 1 & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} & -v_{21} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v_{22} - v_{21}} \begin{bmatrix} 1 & v_{21}\lambda_2^n \\ 1 & v_{22}\lambda_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{22} & -v_{21} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{v_{22} - v_{21}} \begin{bmatrix} v_{22} - v_{21}\lambda_2^n & -v_{21} + v_{21}\lambda_2^n \\ v_{22} - v_{22}\lambda_2^n & -v_{21} + v_{22}\lambda_2^n \end{bmatrix}.$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$P^n = \frac{1}{v_{22} - v_{21}} \begin{bmatrix} v_{22} & -v_{21} \\ v_{22} & -v_{21} \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2^n}{v_{22} - v_{21}} \begin{bmatrix} -v_{21} & v_{21} \\ -v_{22} & v_{22} \end{bmatrix}.$$

Получается, что если $|\lambda_2| < 1$, при $n \to \infty$ матрица P^n сходится к некоторой матрице, все строки которой одинаковые, то есть существуют пределы $p_{ij}(n) \to p_j$, не зависящие от i. У матрицы $P^T(n)$ в пределе будут одинаковые столбцы. Отсюда следует, что $(P^T)^n \pi(0) \to [p_0, p_1]^T$ независимо от $\pi(0)$. В тех случаях, когда оба p_j положительные, цепь по определению называется эргодической. Аналогичные выкладки можно провести для цепей с произвольным конечным числом состояний.

Таким образом, в случаях, когда переходная матрица P диагонализуема, у нее только одно собственное значение, равное 1, а другие собственные значения по модулю строго меньше единицы, то существует предел P^n к некоторой матрице, у которой все строки одинаковые, а распределение (каким бы оно ни было изначально) сойдется к некоторому распределению, и оно будет состоять из тех же p_j, что и пределы $p_{ij}(n)$. Этот факт можно обобщить и на случаи недиагонализуемых матриц, мы не будем формулировать соответствующие теоремы, но понятно, что анализ собственных чисел матрицы в принципе позволяет что-то сказать про поведение цепей.

Аппарат собственных чисел помогает очень глубоко исследовать свойства марковских цепей, но на практике же гораздо более простым и эффективным средством исследования их поведения оказывается классификация состояний цепи (существенные и несущественные, возвратные и невозвратные, нулевые и ненулевые, периодические и непериодические состояния). Понимание этой классификации и ее следствий помогает в ряде случаев все понять про цепь, просто взглянув на ее граф и не проводя никаких вычислений! Следующий раздел будет посвящен этой классификации и рассмотрению ряда примеров.

Несколько слов о стохастических матрицах. Попытки простым способом описать общие свойства матриц P^T встречают серьезное сопротивление. Это подтверждают следующие примеры.

1. Матрица P^T может быть вырожденной:

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Матрица P^T может иметь отрицательные собственные значения и отрицательный определитель:

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Матрица P^T может иметь комплексные собственные значения и быть ортогональной ($P^T = P^{-1}$):

$$P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Кратность собственного значения $\lambda = 1$ может быть больше

единицы:

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Не всякая матрица P^T диагонализуема, например,

$$P^T = \begin{bmatrix} 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления $\left(P^T\right)^n$ наряду с методом вычисления собственных значений и векторов матрицы P^T применяют технику *производящих функций.*

Определение. *Производящей функцией последовательности* $\{a_n\}$ называют формальный ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пример. Функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

является производящей для последовательности $a_n = \{1, 1, \dots\}$.

Пример. Функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{c+z} = c^{-1}\left(1 - \frac{z}{c} + \frac{z^2}{c^2} - \dots\right)$$

является производящей для последовательности $\{c^{-1}, -c^{-2}, c^{-3}, \dots\}$.

Можно показать, что функция

$$\varphi(z) = (I - zP^T)^{-1}\pi(0)$$

является производящей функцией последовательности

$$\pi(n) = \left(P^T\right)^n \pi(0).$$

Поэтому если удастся разложить в ряд

$$(I - zP^T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

то $\left(P^T\right)^n = A_n$ и $\pi(n) = A_n\pi(0)$.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$P^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$I - zP^T = \begin{bmatrix} 1 - z/2 & -z \\ -z/2 & 1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$(I - zP^T)^{-1} = \frac{1}{(1-z)(2+z)} \begin{bmatrix} 2 & 2z \\ z & 2-z \end{bmatrix}.$$

Разложим эту матрицу в ряд по степеням z. Для этого сначала найдем матрицы A и B такие, чтобы

$$\frac{1}{(1-z)(2+z)} \begin{bmatrix} 2 & 2z \\ z & 2-z \end{bmatrix} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{2+z}.$$

Это равенство эквивалентно

$$A(2+z) + B(1-z) = \begin{bmatrix} 2 & 2z \\ z & 2-z \end{bmatrix}.$$

Перепишем его в виде

$$(2A+B) + (A-B)z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} z$$

и получим два уравнения на матрицы

$$2A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда сразу следует

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2/3 & -4/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

Итак, мы получили, что

$$(I - zP^T)^{-1} = \frac{1}{1-z} \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2+z} \begin{bmatrix} 2/3 & -4/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n.$$

Если разложить функции $(1-z)^{-1}$ и $(2+z)^{-1}$ в ряды по степеням z и сложить коэффициенты при одинаковых степенях, то мы придем к

$$A_n = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{bmatrix} 2/3 & -4/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

Это и есть искомая $\left(P^T\right)^n$.

12. Классификация состояний марковской цепи

Введем несколько обозначений. Вероятность перехода за n шагов из состояния $i \in S$ в состояние $j \in S$ как обычно обозначим символом

$$p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_n = j \,|\, X_0 = i),\ n \geq 0,$$

где S – множество состояний. Введем вероятность первого возвращения за n шагов в состояние $i \in S$:

$$f_i(n) = \mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i \,|\, X_0 = i),\ n \geq 1,$$

и вероятность возвращения в $i \in S$ за конечное число шагов:

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n).$$

Заметим, что $F_i \leq 1$, т.к. является вероятностью. Вероятности $p_{ii}(n)$ и $f_i(n)$ не обязаны совпадать. Вероятность $f_i(n)$ – это вероятность *первого* возвращения из i в i (при условии, что цепь вышла из состояния i). Вероятность $p_{ii}(n)$ подсчитывается с учетом того, что на промежуточных шагах цепь может бывать в состоянии i, поэтому очевидно, что $p_{ii}(n) \geq f_i(n)$.

Если для состояния i найдется шаг $n \geq 1$ такой, что $p_{ij}(n) > 0$, то будем говорить, что за состоянием i *следует* состояние j. Этот факт мы будем обозначать так: $i \to j$. Если для любого $m \geq 1$ вероятность $p_{ij}(m) = 0$, то будем писать $i \not\to j$. Если одновременно $i \to j$ и $j \to i$, то состояния называются *сообщающимися*. Для сообщающихся состояний i и j мы будем писать $i \leftrightarrow j$. В развернутом видет это значит, что

$$(\exists m \geq 1:\ p_{ij}(m) > 0)\ \wedge\ (\exists n \geq 1:\ p_{ji}(n) > 0)\,.$$

В противном случае состояния i и j называются *несообщающимися*.

Состояние i называется *существенным*, если оно сообщается с каждым из следующих за ним состояний. В противном случае оно называется *несущественным*. Состояние $i \in S$ называется *нулевым*, если существует

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0.$$

Если указанный предел не существует или не равен нулю, то состояние i называется *ненулевым*.

Состояние $i \in S$ называется *возвратным*, если $F_i = 1$. Иначе состояние i называется *невозвратным.*

Пусть $\exists n_0 \geq 1 : p_{ii}(n_0) > 0$ и d_i – наибольший общий делитель чисел

$$\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\}.$$

Тогда состояние i называется периодическим с периодом $d_i \geq 1$. Если $d_i = 1$, то состояние i называют непериодическим. Если состояние не сообщается само с собой, то есть $p_{ii}(n) = 0$ для всех $n \geq 1$, то понятие периодичности для него не вводится.

Теорема. *Состояние $i \in S$ является возвратным тогда и только тогда, когда*

$$P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Для невозвратного состояния

$$F_i = \frac{P_i}{1 + P_i}.$$

Следствие. *Если состояние является невозвратным, то оно нулевое. Но если состояние нулевое, то оно не обязано быть возвратным, как, в частности, показывает следующий пример.*

Определение. Цепь Маркова называется *неразложимой*, если все ее состояния сообщаются. В противном случае цепь называется *разложимой.*

Теорема о солидарности. *Для неразложимой цепи справедливо, что*

1) *если хотя бы одно состояние возвратно, то все состояния возвратны*;
2) *если хотя бы одно состояние нулевое, то все состояния нулевые*;
3) *если хотя бы одно состояние имеет период $d \geq 1$, то все состояния имеют тот же самый период $d \geq 1$.*

Теорема*[3]. *Несущественное состояние всегда является невозвратным и, следовательно, нулевым. Возвратное состояние – всегда существенное.*

Теорема*. *В конечных неразложимых цепях Маркова все состояния являются ненулевыми и, следовательно, возвратными.*

Опишем теперь общий подход к классификации состояний в счетных и конечных цепях Маркова.

