

С.А. Мирер

МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Учебное пособие

Часть II

Оглавление

Глава 4. Динамика ракет и орбиты переходов.....	110
4.1. Движение ракеты.....	110
4.2. Многоступенчатые ракеты.....	112
4.3. Орбиты перехода в поле одного притягивающего центра.....	113
4.4. Переход между круговыми компланарными орбитами.....	114
4.5. Сокращение времени перехода.....	120
4.6. Доказательство оптимальности гомановского перехода.....	123
4.7. Поворот плоскости орбиты.....	129
4.8. Трехимпульсный поворот плоскости орбиты.....	131
Глава 5. Задача трех тел.....	134
5.1. Задача трех тел в инерциальной системе отсчета.....	134
5.2. Случай n гравитирующих точек.....	140
5.3. Движение двух материальных точек относительно барицентра.....	141
5.4. Лагранжевы движения.....	144
5.5. Движение n материальных точек относительно одной из них.....	147
5.6. Случаи сведения задачи трех тел к задаче двух тел.....	151
5.7. Сфера притяжения и сфера действия.....	156
5.7.1. Сфера притяжения.....	156
5.7.2. Сфера действия.....	158
5.8. Приближенная методика.....	163
5.8.1. Задача о третьей космической скорости.....	163
5.8.2. Гравитационный маневр.....	166
Глава 6. Ограниченная круговая задача трех тел.....	169
6.1. Уравнения движения.....	170
6.2. Критерий Тиссерана.....	175
6.3. Поверхности нулевой скорости.....	178
6.4. Устойчивость точек либрации.....	184
Литература.....	189

Глава 4. Динамика ракет и орбиты переходов

В настоящем разделе рассматриваются некоторые задачи механики тела переменной массы, в частности, выводится основное уравнение реактивного движения и формула Циолковского. Обсуждаются простейшие случаи движения ракеты в гравитационном поле. Во второй части описываются основные типы импульсных маневров в силовом поле одного притягивающего центра, осуществляемых с использованием ракетных двигателей большой тяги.

4.1. Движение ракеты

Сначала рассмотрим движение ракеты в вакууме в отсутствие гравитационных полей. Пусть масса ракеты в момент времени t равна m , а ее тяга постоянна (и по величине и по направлению). Движение ракеты обусловлено выбросом части ее массы с большой скоростью. Предположим также, что масса, выбрасываемая в секунду, и скорость истечения V_e (измеряемая относительно аппарата) также постоянны. Тогда, в силу закона сохранения количества движения, имеем (Рис. 4.1)

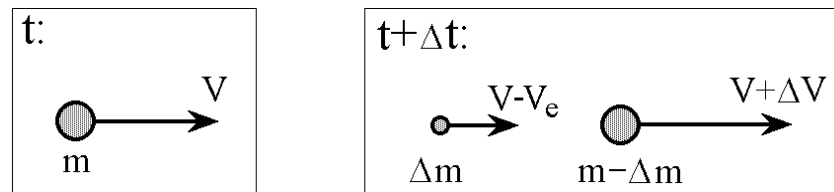


Рис. 4.1

$$mV = (m - \Delta m)(V + \Delta V) + \Delta m(V - V_e),$$

откуда, пренебрегая произведением малых величин $\Delta m \cdot \Delta V$, получаем

$$m \cdot \Delta V - \Delta m \cdot V_e = 0.$$

Если $\Delta t \rightarrow dt$, то $\Delta V \rightarrow dV$, $\Delta m = m(t) - m(t + \Delta t) \rightarrow -dm$ и получаем соотношение

$$mdV + V_e dm = 0. \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) является частным случаем уравнения Мещерского, который при рассмотрении движения тела переменной массы принимал во внимание не только уменьшение массы тела за счет отбрасывания его части (например, продуктов сгорания топлива в камере реактивного двигателя), но и возможного увеличения массы тела за счет присоединения к нему дополнительных частиц. Уравнение Мещерского в случае отсутствия внешних сил имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = (W_1 - V) \frac{dm_1}{dt} - (W_2 - V) \frac{dm_2}{dt},$$

где m_1 и W_1 - присоединяемая масса и ее скорость, а m_2 и W_2 - отбрасываемая масса и ее скорость¹.

Интегрируя (1), получаем

$$V = V_0 + V_e \ln \frac{m_0}{m}. \quad (2)$$

Здесь V_0 и m_0 - начальные скорость и масса ракеты, а m - оставшаяся масса ракеты в момент достижения скорости V . Величина m_0/m называется отношением масс. Уравнение (2) является фундаментальным соотношением теории полета ракеты и называется формулой Циолковского (или первой формулой Циолковского). Величина $\Delta V = V - V_0$, на которую изменяется скорость ракеты, называется характеристической скоростью и непосредственно связана с массой израсходованного топлива $\Delta m = m_0 - m$

$$\Delta V = V_e \ln \frac{m_0}{m_0 - \Delta m},$$

откуда

$$\Delta m = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{V_e}} \right).$$

Теперь рассмотрим простейший случай движения ракеты в гравитационном поле. Пусть ракета поднимается вертикально вверх противоположно направлению постоянного вектора ускорения силы тяжести g . Тогда изменение количества движения за время dt вследствие действия силы mg равно $mgdt$ и уравнение (1) принимает вид

$$m dV + V_e dm = -mgdt,$$

откуда

$$dV = -V_e \frac{dm}{m} - gdt.$$

Интегрируя, получаем

$$V = V_0 + V_e \ln \frac{m_0}{m} - gt. \quad (3)$$

Если g с высотой меняется, $g = g(h)$, тогда

$$V = V_0 + V_e \ln \frac{m_0}{m} - \int_0^t g(h) dt. \quad (4)$$

На практике топливо составляет только часть массы ракеты. Если m масса пустой ракеты, то уравнение (3) или (4) определяет максимально возможное увеличение скорости

¹ Уравнение Мещерского переходит в уравнение (1), если положить $dm_1 = 0$, $dm_2 = dm$ и $W_2 - V = V_e$.

ракеты при заданной скорости истечения V_e . Эти уравнения показывают, что для увеличения V (и, следовательно, для увеличения максимальной дальности) надо увеличить отношение масс и скорость истечения. Кроме того, надо стремиться обеспечить более быстрый расход топлива, поскольку в этом случае отрицательное влияние последнего члена в (3) или (4) будет меньше. Конечная скорость ракеты уменьшается при увеличении времени активного полета. Этот факт является следствием так называемых гравитационных потерь. Чтобы понять природу этих гравитационных потерь, допустим, что расход топлива \dot{m} так мал и изменяется таким образом, что

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V_e}{m} \frac{dm}{dt} - g = 0.$$

Тогда $V = V_0$, и ракета расходует топливо только для того, чтобы компенсировать силу тяжести.

4.2. Многоступенчатые ракеты

Для ракеты типичным значением отношения масс R и скорости истечения являются значения 5 и 2.5 км/с. Подставляя их в (2), находим

$$V - V_0 \approx 4.02 \text{ км/с}.$$

Однако, как известно, скорость ухода от Земли (параболическая скорость на поверхности Земли), которая также называется второй космической скоростью, равна 11.2 км/с. Таким образом, одна ракета, использующая даже высокоэффективное топливо, не в состоянии обеспечить необходимую скорость. Если принять во внимание гравитационные потери и потери на преодоление сопротивления атмосферы, то результат будет еще хуже.

Уже в начале истории космических полетов стало ясно, что только многоступенчатые ракеты позволяют получить достаточно высокие скорости. Чтобы проиллюстрировать принцип многоступенчатости, который основан на возможности сбрасывания тех частей аппарата (пустых топливных баков), которые уже не могут использоваться, рассмотрим двухступенчатую ракету. Пусть M_0 - полная начальная масса, M_i, m_i ($i = 1, 2$) - масса i -ой ступени (без топлива) и масса топлива i -ой ступени, $(V_e)_i$ - скорость истечения для i -ой ступени.

Для простоты мы пренебрегаем гравитационными потерями и влиянием сопротивления атмосферы. Воспользовавшись формулой (2), находим увеличение скорости к моменту выгорания топлива первой ступени:

$$V_1 - V_0 = (V_e)_1 \ln \frac{M_0}{M_0 - m_1}.$$

Затем пустая первая ступень массы M_1 сбрасывается и включается двигатель второй ступени. Увеличение скорости после отработки второй ступени определяется по формуле

$$V_2 - V_1 = (V_e)_2 \ln \frac{M_2 + m_2}{M_2} .$$

Суммарное увеличение скорости равно

$$V_2 - V_0 = (V_e)_1 \ln \frac{(M_1 + m_1) + (M_2 + m_2)}{M_1 + (M_2 + m_2)} + (V_e)_2 \ln \frac{M_2 + m_2}{M_2} . \quad (5)$$

Допустим, что отношение масс для обеих ступеней равно R ,

$$\frac{M_1 + m_1}{M_1} = \frac{M_2 + m_2}{M_2} = R ,$$

и обозначим отношение масс второй и первой ступеней

$$x = \frac{M_2 + m_2}{M_1 + m_1} .$$

Тогда

$$V_2 - V_0 = (V_e)_1 \ln \frac{R(1+x)}{1+Rx} + (V_e)_2 \ln R .$$

Поскольку $R > 1$,

$$\frac{R(1+x)}{1+Rx} = 1 + \frac{R-1}{1+Rx}$$

является убывающей функцией, достигающей максимума при $x = 0$. Поэтому ясно, что чем меньше вторая ступень по сравнению с первой, тем большая скорость может быть получена.

Если, как и раньше, положить $R = 5$, $x = 0.1$ и принять $(V_e)_1 = (V_e)_2 = 2.5$ км/с, тогда из (5) $V_2 - V_0 = 7.27$ км/с, что значительно больше, чем полученное для одноступенчатой ракеты значение 4.02 км/с.

4.3. Орбиты перехода в поле одного притягивающего центра

Теперь рассмотрим основные результаты, полученные в задаче об орбитах перехода в силовом поле одного притягивающего центра. Если аппарат движется по орбите вокруг массивного сферического тела и на него не действуют возмущения со стороны других тел, то это означает, что аппарат движется в центральном поле сил. При этом, если полет аппарата является пассивным (двигатели выключены), то его орбита представляет собой коническое сечение. При работающем двигателе орбита будет изменяться. Полагая, что мы имеем дело с двигателями, развивающими большую тягу, можно считать, что двигатель работает такое короткое время, за которое создаваемый им импульс мгновенно изменяет вектор количества движения аппарата, а положение аппарата измениться не успевает. При этом нет никаких гравитационных потерь. Обсудим простейший случай перехода с одной орбиты на другую в результате приложения импульса ракетного двигателя.

4.4. Переход между круговыми компланарными орбитами

Предположим, что аппарат, находящийся на круговой орбите радиуса r_1 вокруг центрального тела S , требуется перевести на круговую орбиту большего радиуса r_2 , расположенную в той же плоскости (Рис. 4.2).

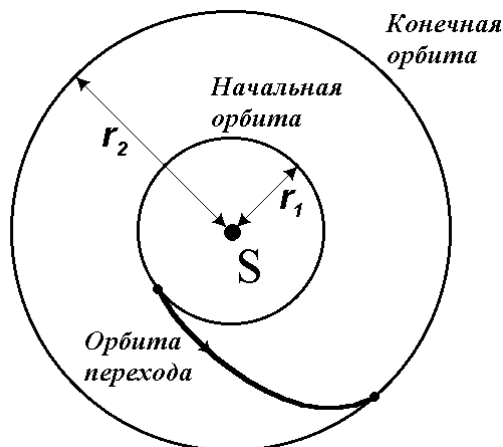


Рис. 4.2

Для перехода с одной круговой орбиты на другую необходимо, чтобы орбита перехода пересекала или хотя бы касалась обеих круговых орбит. На Рис. 4.3 показаны орбиты перехода, которые удовлетворяют или не удовлетворяют этому условию.

Очевидно, что перицентр орбиты перехода должен лежать внутри или на круговой орбите меньшего радиуса, а апоцентр - вне или на круговой орбите большего радиуса. Это означает, что должны выполняться следующие неравенства:

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e} \leq r_1, \quad r_{\alpha} = \frac{p}{1-e} \geq r_2. \quad (6)$$

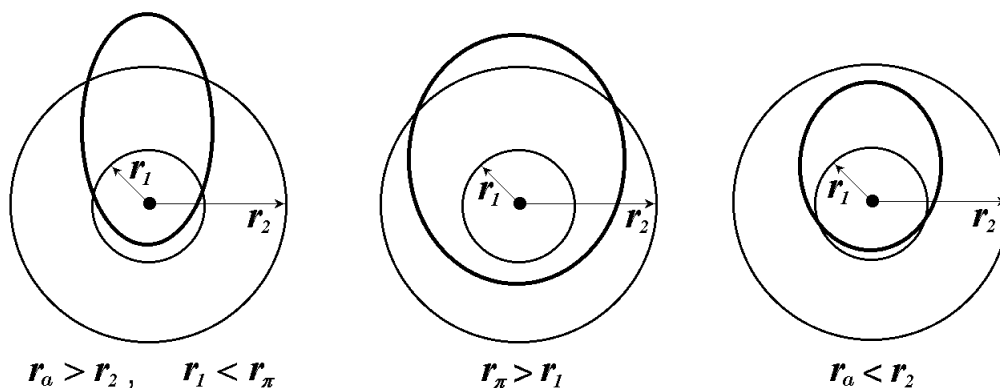


Рис. 4.3

Орбиты, удовлетворяющие этим условиям, будут пересекать или по крайней мере касаться обеих круговых орбит. Неравенства (6) определяют допустимую область в плоскости (p, e) , показанную на Рис. 4.4 (заштрихованная область).

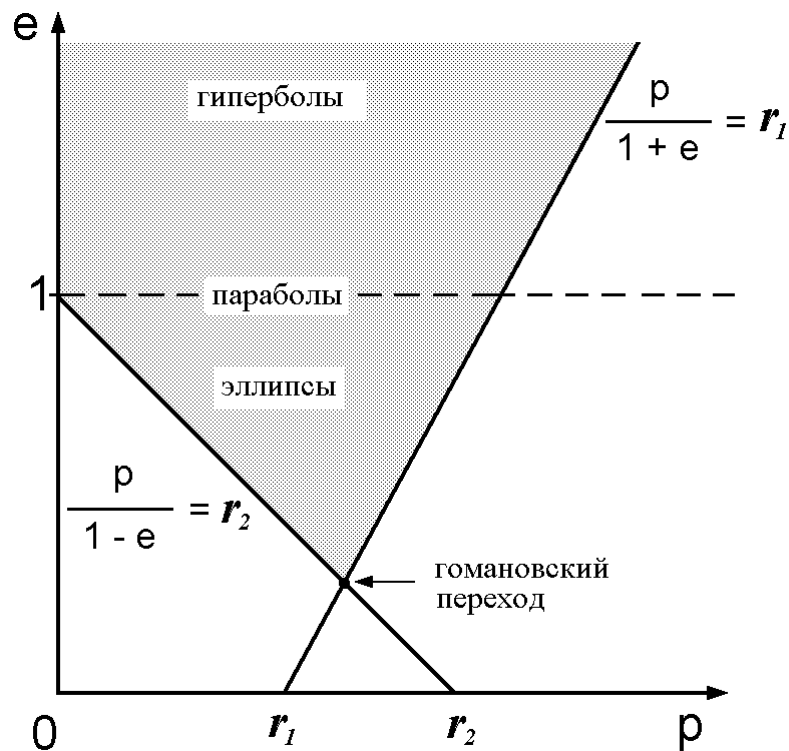


Рис. 4.4

Значения p и e , отвечающие границам допустимой области,

$$\frac{p}{1+e} = r_1, \quad \frac{p}{1-e} = r_2$$

определяют орбиты, касательные к одной или другой круговой орбите. Точка, в которой эти границы пересекаются, соответствует гомановскому переходу (полуэллипсу Гомана²).

Удобнее всего рассматривать эту задачу как задачу изменения энергии аппарата, движущегося по орбите. Воспользовавшись интегралом энергии, можно записать для двух круговых орбит, начальной и конечной, следующие соотношения:

$$h_1 = V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1} = -\frac{\mu}{r_1}, \quad h_2 = V_2^2 - \frac{2\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{r_2}.$$

Здесь

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

² Вальтер Гоман (Walter Hohmann, 1880-1943), немецкий инженер, в 1925 г. показал, что при такой орбите перехода затраты энергии минимальны. Данная схема широко используется, например, при выведении на геостационарную орбиту.

круговые скорости на начальной и конечной (большей) орбитах соответственно. Если переход осуществляется по эллиптической орбите, касающейся обеих круговых орбит (как показано на Рис. 4.5), тогда для такой операции требуется два импульса. Первый (в точке A) переводит аппарат на эллиптическую орбиту, второй (в точке B) переводит аппарат на большую круговую орбиту. Эти импульсы прикладываются по касательной к орбите путем включения двигателя ракеты, направленного в сторону, противоположную движению.

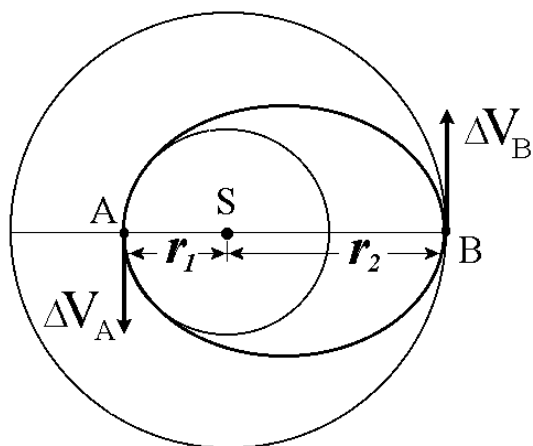


Рис. 4.5

Очевидно, что для заданного изменения кинетической энергии касательный импульс является самым экономичным с точки зрения расхода топлива. Действительно, если импульс, вызывающий изменение количества движения $\mathbf{I} = m\Delta\mathbf{V}$, не совпадает с направлением скорости \mathbf{V}_0 , а составляет с ним некоторый угол θ (Рис. 4.6), то новый вектор скорости \mathbf{V} определяется в результате векторного сложения \mathbf{V}_0 и $\Delta\mathbf{V}$. Увеличение кинетической энергии определяется выражением $V^2 - V_0^2$. Ясно, что при заданной величине импульса это изменение кинетической энергии

$$V^2 - V_0^2 = (\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V})^2 - V_0^2 = (\Delta V)^2 + 2\Delta V \cdot V \cos \theta$$

максимально при $\theta = 0$.

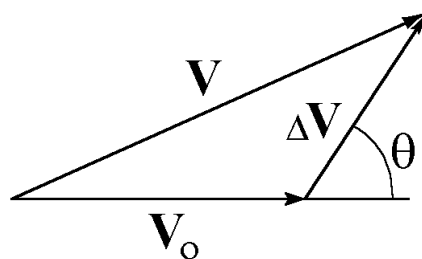


Рис. 4.6

Далее будет показано, что гомановский переход является наиболее экономичным с точки зрения требуемой величины $\Delta V = \Delta V_A + \Delta V_B$ и, следовательно, с точки зрения суммарного расхода топлива.

Определим количество топлива, необходимое для осуществления гомановского перехода. Эллиптической орбите перехода соответствует энергия

$$h = V_A^2 - \frac{2\mu}{r_1} = V_B^2 - \frac{2\mu}{r_2} = -\frac{\mu}{a},$$

где $a = (r_1 + r_2)/2$ - большая полуось эллипса перехода, V_A и V_B - скорости в точках A и B на орбите перехода. Таким образом, в точке A энергию аппарата необходимо увеличить на величину

$$\Delta h_A = h - h_1 = \frac{\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1 + r_2} = \frac{\mu}{r_1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (7)$$

Аналогично в точке B для перехода на конечную круговую орбиту требуется приращение энергии

$$\Delta h_B = h_2 - h = \frac{2\mu}{r_1 + r_2} - \frac{\mu}{r_2} = \frac{\mu}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (8)$$

С другой стороны, изменения энергии обусловлены только изменениями кинетической энергии, поскольку оба импульса действуют очень короткое время и положение аппарата не успевает измениться. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \Delta h_A &= (V_1 + \Delta V_A)^2 - V_1^2 = (\Delta V_A)^2 + 2V_1 \cdot \Delta V_A = \frac{\mu}{r_1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}, \\ \Delta h_B &= V_2^2 - (V_2 - \Delta V_B)^2 = -(\Delta V_B)^2 + 2V_2 \cdot \Delta V_B = \frac{\mu}{r_2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}, \end{aligned}$$

откуда находим изменения скорости в точках A и B соответственно:

$$\Delta V_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_1} \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} - 1 \right]}, \quad \Delta V_B = \sqrt{\frac{\mu}{r_2} \left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} \right]}.$$

Заметим, что при решении квадратных уравнений берутся только те корни, которые соответствуют направлению движения по орбите перехода, совпадающему с направлением движения по круговым орбитам.