---

[3] Чжун К.-л. Однородные цепи Маркова. Москва : Мир, 1964. С. 39.

Алгоритм.

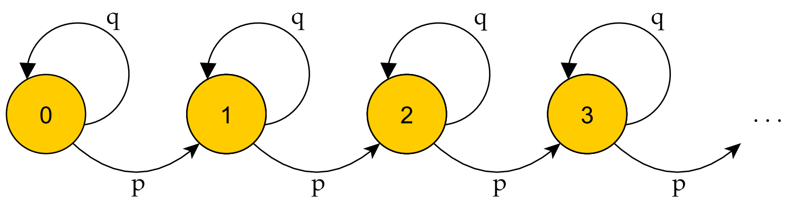
1. В первую очередь следует выделить множество несущественных состояний и классы сообщающихся существенных состояний. Для этого следует воспользоваться определением сообщаемости и существенности для состояний, что обычно легко сделать.

2. Далее, сразу можно сказать, что все несущественные состояния являются невозвратными и нулевыми, как следует из теоремы выше. Если этой теоремой не пользоваться, то свойство невозвратности для несущественных состояний можно попробовать вывести для конкретной данной цепи по определению или с помощью критерия возвратности, но в общем случае эта задача может оказаться нетривиальной.

3. Далее мы переходим к классам сообщающихся существенных состояний и рассматриваем их по отдельности. Каждый из таких классов представляет собой неразложимую цепь, поэтому для нее справедлива теорема о солидарности, и поэтому свойства возвратности, нулевости и периодичности достаточно проверить лишь для одного какого-то состояния. Если класс состоит из конечного числа состояний, то сразу можно сказать, что все состояния являются возвратными и ненулевыми.

Ниже идет разбор задач, в которых состояния классифицируются не обязательно по указанному алгоритму, а с использованием определений или теорем, просто для тренировки и прояснения понятий.

Задача 1. Классифицировать состояния цепи при $p \in (0,1)$, $q \in (0,1)$.



Решение. Здесь $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Пройдемся по пунктам.

1. Очевидно, что $0 \leftrightarrow 0$, так как $p_{00}(1) = q > 0$. Вообще, $i \leftrightarrow i$ для всех $i \in S$. Также видно, что $0 \to 1$, так как $p_{01}(1) = p > 0$. Вообще, для $j > i$ справедливо $i \to j$, так как $p_{ij}(j-i) = p^{j-i} > 0$. Однако для $j < i$ вероятность $p_{ij}(m) = 0$ для всех $m \geq 1$, то есть $i \not\to j$. Итак, в результате получаем следующее: $i \leftrightarrow i$ для всех $i \in S$, $i \to j$ для всех $j > i$ и $i \not\to j$ для всех $i > j$. Это значит, что каждое состояние сообщается с самим собой, а любые два различных состояния не сообщаются друг с другом.

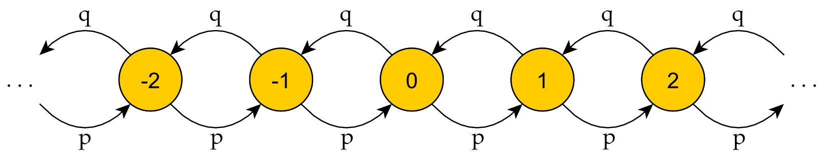
2. Рассмотрим произвольное состояние $i \in S$. Тогда $i \to i+1$, но $i+1 \not\to i$. Следовательно, для данного состояния i нашлось состояние j такое, что $i \to j$, но $j \not\to i$. По определению это означает, что состояние i является несущественным. Так как i было произвольным, то любое состояние данной цепи является несущественным.

3. Для всякого состояния $i \in S$ вероятность $p_{ii}(n) = q^n \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому все состояния являются нулевыми.

4. Для всякого состояния $i \in S$ выполнено $f_i(1) = q < 1$ и $f_i(n) = 0$, $\forall n \geq 2$. Значит, $F_i = q < 1$. Поэтому все состояния являются невозвратными.

5. Для всякого состояния $i \in S$ выполнено $p_{ii}(1) = q > 0$, поэтому для каждого состояния можно определить понятие периодичности. Так как $d_i = \text{НОД}\{n \geq 1 : p_{ii}(n) > 0\} = \text{НОД}\{n \geq 1\} = 1$, то заключаем, что у всех состояний период равен 1, то есть все состояния непериодические.

Задача 2. Классифицировать состояния цепи при $p \in (0,1)$, $q \in (0,1)$.



Решение. Здесь $S = \mathbb{Z}$. Все состояния цепи являются сообщающимися. Поэтому все они являются существенными. Возвращение в любое состояние возможно лишь за четное число шагов, следовательно, $\forall i \in S$ $d_i = 2$, поэтому все состояния являются периодическими с периодом 2.

Теперь выясним, являются ли состояния нулевыми. Для любого $i \in S$

$$p_{ii}(2n) = C_{2n}^n \, p^n \, q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \, p^n \, q^n.$$

По формуле Стирлинга, $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$. Отсюда при $n \to \infty$

$$p_{ii}(2n) \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\right)^2} p^n q^n = \frac{4^n \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{2\pi n} p^n q^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n}}.$$

Но так как $p + q = 1$ и $p(1-p) \leq 1/4$ для всех $p \in (0,1)$, то $p_{ii}(2n) \to 0$,

$n \to \infty$. Учитывая, что $p_{ii}(2n+1) = 0$ для всех n, получаем $p_{ii}(n) \to 0$, $n \to \infty$, то есть все состояния являются нулевыми.

Теперь исследуем состояния на возвратность. Для этого рассмотрим ряд

$$P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(2n).$$

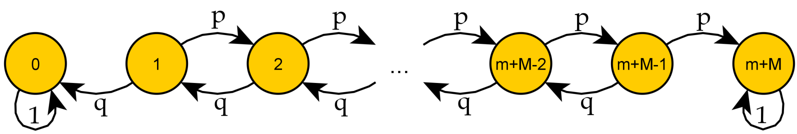
Если $p = q = 1/2$, то $4pq = 1$ и ряд расходится. В этом случае все состояния являются возвратными. Если же $p \neq q$, то есть $p \neq 1/2$, то ряд сходится и $P_i < \infty$. В этом случае все состояния являются невозвратными. Вероятность вернуться в состояние i за конечное число шагов равна $F_i = P_i/(1+P_i) < 1$.

Задача 3. Доказать, что в конечных цепях Маркова всегда существует существенное состояние.

Решение. Предположим, что в цепи все состояния несущественные. Выберем произвольное состояние i_1. Так как оно несущественное, то существует состояние i_2 такое, что $i_1 \to i_2$, но $i_2 \not\to i_1$. Так как i_2 тоже несущественное, то существует состояние i_3 такое, что $i_2 \to i_3$, но $i_3 \not\to i_2$, причем $i_3 \neq i_1$. Так как i_3 тоже несущественное состояние, то существует i_4 такое, что $i_3 \to i_4$, но $i_4 \not\to i_3$, причем $i_4 \neq i_1$ и $i_4 \neq i_2$. В какой-то момент мы придем к последнему состоянию в цепи и окажется, что из него не следует ничего, даже оно само, что является противоречием.

Задача 4 (игра в орлянку). Рассматривается игра двух лиц с их начальными капиталами m (у первого игрока) и M (у второго игрока). Игра многошаговая, на каждом шаге первый игрок с вероятностью p получает единицу денег от второго игрока и с вероятностью $q = 1-p$ отдает единицу денет второму игроку. Составить соответствующую цепь Маркова, классифицировать ее состояния и найти вероятность проигрыша первого игрока.

Решение. Введем множество состояний $S = \{0, 1, \ldots, m+M\}$. Цепь инициализируется в состоянии $m \in S$. Граф цепи имеет следующий вид:



Состояния $1, 2, \ldots, m+M-1$ являются несущественными, а значит, невозвратными и нулевыми. Невозвратность этих состояний означает, что цепь перейдет в состояния 0 или $m + M$ с вероятностью 1 за конечное число шагов. То есть игра завершится за конечное число шагов с вероятностью 1. Кроме того, эти состояния являются периодическими с периодом 2. Состояния 0 и $m + M$ являются существенными, возвратными, ненулевыми, непериодическими.

Теперь обозначим за P_k вероятность проигрыша первого игрока, если его текущий капитал равен k. Тогда в силу однородности и марковости цепи

$$P_k = pP_{k+1} + qP_{k-1},\ k = 1, \dots, m + M - 1,$$

причем $P_0 = 1$, $P_{m+M} = 0$. Перепишем это равенство следующим образом:

$$P_{k+1} - P_k = (q/p)(P_k - P_{k-1}) = (q/p)^k (P_1 - P_0).$$

Сложим эти равенства для $k = 0, \dots, m - 1$:

$$P_m - P_0 = S_m(P_1 - P_0),\ S_m = \sum_{k=0}^{m-1} (q/p)^k.$$

Теперь сложим равенства для всех $k = 0, \dots, m + M - 1$:

$$P_{m+M} - P_0 = S_{m+M}(P_1 - P_0),$$

откуда можно выразить $P_1 - P_0$. В результате мы получаем

$$P_m = P_0 + \frac{S_m}{S_{m+M}}(P_{m+M} - P_0),\ S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q/p)^k.$$

Для $P_0 = 1$, $P_{m+M} = 0$ получаем

$$P_m = 1 - \frac{S_m}{S_{m+M}}.$$

Если $p = q = 1/2$, то

$$P_m = \frac{M}{m + M}$$

и вероятность проигрыша стремится к 1 при $M \to \infty$, причем в честной игре. Если же $p \neq q$, то

$$P_m = \frac{(q/p)^m - (q/p)^{m+M}}{1 - (q/p)^{m+M}}.$$

При $q < p$ получается $P_m \to (q/p)^m$, $M \to \infty$. При $q > p$ получается $P_m \to 1$, $M \to \infty$.

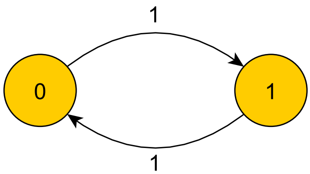
13. Стационарные распределения. Эргодические цепи

Определение. Распределение вероятностей состояний $\pi^0 = \{\pi_i^0\}_i$ называется *стационарным*, если

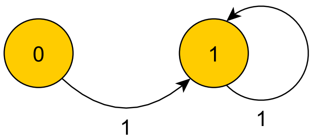
$$P^T \pi^0 = \pi^0,$$

где P – переходная матрица.

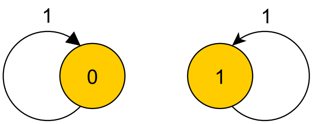
Примеры.



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi^0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pi^0 = \begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix} \ \forall p \in [0, 1]$$

Теорема. *Однородная цепь Маркова со стационарным распределением является стационарным в узком смысле процессом.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор из сечений $(X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_m})$, в котором для определенности $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$, и вспомним, что

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = x_1, \ldots, X_{n_m} = x_n) = \mathbb{P}(X_{n_1} = x_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{n_k} = x_k \,|\, X_{n_{k-1}} = x_{k-1}).$$

Теперь добавим к каждому из n_k одинаковое число шагов l. Так как распределение цепи стационарное, то

$$\mathbb{P}(X_{n_1} = x_1) = \mathbb{P}(X_{n_1+l} = x_1),$$

а так как цепь однородная, то

$$\mathbb{P}(X_{n_k} = x_k \mid X_{n_{k-1}} = x_{k-1}) = \mathbb{P}(X_{n_k+l} = x_k \mid X_{n_{k-1}+l} = x_{k-1}),$$

поэтому распределение векторов из сечений не зависит от сдвига по времени, что по определению означает стационарность в узком смысле.

Теорема. *Какой бы ни была конечная матрица переходов, для нее всегда найдется стационарное распределение состояний.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из одного варианта теоремы Брауэра о неподвижной точке, и для нашего случая доказательство проводится следующим образом. Рассмотрим множество всех стохастических векторов

$$\mathcal{P} = \{\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_N) : \ \pi_1 \geq 0, \ \ldots, \ \pi_N \geq 0, \ \pi_1 + \cdots + \pi_N = 1\}.$$

Легко видеть, что это множество выпуклое, замкнутое и ограниченное. Возьмем произвольный вектор $\pi \in \mathcal{P}$, введем обозначение $A = P^T$ и рассмотрим последовательность

$$w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A^k \pi$$

Так как преобразование A переводит стохастические векторы в стохастические, а множество $\mathcal{P}$ выпуклое, то $\{w_n\} \subset \mathcal{P}$. Далее, так как последовательность $\{w_n\}$ ограничена (она лежит в ограниченном множестве), то по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{w_{n_m}\}$, причем предел w этой подпоследовательности лежит в $\mathcal{P}$, так как множество $\mathcal{P}$ замкнутое. Из оценок

$$|Aw_{n_m} - w_{n_m}| = \frac{1}{n_m+1} \left| \sum_{k=0}^{n_m} \left(A^{k+1}\pi - A^k \pi \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{n_m+1} \left| A^{n_m+1}\pi - \pi \right| \leq \frac{\operatorname{diam}(\mathcal{P})}{n_m+1}$$

следует, что $|Aw_{n_m} - w_{n_m}| \to 0, \ m \to \infty$; здесь $\operatorname{diam}(\mathcal{P})$ – диаметр множества $\mathcal{P}$, он конечен в силу ограниченности $\mathcal{P}$. Так как

$$A(w_{n_m} - w) - (w_{n_m} - w) \to 0, \ Aw_{n_m} - w_{n_m} \to 0,$$

то необходимо $Aw = w$. Значит, найдено стационарное распределение $\pi^0 = w$.

Эта теорема равносильна утверждению у том, что у любой конечной транспонированной стохастической матрицы P^T имеется собственный вектор π, такой, что все его компоненты неотрицательные, а их сумма равна единице. Заметим, что существование просто собственного вектора матрицы P^T, отвечающего собственному значению 1, очевидно вытекает из того, что 1 – это собственное число матрицы P, а значит, и матрицы P^T. Теорема выше более содержательная, она говорит о том, что среди таких собственных векторов обязательно найдется вектор, компоненты которого неотрицательные и их сумма равна 1.

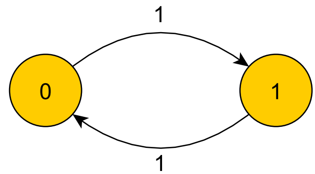
Определение. Цепь Маркова называется *эргодической*, если для любого $j \in S$ существует не зависящий от $i \in S$ положительный предел

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j > 0.$$

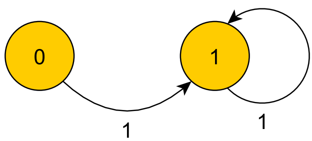
Иначе цепь называется *неэргодической*.

Теорема. Конечная цепь Маркова является эргодической тогда и только тогда, когда она неразложимая и непериодическая. В конечной эргодической цепи Маркова предельные вероятности $p_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ образуют стационарное распределение, которое единственно.

Примеры.

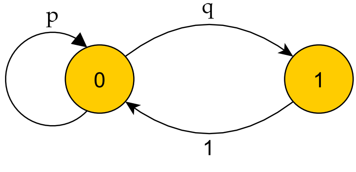


Здесь $p_{00}(2n) = 1$, $p_{00}(2n+1) = 0$, $n \geq 1$. Поэтому предел $p_{00}(n)$ не существует, цепь неэргодическая.



$P = P^2 = P^3 = \ldots$, значит, для всех i, j пределы $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ существуют, но $p_{00}(n) \to 0$, поэтому цепь неэргодическая.

Рассмотрим теперь цепь со стохастическим графом



Это конечная неразложимая непериодическая цепь, поэтому она является эргодической. Воспользуемся свойствами эргодической цепи, чтобы найти предел

$$P^n \to P_L,\ n \to \infty.$$

Так как цепь эргодическая, то $p_{ij}(n) \to p_j > 0$, поэтому

$$P_L = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 \\ p_0 & p_1 \end{bmatrix}.$$

Известно, что предельные вероятности $\pi = [p_0, p_1]^T$ образуют стационарное распределение, причем единственное в цепи. Стационарное распределение удовлетворяет уравнению

$$P^T\pi = \pi \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix},$$

откуда получаем два уравнения

$$pp_0 + p_1 = p_0,\ qp_0 = p_1.$$

Если подставить выражение для p_1 из второго уравнения в первое, получится верное тождество, так как $p+q = 1$. Поэтому первое уравнение мы выкинем из рассмотрение и добавим к этим уравнениям условие $p_0+p_1 = 1$, чтобы вектор p образовывал именно распределение. Отсюда получаем

$$p_0 = \frac{1}{1+q},\ p_1 = \frac{q}{1+q},$$

так что в результате получаем

$$P_L = \frac{1}{1+q} \begin{bmatrix} 1 & q \\ 1 & q \end{bmatrix}.$$

Отметим, что свойство эргодичности цепи позволило вычислить предельные вероятности, не вычисляя собственные числа и векторы матрицы перехода.