Теперь, принимая во внимание, что нет потерь на преодоление сопротивления атмосферы и гравитационных потерь, мы можем воспользоваться уравнением (2) и найти массу топлива, необходимого для выработки импульсов:

$$\Delta V_A = V_e \ln \frac{m_0}{m_A}, \quad \Delta V_B = V_e \ln \frac{m_A}{m_B}.$$

Следовательно, суммарное приращение скорости, необходимое для перехода с одной круговой орбиты на другую по гомановскому полуэллипсу, определяется выражением

$$\Delta V_H = \Delta V_A + \Delta V_B = V_e \ln \frac{m_0}{m_B},$$

откуда находим суммарный расход топлива $\Delta m = m_0 - m_B$

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta V_H}{V_e}},$$

где

$$\Delta V_H = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left[\left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} - 1 \right] + \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left[1 - \left(\frac{2r_1}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} \right].$$

Проанализируем зависимость потребной характеристической скорости, необходимой для осуществления гомановского перехода, от величины отношения конечного и начального радиусов круговых орбит $\tilde{r} = r_2/r_1$. При этом введем в рассмотрение безразмерную характеристическую скорость маневра

$$\Delta \tilde{V}_H = \frac{\Delta V_H}{V_1} = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 + \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1 + \tilde{r}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \tilde{r}}} \right).$$

Заметим, что при переходе с орбиты меньшего на орбиту большего радиуса $\tilde{r} > 1$. Ясно, что $\Delta \tilde{V}_H(\tilde{r}) \geq 0$, причем равенство возможно только при $\tilde{r} = 1$. При $\tilde{r} \rightarrow \infty$ двухимпульсный гомановский переход вырождается в одноимпульсный переход с круговой орбиты на параболическую. Первый импульс переводит тело с начальной круговой орбиты на параболическую, а второй импульс (нулевой) прикладывается на бесконечности и переводит тело с параболической орбиты на круговую орбиту бесконечно большого радиуса. В результате получаем $\Delta \tilde{V}_H \rightarrow \sqrt{2} - 1$. Для определения отношения радиусов орбит \tilde{r}_* , при котором достигается максимальное значение $\Delta \tilde{V}_H(\tilde{r}_*) = \Delta \tilde{V}_{\max}$, необходимо проанализировать необходимое условие экстремума $d(\Delta \tilde{V}_H)/d\tilde{r} = 0$. Легко показать, что оно сводится к кубическому уравнению

$$\tilde{r}^3 - 15\tilde{r}^2 - 9\tilde{r} - 1 = 0,$$

имеющему единственный положительный корень $\tilde{r}_* \approx 15.582$. Вид функции $\Delta \tilde{V}_H(\tilde{r})$, а также зависимости $\Delta \tilde{V}_A(\tilde{r})$ и $\Delta \tilde{V}_B(\tilde{r})$ показаны на Рис. 4.7. Заметим, что при $\tilde{r} > 3.4$ суммарные затраты характеристической скорости на осуществление гомановского перелета становятся больше, чем импульс скорости, необходимый для ухода на бесконечность по параболической траектории, т.е. $\Delta \tilde{V}_H > \sqrt{2} - 1$. Если запас характеристической скорости превышает $\Delta \tilde{V}_H(\tilde{r}_*) = \Delta \tilde{V}_{\max} \approx 0.536$, то перелет может быть осуществлен на круговую орбиту любого радиуса.

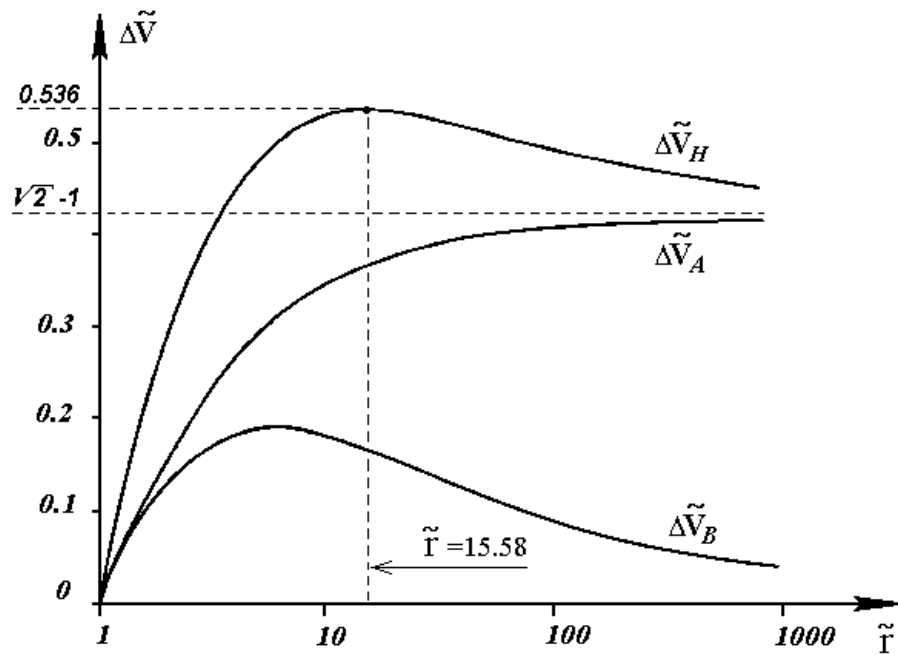


Рис. 4.7

Эксцентриситет e орбиты перехода (полуэллипса Гомана) получается из соотношений

$$r_1 = r_A = r_\pi = a(1 - e), \quad r_2 = r_B = r_\pi = a(1 + e)$$

и равен

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Время t_{AB} , за которое совершается переход, равно половине периода гомановской орбиты, а именно

$$t_{AB} = \frac{T}{2} = \pi \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}}.$$

Заметим, что гомановский переход, являясь самым выгодным с точки зрения расхода топлива, требует больше времени, чем любой другой переход между теми же круговыми орбитами.

В Таблице 4.1 приведены времена перелета t_{AB} по гомановским полуэллипсам от Земли к планетам Солнечной системы и необходимые для этого начальные гелиоцентрические скорости V_A . Обратим внимание, что при полете к внутренней планете (Меркурию и Венере) начальная скорость меньше орбитальной скорости Земли, равной 29,78 км/с. Поэтому начальная геоцентрическая скорость должна быть направлена против гелиоцентрической скорости Земли. При полете к внешним планетам ракета должна стартовать параллельно орбитальной скорости Земли.

Таблица 4.1

Планета	Гелиоцентрическая скорость V_A , км/с	Время перелета t_{AB}	
		(суток)	(лет)
Меркурий	22,28	105,5	-
Венера	27,28	146,1	-
Марс	32,73	258,9	-
Юпитер	38,57	-	2,74
Сатурн	40,05	-	6,04
Уран	41,07	-	16,16
Нептун	41,42	-	30,78
Плутон	41,60	-	46,03

4.5. Сокращение времени перехода

В случае, если время перелета по гомановской орбите оказывается слишком большим, с целью его уменьшения можно пойти на некоторое увеличение потребной характеристической скорости и отказаться от оптимальной гомановской орбиты. Рассмотрим орбиту, которая по-прежнему касается в точке A начальной круговой орбиты радиуса r_1 , но пересекает конечную круговую орбиту радиуса r_2 в точке B (Рис. 4.8).

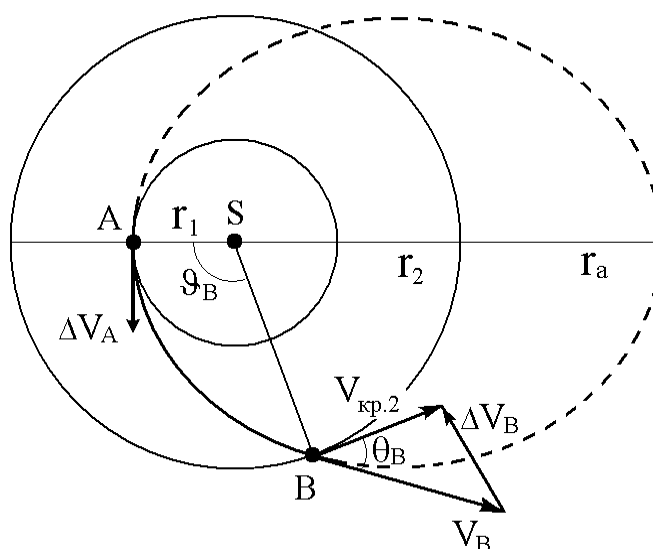


Рис. 4.8

Время перелета по такой орбите должно быть значительно меньше времени гомановского перелета, поскольку здесь исключается как раз участок орбиты вблизи апоцентра, где движение происходит с минимальной скоростью. Получим для такой орбиты перехода

величины импульсов скорости ΔV_A и ΔV_B , величину суммарной характеристической скорости маневра $\Delta V_\Sigma = \Delta V_A + \Delta V_B$ и соответствующее время перелета t_{AB} .

Воспользовавшись обычными соотношениями между элементами эллиптической орбиты, получаем

$$p = \frac{2r_1 r_a}{r_1 + r_a}, \quad e = \frac{r_a - r_1}{r_1 + r_a}, \quad a = \frac{r_1 + r_a}{2}.$$

Кроме того, из уравнения орбиты

$$\cos \mathcal{G}_B = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_2} - 1 \right) = \frac{r_1 + r_a}{r_a - r_1} \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{2r_a}{r_1 + r_a} - 1 \right)$$

или, вводя обозначения $\tilde{r} = r_2/r_1$ и $\tilde{r}_a = r_a/r_1$,

$$\cos \mathcal{G}_B = \frac{2\tilde{r}_a - \tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)}{\tilde{r}(\tilde{r}_a - 1)},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}_B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \mathcal{G}_B}{1 + \cos \mathcal{G}_B}} = \sqrt{\frac{\tilde{r}_a(\tilde{r} - 1)}{\tilde{r}_a - \tilde{r}}}.$$

Наконец, переходя к эксцентрической аномалии, находим

$$\operatorname{tg} \frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}_B}{2} = \sqrt{\frac{\tilde{r} - 1}{\tilde{r}_a - \tilde{r}}},$$

$$\sin E_B = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{E_B}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{E_B}{2}} = \frac{2}{\tilde{r}_a - 1} \sqrt{(\tilde{r} - 1)(\tilde{r}_a - \tilde{r})}.$$

Тогда и из уравнения Кеплера имеем

$$t_{AB} = t_B - t_A = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} (E_B - e \sin E_B)$$

или, переходя к относительному (безразмерному) времени $\tilde{t} = t/T_1$, где $T_1 = 2\pi\sqrt{r_1^3/\mu}$ - период начальной круговой орбиты,

$$\tilde{t}_{AB} = \frac{(1 + \tilde{r}_a)^{3/2}}{2\sqrt{2\pi}} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\tilde{r} - 1}{\tilde{r}_a - \tilde{r}}} - \frac{1}{1 + \tilde{r}_a} \sqrt{(\tilde{r} - 1)(\tilde{r}_a - \tilde{r})} \right].$$

Для первого импульса в точке A , отнесенного к круговой скорости на исходной орбите, имеем

$$V_A = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e) = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \sqrt{\frac{r_1}{p}} (1 + e) = V_{\text{кр.1}} \sqrt{\frac{r_1(r_1 + r_a)}{2r_1 r_a}} \frac{2r_a}{r_1 + r_a} = V_{\text{кр.1}} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1 + \tilde{r}_a}},$$

$$\Delta \tilde{V}_A = \frac{\Delta V_A}{V_{\text{кр.1}}} = \frac{V_A}{V_{\text{кр.1}}} - 1 = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1.$$

Для определения второго импульса в точке B предварительно рассмотрим косинус угла θ_B между вектором скорости и нормалью к радиусу-вектору (Рис. 4.8). Имеем

$$\cos \theta_B = \frac{V_{nB}}{V_B} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_2 V_B},$$

т.е.

$$V_B \cos \theta_B = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_2}.$$

Далее воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} V_B &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + 2e \cos \vartheta_B + e^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{2p}{r_2} - 1 + e^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\mu}{p} \left(\frac{2p}{r_2} - \frac{p}{a} \right)} = \\ &= \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_a} \right)} = \sqrt{2\mu \frac{r_1 + r_a - r_2}{r_2 (r_1 + r_a)}} = V_{\text{кр.1}} \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{r}_a + 1 - \tilde{r}}{\tilde{r}_a + 1}}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\Delta V_B = V_{\text{кр.2}} - V_B$, находим

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_B &= \frac{\Delta V_B}{V_{\text{кр.1}}} = \sqrt{\frac{V_{\text{кр.2}}^2}{V_{\text{кр.1}}^2} + \frac{V_B^2}{V_{\text{кр.1}}^2} - 2 \frac{V_{\text{кр.2}}}{V_{\text{кр.1}}} \frac{V_B}{V_{\text{кр.1}}} \cos \theta_B} = \\ &= \sqrt{\frac{r_1}{r_2} + 2 \frac{r_1}{r_2} \frac{r_a + r_1 - r_2}{r_a + r_1} - 2 \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{2r_1 r_a}{r_2 (r_a + r_1)}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{r}_a + 1 - \tilde{r}}{\tilde{r}_a + 1} - \frac{2}{\tilde{r}} \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}(\tilde{r}_a + 1)}}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \sqrt{1 + \frac{2(1 + \tilde{r}_a - \tilde{r})}{1 + \tilde{r}_a} - 2 \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}(1 + \tilde{r}_a)}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получены величины относительных импульсов скорости $\Delta \tilde{V}_A$, $\Delta \tilde{V}_B$, суммарной потребной характеристической скорости $\Delta \tilde{V}_\Sigma = \Delta \tilde{V}_A + \Delta \tilde{V}_B$ и соответствующая длительность перелета \tilde{t}_{AB} как функции \tilde{r}_a и \tilde{r} . На Рис. 4.9 показан вид этих зависимостей при $\tilde{r} = 6,36$. Выбранное значение \tilde{r} приблизительно соответствует переходу с исходной орбиты высотой 260 км ($r_1 = 6630$ км) на геостационарную орбиту ($r_2 = 42164$ км). На графиках в самой левой точке $\tilde{r}_a = \tilde{r} = 6,36$, т.е. эта точка отвечает гомановской орбите ($r_a = r_2$). Из графиков видно, что незначительное увеличение характеристической скорости маневра позволяет существенно сократить время перелета. Так, увеличив суммарный импульс гомановского перехода на 30%, можно почти вдвое уменьшить время перехода.

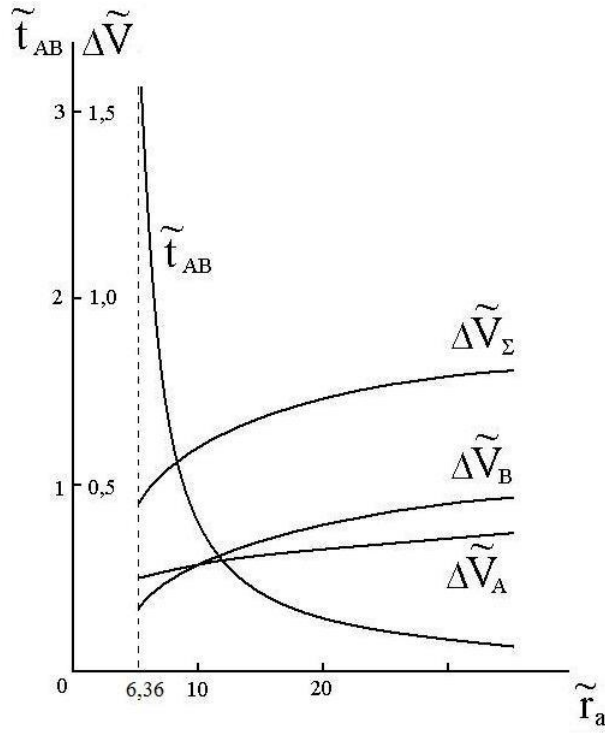


Рис. 4.9. $\tilde{r} = r_2/r_1 = 6,36$

4.6. Доказательство оптимальности гомановского перехода

Любая допустимая орбита двухимпульсного перехода задается точкой (p, e) , принадлежащей заштрихованной области на Рис. 4.4. Рассмотрим импульс ΔV , переводящий тело с круговой орбиты радиуса r на орбиту перехода (p, e) . Большая полуось орбиты перехода имеет вид $a = p/(1 - e^2)$. Величина импульса удовлетворяет соотношению (см. Рис. 4.10)

$$(\Delta V)^2 = (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{кр})^2 = V^2 - 2\mathbf{V}\mathbf{V}_{кр} + V_{кр}^2,$$

которое с учетом

$$V^2 = \frac{2\mu}{\tilde{a}} + h = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right),$$

$$\mathbf{V}\mathbf{V}_{кр} = V_n V_{кр} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \mu \sqrt{\frac{p}{r^3}}, \quad V_{кр}^2 = \frac{\mu}{r}$$

преобразуется к виду

$$(\Delta V)^2 = \mu \left(\frac{3}{r} - \frac{1 - e^2}{p} - \frac{2\sqrt{p}}{r\sqrt{r}} \right). \quad (9)$$

Очевидно, формула (9) справедлива и для обратного перехода с орбиты (p, e) на круговую орбиту радиуса r , т.е орбиту $(r, 0)$.

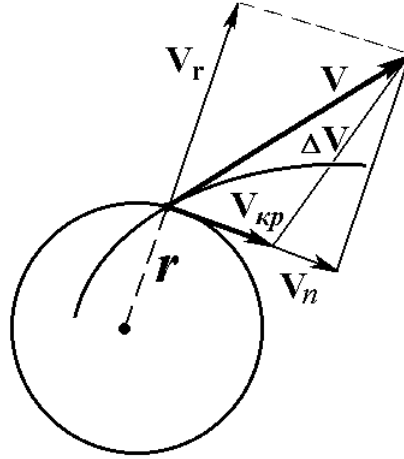


Рис. 4.10

Рассмотрим теперь произвольный двухимпульсный переход. Для его реализации в точке A на начальной круговой орбите радиуса r_1 прикладывается первый импульс ΔV_A и в точке B на конечной круговой орбите радиуса r_2 прикладывается второй импульс ΔV_B . При этом суммарные затраты характеристической скорости, минимум которых как раз и соответствует минимальному расходу топлива, составляют

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_A + \Delta V_B .$$

Здесь, согласно (9),

$$\Delta V_A = \left[\mu \left(\frac{3}{r_1} - \frac{1-e^2}{p} - \frac{2\sqrt{p}}{r_1\sqrt{r_1}} \right) \right]^{1/2}, \quad \Delta V_B = \left[\mu \left(\frac{3}{r_2} - \frac{1-e^2}{p} - \frac{2\sqrt{p}}{r_2\sqrt{r_2}} \right) \right]^{1/2} .$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial(\Delta V_{\Sigma})}{\partial e} > 0 . \tag{10}$$

Действительно, дифференцируя (9), получаем

$$2\Delta V \frac{\partial(\Delta V)}{\partial e} = \frac{2\mu e}{p} ,$$

откуда

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial e} = \frac{\mu e}{p} \cdot \frac{1}{\Delta V} > 0 ,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial(\Delta V_{\Sigma})}{\partial e} = \frac{\partial(\Delta V_A)}{\partial e} + \frac{\partial(\Delta V_B)}{\partial e} = \frac{\mu e}{p} \left(\frac{1}{\Delta V_A} + \frac{1}{\Delta V_B} \right) > 0 .$$

Условие (10) означает, что точка (p, e) , отвечающая оптимальной орбите перехода, обязательно принадлежит нижней границе заштрихованной области на Рис. 4.4, т.е.

$$p = \begin{cases} r_1(1+e), & \text{если } p \geq p_H, \\ r_2(1-e), & \text{если } p \leq p_H, \end{cases} \quad (11)$$

где $p_H = 2r_1r_2/(r_1 + r_2)$ - параметр гомановского эллипса.

Рассмотрим теперь характер зависимости ΔV от e на нижней границе допустимой области на Рис. 4.4. Пусть сначала $p = r_1(1+e)$. Тогда

$$(\Delta V)^2 = \mu \left(\frac{3}{r} - \frac{1-e}{r_1} - \frac{2\sqrt{r_1}\sqrt{1+e}}{r\sqrt{r}} \right),$$

$$\frac{\partial(\Delta V)^2}{\partial e} = \frac{\mu}{r_1} \left(1 - \frac{r_1\sqrt{r_1}}{r\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e}} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial(\Delta V_A)^2}{\partial e} = \frac{\mu}{r_1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+e}} \right) > 0, \quad \frac{\partial(\Delta V_B)^2}{\partial e} = \frac{\mu}{r_1} \left(1 - \frac{r_1\sqrt{r_1}}{r_2\sqrt{r_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e}} \right) > 0.$$

Из полученных выражений видно, что чем меньше эксцентриситет орбиты, тем меньше потребная характеристическая скорость.

Пусть теперь $p = r_2(1-e)$. Тогда

$$(\Delta V)^2 = \mu \left(\frac{3}{r} - \frac{1+e}{r_2} - \frac{2\sqrt{r_2}\sqrt{1-e}}{r\sqrt{r}} \right),$$

$$\frac{\partial(\Delta V)^2}{\partial e} = \frac{\mu}{r_2} \left(1 - \frac{r_2\sqrt{r_2}}{r\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e}} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial(\Delta V_A)^2}{\partial e} = \frac{\mu}{r_2} \left(\frac{r_2\sqrt{r_2}}{r_1\sqrt{r_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e}} - 1 \right) > 0,$$

$$\frac{\partial(\Delta V_B)^2}{\partial e} = \frac{\mu}{r_2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-e}} - 1 \right) > 0,$$

т.е. и в этом случае оптимум достигается при минимальном эксцентриситете. Как видно из Рис. 4.4, оптимальная орбита двухимпульсного перехода соответствует точке пересечения нижних границ заштрихованной области, которая как раз и отвечает гомановской орбите.

Заметим, что если допустить большее число включений реактивного двигателя в процессе перехода между компланарными круговыми орбитами, то, вообще говоря, гомановский полуэллипс может оказаться не самым выгодным с точки зрения расхода топлива. Рассмотрим в качестве примера так называемый биэллиптический переход

(Рис. 4.11), предложенный Штернфельдом³. Для осуществления такого перехода нужно отработать три импульса в точках A , C и B . Приращение скорости $\Delta V'_A$ переводит аппарат на эллиптическую орбиту, двигаясь по которой он достигает апоцентра C далеко за пределами орбиты радиуса r_2 . Там дается дополнительное приращение скорости $\Delta V'_C$, увеличивающее энергию настолько, чтобы перевести аппарат на новую эллиптическую орбиту с перигентром в точке B на конечной круговой орбите. Затем в точке B производится третье включение двигателя, в результате которого скорость уменьшается на $\Delta V'_B$ и аппарат переходит на нужную круговую орбиту радиуса r_2 . Заметим, что биэллиптический переход может осуществляться и по другой схеме, когда апоцентр первого полуэллипса C расположен внутри конечной круговой орбиты (Рис. 4.12). В этом случае все три импульса должны быть разгонными.

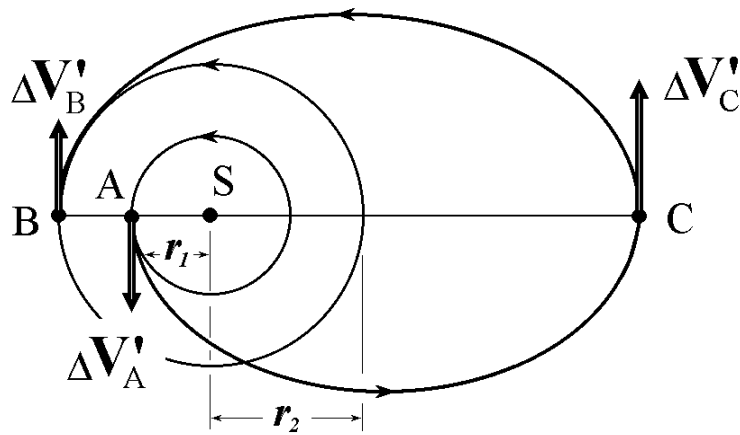


Рис. 4.11

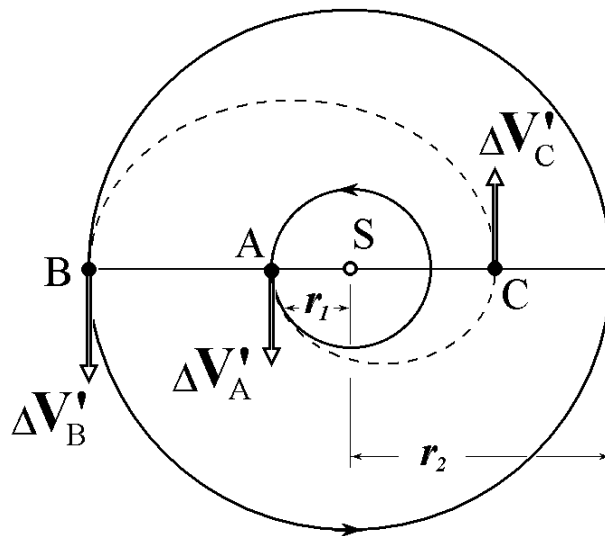


Рис. 4.12

³ Ари Штернфельд (1905-1980), советский инженер, один из пионеров космонавтики. Впервые ввел термины «космонавтика», «первая космическая скорость», «космодром».

Выражение для суммарной характеристической скорости, которая нужна для осуществления биэллиптического маневра, имеет вид

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = \Delta \tilde{V}_A + \Delta \tilde{V}_C \pm \Delta \tilde{V}_B = \\ = \sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{1+\tilde{r}_a}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}_a}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{r}_a}} - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}_a}} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}_a}{\tilde{r}+\tilde{r}_a}} - 1 \right).$$

Здесь $\tilde{r}_a = r_a/r_1$, случаю $\tilde{r}_a > \tilde{r}$ (Рис. 4.11) отвечает знак «+», случаю $\tilde{r}_a < \tilde{r}$ (Рис. 4.12) - знак «-». Заметим, что при $\tilde{r}_a = \tilde{r}$ биэллиптический переход вырождается в гомановский ($\Delta \tilde{V}_B = 0$). Сравнение величины $\Delta \tilde{V}_\Sigma$ с характеристической скоростью гомановского перелета позволяет сделать следующие выводы.

В случае $\tilde{r}_a < \tilde{r}$ для осуществления биэллиптического маневра всегда требуется больший запас характеристической скорости, чем для гомановского перелета. Если же $\tilde{r}_a > \tilde{r}$, трехимпульсная орбита перехода, состоящая из двух полуэллипсов, может оказаться выгоднее, чем гомановский полуэллипс. При этом результат зависит от отношения радиусов начальной и конечной круговых орбит $\tilde{r} = r_2/r_1$, а также от выбранного радиуса апоцентра переходных эллипсов $\tilde{r}_a = r_a/r_1$. Эдельбаум показал, что при $\tilde{r} > 11.94$ всегда можно найти такой биэллиптический переход, что расход топлива (характеристической скорости) будет меньше, чем для гомановского перехода. Для этого второй импульс должен прикладываться достаточно далеко за пределами конечной круговой орбиты. Штернфельд доказал, что любая биэллиптическая орбита перехода такого вида приводит к некоторой экономии топлива, если $\tilde{r} > 15.582$. Соответствующие области оптимальности гомановского (I) и биэллиптического (II) маневров показаны на Рис. 4.13.

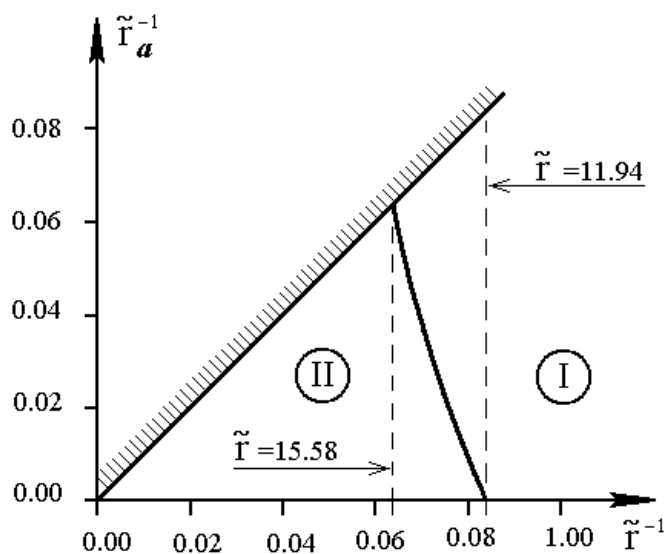


Рис. 4.13

В заключение следует заметить, что уменьшение требуемой характеристической скорости при использовании биэллиптического перелета по сравнению с гомановским полуэллипсом в лучшем случае не превосходит 8%. При этом среди биэллиптических переходов нет оптимального. Чем больше $\tilde{r}_a = r_a/r_1$, тем меньше $\Delta\tilde{V}_\Sigma$. В предельном случае $\tilde{r}_a \rightarrow \infty$ получаем бипараболический переход. На первом этапе осуществляется уход на бесконечность по параболической орбите с перицентром на начальной круговой орбите, а затем аппарат возвращается по другой параболической орбите, у которой перицентр находится на конечной круговой орбите. В этом случае второй импульс имеет бесконечно малую величину и суммарный импульс определяется выражением

$$\Delta\tilde{V}_P = \Delta\tilde{V}_A + \Delta\tilde{V}_B = (\sqrt{2} - 1) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \right).$$

Сравнивая его с суммарным импульсом при гомановском переходе

$$\Delta\tilde{V}_H = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\tilde{r}}} \right),$$

можно показать, что минимальное значение отношения размеров начальной и конечной круговых орбит, при котором бипараболический переход дает экономию топлива по сравнению с оптимальным двухимпульсным переходом, равняется ≈ 11.94 (Рис. 4.14).

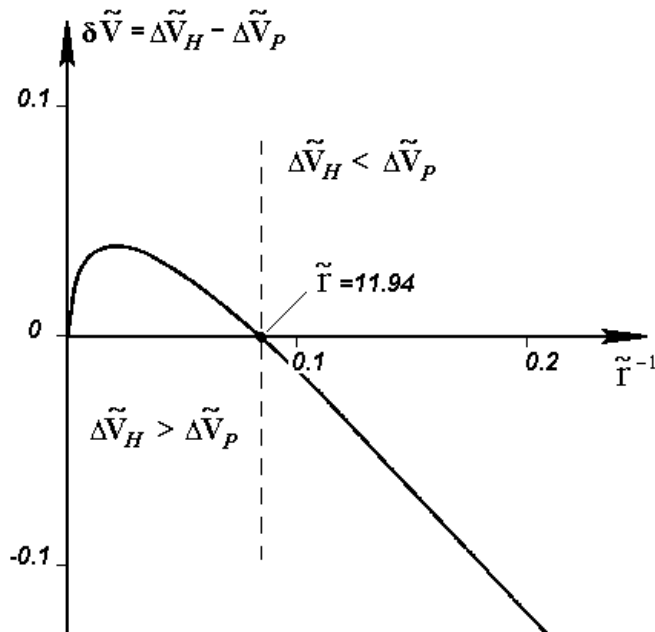


Рис. 4.14

4.7. Поворот плоскости орбиты

Импульс скорости $\Delta \mathbf{V}$, который лежит в плоскости орбиты, может изменить ее размер или форму или может повернуть линию апсид. Если же нужно изменить положение плоскости орбиты в пространстве, необходима проекция приращения скорости $\Delta \mathbf{V}$, перпендикулярная плоскости орбиты.

В самом деле, чтобы повернуть плоскость орбиты, необходимо изменить направление векторной константы площадей $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$. Это означает, что векторы \mathbf{c} и $\Delta \mathbf{c}$ неколлинеарны, т.е. $\mathbf{c} \times \Delta \mathbf{c} \neq 0$. Но

$$\mathbf{c} \times \Delta \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{V}) = \mathbf{r} (\mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} (\mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{V}) .$$

Таким образом, должно выполняться условие $\mathbf{c} \cdot \Delta \mathbf{V} \neq 0$, т.е. вектор $\Delta \mathbf{V}$ действительно должен иметь ненулевую проекцию на нормаль к плоскости орбиты (на вектор \mathbf{c}).

Рассмотрим специфический орбитальный маневр, приводящий только к изменению плоскости орбиты. Такая ситуация имеет место, если в результате приложения импульса $\Delta \mathbf{V}$ абсолютная величина скорости V и угол между вектором скорости и местным горизонтом сохраняют свои значения. Действительно, эксцентриситет и фокальный параметр орбиты

$$e = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{\mu^2}}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}$$

не изменяются, поскольку

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r}, \quad c^2 = r^2 V^2 \cos^2 \alpha ,$$

где α - угол между вектором скорости и горизонтом.

Заметим, что если при этом необходимо также сохранить и ориентацию орбиты, которая определяется направлением вектора Лапласа, то такой импульс следует прикладывать в одной из апсидальных точек орбиты. В самом деле, пусть импульс приложен в перицентре. Имеем

$$\mathbf{f} = \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} .$$

Поскольку в перицентре векторы \mathbf{r} , \mathbf{V} и \mathbf{c} образуют правую тройку (векторное произведение \mathbf{V} и \mathbf{c} направлено вдоль \mathbf{r}), а их модули не изменяются в результате приложения импульса скорости, то и вектор Лапласа не изменяется.

Примером подобного орбитального маневра может служить переход с орбиты с ненулевым наклонением на экваториальную орбиту (Рис. 4.15). В результате однократного включения двигателя плоскость орбиты поворачивается на угол θ . Начальная и конечная скорости в точке приложения импульса равны по величине. Они образуют вместе с $\Delta \mathbf{V}$ равнобедренный треугольник. Зная V и θ , выразим величину требуемого импульса

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\theta}{2} . \quad (12)$$

Кроме того, если мы хотим преобразовать орбиту в экваториальную, импульс ΔV следует прикладывать в одном из узлов, поскольку именно в узле спутник пересекает плоскость земного экватора.

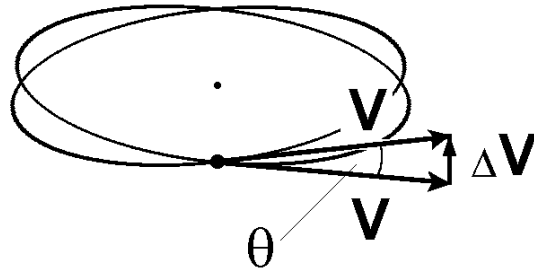


Рис. 4.15

Рассмотрим задачу поворота плоскости орбиты более подробно. При этом для простоты будем считать орбиту круговой. В случае простого одноимпульсного поворота плоскости орбиты величина требуемого импульса дается формулой (12), где $V = V_{кр} = \sqrt{\mu/r_0}$ - скорость на круговой орбите. Вводя безразмерный импульс скорости $\Delta \tilde{V} = \Delta V / V_{кр}$, перепишем (12) в виде

$$\Delta \tilde{V} = 2 \sin \frac{\theta}{2} . \quad (13)$$

Очевидно, одноимпульсный поворот круговой орбиты является приемлемым только при сравнительно малом угле θ (Рис. 4.16). Большие углы приводят к очень большим значениям требуемых импульсов скорости.

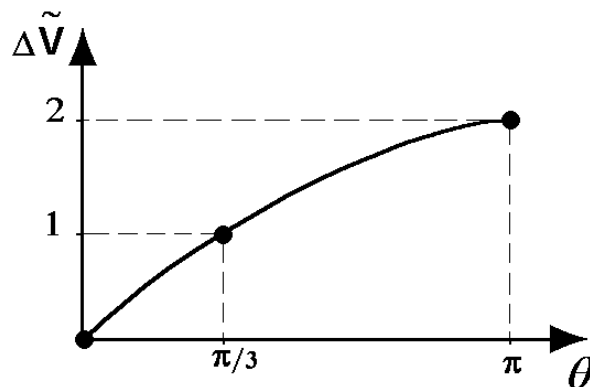


Рис. 4.16

Например, чтобы повернуть плоскость орбиты на 60° , приращение скорости должно быть равно круговой скорости, т.е. $\Delta \tilde{V} = 1$. Для осуществления такого маневра требуется

слишком много топлива. Поэтому представляет интерес рассмотреть другие возможные схемы поворота плоскости орбиты. Такие схемы могут оказаться значительно более сложными в реализации и потребуют многократного включения двигателя, т.е. это уже будут многоимпульсные маневры. Но в то же время они могут дать существенную экономию топлива.

4.8. Трехимпульсный поворот плоскости орбиты

Из (12) видно, что чем меньше скорость тела, тем легче изменить плоскость его орбиты. Поэтому возникает идея трехимпульсного поворота плоскости орбиты (Рис. 4.17).

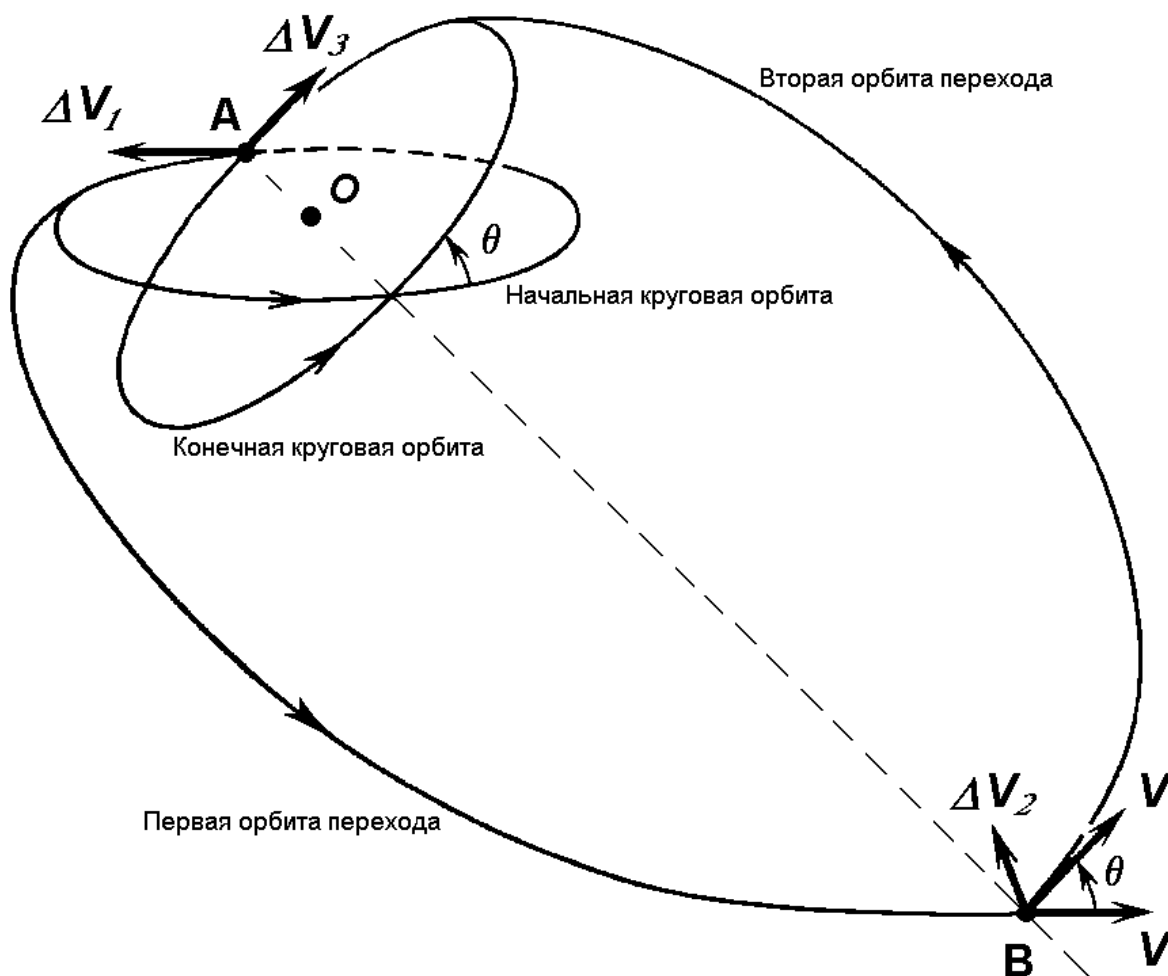


Рис. 4.17

Сначала, в результате действия касательного импульса скорости ΔV_1 , аппарат переводится на первую орбиту перехода - компланарную эллиптическую орбиту с перигентром в точке приложения первого импульса. Двигаясь по этой промежуточной орбите, аппарат удаляется от притягивающего центра и его скорость уменьшается. В апоцентре промежуточной орбиты (точка B) скорость тела минимальна и поэтому именно

здесь выгоднее всего поворачивать плоскость орбиты. Вторым импульсом ΔV_2 , не изменяя абсолютной величины скорости тела, поворачивает вектор скорости таким образом, что плоскость орбиты поворачивается на угол θ . В результате аппарат оказывается на второй орбите перехода, точно такой же, как и первая орбита перехода, но лежащей в плоскости конечной круговой орбиты. Перицентры обеих орбит перехода совпадают (точка A), т.к. плоскость орбиты поворачивается вокруг общей линии апсид первой и второй орбит перехода. Поэтому третий импульс ΔV_3 , как и первый, является касательным, но направлен против скорости, т.е. является не разгоняющим, а тормозящим. По величине третий импульс равен первому, $\Delta V_3 = \Delta V_1$. Третий импульс переводит аппарат на конечную круговую орбиту того же радиуса, что и исходная, но расположенную в плоскости, составляющей с плоскостью исходной орбиты угол θ .