14. Непрерывные цепи Маркова

Задача 1. Пусть $X(t)$, $t \geq 0$ – непрерывная цепь Маркова. Доказать, что последовательность $Y_n = X(n)$, $n = 0, 1, \ldots$, является дискретной цепью Маркова. Найти матрицу перехода и начальное распределение цепи Y_n.

Решение. Для цепи $X(t)$ справедливо марковское свойство:

$$\mathbb{P}(X(t_n) = x_n \,|\, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1) =$$
$$= \mathbb{P}(X(t_n) = x_n \,|\, X(t_{n-1}) = x_{n-1}),$$

причем по определению оно выполнено для всех $t_1 < \dots < t_n$ из $T = [0, \infty)$, в том числе и для $t_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. По определению это означает справедливость марковского свойства для $Y_n = X(n)$. Обозначим за $p_{ij}^X(s,t)$, $s \geq t$, матрицу перехода цепи X, за $p_{ij}^Y(m,n)$, $m \geq n$ – матрицу перехода цепи Y, за $\pi_i^X(0)$ и $\pi_i^Y(0)$ – начальные распределения цепей X и Y соответственно. Тогда

$$\pi_i^Y(0) = \mathbb{P}(Y_0 = i) = \mathbb{P}(X(0) = i) = \pi_i^X(0).$$

Что касается матриц перехода,

$$p_{ij}^Y(m,n) = \mathbb{P}(Y_n = j \,|\, Y_m = i) = \mathbb{P}(X(n) = j \,|\, X(m) = i) = p_{ij}^X(m,n).$$

Заметим также, что если цепь $X(t)$ однородная, то и цепь Y_n тоже однородная. Тогда матрица перехода в цепи Y_n равна

$$p_{ij}^Y(n) = \mathbb{P}(Y_n = j \,|\, Y_0 = i) = \mathbb{P}(X(n) = j \,|\, X(0) = i) = p_{ij}^X(n),$$

а матрица перехода за один шаг равна

$$p_{ij}^Y(1) = p_{ij}^X(1).$$

Если конечная цепь X имеет непрерывные справа траектории (и следовательно обладает Q-матрицей), то матрица перехода $P^X(1) = \left\|p_{ij}^X(1)\right\|$ ищется как решение при $t = 1$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений

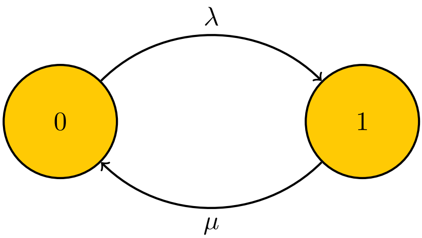
$$\dot{P}^X = QP^X, \;\; P^X(0) = I$$

или

$$\dot{P}^X = P^X Q, \;\; P^X(0) = I$$

на интервале времени $t \in [0, 1]$.

Задача 2. Найти распределение вероятностей состояний $\pi(t)$ и переходную матрицу $P(t)$ для следующей непрерывной цепи Маркова ($\lambda > 0$, $\mu > 0$).



Решение. В первую очередь выпишем матрицы Q и Q^T для данной цепи. По условию задачи, $q_{01} = \lambda$, $q_{10} = \mu$. Так как $q_{00} + q_{01} = 0$, то $q_{00} = -\lambda$. Аналогично, так как $q_{10} + q_{11} = 0$, то $q_{11} = -\mu$. Поэтому

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}, \quad Q^T = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}.$$

Теперь запишем дифференциальное уравнение Колмогорова:

$$\dot{\pi}(t) = Q^T \pi(t),$$

где $\pi(t) = [\pi_0(t), \pi_1(t)]^T$. Это однородная линейная система дифференциальных уравнений. Ее можно решить двумя способами.

Способ 1 (общий). Как известно, решение линейных систем уравнений представляет собой линейную комбинацию линейно независимых решений. Линейно независимые решения можно искать через собственные (и, быть может, присоединенные) векторы и собственные числа матрицы системы. Найдем собственные числа матрицы Q^T:

$$\begin{vmatrix} -\lambda - r & \mu \\ \lambda & -\mu - r \end{vmatrix} = r^2 + (\lambda + \mu) r = 0,$$

откуда $r_1 = 0$ и $r_2 = -(\lambda + \mu) < 0$. Так как собственные числа различные, то собственных векторов будет достаточно, чтобы сформировать линейно независимые решения. При $r = 0$ получаем

$$Q^T - rI = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix},$$

откуда собственный вектор $\boldsymbol{v}_1 = [\mu, \lambda]^T$. При $r = -(\lambda + \mu)$ получаем

$$Q^T - rI = \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix},$$

откуда собственный вектор $\boldsymbol{v}_2 = [1, -1]^T$. Отсюда получаем общий вид решения

$$\pi(t) = C_1 \boldsymbol{v}_1 + C_2 \boldsymbol{v}_2 e^{-t(\lambda+\mu)} = \begin{bmatrix} C_1\mu + C_2 e^{-t(\lambda+\mu)} \\ C_1\lambda - C_2 e^{-t(\lambda+\mu)} \end{bmatrix}.$$

Пусть в начальный момент времени известно распределение $\pi(0) = [\pi_0(0), \pi_1(0)]^T$. Получаем систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1\mu + C_2 = \pi_0(0) \\ C_1\lambda - C_2 = \pi_1(0) \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\lambda+\mu}, \ C_2 = \pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Значит, искомые вероятности

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-t(\lambda+\mu)},$$

$$\pi_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-t(\lambda+\mu)}.$$

Способ 2 (простой). Запишем сначала уравнения по отдельности:

$$\dot\pi_0 = \mu\pi_1 - \lambda\pi_0,$$

$$\dot\pi_1 = \lambda\pi_0 - \mu\pi_1.$$

Затем воспользуемся равенством $\pi_0(t) + \pi_1(t) = 1$, которое выполнено в любой момент времени t, и сведем задачу к одному уравнению

$$\dot\pi_0 = -(\lambda+\mu)\pi_0 + \mu,$$

решение которого имеет вид

$$\pi_0(t) = Ce^{-t(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Константа C находится из начального условия $\pi_0(0)$. Далее определяется

$$\pi_1(t) = 1 - \pi_0(t).$$

Теперь перейдем к вычислению переходной матрицы $P(t)$. Для этого возьмем уравнения

$$\dot P(t) = P(t)Q$$

и заметим, что каждая строка $p_i(t)$ матрицы $P(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\dot p_i^T(t) = Q^T p_i^T(t).$$

Общий вид этих уравнений нам уже известен, и мы можем сразу написать:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(p_{00}(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-t(\lambda+\mu)},$$

$$p_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \left(p_{00}(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-t(\lambda+\mu)},$$

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(p_{10}(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-t(\lambda+\mu)},$$

$$p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \left(p_{10}(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-t(\lambda+\mu)}.$$

Теперь остается вспомнить, что $p_{00}(0) = p_{11}(0) = 1$, $p_{01}(0) = = p_{10}(0) = 0$, тогда

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-t(\lambda+\mu)},\ p_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-t(\lambda+\mu)},$$

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-t(\lambda+\mu)},\ p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-t(\lambda+\mu)}.$$

Обратим внимание на то, что при $t \to \infty$

$$p_{00}(t) \to \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_{01}(t) \to \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$p_{10}(t) \to \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_{11}(t) \to \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$\pi_0(t) \to \frac{\mu}{\lambda+\mu},\ \pi_1(t) \to \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Это – проявление *эргодичности* непрерывной цепи Маркова. Эргодичность непрерывной цепи Маркова определяется таким же образом, как для дискретной цепи Маркова, а именно как существование положительных пределов $p_{ij}(t) \to p_j > 0$, не зависящих от i. Цепь, данная выше, является эргодической, мы показали это, вычислив матрицу $P(t)$ в произвольный момент времени с помощью анализа собственных чисел матрицы Q и перейдя к пределу при $t \to \infty$. Но, как и в дискретных цепях Маркова, есть удобный способ определения эргодичности цепей и поиска пределов p_j без анализа собственных чисел. Делается это с помощью классификации состояний цепей.

Определения существенности, сообщаемости, нулевости для состояний можно ввести для непрерывных цепей точно так же, как это делается для дискретных цепей, нужно только заменить дискретные шаги m, n на непрерывные моменты времени t, s. Определение возвратности и критерий возвратности немного скорректируются. Понятия периодического состояния в непрерывных цепях уже нет. Неразложимость цепей будем понимать точно так же – как сообщаемость всех состояний в цепи. Теорема о солидарности в непрерывных цепях сохраняется. Критерий эргодичности станет даже проще.