Основная идея трехимпульсного поворота орбиты аналогична идее биэллиптического перехода между компланарными круговыми орбитами. Расчет строится на том, что дополнительные затраты характеристической скорости, требующиеся для перевода аппарата на первую промежуточную орбиту и для схода со второй промежуточной орбиты на конечную круговую орбиту, окажутся меньше того выигрыша, который получается в результате уменьшения второго импульса, обеспечивающего собственно поворот плоскости орбиты.

Суммарный импульс скорости при осуществлении трехимпульсного маневра, разумеется, зависит от выбора промежуточной орбиты перехода, которая, в свою очередь, полностью определяется величиной апоцентрического расстояния r_α . Сравним величину суммарного импульса при трехимпульсном маневре

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

с величиной (12), которая обеспечивает простой маневр поворота.

Пусть $r_\pi = OA = r_0$, $r_\alpha = OB = r$, тогда обе промежуточные орбиты (первая и вторая) полностью определены и имеют место соотношения

$$p = \frac{2r_\pi r_\alpha}{r_\pi + r_\alpha} = \frac{2r_0 r}{r_0 + r},$$

$$V_\pi = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \sqrt{\frac{2r}{r_0 + r}} = V_{kp} \sqrt{1 + \tilde{r}},$$

$$V_\alpha = \frac{\sqrt{\mu p}}{r_\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \sqrt{\frac{2r_0^2}{r(r_0 + r)}} = V_{kp} \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}(1 + \tilde{r})}},$$

где $\tilde{r} = r/r_0$ - безразмерный радиус апоцентра. Величины импульсов скорости ΔV_1 , ΔV_2 и ΔV_3 задаются выражениями

$$\Delta V_1 = \Delta V_3 = V_\pi - V_{kp} = V_{kp} \left(\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1 \right),$$

$$\Delta V_2 = 2V_\alpha \sin \frac{\theta}{2} = 2V_{kp} \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}(1+\tilde{r})}} \sin \frac{\theta}{2}$$

или в безразмерном виде

$$\Delta \tilde{V}_1 = \Delta \tilde{V}_3 = \sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1,$$

$$\Delta \tilde{V}_2 = 2 \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}(1+\tilde{r})}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

(14)

Таким образом, для осуществления маневра требуется суммарный импульс

$$\Delta \tilde{V}_\Sigma = 2 \left[\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}(1+\tilde{r})}} \sin \frac{\theta}{2} \right].$$

(15)

Заметим, что здесь $\tilde{r} \geq 1$, причем если $\tilde{r} = 1$, то (15) совпадает с (13). Это означает, что трехимпульсный поворот вырождается в одноимпульсный. Действительно, в этом случае промежуточные орбиты совпадают с начальной и конечной куговыми орбитами и первый и третий импульсы уже не нужны (как видно из (14), $\Delta \tilde{V}_1 = \Delta \tilde{V}_3 = 0$).

Сравнивая (13) и (15), приходим к следующему результату. Трехимпульсный маневр выгоднее, чем простой поворот орбиты, т.е. $\Delta \tilde{V}_\Sigma < \Delta V$, если

$$f(\tilde{r}) = \frac{\sqrt{\frac{2\tilde{r}}{1+\tilde{r}}} - 1}{1 - \sqrt{\frac{2}{\tilde{r}(1+\tilde{r})}}} < \sin \frac{\theta}{2}.$$

(16)

Перепишав функцию $f(\tilde{r})$ в виде

$$f(\tilde{r}) = \sqrt{2} \frac{\tilde{r} - 1}{\sqrt{\tilde{r}(1+\tilde{r})} - \sqrt{2}} - 1,$$

легко показать, что она является монотонно возрастающей, т.к.

$$f'(\tilde{r}) = \left[\frac{\sqrt{2\tilde{r}} - \sqrt{1+\tilde{r}}}{\sqrt{\tilde{r}(1+\tilde{r})} - \sqrt{2}} \right]^2 \frac{1}{\sqrt{2\tilde{r}(1+\tilde{r})}} > 0.$$

Кроме того, при $\tilde{r} \rightarrow +\infty$ $f(\tilde{r}) \rightarrow \sqrt{2} - 1$ и $f'(\tilde{r}) \rightarrow 0$; при $\tilde{r} \rightarrow 1$, раскрывая неопределенность типа $0/0$, получаем $f(\tilde{r}) \rightarrow 1/3$, $f'(\tilde{r}) \rightarrow 1/18$. Качественный вид функции показан на Рис. 4.18.

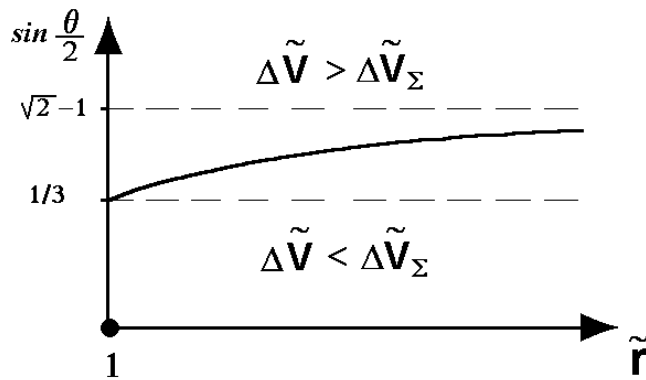


Рис. 4.18

Таким образом, плоскость $(\tilde{r}, \sin \theta/2)$ делится на две области. Выше кривой имеет место условие $\Delta \tilde{V}_\Sigma < \Delta \tilde{V}$ и более экономичным является трехимпульсный маневр. Ниже кривой оптимальным является простой одноимпульсный поворот плоскости орбиты ($\Delta \tilde{V}_\Sigma > \Delta \tilde{V}$). Заметим, что при

$$\sin \frac{\theta}{2} > \sqrt{2} - 1 \quad (\theta > 48.94^\circ)$$

трехимпульсный поворот выгоднее всегда (при любом \tilde{r}), а при

$$\sin \frac{\theta}{2} < \frac{1}{3} \quad (\theta < 38.94^\circ)$$

всегда предпочтительнее одноимпульсный маневр. Если же

$$\frac{1}{3} < \sin \frac{\theta}{2} < \sqrt{2} - 1,$$

то результат зависит от величины \tilde{r} . В то же время ясно, что уменьшая \tilde{r} , всегда можно обеспечить выполнение условия (16), т.е. сделать трехимпульсный поворот более экономичным, чем одноимпульсный.

Задача: При каком импульсе скорости орбита сохраняет свою форму и размеры, но поворачивается в своей плоскости? В какой точке орбиты надо дать импульс скорости, чтобы повернуть линию апсид на угол α ? Определить величину и направление ΔV .

Глава 5. Задача трех тел

5.1. Задача трех тел в инерциальной системе отсчета

До сих пор мы изучали движение КА под действием тяготения одного небесного тела. Между тем правильнее было бы учитывать притяжение КА и другими небесными телами.

Например, при рассмотрении движения межпланетной станции, посланной к Марсу, целесообразно принимать во внимание тяготение Земли, Солнца и Марса.

Задачи такого типа укладываются в рамки проблемы n тел. Рассмотрим эту задачу в инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Пусть имеется n материальных точек A_1, A_2, \dots, A_n с массами m_1, m_2, \dots, m_n (Рис. 5.1), причем в начальный момент времени t_0 известны их положения и скорости. Из всех сил, действующих на материальные точки $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$, будем учитывать только гравитационные силы их взаимного притяжения.

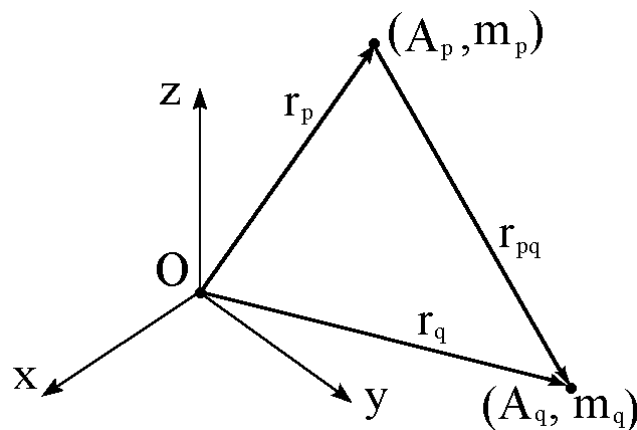


Рис. 5.1

Ограничимся пока случаем трех тел. Это могут быть Солнце, Земля и Луна или Земля, Луна и КА и т.п. Поскольку расстояния между телами обычно велики по сравнению с их размерами, можно считать массу каждого из этих тел сосредоточенной в его центре масс. Таким образом, три тела мы примем за три материальные точки A_1, A_2, A_3 с массами m_1, m_2, m_3 . Обозначим их координаты через $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$, радиус-векторы - $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$; орты осей Ox, Oy, Oz - через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Тогда имеем

$$\mathbf{r}_p = x_p \mathbf{i} + y_p \mathbf{j} + z_p \mathbf{k}, \quad p = 1, 2, 3;$$

$$\mathbf{r}_{pq} = (x_q - x_p) \mathbf{i} + (y_q - y_p) \mathbf{j} + (z_q - z_p) \mathbf{k}.$$

На точку (A_1, m_1) действует сила $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$, где \mathbf{F}_{21} - сила, с которой точка (A_2, m_2) притягивает точку (A_1, m_1) ; \mathbf{F}_{31} - сила, с которой точка (A_3, m_3) притягивает точку (A_1, m_1) . Дифференциальное уравнение движения точки (A_1, m_1) записывается на основании второго закона Ньютона в виде

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}.$$

В силу закона всемирного тяготения

$$\mathbf{F}_{21} = f \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} = f \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

$$\mathbf{F}_{31} = f \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} = f \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1),$$

следовательно, получаем уравнение движения

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = f \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \right].$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию, так называемую силовую функцию задачи

$$U = f \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right).$$

Силовую функцию U можно наглядно истолковать как некоторую работу. Предположим, что точки (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) "закреплены" в пространстве. "Освободим" точку (A_3, m_3) и будем уносить ее в бесконечность. При этом для преодоления притяжения точки (A_1, m_1) необходимо совершить работу $f m_1 m_3 / r_{13}$, для преодоления притяжения точки (A_2, m_2) необходимо совершить работу $f m_2 m_3 / r_{23}$. Действительно, рассмотрим, например, элементарную работу, которую необходимо совершить для преодоления притяжения точки (A_1, m_1) при смещении точки (A_3, m_3) на $d\mathbf{r}$

$$dA_{13} = -\mathbf{F}_{13} d\mathbf{r} = \mathbf{F}_{31} d\mathbf{r}_{13} = f \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} d\mathbf{r}_{13} = f \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} r_{13} dr_{13} = -f m_1 m_3 d \left(\frac{1}{r_{13}} \right),$$

откуда

$$A_{13} = -f m_1 m_3 \int_{r_{13}}^{\infty} d \left(\frac{1}{r} \right) = f \frac{m_1 m_3}{r_{13}}.$$

Точно также, при переносе точки (A_3, m_3) совершается работа

$$A_{23} = -f m_2 m_3 \int_{r_{23}}^{\infty} d \left(\frac{1}{r} \right) = f \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

по преодолению силы притяжения точки (A_2, m_2) . Таким образом, суммарная работа, совершаемая при переносе точки (A_3, m_3) в бесконечность, равна

$$A_{13} + A_{23} = f \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + f \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

После выведение точки (A_3, m_3) в бесконечность "освободим" точку (A_2, m_2) и перенесем ее в бесконечность. Для этого потребуется совершить работу по преодолению притяжения точки A_1

$$A_{12} = f \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Итак, физический смысл силовой функции U - это работа, которую следует совершить, чтобы удалить три материальные точки на бесконечно большие расстояния друг от друга.

Вычислим $\partial U / \partial x_1$. Учитывая, что

$$r_{1p} = \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2 + (z_p - z_1)^2}, \quad p = 2, 3,$$

найдем

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -f \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1} - f \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \frac{\partial r_{13}}{\partial x_1} = f \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (x_2 - x_1) + f \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (x_3 - x_1)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_{1x}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = F_{1y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_1} = F_{1z}.$$

Таким образом, формула для силы \mathbf{F}_1 принимает вид

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_1} \mathbf{k}.$$

Для точек (A_2, m_2) и (A_3, m_3) можно повторить все рассуждения и получить аналогичные формулы. Таким образом, окончательно получаем систему трех векторных дифференциальных уравнений

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = \mathbf{F}_p, \quad p = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F}_p = \frac{\partial U}{\partial x_p} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_p} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_p} \mathbf{k}. \quad (2)$$

Получим теперь интегралы задачи трех тел. Запишем уравнения движения (1) в виде

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}, \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{12}, \quad (4)$$

$$m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{13}. \quad (5)$$

Складывая уравнения (3)-(5) и учитывая, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, получаем

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = 0 .$$

Дважды интегрируя, находим

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 + m_3 \dot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{a} ,$$

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{a}t + \mathbf{b} ,$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} - постоянные векторы.

Пусть C - барицентр системы трех материальных точек, m - суммарная масса системы

$$m = m_1 + m_2 + m_3 .$$

Тогда

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3)$$

и первые интегралы (6) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m} \mathbf{a} , \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{m} (\mathbf{a}t + \mathbf{b}) .$$

Формулы (7) выражают тот факт, что барицентр системы движется в инерциальном пространстве равномерно и прямолинейно. Вектор \mathbf{b} определяет начальное положение барицентра, а вектор \mathbf{a} - его скорость.

Умножим теперь уравнения движения (3)-(5) векторно слева на \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 соответственно и результаты сложим. Тогда получим

$$\begin{aligned} m_1 (\mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \ddot{\mathbf{r}}_3) = \\ = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{32} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{23}) + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{31}) . \end{aligned}$$

Преобразуем выражение в первых скобках в правой части. Имеем

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_{12} = 0 ,$$

так как векторы $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и \mathbf{F}_{12} коллинеарны. Аналогично можно показать, что и два других выражения в скобках равны нулю. Таким образом, получаем

$$m_1 (\mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \ddot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \ddot{\mathbf{r}}_3) = 0 .$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} [m_1 (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3)] = 0 ,$$

откуда следует первый интеграл

$$m_1 (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2) + m_3 (\mathbf{r}_3 \times \dot{\mathbf{r}}_3) = \mathbf{c} ,$$

где \mathbf{c} - постоянный вектор. Соотношение (8) показывает, что кинетический момент системы трех гравитирующих точек остается неизменным. Другими словами, мы получили закон сохранения кинетического момента.

Полученное векторное равенство эквивалентно трем скалярным

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^3 m_p (y_p \dot{z}_p - z_p \dot{y}_p) &= c_x, \\ \sum_{p=1}^3 m_p (z_p \dot{x}_p - x_p \dot{z}_p) &= c_y, \\ \sum_{p=1}^3 m_p (x_p \dot{y}_p - y_p \dot{x}_p) &= c_z.\end{aligned}\tag{9}$$

По аналогии с задачей двух тел закон сохранения кинетического момента допускает естественную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим проекции радиусов-векторов тел системы \mathbf{r}_p на координатные плоскости Oyz , Ozx , Oxy и вычислим площади, закрываемые этими проекциями за время dt . Имеем

$$\begin{aligned}dS_{yz}^p &= \frac{1}{2} (y_p \dot{z}_p - z_p \dot{y}_p) dt, \\ dS_{zx}^p &= \frac{1}{2} (z_p \dot{x}_p - x_p \dot{z}_p) dt, \\ dS_{xy}^p &= \frac{1}{2} (x_p \dot{y}_p - y_p \dot{x}_p) dt\end{aligned}$$

и, вводя средние секториальные скорости

$$\dot{S}_{yz}^p = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^3 m_p \dot{S}_{yz}^p, \quad \dot{S}_{zx}^p = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^3 m_p \dot{S}_{zx}^p, \quad \dot{S}_{xy}^p = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^3 m_p \dot{S}_{xy}^p,$$

с учетом (9) получаем

$$\dot{S}_{yz}^p = \frac{c_x}{2m}, \quad \dot{S}_{zx}^p = \frac{c_y}{2m}, \quad \dot{S}_{xy}^p = \frac{c_z}{2m}.\tag{10}$$

Таким образом, средние секториальные скорости постоянны. Теперь становится понятным, почему первый интеграл (8) называется также интегралом площадей.

По аналогии с задачей двух тел в задаче трех тел также можно ввести в рассмотрение плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{c} и проходящую через барицентр системы. Поскольку вектор \mathbf{c} постоянен, положение этой плоскости в пространстве будет неизменным. Ее называют неизменяемой плоскостью Лапласа.

Перейдем теперь к получению следующего интеграла в задаче трех тел. Умножим уравнения движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2, \quad m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{F}_3$$

скалярно на $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$, $\dot{\mathbf{r}}_3$ соответственно и результаты сложим. Тогда получим

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 + m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 \cdot \dot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{F}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{F}_3 \cdot \dot{\mathbf{r}}_3,$$

откуда, с учетом (2), следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 + m_3 \dot{r}_3^2) &= \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dt} + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_3} \frac{dz_3}{dt} = \frac{dU}{dt} . \end{aligned}$$

Напомним, что U определяется формулой

$$U = f \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right).$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2} (m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 + m_3 \dot{r}_3^2) = U + h . \quad (11)$$

Здесь h - константа. Полученное равенство называется интегралом энергии.

5.2. Случай n гравитирующих точек

Результаты, полученные для случая трех гравитирующих точек, очень просто переносятся на случай любого числа точек. Поэтому ограничимся лишь формулировкой основных результатов для общего случая.

Движение n точек описывается системой n векторных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_s \frac{d^2 \mathbf{r}_s}{dt^2} = \mathbf{F}_s , \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{F}_s = f \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \frac{m_s m_i}{r_{si}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s).$$

Функция

$$U = f \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

называется силовой функцией системы n точек. С ее помощью \mathbf{F}_s можно представить в виде

$$\mathbf{F}_s = \frac{\partial U}{\partial x_s} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y_s} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z_s} \mathbf{k} .$$

Система (12) имеет следующие первые интегралы:

- Интегралы движения барицентра системы

$$\sum_{s=1}^n m_s \dot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{a} , \quad \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{r}_s = \mathbf{a}t + \mathbf{b} .$$

Вводя радиус-вектор барицентра системы \mathbf{r}_c , их можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m} \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{m} (\mathbf{a}t + \mathbf{b}).$$

- Интеграл площадей (закон сохранения кинетического момента)

$$\sum_{s=1}^n m_s (\mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s) = \mathbf{c}.$$

- Интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2 = U + h.$$

Значения констант \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , h могут быть определены, если известны координаты и скорости точек (A_s, m_s) в некоторый (начальный) момент времени t_0 .

5.3. Движение двух материальных точек относительно барицентра

Применим полученные выше формулы к системе двух материальных точек. При этом за начало отсчета примем барицентр системы C . Поскольку центр масс замкнутой механической системы (системы, на которую не действуют никакие внешние силы) движется равномерно и прямолинейно, то, очевидно, барицентрическая система координат также является инерциальной и в ней сохраняют силу все полученные соотношения. Более того, интегралы движения барицентра в этой системе принимают тривиальный вид

$$\dot{\mathbf{r}}_c = 0, \quad \mathbf{r}_c = 0.$$

т.е. в данном случае $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$.