Критерий эргодичности. *Конечная непрерывная цепь Маркова является эргодической тогда и только тогда, когда она является неразложимой.*

Стационарное распределение π^0 определяется как такое, для которого $P^T(t)\pi^0 = \pi^0$ для любых $t \geq 0$. Так как для любого распределения $\dot{\pi}(t) = Q^T\pi(t)$, то для стационарного распределения получаем $Q^T\pi^0 = 0$, то есть стационарное распределение – это собственный вектор (нормированный на единицу в смысле нормы, равной сумме абсолютных значений компонент вектора) матрицы Q^T и отвечающий нулевому собственному значению.

Цепь выше является неразложимой, поэтому она является эргодической, и пределы $p_0 = \mu/(\lambda + \mu)$ и $p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$ можно найти как решения системы уравнений $Q^T p = 0$, естественно при условии $p_0 + p_1 = 1$, так как $\{p_j\}$ образуют распределение вероятностей.

Задача 3. Некий вирус может находиться в $N + 1$ штамме $0, \ldots, N$. Он сидит в своем штамме случайное время, распределенное как $\mathrm{Exp}(\lambda)$, а затем с равными вероятностями мутирует в один из остальных штаммов. Найти установившуюся вероятность пребывания вируса в том же штамме, что и в начальный момент.

Решение. Для того чтобы что-то понять про непрерывную цепь, достаточно определить Q-матрицу цепи. Из лекций мы знаем, что в этом случае на диагонали Q-матрицы стоят числа $q_{ii} = -q_i$ – это взятые с обратным знаком интенсивности времени пребывания в состоянии i, а $q_{ij} = P_{ij}q_i$ связаны с вероятностями P_{ij} перейти из состояния i в состояние j в момент прыжка. В условии задачи дано распределение времени пребывания в каждом из штаммов, это показательно распределенная случайная величина интенсивности λ, а переходы в другие состояния в момент прыжка равновероятны, значит,

$$q_{ii} = -q_i = -\lambda,\ q_{ij} = \frac{\lambda}{N},\ i \neq j.$$

Q-матрица в таком случае выглядит так:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda/N & \ldots & \lambda/N \\ \lambda/N & -\lambda & \ldots & \lambda/N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda/N & \lambda/N & \ldots & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Цепь конечная, и так как можно из любого состояния попасть в любое другое, то цепь неразложимая и поэтому эргодическая. Это значит, что предельные вероятности $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j$ существуют, положительны, не зависят от i и образуют единственное стационарное распределение в цепи. Стационарное распределение удовлетворяет равенству $Q^T p = 0$. Очевидно, что вектор

$$p = [1/(N+1), \ldots, 1/(N+1)]^T$$

удовлетворяет этому уравнению и является распределением, а так как стационарное распределение в эргодической цепи единственно, то это – искомое распределение. Кроме того, это предельное распределение не зависит от начального распределения. В терминах задачи, независимо от того, в каком штамме изначально находился вирус, через долгое время он будет равномерно распределен по всем штаммам. Вероятность находиться в том же штамме, с которого он начал, будет тоже в частности, равна $1/(N+1)$.

Обсудим теперь *свойство отсутствия памяти* у случайных величин с показательным распределением. Пусть есть автобусная остановка, на которую автобусы прибывают через случайные интервалы времени, имеющие одно и то же показательное распределение $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Пусть в момент времени $t = 0$ с остановки отбыл очередной автобус, и до следующего автобуса остается время $\tau \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. Допустим, пассажир приходит на остановку в какое-то промежуточное время, не обязательно $t = 0$, и он не знает ни о том, когда был последний автобус, ни когда будет следующий. Оказывается, что время ожидания следующего автобуса тоже показательное и тоже $\mathrm{Exp}(\lambda)$, независимо от того, когда он пришел на остановку. Это – уникальное свойство показательного распределения, только это распределение (среди непрерывных) обладает этим свойством. Ясно поэтому, почему это распределение ожидаемо появляется в непрерывных марковских цепях – ведь если будущее марковской цепи определяется лишь настоящим, то не важно в какой момент времени начинается наблюдение за цепью, все будущее, распределения всех величин, связанных с процессом, должны быть одинаковыми независимо от момента начала, и только показательное распределение среди непрерывных обладает таким свойством. Это – нестрогие, но интуитивно понятные размышления, а формальный и строгий вывод распределения для времени пребывания в цепи был дан на лекции.

Формализуем свойство отсутствия памяти. Итак, пусть $\tau \in\in \mathrm{Exp}(\lambda)$ – случайное время между автобусами, причем один из автобусов был на остановке в момент $t = 0$. Пусть пассажир пришел на остановку в момент времени $t = s$ и до этого момента больше автобусов на остановке не было. Обозначим его время ожидания автобуса за τ' (это время отсчитывается от момента $t = s$). Тогда

$$\mathbb{P}(\tau' > x) = \mathbb{P}(\tau > s + x \,|\, \tau > s) = \frac{\mathbb{P}(\tau > s + x)}{\mathbb{P}(\tau > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda x},$$

то есть $\tau' \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. То, что случайная величина τ' (время ожидания до автобуса, начиная от произвольного момента времени между их прибытиями на станцию) имеет то же распределение, что и τ (время ожидания от одного автобуса до следующего), и называется отсутствием памяти у показательного распределения. Почему только это распределение среди непрерывных обладает этим свойством? Из выкладок выше видно, что так получается просто потому, что для показательного распределения $\mathbb{P}(\tau > x + s) = \mathbb{P}(\tau > x)\mathbb{P}(\tau > s)$, то есть функция $f(t) = \mathbb{P}(\tau > t)$ обладает свойством

$$f(t + s) = f(t)f(s).$$

Такая функция f нигде не обращается в ноль, иначе она была бы тождественно равна нулю, что не является распределением. Если прологарифмировать это равенство и ввести обозначение $g(t) = \ln f(t)$, то получится функциональное уравнение Коши $g(t + s) = g(t) + g(s)$, которое среди непрерывных функций имеет только решения вида $g(t) = Ct$, а стало быть, $f(t) = e^{Ct}$. Случаи $C < 0$ отвечают непрерывным распределениям, причем – показательным.

Интересно отметить, что среди дискретных распределений отсутствием памяти обладает только геометрическое распределение, то есть распределение случайной величины $\xi \in \mathrm{Geom}(p)$, принимающей значения $1, 2, 3, \ldots$ с вероятностями

$$\mathbb{P}(\xi = k) = (1 - p)^k p.$$

Для него $\mathbb{P}(\xi > k) = (1 - p)^k$ и

$$\mathbb{P}(\xi > m + n \,|\, \xi > m) = \mathbb{P}(\xi > n).$$

Вспомним, что геометрическое распределение возникает как распределение числа испытаний Бернулли до первого «успеха» (вероятность успеха в испытании Бернулли равно p).

Замечание для въедливых. Случайная величина τ' не определена на том же вероятностном пространстве, что и τ, так как не определена для всех исходов (например, она не определена для исходов, когда $\tau < s$), хотя она является измеримой функцией на этом пространстве и определена на подмножестве с положительной мерой. Поэтому, строго говоря, выражение $\mathbb{P}(\tau' > x)$ на исходном вероятностном пространстве не имеет смысла. Строго говоря, имеется в виду, что τ' определена на том, что я иногда называю *вероятностным подпространством* вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором определена случайная величина τ. А именно, в качестве пространства исходов рассмотрим $\Omega' = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > s\}$, в качестве сигма-алгебры выберем $\mathcal{F}' = \{A \cap \Omega' : A \in \mathcal{F}\}$, а в качестве меры выберем $\mathbb{P}'(B) = \mathbb{P}(B \,|\, \Omega')$, $B \in \mathcal{F}'$. На этом пространстве τ' определена всюду и измерима, то есть является случайной величиной. Так что $\mathbb{P}'(\tau' > x) = \mathbb{P}(\tau > s + x \mid \tau > s)$ и так далее.

15. Системы массового обслуживания

Непрерывные цепи Маркова – это стандартная модель для так называемых систем массового обслуживания. На вход системе подается поток заявок (он моделируется обычно как простейший поток событий) и внутри этой системы заявки как-то обрабатываются, причем часто компоненты этой системы сами представляют собой простейшие потоки событий. Например, это могут быть звонки в службу поддержки, которые поступают через случайное время с показательным распределением, причем каждая заявка тоже обрабатывается случайное время с показательным распределением. Это могут быть и службы сервиса электронных компонент каких-то устройств: сначала компонент устройства работает какое-то случайное время с показательным распределением, выходит из строя, а служба сервиса ремонтирует этот компонент тоже случайное время с показательным распределением и компонент продолжает свою работу. Число компонентов и различных состояний систем массового обслуживания может быть очень много. Часто интересуются именно установившимися распределениями вероятностей состояний.