Итак, рассмотрим движение двух материальных точек в системе координат $CXYZ$. При этом пусть плоскость CXY совпадает с плоскостью Лапласа, в которой происходит движение одной из двух точек относительно другой. Имеем

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = f \frac{m_2}{R_{12}^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = f \frac{m_1}{R_{12}^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2).$$

Здесь и далее большое R указывает на то, что берется значение радиуса-вектора в барицентрической (инерциальной) системе координат. Из определения центра масс следуют очевидные соотношения

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0, \quad m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 = 0;$$

$$R_1 : m_2 = R_2 : m_1, \quad V_1 : m_2 = V_2 : m_1.$$

Барицентр системы двух материальных точек лежит на соединяющем их отрезке, и его расстояния от этих точек обратно пропорциональны их массам (правило рычага Архимеда).

Вторая формула - это правило рычага для скоростей. При движении двух материальных точек относительно их барицентра векторы скоростей в каждый момент времени антипараллельны. По величине скорости обратно пропорциональны массам, так что более тяжелая точка движется относительно барицентра системы с меньшей линейной скоростью.

Очевидно,

$$m_1 R_1 = m_2 R_2, \quad m_1 V_1 = m_2 V_2,$$

поэтому

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2},$$

т.е. угловые скорости точек A_1 и A_2 в каждый момент времени равны между собой.

Интеграл площадей имеет вид

$$m_1 (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{V}_1) + m_2 (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{c}.$$

Перепишем последнее соотношение в скалярной форме. Вектор $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{V}_1$ перпендикулярен плоскости CXY и равен удвоенной секториальной скорости точки A_1 относительно барицентра C

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{V}_1 = 2 \frac{dS_1}{dt} \mathbf{k},$$

а вектор $\mathbf{R}_2 \times \mathbf{V}_2$ равен удвоенной секториальной скорости точки A_2 и также направлен перпендикулярно к плоскости CXY

$$\mathbf{R}_2 \times \mathbf{V}_2 = 2 \frac{dS_2}{dt} \mathbf{k}.$$

Но тогда и вектор \mathbf{c} тоже перпендикулярен плоскости CXY . Пусть $\mathbf{c} = c\mathbf{k}$. Тогда

$$m_1 \frac{dS_1}{dt} + m_2 \frac{dS_2}{dt} = \frac{c}{2},$$

откуда

$$\frac{1}{m} (m_1 S_1 + m_2 S_2) = \frac{c}{2m} (t - t_0),$$

где $m = m_1 + m_2$. Здесь S_1 и S_2 - площади секторов, заметаемых радиус-векторами \mathbf{CA}_1 и \mathbf{CA}_2 за время, прошедшее с момента t_0 до момента t . Величина

$$\frac{1}{m} (m_1 S_1 + m_2 S_2),$$

называется средним или взвешенным средним этих площадей. Таким образом, среднее значение площадей, заметаемых радиус-векторами \mathbf{CA}_1 и \mathbf{CA}_2 двух гравитирующих материальных точек, пропорционально времени, в течение которого эти площади заметаются. Это еще один вариант второго закона Кеплера.

Можно определить орбиты материальных точек A_1 и A_2 относительно барицентра системы C . Из $m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2 = 0$ следует

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{R}_1, \quad \mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathbf{R}_1, \quad R_{12} = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| = \frac{m_1 + m_2}{m_2}R_1.$$

Таким образом, уравнение движения точки A_1 относительно барицентра системы

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = fm_2 \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -f \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3}$$

или

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{\mu_1}{R_1^3} \mathbf{R}_1, \quad (13)$$

где

$$\mu_1 = f \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (14)$$

С уравнениями такого типа мы уже имели дело; траектория точки в этом случае - коническое сечение с фокусом в начале координат.

Итак, материальная точка (A_1, m_1) движется относительно барицентра точно так же, как если бы она была непритягивающим спутником воображаемой звезды, помещенной в барицентр и имеющей гравитационный параметр (14). Аналогично будет двигаться и точка (A_2, m_2) , но теперь гравитационный параметр будет

$$\mu_2 = f \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (15)$$

Из соотношения

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{R}_1$$

видно, что орбиты точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) относительно их барицентра центрально подобны (гомотетичны) с коэффициентом подобия $-m_1/m_2$. Поэтому, зная орбиту одной, легко определить орбиту другой точки.

Выясним связь между орбитой точки (A_1, m_1) относительно точки (A_2, m_2) (орбитой Γ) и орбитой точки (A_1, m_1) относительно барицентра системы C (орбитой γ). Легко показать, что

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{\mu}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1),$$

где $\mu = f(m_1 + m_2)$ и, следовательно, орбита Γ также является коническим сечением. Вместе с A_1 обращается вокруг точки A_2 и точка C . Обозначим A_2x - ось аписид орбиты Γ , $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{r}$, $\angle xA_2A_1 = \mathcal{G}$. Тогда уравнение орбиты Γ можно записать в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \mathcal{G}}.$$

Найдем R_1 и R_2 . Имеем

$$r = R_2 + R_1 = \frac{m_1}{m_2} R_1 + R_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} R_1,$$

откуда

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r.$$

Таким образом,

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{p}{1 + e \cos \mathcal{G}} = \frac{p_1}{1 + e \cos \mathcal{G}}, \quad p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p.$$

Аналогично

$$R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{p}{1 + e \cos \mathcal{G}} = \frac{p_2}{1 + e \cos \mathcal{G}}, \quad p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p.$$

В результате получаем

$$p_1 : p_2 : p = m_2 : m_1 : (m_1 + m_2). \quad (16)$$

Кроме того, эксцентриситеты у всех трех орбит одинаковы. Таким образом, две материальные точки описывают вокруг барицентра системы конические сечения той же формы, что и орбита одной точки относительно другой. При этом отношение размеров этих орбит определяется (16).

5.4. Лагранжевы движения

Мы видели, что благодаря взаимодействию двух материальных точек каждая из них движется относительно их барицентра так, как если бы она притягивалась некоторой массой, помещенной в барицентре. Аналогично обстоит дело в некоторых случаях движения трех и более гравитирующих тел (материальных точек).

Еще Лагранж⁴ исследовал вопрос, какими особенностями должно обладать движение трех точек, чтобы расстояния между ними оставались все время равными, т.е. чтобы имело

⁴ Лагранж, Жозеф Луи (1736-1813) – французский математик, астроном и механик. Автор классического трактата «Аналитическая механика» (1788).

место равенство $R_{12} = R_{23} = R_{31}$. Оказывается, в этом случае точка A_1 движется относительно C в точности так же, как она двигалась бы, если бы была непритягивающим спутником воображаемой звезды, помещенной в C и имеющей массу

$$M_1 = \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}. \quad (17)$$

Докажем это. Имеем

$$\mathbf{F}_1 = f m_1 \left[\frac{m_2}{R_{12}^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) + \frac{m_3}{R_{13}^3} (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1) \right].$$

Кроме того, $R_{12} = R_{13}$ и с учетом $m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 = 0$ выражение для силы, действующей на точку A_1 , можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1 = -f m_1 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{R_{13}^3} \mathbf{R}_1.$$

Далее, из определения центра масс $m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 = 0$ и очевидных соотношений (Рис. 5.2)

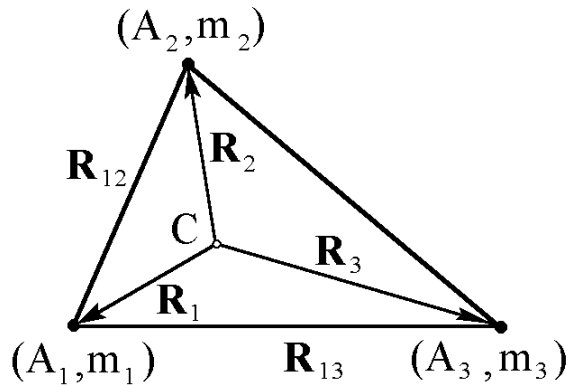


Рис. 5.2

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{12}, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_{13}$$

получаем соотношение

$$(m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{R}_1 = -m_2 \mathbf{R}_{12} - m_3 \mathbf{R}_{13},$$

которое после возведения в квадрат и учета, что точки A_1, A_2, A_3 образуют равносторонний треугольник с углами $\pi/3$, дает

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 R_1^2 = (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2) R_{13}^2. \quad (18)$$

Отсюда

$$R_{13}^3 = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)^3}{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}} R_1^3$$

и

$$\mathbf{F}_1 = -f m_1 \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3}.$$

Так как согласно второму закону Ньютона $\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1$, то уравнение движения точки A_1 имеет вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -f M_1 \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3},$$

где M_1 определяется формулой (17). Но это и есть уравнение движения непритягивающего спутника относительно точки C , в которой помещена масса M_1 , что и требовалось доказать. Аналогично обстоит дело и с точками A_2 и A_3 . Соответствующие выражения для M_2 и M_3 получаются в результате циклической перестановки индексов в (17). Обратим внимание, что при $m_3 = 0$ снова получаем уже знакомую формулу

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -f \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3}.$$

Заметим, что расстояния между материальными точками в процессе движения могут меняться, но при этом в каждый момент времени они остаются одинаковыми. Следует также иметь в виду, что для выполнения условия $R_{12}(t) = R_{23}(t) = R_{31}(t)$ необходимо специально подобрать начальные скорости $\dot{\mathbf{R}}_1(0), \dot{\mathbf{R}}_2(0), \dot{\mathbf{R}}_3(0)$. Можно показать, что в этом случае траектории трех точек относительно барицентра системы представляют собой подобные конические сечения. Для этого воспользуемся (18), откуда

$$R_1 = \frac{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}}{m_1 + m_2 + m_3} R_{13}$$

и после соответствующих замен индексов

$$R_2 = \frac{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3} R_{13}, \quad R_3 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2 + m_3} R_{13}.$$

Таким образом, получаем

$$R_1 : R_2 : R_3 = \sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2} : \sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2} : \sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}.$$

Легко показать, что при этом не только каждое тело движется по кеплеровой орбите вокруг центра масс системы, но и относительные движения тел происходят по кеплеровым орбитам.

Например, рассмотрим движение тела m_2 относительно m_1 . С учетом того, что

$$R_1^3 = \frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^3} R_{12}^3 = \frac{M_1}{m_1 + m_2 + m_3} R_{12}^3,$$

$$R_2^3 = \frac{(m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^3} R_{12}^3 = \frac{M_2}{m_1 + m_2 + m_3} R_{12}^3,$$

уравнения движения m_1 и m_2 относительно центра масс системы принимают вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -f M_1 \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} = -f (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\mathbf{R}_1}{R_{12}^3},$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = -f M_2 \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} = -f (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\mathbf{R}_2}{R_{12}^3},$$

откуда

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 = -f (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{R_{12}^3}$$

или

$$\ddot{\mathbf{R}}_{12} = -f (m_1 + m_2 + m_3) \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}.$$

Французский астроном Андуайе⁵ и немецкий математик Каратеодори⁶ показали, что движение трех материальных точек, при котором все время соблюдается условие $R_{12} = R_{23} = R_{31}$, обязательно должно происходить в одной и той же неизменяемой плоскости.

5.5. Движение n материальных точек относительно одной из них

Рассмотрим систему n взаимно гравитирующих материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$. Введем систему координат $A_1 x y z$ с началом в A_1 и осями, сохраняющими постоянное направление в пространстве. Ограничимся для простоты случаем трех точек. Наряду с $A_1 x y z$ введем еще систему координат $S x y z$ с началом в барицентре и осями, параллельными соответствующим осям системы $A_1 x y z$ (инерциальная барицентрическая система). Обозначим $m = m_1 + m_2 + m_3$ и (см. Рис. 5.3)

$$\mathbf{C A}_1 = \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{C A}_2 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{C A}_3 = \mathbf{R}_3,$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}_{23} = \mathbf{r}_{23}, \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1 = \mathbf{R}_{31} = \mathbf{r}_{31}.$$

⁵ Андуайе, Анри (1862-1929) – французский астроном и математик.

⁶ Каратеодори, Константин (1873-1950) – немецкий математик греческого происхождения.

Здесь, как и ранее, большое \mathbf{R} указывает на то, что радиус-вектор берется в барицентрической системе (инерциальной), а малое \mathbf{r} - в системе координат A_1xyz (неинерциальной), связанной с точкой (A_1, m_1) . Очевидно, имеют место соотношения

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{r}_{23} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{r}_{31} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} + \mathbf{r}_{31} = 0.$$

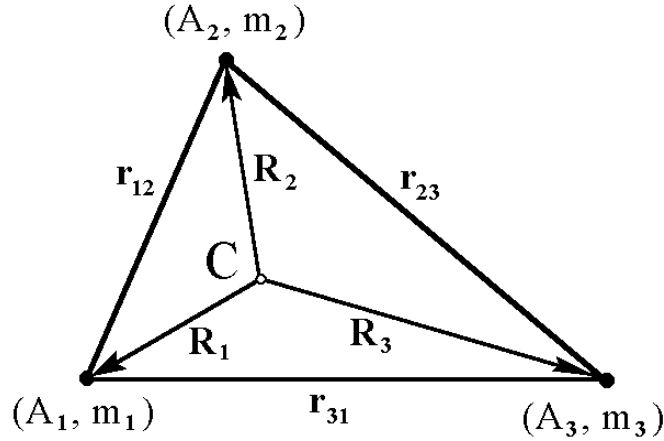


Рис. 5.3

В инерциальной системе координат (и, в частности, в барицентрической системе) справедливы уравнения движения

$$m_s \ddot{\mathbf{R}}_s = \mathbf{F}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$\mathbf{F}_s = f \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \frac{m_s m_i}{R_{si}^3} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_s).$$

Ясно, что в данном случае уравнение движения точки (A_2, m_2) будет иметь вид

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = f \left[\frac{m_1}{R_{12}^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) + \frac{m_3}{R_{23}^3} (\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2) \right]. \quad (19)$$

Выражая правую часть (19) через радиусы-векторы материальных точек в системе координат A_1xyz , перепишем уравнение следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = f \left(-m_1 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + m_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \right). \quad (20)$$

Аналогично легко показать, что для точки (A_1, m_1) имеет место

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = f \left(-m_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right). \quad (21)$$

Вычитая (21) из (20), получаем дифференциальное уравнение движения точки A_2 относительно A_1

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -f(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + fm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right). \quad (22)$$

Совершенно аналогично выводится уравнение движения точки A_3 относительно A_1

$$\ddot{\mathbf{r}}_{13} = -f(m_1 + m_3) \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}^3} - fm_2 \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \right). \quad (23)$$

Выясним физический смысл отдельных членов уравнения (22). Будем называть точку (A_1, m_1) центральным телом, точку (A_2, m_2) спутником центрального тела, а точку (A_3, m_3) возмущающим телом. Если бы возмущающего тела не было, то спутник под действием центрального тела получил бы ускорение

$$\mathbf{a} = -f(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

Из-за влияния возмущающего тела спутник приобретает дополнительное ускорение

$$\mathbf{f} = fm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right),$$

которое удобно представить в виде разности $\mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$. Вектор

$$\mathbf{b} = fm_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3}$$

определяет ускорение, которое получил бы спутник, если бы на него действовало только возмущающее тело, а сам спутник и центральное тело потеряли бы способность притягивать. Вектор

$$\mathbf{c} = -fm_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3}$$

определяет ускорение, которое сообщает возмущающее тело центральному телу.

Таким образом, дополнительное ускорение \mathbf{f} , которое получает спутник из-за вмешательства возмущающего тела (возмущающее ускорение), равно избытку ускорения, сообщаемого возмущающим телом спутнику, над ускорением, сообщаемым возмущающим телом центральному телу. При этом имеется в виду, что каждое из этих ускорений рассматривается при движении относительно возмущающего тела; при вычислении ускорений центральное тело и спутник рассматриваются как непритягивающие (а лишь притягиваемые) точки - далее такие тела будем называть пассивно гравитирующими.

Система двух векторных дифференциальных уравнений (22)-(23) равносильна системе шести скалярных дифференциальных уравнений второго порядка. Пусть в системе A_1 уз точки A_2 и A_3 имеют координаты (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) . Тогда

$$\ddot{x}_2 = -f(m_1 + m_2) \frac{x_2}{r_{12}^3} + fm_3 \left(\frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} - \frac{x_3}{r_{31}^3} \right), \quad x_2 \rightarrow y_2, z_2, \quad x_3 \rightarrow y_3, z_3; \quad (24)$$

$$\ddot{x}_3 = -f(m_3 + m_1) \frac{x_3}{r_{13}^3} - fm_2 \left(\frac{x_2}{r_{12}^3} + \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} \right), \quad x_3 \rightarrow y_3, z_3, \quad x_2 \rightarrow y_2, z_2. \quad (25)$$

В случаях, которые представляют практический интерес для космонавтики, одно из тел (космический аппарат) имеет ничтожно малую массу по сравнению с двумя другими телами (центральной телом и возмущающим телом), т.е. $m_2 \ll m_1, m_3$. Поэтому допустимо полагать

$$f(m_1 + m_2) \approx fm_1 = \mu_1.$$

Кроме того, движение возмущающего тела относительно центрального тела можно считать известным - КА практически не влияет на движение возмущающего тела. Поэтому задача определения движения КА сводится к решению трех уравнений (24).

Нетрудно обобщить полученные уравнения на случай системы из любого числа материальных точек. Обозначим

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_\nu = \mathbf{r}_{1\nu}, \quad \nu = 2, \dots, n; \quad \mathbf{A}_\nu \mathbf{A}_s = \mathbf{r}_{\nu s} = \mathbf{r}_{1s} - \mathbf{r}_{1\nu}, \quad r_{\nu s} = |\mathbf{r}_{1s} - \mathbf{r}_{1\nu}|;$$

$$\mathbf{f}_\nu = f \sum_{\substack{s=2 \\ s \neq \nu}}^n m_s \left(\frac{\mathbf{r}_{\nu s}}{r_{\nu s}^3} + \frac{\mathbf{r}_{s1}}{r_{s1}^3} \right).$$

Тогда движение тел системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu = -f \frac{m_1 + m_\nu}{r_\nu^3} \mathbf{r}_\nu + \mathbf{f}_\nu, \quad \nu = 2, \dots, n.$$

Пример: Пусть в какой-то момент времени круговой спутник Луны находится на продолжении отрезка, соединяющего центр Земли с центром Луны (рис. 5.4). Каким образом повлияет притяжение Земли на движение спутника относительно Луны?

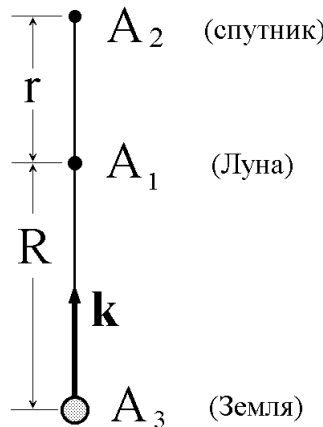


Рис. 5.4

В качестве центрального тела возьмем Луну; Земля играет роль возмущающего тела. Благодаря влиянию Земли спутник получает дополнительное ускорение \mathbf{f} . Определим его. Пусть $A_3A_1 = R$, $A_1A_2 = r$. Тогда имеем (\mathbf{k} - орт вектора A_3A_1)

$$\mathbf{b} = -f \frac{m_1}{(R+r)^2} \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = -f \frac{m_1}{R^2} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = fm_1 \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+r)^2} \right] \mathbf{k} = fm_1 \frac{(2R+r)r}{R^2(R+r)^2} \mathbf{k}.$$

Таким образом, с точки зрения лунного наблюдателя, видящего спутник A_2 в зените, благодаря притяжению Земли спутник получает дополнительное ускорение от Луны. Земля как бы отталкивает спутник A_2 от Луны. На самом деле этот результат объясняется просто тем, что Луна, находящаяся ближе к Земле, чем спутник, сильнее притягивается к Земле. Иными словами, возмущающее ускорение центрального тела оказывается больше возмущающего ускорения спутника.

5.6. Случаи сведения задачи трех тел к задаче двух тел

Существуют частные случаи задачи трех тел, когда ее решение сводится к уже известной задаче двух тел. Такая ситуация имеет место, например, в тривиальном случае, когда массы двух тел бесконечно малы. Тогда изучение движения системы трех тел сводится к решению двух отдельных задач двух тел. В результате оказывается, что движение каждого из двух бесконечно малых тел относительно массивного тела системы происходит по кеплеровой орбите. Однако возможны и нетривиальные случаи задачи трех тел, в которых относительные движения тел происходят по кеплеровым орбитам и, следовательно, задача трех тел легко разрешается до конца.

Рассмотрим задачу о нахождении всех таких случаев. Обозначим массы тел системы (материальных точек) m_1, m_2, m_3 и относительные векторы $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{31}$ (Рис. 5.5).

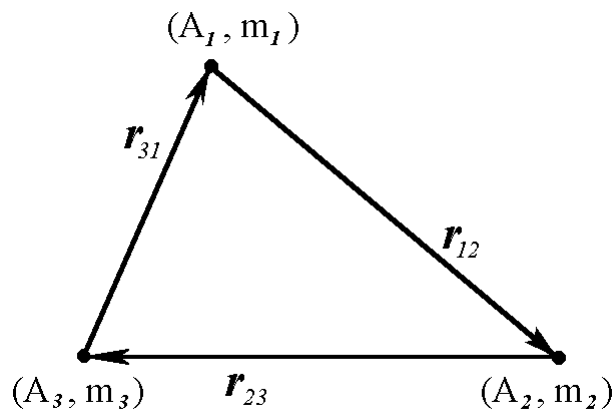


Рис. 5.5

Очевидно, имеет место равенство

$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} + \mathbf{r}_{31} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Воспользовавшись (22) с учетом соответствующих обозначений, запишем уравнения относительного движения (движения m_1 относительно m_3 , m_2 относительно m_1 и m_3 относительно m_2) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{31} &= -f(m_3 + m_1) \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + fm_2 \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_{12} &= -f(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + fm_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_{23} &= -f(m_2 + m_3) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + fm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку по условию относительные движения являются кеплеровыми, $\ddot{\mathbf{r}}_{31}$, $\ddot{\mathbf{r}}_{12}$, $\ddot{\mathbf{r}}_{23}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\ddot{\mathbf{r}}_{31} = -fM_1 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{12} = -fM_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{23} = -fM_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3}, \quad (28)$$

где M_i константы. Сравнивая (27) и (28), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} (m_3 + m_1 - M_1) \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} &= m_2 \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} \right), \\ (m_1 + m_2 - M_2) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} &= m_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \right), \\ (m_2 + m_3 - M_3) \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^3} + fm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

которые должны выполняться в каждый момент времени. После подстановки $\mathbf{r}_{31} = -\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{23}$ в первое уравнение, $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{31}$ во второе уравнение и $\mathbf{r}_{23} = -\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{12}$ в третье уравнение (29) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12} \left(\frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3 + m_1 - M_1}{r_{31}^3} \right) + \mathbf{r}_{23} \left(\frac{m_2}{r_{23}^3} + \frac{m_3 + m_1 - M_1}{r_{31}^3} \right) &= 0, \\ \mathbf{r}_{23} \left(\frac{m_3}{r_{23}^3} + \frac{m_1 + m_2 - M_2}{r_{12}^3} \right) + \mathbf{r}_{31} \left(\frac{m_3}{r_{31}^3} + \frac{m_1 + m_2 - M_2}{r_{12}^3} \right) &= 0, \\ \mathbf{r}_{31} \left(\frac{m_1}{r_{31}^3} + \frac{m_2 + m_3 - M_3}{r_{23}^3} \right) + \mathbf{r}_{12} \left(\frac{m_1}{r_{12}^3} + \frac{m_2 + m_3 - M_3}{r_{23}^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Ясно, что равенства (30) возможны, когда векторы $\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}$ коллинеарны, либо при обращении в нуль всех коэффициентов при $\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}$. Рассмотрим сначала первый случай. Пусть материальные точки m_1, m_2, m_3 лежат на одной прямой, причем m_2 расположена между m_1 и m_3 (Рис. 5.6).

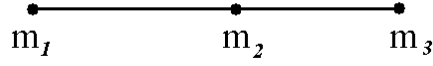


Рис. 5.6

Введем скалярный коэффициент x так, что

$$\mathbf{r}_{23} = x\mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{r}_{31} = -(1+x)\mathbf{r}_{12}. \quad (31)$$

Тогда из (30) находим

$$\begin{aligned} M_1 &= m_3 + m_1 + m_2 \frac{(1+x^2)(1+x)^2}{x^2}, \\ M_2 &= m_1 + m_2 - m_3 \frac{1+2x}{x^2(1+x)^2}, \\ M_3 &= m_2 + m_3 - m_1 \frac{x^3(2+x)}{(1+x)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что поскольку M_i постоянные величины, то и $x = \text{const}$, а это означает, что конфигурация системы трех тел в ходе движения остается подобной себе самой ($r_{23} : r_{12} = \text{const}$).

Чтобы определить величину коэффициента x , подставим (31) в (28). В результате получаем

$$(1+x)\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -fM_1 \frac{1}{(1+x)^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{12} = -fM_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad x\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -fM_3 \frac{1}{x^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

откуда

$$M_1 = (1+x)^3 M_2, \quad M_3 = x^3 M_2. \quad (33)$$

Подстановка выражений (32) для M_1 и M_2 в первое соотношение (33) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)x^5 + (3m_1 + 2m_2)x^4 + (3m_1 + m_2)x^3 - (m_2 + 3m_3)x^2 - \\ - (2m_2 + 3m_3)x - (m_2 + m_3) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Заметим, что подстановка M_2 и M_3 во второе соотношение (33) также приводит к уравнению (34).

Обратим внимание на то, что в последовательности коэффициентов уравнения (34) имеет место только одна перемена знаков. Согласно теореме Декарта (правило знаков Декарта), это уравнение всегда имеет единственный положительный корень x_1 . Если в начальный момент времени три тела поместить на одной прямой, причем

$$-\mathbf{r}_{31}(0) = (1 + x_1)\mathbf{r}_{12}(0) = \frac{1 + x_1}{x_1}\mathbf{r}_{23}(0),$$

и сообщить им скорости

$$-\dot{\mathbf{r}}_{31}(0) = (1 + x_1)\dot{\mathbf{r}}_{12}(0) = \frac{1 + x_1}{x_1}\dot{\mathbf{r}}_{23}(0),$$

то движение тел будет происходить по кеплеровым орбитам в соответствии с уравнениями (28). Такое движение системы трех тел называется эйлеровым.

Напомним, что этот результат получен в предположении, что тело m_2 расположено между m_1 и m_3 . Рассматривая еще два случая взаимного расположения трех тел на прямой, приходим к еще двум эйлеровым движениям системы трех тел. Во втором случае, когда m_3 расположено между m_2 и m_1 (Рис. 5.7), эйлерово движение имеет место при

$$-\mathbf{r}_{12}(0) = (1 + x_2)\mathbf{r}_{23}(0) = \frac{1 + x_2}{x_2}\mathbf{r}_{31}(0),$$

$$-\dot{\mathbf{r}}_{12}(0) = (1 + x_2)\dot{\mathbf{r}}_{23}(0) = \frac{1 + x_2}{x_2}\dot{\mathbf{r}}_{31}(0),$$

где x_2 определяется из уравнения

$$(m_2 + m_3)x^5 + (3m_2 + 2m_3)x^4 + (3m_2 + m_3)x^3 - (m_3 + 3m_1)x^2 - (2m_3 + 3m_1)x - (m_3 + m_1) = 0. \quad (35)$$

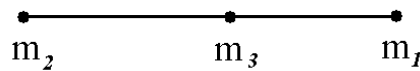


Рис. 5.7

В третьем случае, когда m_1 расположено между m_3 и m_2 (Рис. 5.8), эйлерово движение имеет место при

$$-\mathbf{r}_{23}(0) = (1 + x_3)\mathbf{r}_{31}(0) = \frac{1 + x_3}{x_3}\mathbf{r}_{12}(0),$$

$$-\dot{\mathbf{r}}_{23}(0) = (1 + x_3)\dot{\mathbf{r}}_{31}(0) = \frac{1 + x_3}{x_3}\dot{\mathbf{r}}_{12}(0),$$

где x_3 определяется из уравнения

$$(m_3 + m_1)x^5 + (3m_3 + 2m_1)x^4 + (3m_3 + m_1)x^3 - (m_1 + 3m_2)x^2 - (2m_1 + 3m_2)x - (m_1 + m_2) = 0. \quad (36)$$

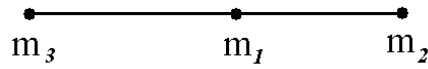


Рис. 5.8

Пусть теперь векторы $\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}$ неколлинеарны. Как было отмечено выше, в этом случае условия (30) выполняются только при обращении в нуль всех коэффициентов при $\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{23}$, т.е. при

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3 + m_1 - M_1}{r_{31}^3} &= 0, & \frac{m_2}{r_{23}^3} + \frac{m_3 + m_1 - M_1}{r_{31}^3} &= 0, \\ \frac{m_3}{r_{23}^3} + \frac{m_1 + m_2 - M_2}{r_{12}^3} &= 0, & \frac{m_3}{r_{31}^3} + \frac{m_1 + m_2 - M_2}{r_{12}^3} &= 0, \\ \frac{m_1}{r_{31}^3} + \frac{m_2 + m_3 - M_3}{r_{23}^3} &= 0, & \frac{m_1}{r_{12}^3} + \frac{m_2 + m_3 - M_3}{r_{23}^3} &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

откуда

$$r_{31} = r_{12} = r_{23}, \quad M_1 = M_2 = M_3 = m_1 + m_2 + m_3. \quad (38)$$

Условия (38) показывают, что три тела в каждый момент времени образуют правильный треугольник, а все кеплеровы орбиты относительных движений имеют одинаковые форму и размер. Заметим, что правильный треугольник может быть образован двумя способами (Рис. 5.9). Им отвечают два случая задачи трех тел, которые называются лагранжевыми.

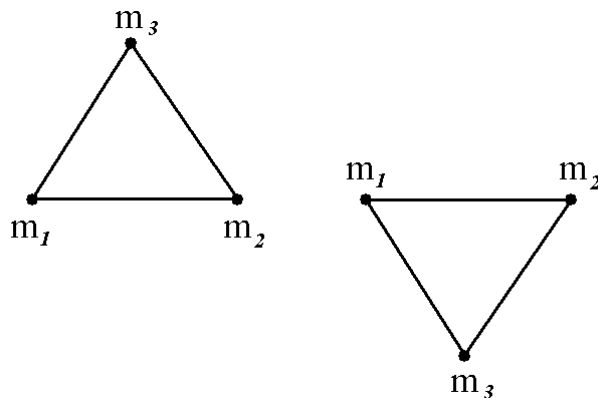


Рис. 5.9

5.7. Сфера притяжения и сфера действия

Пусть материальная точка P массы m (спутник) находится под действием притяжения двух небесных тел A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 . Эти тела будем называть притягивающими центрами или звездами. Та часть пространства, где $F_1 > F_2$, называется «областью притяжения» звезды A_1 относительно A_2 . Соответственно, в области притяжения звезды A_2 относительно A_1 выполняется условие $F_1 < F_2$.

Значительно больший практический интерес представляет разбиение пространства на «области действия». Под областью действия звезды A_1 относительно A_2 понимается следующее. Если тело P находится в области действия A_1 , то удобнее рассматривать его движение относительно центрального тела A_1 с учетом влияния возмущающего тела A_2 . Напротив, в остальной части пространства в качестве центрального тела лучше взять A_2 . Выбирая то или иное тело в качестве центрального, мы стремимся уменьшить отличие получившейся в результате траектории относительного движения от кеплеровой.

При определении областей действия предполагается, что масса m материальной точки P много меньше, чем массы звезд m_1 и m_2 . Более того, на практике, как правило, масса одного из притягивающих центров много меньше массы второго притягивающего центра, т.е. $m_1 \ll m_2$. Тогда в расчетах допустимо пренебречь квадратом величины $\mu = m_1/m_2$.

5.7.1. Сфера притяжения

Точка P (спутник) притягивается к точкам A_1, A_2 с силами

$$F_1 = f \frac{mm_1}{|A_1P|^2}, \quad F_2 = f \frac{mm_2}{|A_2P|^2}.$$

Рассмотрим следующий вопрос: какую фигуру образуют точки пространства, в которых спутник с одинаковой силой притягивается к звездам A_1 и A_2 ? Иными словами, определим геометрическое место точек, в которых имеет место

$$f \frac{mm_1}{|A_1P|^2} = f \frac{mm_2}{|A_2P|^2}. \quad (39)$$

Введем систему координат A_1 хуz (Рис. 5.10) и обозначим $A_1A_2 = a$.

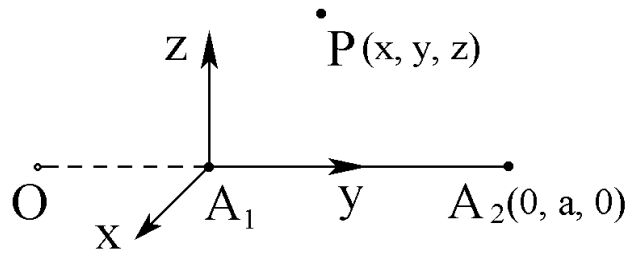


Рис. 5.10

Тогда

$$|A_1P|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad |A_2P|^2 = x^2 + (y - a)^2 + z^2.$$

Из (39) следует

$$\frac{|A_1P|^2}{|A_2P|^2} = \frac{m_1}{m_2} = \mu,$$

то есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mu [x^2 + (y - a)^2 + z^2],$$

откуда

$$x^2 + \left(y + a \frac{\mu}{1 - \mu} \right)^2 + z^2 = a^2 \frac{\mu}{(1 - \mu)^2}.$$

Заметим, что здесь по предположению $m_1 < m_2$ и, следовательно, $\mu < 1$.

Таким образом, получено уравнение сферы с центром в точке O на прямой A_1A_2

$$A_1O = a \frac{\mu}{1 - \mu} \tag{40}$$

и радиусом

$$OP = \frac{a\sqrt{\mu}}{1 - \mu}. \tag{41}$$

Например, вычислим радиус и положение сферы притяжения Луны относительно Земли. Имеем

$$\mu = \frac{m_M}{m_E} \simeq \frac{1}{81}, \quad a \simeq 384000 \text{ км}.$$

Подставляя эти значения в (39)-(40), находим

$$\rho = \frac{a\sqrt{\mu}}{1 - \mu} = 43\,200 \text{ км}, \quad A_1O = a \frac{\mu}{1 - \mu} = 4\,800 \text{ км}.$$

5.7.2. Сфера действия

Движение малого спутника (P, m) под действием притяжения двух "звезд" (A_1, m_1) и (A_2, m_2) можно изучать в различных системах отсчета. Напомним, что при рассмотрении системы трех тел мы одно тело называем центральным, второе возмущающим и третье спутником. Тогда уравнение движения спутника относительно центрального тела записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{a}_C + \mathbf{f}_C,$$

$$\mathbf{a}_C = -f \frac{m_{Ц} + m_C}{r_C^3} \mathbf{r}_C,$$
(42)

$$\mathbf{f}_C = fm_B \left(-\frac{\mathbf{r}_{BC}}{r_{BC}^3} + \frac{\mathbf{r}_{BЦ}}{r_{BЦ}^3} \right) = fm_B \left(\frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C}{r_{CB}^3} - \frac{\mathbf{r}_B}{r_B^3} \right).$$

Итак, рассмотрим движение малого спутника P под действием двух массивных "звезд" A_1 и A_2 (Рис. 5.11, $|\mathbf{r}_{12}| = a$). Одно из этих тел будем считать центральным, а другое - возмущающим. Но какое тело правильнее принять за центральное?

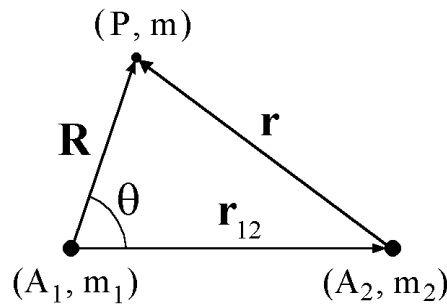


Рис. 5.11

Пусть сначала в качестве центрального тела выбрана меньшая звезда A_1 ($m_1 < m_2$). Тогда уравнение движения спутника (42) имеет вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{f}_1,$$

где

$$\mathbf{a}_1 = -f \frac{m_1 + m}{R^3} \mathbf{R}, \quad \mathbf{f}_1 = fm_2 \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right).$$

Здесь и далее индекс ускорения указывает на номер тела, играющего роль центрального. Ускорение спутника распадается на две составляющие: "основное" ускорение \mathbf{a}_1 , которое имел бы спутник, если бы не было возмущающей звезды; "возмущающее" ускорение \mathbf{f}_1 , которое является результатом влияния возмущающего тела. Величина f_1/a_1 показывает,

какую часть основного ускорения составляет возмущающее ускорение. Чем меньше f_1/a_1 , тем меньше орбита спутника отличается от кеплеровой орбиты.

Пусть теперь в качестве центрального тела выбрана звезда A_2 . Тогда

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{f}_2,$$

где

$$\mathbf{a}_2 = -f \frac{m_2 + m}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{f}_2 = fm_1 \left(\frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right).$$

Доля возмущающего ускорения f_2 от основного a_2 определяется отношением f_2/a_2 .

Область пространства, где выполняется неравенство

$$\frac{f_1}{a_1} < \frac{f_2}{a_2},$$

называется областью действия, или сферой действия, меньшей звезды относительно большей. Понятие "сфера действия планеты" введено в небесную механику Лапласом в связи с изучением движения комет при их сближении с Юпитером. Поэтому сферу действия называют также грависферой Лапласа. Внутри сферы действия A_1 выгоднее рассматривать A_1 в качестве центрального тела, а тело A_2 - в качестве возмущающего.

Выясним, какова геометрическая форма области действия A_1 относительно A_2 . Для этого выведем уравнение границы области действия, т.е. поверхности, на которой

$$\frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} \quad \text{или} \quad f_1 a_2 = f_2 a_1.$$

Имеем (здесь, как и при рассмотрении сферы притяжения, используется обозначение $a = r_{12}$)

$$a_1 = f \frac{m_1 + m}{R^2}, \quad f_1 = fm_2 \left| \frac{\mathbf{r}_{21}}{a^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right|; \quad (43)$$

$$a_2 = f \frac{m_2 + m}{r^2}, \quad f_2 = fm_1 \left| \frac{\mathbf{r}_{12}}{a^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right|. \quad (44)$$

На искомой поверхности имеет место равенство

$$fm_2 \left| \frac{\mathbf{r}_{21}}{a^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right| f \frac{m_2 + m}{r^2} = fm_1 \left| \frac{\mathbf{r}_{12}}{a^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| f \frac{m_1 + m}{R^2}$$

или

$$(m_1 + m)m_1 r^2 \left| \frac{\mathbf{r}_{12}}{a^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right| = (m_2 + m)m_2 R^2 \left| \frac{\mathbf{r}_{21}}{a^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right|.$$

Возводя в квадрат и учитывая, что

$$\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{R} = aR \cos \theta,$$

$$\mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{r}_{12} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r}_{12}) = -aR \cos \theta + a^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} (m_1 + m)^2 m_1^2 r^4 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{R^4} - 2 \cos \theta \frac{1}{a^2 R^2} \right) = \\ = (m_2 + m)^2 m_2^2 R^4 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{r^4} + 2 \frac{aR \cos \theta - a^2}{a^3 r^3} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

т.е. мы получили уравнение границы сферы действия тела A_1 относительно A_2 в сферических координатах R, θ .

Можно показать, что при $m_1 \ll m_2$ величина R/a является малой. Преобразуем при этом условии уравнение границы (45) и, раскладывая в ряд по степеням R/a , оставим члены с самой низкой степенью малой величины R/a .