Системы массового обслуживания моделируются как непрерывные цепи Маркова, а они определяются однозначно начальным распределением и матрицей перехода за произвольное время. Если цепь эргодичная, то установившееся распределение вероятностей (на лекции показано, что они совпадают с предельными вероятностями переходов) в цепи не зависит от начального распределения. Получается, что в эргодических цепях все определяется вероятностями перехода, но даже для простых случаев поиск этих вероятностей – задача не самая приятная с технической точки зрения. Ключ к выходу из ситуации – найти Q-матрицу цепи, она однозначно определяет и стационарное распределение и матрицу перехода, если она все же нужна. Q-матрица системы ищется очень легко, причем даже для очень сложных и запутанных систем. Разберем на эту тему две задачи.

Задача 1. Простейший поток заявок интенсивности λ поступает в систему массового обслуживания, состоящую из двух параллельно работающих каналов. Время обслуживания в первом и втором каналах имеет распределение соответственно $\mathrm{Exp}(\mu_1)$ и $\mathrm{Exp}(\mu_2)$. Предположим, что обслуживание в каналах происходит независимым образом, а заявка выбирает для обслуживания канал случайным равновероятным образом, если оба канала свободны. Построить стохастический граф процесса обслуживания и найти установившиеся вероятности состояний системы.

Решение. Процесс $\xi(t)$, описывающий работу системы, имеет четыре возможных состояния:

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если в системе нет ни одной заявки,} \\ 1, & \text{если первый канал занят, а второй свободен,} \\ 2, & \text{если первый канал свободен, а второй занят,} \\ 3, & \text{если оба канала заняты.} \end{cases}$$

Будем считать этот процесс марковским (это стандартная модель для систем обслуживания). Рассчитаем интенсивности переходов. Пусть $h > 0$, тогда

$$p_{01}(h) = (\lambda h + o(h)) \cdot (1/2),\ \ h \to 0,$$

откуда $\lambda_{01} = \lambda/2$. Аналогично получается $\lambda_{02} = \lambda/2$. Далее, $p_{03}(h) = o(h)$, потому что для этого одновременно за малое время должны прийти сразу две заявки, поэтому $\lambda_{03} = 0$. Далее,

$$p_{13} = \lambda h + o(h).$$

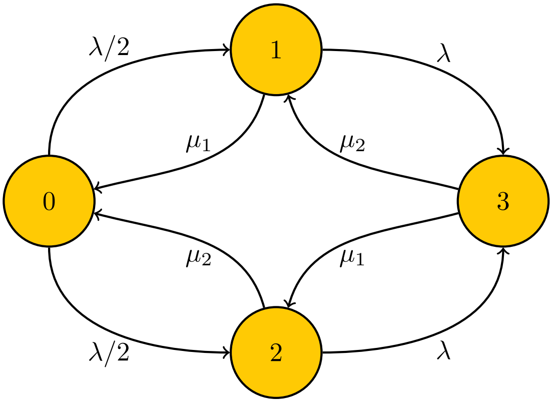
Действительно, для перехода из состояния 1 в состояние 3 может произойти множество событий (заявки могут уходить и приходить на каналы 1 и 2 за это время), но вероятность только одного из этих событий пропорциональна h, а не h^2 и высшим степеням – вероятность события, в котором на канале 1 остается заявка, а на канал 2 поступает заявка. Так что $\lambda_{13} = \lambda$ и аналогично $\lambda_{23} = \lambda$.

Теперь $p_{10}(h) = \mu_1 h + o(h)$. Здесь рассуждения точно такие же: для перехода из состояния 1 в состояние 0 может произойти множество различных событий, но вероятность только одного из них пропорциональна h, а не высшим степеням h – событие, в котором на второй канал не поступает заявок, а заявка с первого канала обработана. Поэтому $\lambda_{10} = \mu_1$. Аналогично $\lambda_{20=\mu_2}$, $\lambda_{31} = \mu_2$, $\lambda_{32} = \mu_1$. Остальные интенсивности равны нулю.

В результате мы имеем цепь Маркова с Q-матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda/2 & \lambda/2 & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1 - \lambda & 0 & \lambda \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 - \lambda & \lambda \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Стохастический граф цепи выглядит так:



Цепь конечная и неразложимая, поэтому эргодическая. В ней существует единственное стационарное состояние, и оно удовлетворяет уравнению

$$Q^T \pi^0 = 0.$$

Среди распределений (то есть векторов с неотрицательными компонентами и единичной суммой компонент) решение имеет вид $\pi^0 = \pi / \left\|\pi\right\|_1$ (норма вектора понимается здесь как сумма модулей компонент вектора), где

$$\pi_0 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\lambda^2}, \ \pi_1 = \frac{\mu_2}{\lambda}, \ \pi_2 = \frac{\mu_1}{\lambda}, \ \pi_3 = 1.$$

Задача 2. Пусть система обслуживания устроена так:

1) на вход поступает простейший поток заявок интенсивности λ,

2) в системе одновременно пребывает не более N заявок,

3) обслуживание заявок ведут s независимых каналов, причем время обслуживания в каждом канале случайно и распределено по экспоненциальному закону с параметром μ,

4) если все s каналов заняты, то заявка может занять одно из $N - s$ мест в очереди и ожидать обслуживания неограниченно долго (если есть хотя бы одно свободное место в очереди).

Требуется:

а) показать, что процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, где $\xi(t)$ – число заявок в системе в момент t, является процессом гибели и рождения,

б) построить стохастический граф процесса,

в) найти установившееся распределение вероятностей состояний,

г) вычислить среднее число заявок, находящихся в системе, и среднюю длину очереди.

Решение. Пусть $\xi(t) = n$ означает, что в системе обслуживания в момент t находится n заявок, $n = 0, 1, \ldots, N$. Если $n \leq s$, то в очереди все места свободны. Если же $s < n \le N$, то s заявок проходят обслуживание, а $n - s$ ожидают обслуживание в очереди. Рассмотрим состояние $i \ne N$. Тогда для $h > 0$

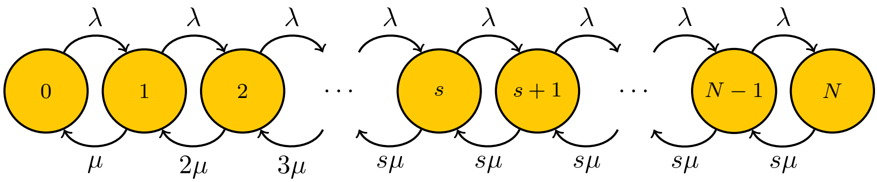
$$p_{i,i+1}(h) = (\lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^r,\ h \to 0,$$

где r – число занятых каналов обслуживания, таких каналов у нас не больше, чем s, поэтому $r = \min(i, s)$. Отсюда $\lambda_{i,i+1} = \lambda$, $i \ne 0, N$. Далее, для $i \ne 0$

$$p_{i,i-1}(h) = (1 - \lambda h + o(h))C_1^r(\mu h + o(h))(1 - \mu h + o(h))^{r-1} = r\mu h + o(h),$$

откуда $\lambda_{i,i-1} = \min(i, s)\mu$. Очевидно, любые другие интенсивности равны нулю.

В результате мы действительно получаем процесс гибели и рождения. Интенсивности рождения при этом равны $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, \ldots, N$, а интенсивности гибели равны $\mu_i = \min(i, s)\mu$. Стохастический граф цепи имеет вид



Цепь конечна и неразложима, она эргодическая, поэтому у нее существует единственное стационарное распределение. Как известно, у процессов гибели и рождения стационарное распределение выражается формулами

$$\pi_0^0 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_N}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_N}\right)^{-1},\ \pi_j^0 = \frac{\lambda_j}{\mu_j}\pi_{j-1},\ j \ge 1.$$

В нашем случае удобно ввести обозначение $\rho = \lambda/\mu$ и тогда

$$\pi_0^0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^s}{s!}\sum_{k=1}^{N-s}\left(\frac{\rho}{s}\right)^k\right)^{-1},\ \pi_j^0 = \frac{\rho}{\min(j, s)}\pi_{j-1},\ j \ge 1.$$

Среднее число заявок в системе и в очереди:

$$n_{\text{ср}} = \sum_{n=0}^{N} n\pi_n^0,\ n_{\text{оч}} = \sum_{n=s+1}^{N}(n - s)\pi_n^0.$$

16. Вопросы на понимание

1. Что такое семейство конечномерных распределений и теорема Колмогорова?
2. Что такое пуассоновский процесс $K(t)$ и какова его связь с процессами восстановления?
3. Как связан пуассоновский процесс с пуассоновским потоком событий?
4. Назовите математическое ожидание и корреляционную функцию процессов $K(t)$ и $W(t)$.
5. Зависимы ли сечения процесса $K(t)$? А процесса $W(t)$?
6. Каково распределение промежутков между последовательными скачками процесса $K(t)$?
7. Что такое винеровский процесс $W(t)$ и какие есть способы доказать его существование?
8. Как связаны процессы $K(t)$ и $W(t)$ с процессами Леви?
9. Как восстановить семейство конечномерных распределений процесса Леви по распределению только одного его сечения?
10. Является ли процесс $K(t)$ дифференцируемым хоть в каком-нибудь смысле?
11. Является ли процесс $W(t)$ дифференцируемым хоть в каком-нибудь смысле?
12. Чему равна с.к.-производная процесса $X(t) = A\exp(Bt)$, где A и B – независимые случайные величины с конечным вторым моментом?
13. Какая общая идея лежит в доказательствах критериев с.к.-интегрируемости, с.к.-непрерывности и с.к.-дифференцируемости?
14. Откуда следует, что корреляционная функция процесса неотрицательно определена?
15. Верно ли, что если функция является неотрицательно определенной, то она является эрмитовой?
16. Верно ли, что если функция одной переменной является неотрицательно определенной, то она является характеристической функцией какой-то случайной величины?
17. Верно ли, что если функция является неотрицательно определенной, то она является корреляционной функцией какого-то случайного процесса?
18. Привести пример стационарного процесса, имеющего корреляционную функцию $R(t) = 1$.
19. Является ли $R(t) = \cos(t)$ корреляционной функцией какого-либо стационарного процесса?