Запишем уравнение границы в виде

$$\mu^4 = \left(\frac{R}{r} \right)^8 \cdot \frac{1 + \frac{r^4}{a^4} + 2 \frac{r}{a} \left(\frac{R}{a} \cos \theta - 1 \right)}{1 + \frac{R^4}{a^4} - 2 \frac{R^2}{a^2} \cos \theta}. \quad (46)$$

Здесь мы учли, что

$$\frac{(m_1 + m)^2 m_1^2}{(m_2 + m)^2 m_2^2} \approx \mu^4.$$

Воспользовавшись соотношением $r = R - r_{12}$, откуда

$$r^2 = R^2 - 2Ra \cos \theta + a^2$$

и, следовательно,

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 - 2 \frac{R}{a} \cos \theta + \frac{R^2}{a^2},$$

раскладываяем входящие в числитель (46) выражения

$$\frac{r^4}{a^4} = 1 - 4 \frac{R}{a} \cos \theta + 2 \frac{R^2}{a^2} + 4 \frac{R^2}{a^2} \cos^2 \theta + \dots,$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{R}{a} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{a^2} \cos^2 \theta + \dots$$

Тогда числитель (46) с точностью до $O(R^2/a^2)$ принимает вид

$$1 + \frac{r^4}{a^4} + 2 \frac{r}{a} \left(\frac{R}{a} \cos \theta - 1 \right) = \frac{R^2}{a^2} (1 + 3 \cos^2 \theta)$$

и для границы (46) окончательно получаем следующее приближенное уравнение:

$$\left(\frac{R}{a}\right)^{10} (1 + 3\cos^2 \theta) = \mu^4 . \quad (47)$$

Оно определяет поверхность вращения, представляющую собой слегка сплюснутую сферу (Рис. 5.12). Эта поверхность может быть получена вращением вокруг оси A_1A_2 плоской кривой

$$R = a\mu^{2/5} \frac{1}{\sqrt[10]{1 + 3\cos^2 \theta}} .$$

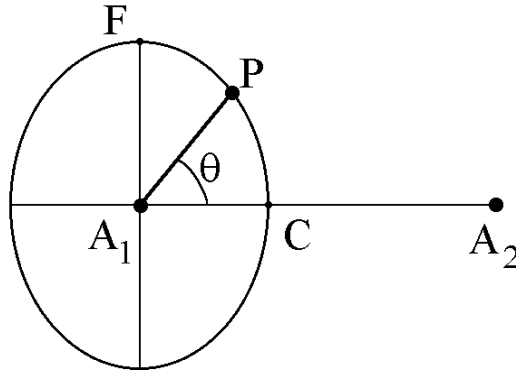


Рис. 5.12

Отношение максимального $R_{\max} = R_F$ и минимального $R_{\min} = R_C$ расстояния от звезды A_1 до границы сферы действия имеет вид

$$\frac{R_F}{R_C} = \sqrt[10]{\frac{1 + 3\cos^2 \theta_C}{1 + 3\cos^2 \theta_F}} = \sqrt[5]{2} \approx 1.15 .$$

Таким образом, при малых значениях m_1/m_2 граница сферы действия действительно лишь незначительно отличается от сферы радиуса

$$R = a\mu^{2/5} ,$$

с центром в A_1 . Внутри и вне сферы действия соответственно выполняются условия

$$\frac{f_1}{a_1} < \frac{f_2}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{f_1}{a_1} > \frac{f_2}{a_2} .$$

Величину R обычно называют радиусом действия (или радиусом сферы действия).

Представляет интерес оценить величину отношения возмущающего и основного ускорения на границе сферы действия. Из (43) имеем

$$\frac{f_1}{a_1} \approx \frac{m_2}{m_1} R^2 \left| \frac{r_{21}}{a^3} - \frac{r}{r^3} \right| ,$$

откуда, проводя аналогичные разложения и упрощения, получаем

$$\frac{f_1}{a_1} \approx \frac{1}{\mu} \frac{R^3}{a^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}$$

или, с учетом (46),

$$\frac{f_1}{a_1} \approx \left[\mu (1 + 3 \cos^2 \theta) \right]^{1/5}.$$

Таким образом, это отношение максимально при $\theta = 0$

$$\max (f_1/a_1) = (4\mu)^{1/5} \approx 1,32\mu^{1/5}.$$

В Таблице 5.1 приведены радиусы сфер действия планет относительно Солнца и радиус сферы действия Луны относительно Земли. При этом радиусы сфер действия изменяются в некотором диапазоне, поскольку орбиты планет эллиптические и их расстояния от Солнца не постоянны. То же самое справедливо и по отношению к расстоянию между Луной и Землей. В той же таблице приводятся максимальные отношения возмущающего и основного ускорений на границе соответствующих сфер действия.

Таблица 5.1

		Радиус сферы действия, $\times 10^3$ км	$\max (f/a)$
Венера	относительно Солнца	612 – 621	0,099
Земля	относительно Солнца	913 – 944	0,104
Марс	относительно Солнца	524 – 631	0,066
Юпитер	относительно Солнца	$45,9 \times 10^3 - 50,5 \times 10^3$	0,35
Луна	относительно Земли	62,5 – 69,8	0,55

На примере системы Земля-Луна сравним размеры сферы притяжения и сферы действия. Напомним, что радиус сферы притяжения Луны составляет 43200 км, а ее центр смещен относительно центра Луны на 4800 км. Следовательно расстояние от Луны до границы сферы притяжения не превосходит 48 тыс.км, что значительно меньше радиуса ее сферы действия. Иными словами, сфера притяжения Луны лежит глубоко внутри ее сферы действия. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к сферам притяжения и сферам действия планет относительно Солнца. Заметим также, что Луна расположена глубоко внутри сферы действия Земли относительно Солнца.

Обратим внимание, что неучет возмущающего ускорения может привести к заметной ошибке, если тело остается в окрестности границы сферы действия продолжительное время. Существуют и другие способы разделения пространства на области, где доминирует одно из притягивающих тел.

5.8. Приближенная методика

Решение задачи о движении материальной точки (P, m) под влиянием других тел A_1, A_2, \dots, A_n приводит к сложным дифференциальным уравнениям. Даже приближенное решение этих уравнений весьма громоздко. В то же время для космонавтики особенно интересен более простой случай, когда движение тел A_1, A_2, \dots, A_n известно, а $m \ll m_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда можно предложить способ приближенного решения задачи, дающий достаточно удовлетворительные результаты во многих интересных для практики случаях. Ту часть пространства, где происходит движение P , разбиваем на несколько областей G_1, G_2, \dots, G_n , в каждой из которых будет учитываться влияние на P лишь одного из тел A_i (Рис. 5.13). Такую область назовем сферой влияния тела A_i . Внутри каждой из сфер влияния истинная траектория P заменяется невозмущенной траекторией (дугой конического сечения); точки соединения этих дуг лежат на границах соседних сфер влияния. Выбор сфер влияния, их размеров, формы и расположения желательно произвести так, чтобы минимизировать отклонение кусочно-конической траектории от истинной траектории P .

Наиболее распространенный способ выбора сфер влияния связан с понятием сферы действия, т.е. за сферу влияния меньшей звезды принимают ее сферу действия, за сферу влияния большей звезд – всю остальную часть пространства. Заметим, что предлагались также другие способы разбиения пространства на сферы влияния. Например, можно упомянуть грависферу Кислика и грависферу Хилла. Выбор той или иной сферы влияния зависит от решаемой задачи, в частности, от того, какие параметры орбиты точки P нас интересуют в первую очередь.

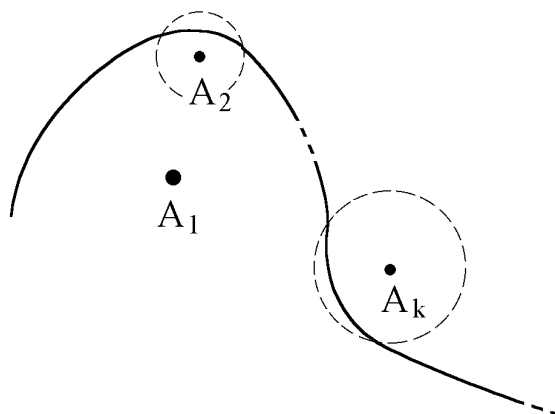


Рис. 5.13

5.8.1. Задача о третьей космической скорости

Если ракета получит у поверхности Земли геоцентрическую скорость, равную второй космической скорости (параболической скорости в задаче двух тел "Земля-КА" в точке, отстоящей от центра Земли на расстоянии, равном среднему радиусу Земли), то она

преодолеет притяжение Земли, но не сможет выйти за пределы Солнечной системы. Выйдя из сферы действия Земли с малой скоростью относительно Земли (около 30 км/с относительно Солнца), она будет обращаться вокруг Солнца по эллипсу, близкому к орбите Земли.

Однако можно сообщить ракете настолько большую геоцентрическую скорость, чтобы она могла удалиться сколь угодно далеко от Солнца. Под третьей космической скоростью понимается такая минимальная геоцентрическая скорость, которую должна иметь ракета в момент старта у поверхности Земли для того, чтобы удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от Солнца. При этом делаются следующие упрощающие предположения:

1. Влияние других тел кроме Солнца и Земли не учитывается.
2. Получив третью космическую скорость ракета должна уйти в бесконечность на первом витке.
3. Не учитываются сплюснутость Земли, сопротивление атмосферы, вращение Земли вокруг своей оси.
4. Орбита Земли считается круговой (на самом деле $e \approx 0.017$).
5. Всюду внутри сферы действия Земли местная параболическая скорость относительно Солнца такая же, как на самой орбите Земли (в действительности различие может доходить до 0.3 %).

В соответствии с приближенной методикой пренебрегаем влиянием Солнца внутри сферы действия Земли и влиянием Земли вне этой сферы действия. Для того, чтобы ракета могла уйти в бесконечность, она при выходе из сферы действия Земли (Рис. 5.14) должна иметь относительно Солнца скорость

$$V_2 \geq V_{pS} ,$$

где V_{pS} - местная параболическая скорость относительно Солнца.

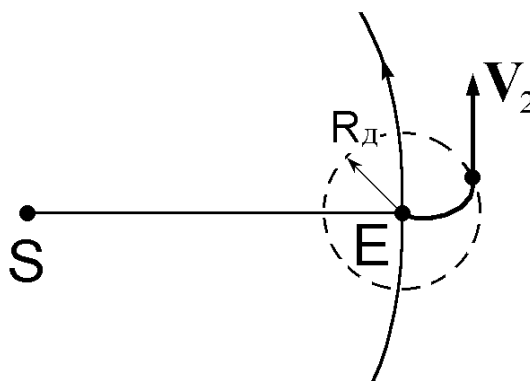


Рис. 5.14

Пусть V_0 - геоцентрическая скорость ракеты у поверхности Земли, V_1 - геоцентрическая скорость ракеты на границе сферы действия Земли, R_E - радиус Земли, $R_D \approx 930\,000$ км - радиус сферы действия Земли. Из интеграла энергии имеем

$$V_1^2 - \frac{2\mu_E}{R_D} = V_0^2 - \frac{2\mu_E}{R_E},$$

откуда

$$V_0^2 = V_1^2 + \frac{2\mu_E}{R_E} - \frac{2\mu_E}{R_D}.$$

Минимум V_0 соответствует минимуму V_1 . Обозначим V_E - скорость геоцентрической системы координат относительно Солнца ($V_E \approx 29.8$ км/с) Тогда гелиоцентрическая скорость ракеты будет

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_E.$$

Ясно, что

$$V_2 \leq V_1 + V_E. \quad (48)$$

Вне сферы действия Земли учитываем только влияние Солнца. Поэтому должно выполняться неравенство

$$V_2 \geq V_{pS}. \quad (49)$$

Из неравенств (48), (49), следует

$$V_1 + V_E \geq V_2 \geq V_{pS},$$

откуда

$$V_{1\min} = V_{pS} - V_E.$$

Это имеет место, когда направления векторов \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_E одинаковы. Окончательно получаем

$$V_0^2 = (V_{pS} - V_E)^2 + 2\mu_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_D} \right).$$

Определяемая отсюда скорость V_0 и будет искомой третьей космической скоростью.

Упростим эту формулу. Пренебрегая малой эллиптичностью орбиты Земли, имеем

$$V_{pS} = V_E \sqrt{2},$$

следовательно,

$$(V_{pS} - V_E)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = (3 - 2\sqrt{2})V_E^2 \approx 0.18V_E^2.$$

Кроме того, величина $2\mu_E/R_E$ представляет собой квадрат геоцентрической параболической скорости ракеты в точке у поверхности Земли, а известно, что $V_{pE} \approx 11.2$ км/с.

Далее

$$\frac{2\mu_E}{R_D} = \frac{2\mu_E}{R_E} \frac{R_E}{R_D} \approx 0.007V_{pE}^2$$

и наконец

$$V_0 = \sqrt{(V_{pS} - V_E)^2 + V_{pE}^2 \left(1 - \frac{R_E}{R_D}\right)} \quad (50)$$

или

$$V_0 = \sqrt{0.18V_E^2 + V_{pE}^2 - 0.007V_{pE}^2} \approx 16.7 \text{ км/с} . \quad (51)$$

Понятие третьей космической скорости можно ввести для любой планеты. Для вычисления ее величины надо воспользоваться формулой (49), подставив в нее вместо V_E круговую скорость движения планеты вокруг Солнца, а вместо V_{nE} - планетоцентрическую параболическую скорость в точке у поверхности планеты.

5.8.2. Гравитационный маневр

Рассмотрим еще один пример использования понятия сферы действия при решении практической задачи. Обсудим так называемый гравитационный или пертурбационный маневр, смысл которого заключается в разгоне (или торможении) КА с использованием гравитационного поля планеты. В результате близкого облета планеты скорость КА может быть изменена без включения ракетного двигателя и, следовательно, без расхода топлива.

Пусть межпланетная траектория КА проходит через сферу действия некоторой планеты (Рис. 5.15). Гелиоцентрические скорости КА в точках входа в сферу действия (точка 1) и выхода из сферы действия (точка 2) обозначим V_1 и V_2 соответственно. Планетоцентрические скорости КА в этих же точках обозначим $V_{1\infty}$ и $V_{2\infty}$. Очевидно, имеют место соотношения

$$V_1 = V_{p1} + V_{1\infty}, \quad V_2 = V_{p2} + V_{2\infty},$$

где V_{p1} и V_{p2} - гелиоцентрические скорости планеты в точках 1 и 2.

Сделаем ряд упрощающих предположений: внутри сферы действия планеты КА движется по планетоцентрической гиперболической траектории; вектор $V_{1\infty}$ направлен по входной асимптоте гиперболы, вектор $V_{2\infty}$ направлен по выходной асимптоте, причем $V_{1\infty} = V_{2\infty} = V_\infty$; скорость планеты за время нахождения КА внутри сферы действия не изменяется, т.е. $V_{p1} = V_{p2}$.

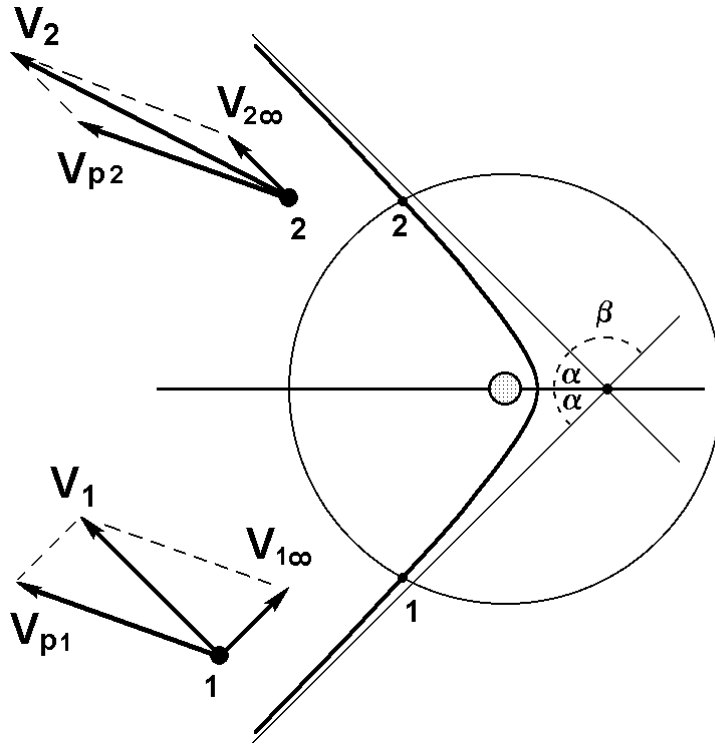


Рис. 5.15

Сначала оценим величину угла поворота траектории КА в результате пролета через сферу действия планеты, т.е. угол $\beta = \pi - \alpha$ между векторами $V_{1\infty}$ и $V_{2\infty}$. Имеем

$$\sin \frac{\beta}{2} = \cos \alpha = \frac{1}{e}. \quad (52)$$

С учетом известных соотношений для гиперболического движения

$$r_{\pi} = a(e - 1), \quad e = \frac{r_{\pi}}{a} + 1, \quad V_{\infty}^2 = \frac{\mu}{a} \quad (= h),$$

уравнение (52) принимает вид

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{1 + V_{\infty}^2 r_{\pi} / \mu}, \quad (53)$$

откуда

$$\beta = 2 \arcsin \frac{1}{1 + V_{\infty}^2 r_{\pi} / \mu}, \quad (54)$$

Здесь r_{π} - перицентрическое расстояние, μ - гравитационный параметр планеты.

Поскольку r_{π} не меньше радиуса планеты R , имеет место неравенство

$$\beta \leq 2 \arcsin \frac{1}{1 + V_{\infty}^2 R / \mu} = 2 \arcsin \frac{1}{1 + (V_{\infty} / V_c)^2}, \quad (55)$$

Здесь $V_c = \sqrt{\mu/R}$ - круговая скорость на поверхности планеты. Из (55) видно, что угол поворота β в зависимости от величины V_∞ может изменяться от 0 до π ($\beta = \pi$ при $V_\infty = 0$, $\beta \rightarrow 0$ при $V_\infty \rightarrow \infty$).

Теперь оценим изменение гелиоцентрической скорости $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$. С учетом сделанных предположений $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_{2\infty} - \mathbf{V}_{1\infty}$ (Рис. 5.16). Следовательно,

$$\Delta V = 2V_\infty \sin \frac{\beta}{2} = \frac{2V_\infty}{1 + V_\infty^2 r_\pi / \mu}. \quad (56)$$

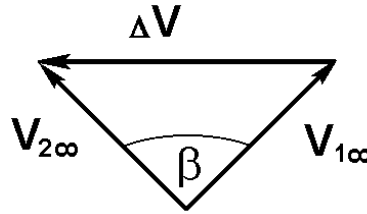


Рис. 5.16

Из формулы (56) следует, что уменьшение r_π приводит к увеличению ΔV . Заметим, что приращение скорости $\Delta V \rightarrow 0$, если $V_\infty \rightarrow 0$ или если $V_\infty \rightarrow \infty$. Это означает, что при некотором значении V_∞ существует $\max \Delta V$. Дифференцируя (55), получаем

$$\frac{d}{dV_\infty} \Delta V = 2 \frac{1 - V_\infty^2 r_\pi / \mu}{(1 + V_\infty^2 r_\pi / \mu)^2},$$

откуда следует, что $\max \Delta V = V_c$ достигается при $V_\infty^2 = \mu / r_\pi = V_c^2$.

Таким образом, максимальное приращение скорости за счет гравитационного маневра достигается в случае, когда скорость КА при входе в сферу действия равна круговой скорости V_c . В этом случае треугольник скоростей (рис. 5.16) является равносторонним и угол поворота траектории КА равен $\pi/3$.

Если ввести относительные величины

$$\Delta \tilde{V} = \frac{\Delta V}{V_c}, \quad \tilde{V}_\infty = \frac{V_\infty}{V_c},$$

то формулы (54) и (56) принимают вид

$$\beta = 2 \arcsin \frac{1}{1 + \tilde{V}_\infty^2}, \quad \Delta \tilde{V} = \frac{2\tilde{V}_\infty}{1 + \tilde{V}_\infty^2}, \quad (57)$$

Соответствующие зависимости показаны на Рис. 5.17. Они не связаны с конкретными характеристиками поля притяжения (μ) и траектории (r_π), и поэтому являются универсальными. С их помощью можно оценить величину приращения скорости и угол

поворота траектории при гравитационном маневре в поле притяжения любого небесного тела.

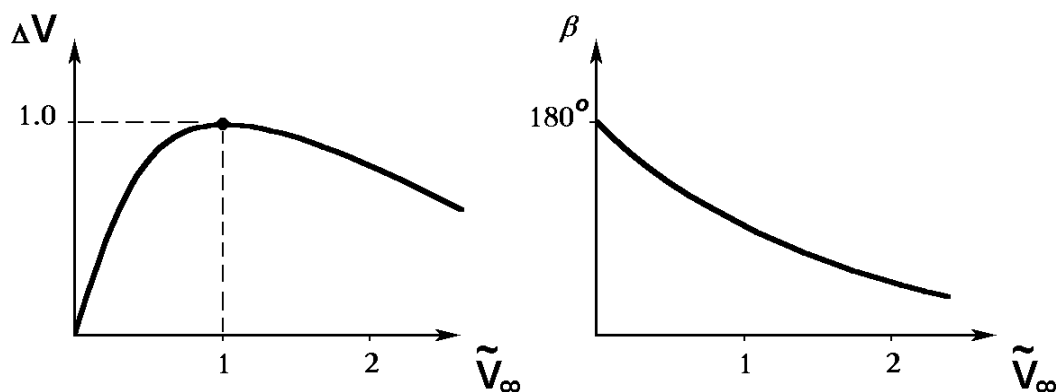


Рис. 5.17

Глава 6. Ограниченная круговая задача трех тел

В ряде случаев рассмотренная ранее приближенная методика может привести к слишком грубым или даже ошибочным выводам, потому что мы полностью пренебрегаем в отдельных областях пространства влиянием всех тел кроме одного. Решение же задачи о движении нескольких тел при полном учете их взаимного притяжения приводит к необходимости анализа слишком громоздких уравнений.