20. Привести пример спектральной функции процесса с $R(t) = 1$.
21. Бывают ли нестационарные эргодические процессы?
22. Что и как позволяет оценить свойство эргодичности процесса?
23. Что такое временное среднее и среднее по пространству?
24. Являются ли $W(t)$ и $K(t)$ эргодическими? А $W(t)/t$ и $K(t)/t$?
25. Что такое спектральное разложение стационарного процесса?
26. Что такое процесс с ортогональными приращениями?
27. Является ли процесс с независимыми приращениями процессом с ортогональными приращениями?
28. Каков физический смысл спектральной плотности стационарного процесса?
29. Как связана спектральная плотность стационарного процесса со спектральной плотностью его с.к.-производной?
30. Какова характеристическая функция произвольного случайного нормального вектора?
31. У всякого ли нормального вектора существует плотность распределения?
32. Как показать линейную зависимость компонент нормального вектора в случае, когда корреляционная матрица вырождена?
33. Верно ли, что вектор из нормальных случайных величин является нормальным вектором?
34. Как преобразуются распределения нормальных векторов при линейных преобразованиях?
35. Как вычислить любой момент для нормального вектора?
36. Как найти условное мат. ожидание для нормального вектора?
37. Почему векторы из сечений винеровского процесса являются нормальными?
38. Пусть процесс стационарен в узком смысле. Верно ли, что пятый момент процесса (если он существует) не зависит от времени?
39. Всегда ли стационарный в узком смысле процесс является стационарным в широком смысле?
40. Являются ли $K(t)$ и $W(t)$ марковскими процессами? А процессы вообще Леви?
41. Что такое однородная дискретная цепь Маркова?
42. Пусть X имеет распределение Бернулли. Является ли цепью Маркова последовательность $(X, X, X, \dots)$?
43. Может ли состояние быть существенным и невозвратным?
44. Могут ли все состояния цепи быть нулевыми?
45. Могут ли состояния сообщаться и иметь разные периоды?
46. Может ли цепь быть неразложимой, непериодической и при этом неэргодической?

47. Как доказывается критерий возвратности состояния?
48. Всегда ли у конечной цепи существует ненулевое состояние?
49. Всегда ли у конечной цепи существует стационарное распределение? А у счетной?
50. Может ли у цепи быть бесконечное множество стационарных распределений?
51. Всегда ли сумма марковских цепей является марковской цепью?
52. Как исследовать цепь на эргодичность с помощью собственных чисел матрицы перехода?
53. Является ли пуассоновский процесс непрерывной цепью Маркова?
54. Что такое прямое и обратное уравнения Колмогорова? Каково их решение?
55. Каково время пребывания в одном состоянии в непрерывной цепи Маркова?
56. Что стоит на диагонали Q-матрицы и как это связано со временем пребывания?
57. Что такое уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка?
58. Как связаны марковские процессы с диффузионными процессами?
59. Как искать аналитическое решение стохастических уравнений?
60. Как искать численное решение стохастических уравнений?
61. Являются ли процессы с независимыми приращениями марковскими? А наоборот?

17. Вопросы для диктантов

Вопросы по первому заданию

1. Случайный процесс. Траектория и сечение. n-мерная функция распределения. Корреляционная и ковариационная функции.

2. Процесс с независимыми приращениями. Пуассоновский случайный процесс, его математическое ожидание и корреляционная функция. Распределение сечений пуассоновского процесса и интервалов между его прыжками. Нормальный случайный процесс. Винеровский процесс, его математическое ожидание и корреляционная функция. Теорема Вика и несколько примеров.

3. Сходимость в среднеквадратичном смысле, почти наверное, по вероятности, по распределению. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по Риману в среднем квадратичном. Критерии непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратичном.

4. Эргодический процесс. Критерий эргодичности. Достаточное условие эргодичности. Стационарность в узком и широком смыслах. Свойства корреляционной функции стационарного процесса. Теорема Хинчина. Теорема Крамера. Спектральная функция, спектральная плотность. Спектральная плотность с.к.-производной процесса.

Вопросы по второму заданию

1. Дискретная цепь Маркова. Переходная матрица. Однородная цепь Маркова. Распределение вероятностей состояний, его зависимость от шага. Формула Колмогорова–Чепмена.

2. Сообщающиеся, существенные, возвратные, нулевые, периодические состояния. Связь между нулевыми и возвратными состояниями. Критерий «возвратности» состояния. Неразложимая цепь Маркова. Теорема о солидарности.

3. Стационарное распределение. Эргодическая цепь Маркова. Эргодическая теорема для конечных цепей. Теорема о предельном распределении эргодической цепи.

4. Непрерывная цепь Маркова. Распределение вероятностей состояний и его эволюция со временем. Интенсивность перехода из состояние в состояние. Теорема Колмогорова для непрерывных цепей Маркова.

5. Ординарный поток событий. Поток событий без последействия. Однородный поток событий. Интенсивность потока событий. Простейший пуассоновский поток событий. Процессы гибели и рождения.

18. Задачи для сдачи заданий

18.1. Первое задание

Задача 1. Пусть случайный процесс $X(\omega, t) = \omega t$, $t \in [0, 1]$, определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}$ – множество всех подмножеств множества Ω, а мера $\mathbb{P}$ такова, что $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/3$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство процесса.

Задача 2. Поток сделок в фирме моделируется с помощью пуассоновского процесса $K(t)$ с интенсивностью $\lambda = 100$ сделок/ч. Каждая сделка приносит доход $V_n \in \mathrm{R}(a, b)$, $a = 10$, $b = 100$ условных единиц денег (R означает непрерывное равномерное распределение). Считая, что $K(t)$, $\{V_i\}$ – независимые в совокупности случайные величины, найдите математическое ожидание, дисперсию и характеристическую функцию выручки за время t. Докажите, что она имеет асимптотически нормальное распределение.

Задача 3. Случайный процесс $X(t)$, $t \geq 0$, представляет собой сумму n независимых пуассоновских процессов с интенсивностями λ_i, $i = 1, \ldots, n$. Определить тип и параметры процесса $X(t)$.

Задача 4. Пусть $K(t)$, $t \geq 0$ – пуассоновский случайный процесс интенсивности λ, а $X(t)$ – случайный процесс, полученный в результате удаления из $K(t)$ всех событий, очередной номер которых не кратен s. Определить тип и параметры распределения интервала между соседними событиями в случайном процессе $X(t)$.

Задача 5. Пусть случайный вектор $X \in \mathrm{N}(0, R)$ с матрицей ковариаций

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $\mathbb{E}(X_1^2 X_2^2)$, $\mathbb{E}(X_1 X_2^3 X_3)$, $\mathbb{E}(X_1 X_2 X_3^2)$.

Задача 6. Пусть $X(t)$ – нормальный (гауссовский) случайный процесс с математическим ожиданием $m_X(t) = m = \mathrm{const}$ и корреляционной функцией

$$R_X(t, s) = be^{-a|t-s|},\ a > 0,\ b > 0.$$

Найти вероятность $\mathbb{P}(X(t) > c \,|\, X(s) = x)$ для $t > s$.

Задача 7. Исследовать винеровский процесс $W(t)$, $t \geq 0$, на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость во всех смыслах (в среднем квадратичном, почти наверное, по вероятности, по распределению).

Задача 8. Исследовать пуассоновский процесс $K(t)$, $t \geq 0$, на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость во всех смыслах (в среднем квадратичном, почти наверное, по вероятности, по распределению).

Задача 9. Пусть A, X, Y – случайные величины такие, что V не зависит от A и X, причем V равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$, A и X имеют совместное распределение с функцией плотности распределения $f(a, x)$. Исследовать процесс $Z(t) = A\cos(Xt + V)$, $t \geq 0$, на стационарность в широком и узком смыслах.

Задача 10. Пусть $K(t)$, $t \geq 0$ – пуассоновский случайный процесс интенсивности λ. Исследовать процесс

$$X(t) = K(t + 1) - K(t),\ t \geq 1$$

на стационарность в широком смысле.

Задача 11. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

(Доказать это утверждение как для стационарности в широком смысле, так и узком смысле).

Задача 12. Пусть $K(t)$, $t \geq 0$ – пуассоновский случайный процесс интенсивности λ. Исследовать процесс $X(t) = K(t)/t$, $t \geq 1$, на эргодичность по математическому ожиданию.

Задача 13. В модели Блэка–Шоулса–Мертона эволюция цены акции описывается геометрическим броуновским движением

$$S(t) = S(0)\exp\left(at + \sigma W(t)\right),\ t \geq 1,$$

где $S(0)$, a и $\sigma > 0$ – неслучайные постоянные величины, $W(t)$ – винеровский процесс. Воспользовавшись понятием эргодичности случайных процессов, оценить неизвестную величину a.

Задача 14. 1) Может ли функция

$$R(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T, T], \\ 0, & t \notin [-T, T] \end{cases}$$

быть характеристической функцией некоторой случайной величины?

2) А корреляционной функцией некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса?

3) Изменится ли ответ, если сгладить разрывы функции $R(t)$ в точках $t = \pm T$?

4) Является ли функция

$$R(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

неотрицательно определенной?

5) Верно ли, что если функция является неотрицательно определенной, то она является характеристической функцией некоторой случайной величины? А корреляционной функцией случайного процесса?

6) Как связана неотрицательная определенность функции и неотрицательность ее Фурье-образа?

7) Какой физический смысл имеет спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса?

Задача 15. Построить пример стационарного процесса $X(t)$ с корреляционной функцией $R_X(t) = \cos t$. Найти спектральную функцию этого процесса. Существует ли спектральная плотность этого процесса?

Задача 16. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора, сопротивления и источника сторонних ЭДС. ЭДС $\mathcal{E}(t)$, заряд $q(t)$

на обкладках конденсатора и производные $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ считаются достаточно с.к.-гладкими стационарными в широком смысле случайными процессами с нулевым математическим ожиданием. Считая известной спектральную плотность $\rho_{\mathcal{E}}(\lambda)$ процесса $\mathcal{E}(t)$, вычислить спектральную плотность $\rho_q(\lambda)$ процесса $q(t)$.

18.2. Второе задание

Задача 1. Показать, что для дискретной марковской цепи при $m_1 < m_2 < m_3$ выполнено равенство

$$\mathbb{P}(X_{m_1} = x_1, X_{m_3} = x_3 \,|\, X_{m_2} = x_2) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{m_1} = x_1 \,|\, X_{m_2} = x_2)\mathbb{P}(X_{m_3} = x_3 \,|\, X_{m_2} = x_2).$$

Задача 2. Доказать, что условие

$$\mathbb{P}(X_{m_n} = x_n \,|\, X_{m_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{m_0} = x_0) = \mathbb{P}(X_{m_n} = x_n \,|\, X_{m_{n-1}} = x_{n-1})$$

в определении марковской цепи равносильно условию

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n \,|\, X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Здесь $n \geq 1$, $m_0 < m_1 < \cdots < m_n$.

Задача 3. Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n$ – дискретная марковская цепь. Является ли марковской последовательность $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0$?

Задача 4. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения -1 и 1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Выяснить, будет ли последовательность $\{Y_n\}$ марковской цепью, если

$$1)\ Y_n = X_n X_{n+1}, \quad 2)\ Y_n = \max_{0 \leq i \leq n} X_i, \quad 3)\ Y_n = \prod_{i=0}^{n} X_i.$$

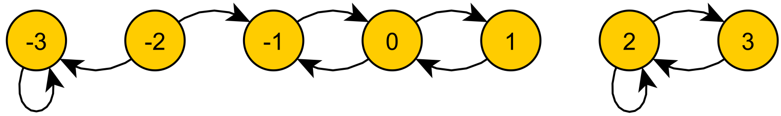
Задача 5. Пусть $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ – две марковские цепи. Будет ли марковской последовательность $\{X_n + Y_n\}$?

Задача 6. Пусть $\{X_n\}$ – марковская цепь, а $\psi(x)$ – некоторая функция. Будет ли последовательность $\{\psi(X_n)\}$ марковской цепью?

Задача 7. Классифицировать состояния однородной дискретной цепи Маркова с множеством состояний $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ и изображенной на рисунке (стрелками изображены переходы, имеющие ненулевые вероятности).

Задача 8. Доказать, что в конечной неразложимой однородной дискретной цепи Маркова все состояния ненулевые.

Задача 9. Доказать, что если j-е состояние невозвратно, то для всех i сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)$.



Задача 10. Доказать, что неразложимая дискретная марковская цепь, у матрицы переходных одношаговых вероятностей которой хотя бы один диагональный элемент положителен, не может быть периодической. Может ли неразложимая дискретная цепь Маркова, у матрицы одношаговых переходных вероятностей которой все диагональные элементы равны нулю, быть непериодической?

Задача 11. Проведение некоторого эксперимента состоит в осуществлении большого числа шагов. На каждом шаге может быть выбрано одно из двух возможных действий. Каждое действие может привести как к успеху, так и к неудаче данного шага. Существуют вероятности успеха p_1 и p_2 первого и второго действий соответственно и вероятности их неудач $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, которые экспериментатору неизвестны. Цель экспериментатора состоит в максимизации математического ожидания числа успехов в эксперименте в целом. Сравнить две стратегии проведения эксперимента: а) равновероятный выбор на каждом шаге каждого действия, б) повторение на следующем шаге действия, приведшего к успеху на предшествующем шаге, и смена действия, приведшего к неудаче.

Задача 12. Поток событий является однородным и не имеет последействия. Величина длины интервала времени между двумя последовательными событиями имеет показательное распределение $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Длины интервалов времени между событиями независимы в совокупности. Доказать, что поток – простейший.

Задача 13. Поток отказов прибора – простейший с интенсивностью λ. Если прибор отказал, то отказ обнаруживается в течение случайного времени, имеющего распределение $\mathrm{Exp}(\nu)$. Ремонт осуществляется после обнаружения отказа и продолжается случайное время с распределением $\mathrm{Exp}(\mu)$. Найти стационарную вероятность того, что прибор исправен.

Задача 14. Пусть $X(t)$ – центрированный нормальный процесс. Доказать, что для того, чтобы этот процесс был марковским, необходимо, чтобы его корреляционная функция $R_X(t,s)$ удовлетворяла при $t_1 \le t_2 \le t_3$ равенству

$$R_X(t_1,t_3) = \frac{R_X(t_1,t_2)R_X(t_2,t_3)}{R_X(t_2,t_2)}.$$

(Это свойство является и достаточным для марковости нормального процесса, но доказать это сложнее.)

Задача 15. Пусть $\{X(t), t \in [0,1]\}$ – броуновский мост, то есть

$$X(t) = W(t) - tW(1),$$

где $W(t)$ – винеровский процесс. Показать, что процесс $X(t)$ является марковским. Показать, что он не является процессом с независимыми приращениями.

Задача 16. Доказать, что процесс Орнштейна–Уленбека (Ornstein–Uhlenbeck):

$$X(t) = \frac{\sigma}{2\theta} e^{-\theta t} W(e^{2\theta t}),\ \sigma, \theta, t > 0,$$

где $W(t)$ – винеровский процесс, является нормальным стационарным марковским процессом.

Заключение

В учебном пособии были приведены задачи с решениями по курсу «Случайные процессы». Подробно разобраны задачи по ключевым разделам теории случайных процессов: гауссовские, стационарные, эргодические, марковские процессы, а также стохастический анализ. Задачи, а также вопросы на понимание и вопросы для диктантов рекомендуются автором к использованию на семинарских занятиях, а также на контрольных работах, экзаменах и приеме заданий по предмету. Литература в конце пособия рекомендуется для углубления и расширения знаний в вышеуказанных разделах теории случайных процессов и знакомства с приложениями. Приводится также сборники задач, в которых можно найти больше разобраных примеров с указаниями к решению.

Литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. Москва : Эдиториал УРСС, 1999.
2. Булинский А.В. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. Москва : МФТИ, 2010.
3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Лекции по случайным процессам : учебное пособие / под ред. А.В. Гасникова. Москва : ЛЕНАНД, 2022.
5. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. Москва : МЦНМО, 2010.
6. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. Москва : Мир, 1969.
7. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. Москва : Физматлит, 2002.
8. Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А. Основы теории случайных процессов : учеб. пособие. Москва : МЗ Пресс; МФТИ, 2003.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. 6-е изд., испр. Москва : МЦНМО, 2017.
10. Чжун К.-л. Однородные цепи Маркова. Москва : Мир, 1964.
11. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1981.