При решении практически всех задач космонавтики, а также многих задач небесной механики можно, выходя за рамки классической задачи двух тел, тем не менее сделать ряд упрощающих предположений:

- ограничимся рассмотрением системы трех тел (рис. 6.1);
- $m \ll m_1, m_2$, т.е. тело (P, m) можно считать пассивно гравитирующим;
- заменим тела материальными точками.

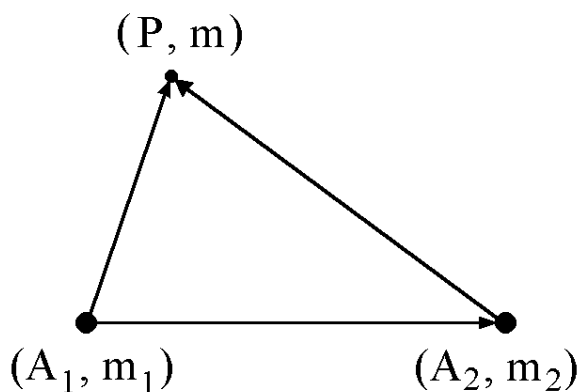


Рис. 6.1

В результате приходим к так называемой *ограниченной задаче трех тел*:

Считая известным движение двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) относительно их барицентра, изучить движение пассивно гравитирующей материальной точки (P, m) .

Если дополнительно предположить, что одна звезда движется относительно другой по окружности, то получим вариант задачи, который называется *ограниченной круговой задачей трех тел*. В ряде случаев можно, кроме того, считать, что спутник и обе звезды движутся в одной плоскости. Тогда приходим к *ограниченной плоской круговой задаче трех тел*. К этой задаче сводится, например, изучение движения КА под действием притяжения Земли и Солнца в случае, когда орбита КА лежит в плоскости эклиптики.

6.1. Уравнения движения

Выведем уравнения движения в ограниченной круговой задаче. Введем инерциальную правую ортогональную систему координат $CXYZ$ (рис. 6.2) с началом в барицентре C двух тел (A_1, m_1) и (A_2, m_2) . При этом пусть CXY - плоскость, в которой движутся материальные точки A_1 и A_2 ; ось CX совпадает с CA_2 в начальный момент времени (при $t = 0$). Для определенности пусть $m_2 < m_1$. Обозначим

$$CA_1 = R_1, \quad CA_2 = R_2, \quad CP = R, \quad A_1P = \rho_1, \quad A_2P = \rho_2,$$

$$A_1A_2 = a, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

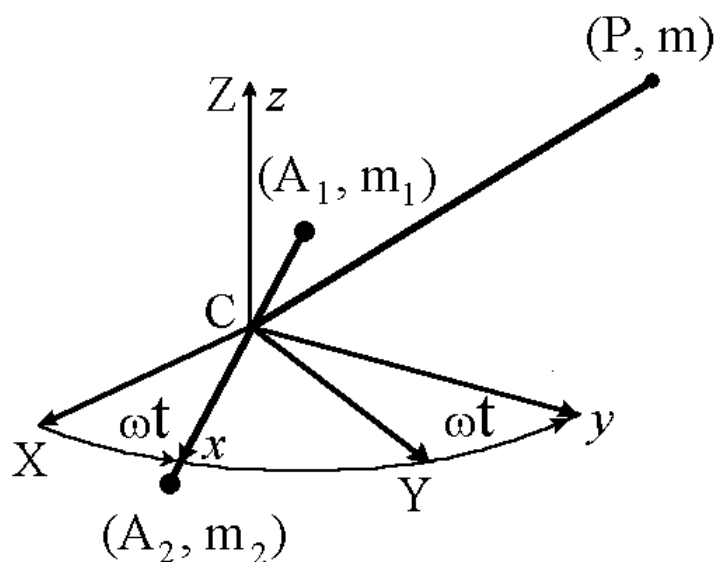


Рис. 6.2

Тогда дифференциальное уравнение движения тела (P, m) в инерциальной системе координат $CXYZ$ имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = f \frac{m_1}{\rho_1^3} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}) + f \frac{m_2}{\rho_2^3} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}). \quad (1)$$

Немецкий математик Якоби еще в 1834 г. заметил, что ценную информацию о движении тела (P, m) можно получить, если перейти к другой системе отсчета, вращающейся вокруг оси CZ вместе с осью A_1A_2 . Вращающаяся система координат $Cxuz$ уже является неинерциальной; ее ось Cx будет постоянно направлена вдоль CA_2 . Пусть $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость, с которой тела A_1 и A_2 обращаются вокруг их барицентра C . Заметим, что эта угловая скорость постоянна, т.к. по предположению массивные тела движутся по круговым орбитам.

Введем следующие обозначения: X, Y, Z - координаты P в $CXYZ$; x, y, z - координаты P в $Cxuz$; $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ и $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные векторы вдоль осей инерциальной системы координат $CXYZ$ и вращающейся системы координат $Cxuz$ соответственно. Тогда

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

причем, очевидно, $\mathbf{R} = \mathbf{r}$.

Скорость и ускорение точки P в системе координат $CXYZ$ определяются по формулам

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{X}\mathbf{I} + \dot{Y}\mathbf{J} + \dot{Z}\mathbf{K}, \quad \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{X}\mathbf{I} + \ddot{Y}\mathbf{J} + \ddot{Z}\mathbf{K}.$$

Аналогично в системе координат $Cxuz$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

Нетрудно показать, что имеет место соотношение

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (2)$$

продифференцировав которое, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = \ddot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega} \times [\dot{\mathbf{r}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = \\ &= \ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Далее будем обозначать радиус-векторы массивных тел во вращающейся системе координат $Cxuz$ малыми \mathbf{r} : $CA_1 = \mathbf{r}_1$, $CA_2 = \mathbf{r}_2$. Ясно, что $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}$. Тогда уравнение движения (1) точки P принимает вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = f \frac{m_1}{\rho_1^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + f \frac{m_2}{\rho_2^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + f \frac{m_1}{\rho_1^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + f \frac{m_2}{\rho_2^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$\rho_k = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}| = \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2}, \quad k = 1, 2.$$

Уравнение (3) - векторное уравнение движения точки P во вращающейся системе координат. Другую запись того же уравнения получим, воспользовавшись равенствами

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}), \quad \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \omega(\dot{x}\mathbf{j} - \dot{y}\mathbf{i}),$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}).$$

Подставляя в (3), получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2\omega(\dot{y}\mathbf{i} - \dot{x}\mathbf{j}) + \omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) + f \frac{m_1}{\rho_1^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + f \frac{m_2}{\rho_2^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}). \quad (4)$$

Последнее векторное уравнение равносильно системе трех скалярных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2 x + f \frac{m_1}{\rho_1^3} (x_1 - x) + f \frac{m_2}{\rho_2^3} (x_2 - x), \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - f \frac{m_1}{\rho_1^3} y - f \frac{m_2}{\rho_2^3} y, \\ \ddot{z} &= -f \frac{m_1}{\rho_1^3} z - f \frac{m_2}{\rho_2^3} z. \end{aligned} \quad (5)$$

В теоретических исследованиях для упрощения выкладок часто пользуются следующей канонической системой единиц: за единицу массы принимают сумму масс двух притягивающих центров ($m_1 + m_2 = 1$); за единицу длины - расстояние между притягивающими центрами $a = A_1 A_2$; за единицу времени - то время, которое потребуется телу A_1 для описания дуги в 1 радиан вокруг тела A_2 .

В такой системе единиц период обращения A_1 вокруг A_2 равен 2π . Но для периода имеет место формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{f(m_1 + m_2)}}.$$

Отсюда следует, что так как $T = 2\pi$, $a = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, то в канонической системе единиц $f = 1$. Тогда, заменяя в (5) m_2 на $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, m_1 на $1 - \mu$, f на 1, ω на 1 ($\omega = 2\pi/T$), получим

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(x_1 - x) + \frac{\mu}{\rho_2^3}(x_2 - x), \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{1-\mu}{\rho_1^3}y - \frac{\mu}{\rho_2^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.\end{aligned}\tag{6}$$

Заметим, что в случае плоской задачи третье уравнение в (6) обращается в тождество, т.к. по предположению точка P движется в той же плоскости, что и тела A_1 , A_2 , т.е. $z \equiv 0$. Система (6) представляет собой дифференциальные уравнения движения точки P в ограниченной круговой задаче трех тел.

Вернемся к уравнению (3)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + f \frac{m_1}{\rho_1^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + f \frac{m_2}{\rho_2^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}),$$

определяющему движение P во вращающейся системе координат $Cxuz$, и сравним его с аналогичным уравнением (1) в инерциальной системе $CXYZ$

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = f \frac{m_1}{\rho_1^3}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}) + f \frac{m_2}{\rho_2^3}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}).$$

Эти уравнения отличаются слагаемыми $-2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})$ и $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, появление которых связано с неинерциальностью системы отсчета $Cxuz$. Величина

$$\mathbf{a}_y = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{a}_y = \omega^2 (xi + yj)$$

это центробежное ускорение. Оно направлено вдоль проекции радиуса-вектора точки P на плоскость xu . Второе слагаемое

$$\mathbf{a}_k = -2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})$$

или

$$\mathbf{a}_k = 2\omega (yi - xj)$$

представляет собой взятое с обратным знаком кориолисово ускорение.

Движение P относительно инерциальной системы координат $CXYZ$ будем называть абсолютным, а движение относительно вращающейся системы $Cxuz$ - относительным.

Уравнения (5) можно записать в более удобном виде, если ввести функцию

$$U = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + f \frac{m_1}{\rho_1} + f \frac{m_2}{\rho_2} . \quad (7)$$

Тогда легко показать, что система (5) примет вид

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -2\omega \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} . \quad (8)$$

Умножая уравнения (8) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и складывая результаты, получаем

$$2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z}\right),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2 \frac{dU}{dt} .$$

Обозначим скорость точки P относительно $S_{хуz}$ через V . Тогда

$$\frac{d}{dt}(V^2) = 2 \frac{dU}{dt}$$

или

$$V^2 = 2U - C , \quad (9)$$

где C - константа. Таким образом, получен первый интеграл для системы (8). Он называется интегралом Якоби и может быть записан в виде

$$V^2 = \omega^2 (x^2 + y^2) + 2f \frac{m_1}{r_1} + 2f \frac{m_2}{r_2} - C . \quad (10)$$

Замечание. Запишем интеграл Якоби в исходной инерциальной (невращающейся) системе координат $SXYZ$. Для абсолютной скорости тела V_0 имеем

$$V_0 = V + \omega \times r ,$$

откуда

$$V^2 = V_0^2 - 2(\omega \times r)V_0 + (\omega \times r)^2 .$$

Тогда, с учетом очевидных тождеств

$$(\omega \times r)V_0 = (r \times V_0)\omega, \quad (\omega \times r)^2 = \omega^2 (x^2 + y^2)$$

интеграл Якоби принимает вид

$$V_0^2 - 2(r \times V_0)\omega = 2f \frac{m_1}{r_1} + 2f \frac{m_2}{r_2} - C$$

или, после умножения на $m/2$,

$$E - K_z \omega = C' = const .$$

Здесь

$$E = \frac{m}{2} V_0^2 - f \frac{m_1 m}{r_1} - f \frac{m_2 m}{r_2}, \quad K_z = \mathbf{K} \cdot \mathbf{k} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{V}_0) \cdot \mathbf{k}$$

полная энергия тела и проекция его кинетического момента на ось CZ , соответственно. В частности, в случае плоской задачи трех тел $K_z = K$ и интеграл Якоби принимает вид

$$E - K\omega = C'.$$

Таким образом, в ограниченной круговой задаче трех тел полная энергия тела E и кинетический момент K изменяются, но сохраняется разность $E - K_z\omega$. Напомним, что в ограниченной задаче двух тел сохраняется и полная энергия тела и его кинетический момент (секториальная скорость),

Константу интеграла Якоби можно определить, если в какой-то момент времени известны относительная скорость спутника (V) и его положение (r_1, r_2). Если затем в какой-то другой момент времени будет задано положение спутника, то с помощью интеграла Якоби можно вычислить относительную скорость спутника (но только по абсолютной величине, а не по направлению). При численном интегрировании системы (5) интеграл Якоби часто используется как эффективное средство контроля точности вычислений. Обсудим теперь некоторые результаты, полученные с использованием интеграла Якоби.

6.2. Критерий Тиссерана

Кометы, как правило, движутся по сильно вытянутым гелиоцентрическим орбитам - коническим сечениям с большими эксцентриситетами. При этом может оказаться, что в процессе своего движения комета пройдет вблизи массивной кометы, например, Юпитера. Естественно, во время прохождения кометы вблизи Юпитера ее гелиоцентрическая орбита будет подвергаться возмущению, и в результате элементы орбиты могут существенно измениться. Возникает следующая проблема. Предположим, на разных интервалах времени производились наблюдения за двумя кометами. По результатам наблюдений были рассчитаны элементы их гелиоцентрических орбит. И хотя орбиты получились разные, непонятно, наблюдались ли две различные кометы или это была одна и та же комета, орбита которой была изменена в результате пролета кометы вблизи какой-то массивной планеты Солнечной системы.

Иными словами, как отождествить комету, наблюдавшуюся до сближения с возмущающим телом, с кометой, наблюдавшейся после того, как она покинула сферу действия возмущающего тела. Для решения этой задачи необходимо иметь такие характеристики гелиоцентрической орбиты кометы, которые не подвергаются возмущающему действию планеты.

Такие характеристики были обнаружены Тиссераном⁷, который предположил, что систему Солнце-планета-комета можно приближенно рассматривать в рамках ограниченной круговой задачи трех тел. При этом комета - тело бесконечно малой массы. Планета в таких

⁷ Тиссеран, Франсуа Феликс (1845-1896) – французский астроном.

задачах это обычно Юпитер (благодаря его большой массе и значительному удалению от Солнца). Орбиту Юпитера можно приближенно считать круговой ($e \sim 0.05$).

Рассмотрим систему трех тел (рис. 6.3) - Солнце (S, m_1), Юпитер (J, m_2), комета (C, m). В канонической системе единиц $m_1 = 1 - \mu, m_2 = \mu, OS = \mu, OJ = 1 - \mu$.

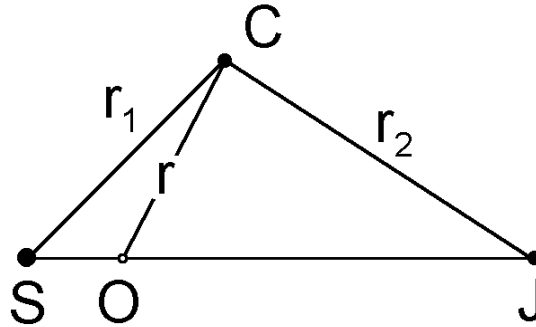


Рис. 6.3

Из интеграла Якоби следует, что при движении кометы должна сохраняться константа C . Имеем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = x^2 + y^2 + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - C. \quad (11)$$

Здесь x, y, z - координаты кометы во вращающейся системе координат.

Выразим величины в левой части (11) через проекции радиус-вектора кометы и компоненты ее скорости в инерциальной системе координат $CXYZ$. Для этого воспользуемся очевидными соотношениями (напомним, что в канонической системе единиц $\omega = 1$)

$$x = X \cos t + Y \sin t, \quad y = -X \sin t + Y \cos t, \quad z = Z.$$

Дифференцируя

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{X} \cos t + \dot{Y} \sin t - X \sin t + Y \cos t, \\ \dot{y} &= -\dot{X} \sin t + \dot{Y} \cos t - X \cos t - Y \sin t, \\ \dot{z} &= \dot{Z} \end{aligned}$$

и подставляя в (11) получаем

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 - 2(X\dot{Y} - Y\dot{X}) = 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - C. \quad (12)$$

Выразим теперь левую часть (12) через элементы гелиоцентрической орбиты кометы. При этом, поскольку в случае Юпитера и Солнца $\mu \sim 10^{-3}$, то с достаточной степенью точности можно принять центр Солнца за начало барицентрической системы координат $CXYZ$.

Пусть r - гелиоцентрический радиус-вектор кометы, c - постоянная площадей в задаче двух тел Солнце-комета; a, e, i - соответственно большая полуось, эксцентриситет и наклонение плоскости орбиты кометы к плоскости орбиты Юпитера. Тогда из интеграла энергии в канонической системе единиц имеем

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a};$$

из векторного интеграла площадей $\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{c}$, спроектированного на нормаль к плоскости СХУ (плоскость орбиты Юпитера), находим

$$X\dot{Y} - Y\dot{X} = c \cos i.$$

Принимая во внимание $\mu \ll 1$ и соотношение

$$\frac{c^2}{f(m_1 + m)} = p = a(1 - e^2)$$

и учитывая, что в канонической системе единиц $f = 1$, $m_1 = 1 - \mu$, получаем

$$c^2 = a(1 - e^2)(1 - \mu)(1 + m/m_1) \approx a(1 - e^2).$$

Таким образом, интеграл Якоби (12) можно записать в виде

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2a^{1/2}(1 - e^2)^{1/2} \cos i \approx \frac{2}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C.$$

Барицентр системы (начало координат) практически совпадает с центром Солнца, т.е. $r \approx r_1$; кроме того, вторым членом в правой части можно пренебречь, т.к. элементы гелиоцентрической орбиты кометы определяются, когда комета находится на достаточно большом удалении от Юпитера. В результате интеграл Якоби принимает вид

$$\frac{1}{a} + 2a^{1/2}(1 - e^2)^{1/2} \cos i \approx C, \quad (13)$$

откуда следует, что несмотря на возмущающее действие Юпитера, приводящее к изменению гелиоцентрической орбиты кометы, существует некоторая функция элементов ее орбиты, сохраняющая свое значение с достаточно большой степенью точности.

Итак, если a_0, e_0, i_0 и a_1, e_1, i_1 - два набора элементов орбиты, полученных в результате наблюдения за двумя кометами, то, используя (13), можно легко ответить на вопрос, наблюдали мы действительно две разные кометы или это была одна и та же комета, элементы которой изменились в результате пролета кометы вблизи Юпитера или какой-то другой массивной планеты Солнечной системы. Для этого достаточно проверить, выполняется ли равенство

$$\frac{1}{a_0} + 2a_0^{1/2}(1 - e_0^2)^{1/2} \cos i_0 \approx \frac{1}{a_1} + 2a_1^{1/2}(1 - e_1^2)^{1/2} \cos i_1, \quad (14)$$

которое и называется критерием Тиссерана. Напомним, что здесь за единицу длины принято расстояние от Солнца до Юпитера, за единицу массы - масса Солнца (массой Юпитера

можно пренебречь, т.к. $\mu \sim 10^{-3}$), шкала времени такова, что Юпитер вращается вокруг Солнца с единичной угловой скоростью.

Заметим, что критерий Тиссерана является приближенным. Тем не менее, можно с уверенностью утверждать, что если при подстановке двух наборов элементов получается заметное расхождение, то эти элементы относятся к различным кометам.

6.3. Поверхности нулевой скорости

Обратимся снова к интегралу Якоби

$$V^2 = 2U - C, \quad (15)$$

перепишав его в канонической системе единиц

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C, \quad (16)$$

где

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - x_2)^2 + y^2 + z^2.$$

Соотношение (16) задает связь между квадратом скорости и координатами бесконечно малой частицы относительно вращающихся осей.

Если $V = 0$, то $2U = C$ или

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C, \quad (17)$$

где C - постоянная Якоби, определяемая начальными условиями. Уравнение (17) при заданном C определяет границы областей, в которых может находиться частица. Поскольку $V^2 \geq 0$, из (15) следует, что в этих областях должно выполняться условие $2U \geq C$. Уравнение (17) называется уравнением поверхностей Хилла (или поверхностей нулевой скорости). Оно ничего не говорит об орбите частицы внутри допустимого для нее пространства.

Исследуем поведение поверхностей Хилла при различных C . При этом ограничимся рассмотрением сечений этих поверхностей плоскостью Oxy . Тем самым мы будем исследовать не поверхности, а кривые нулевой скорости (кривые Хилла, Рис. 6.4).

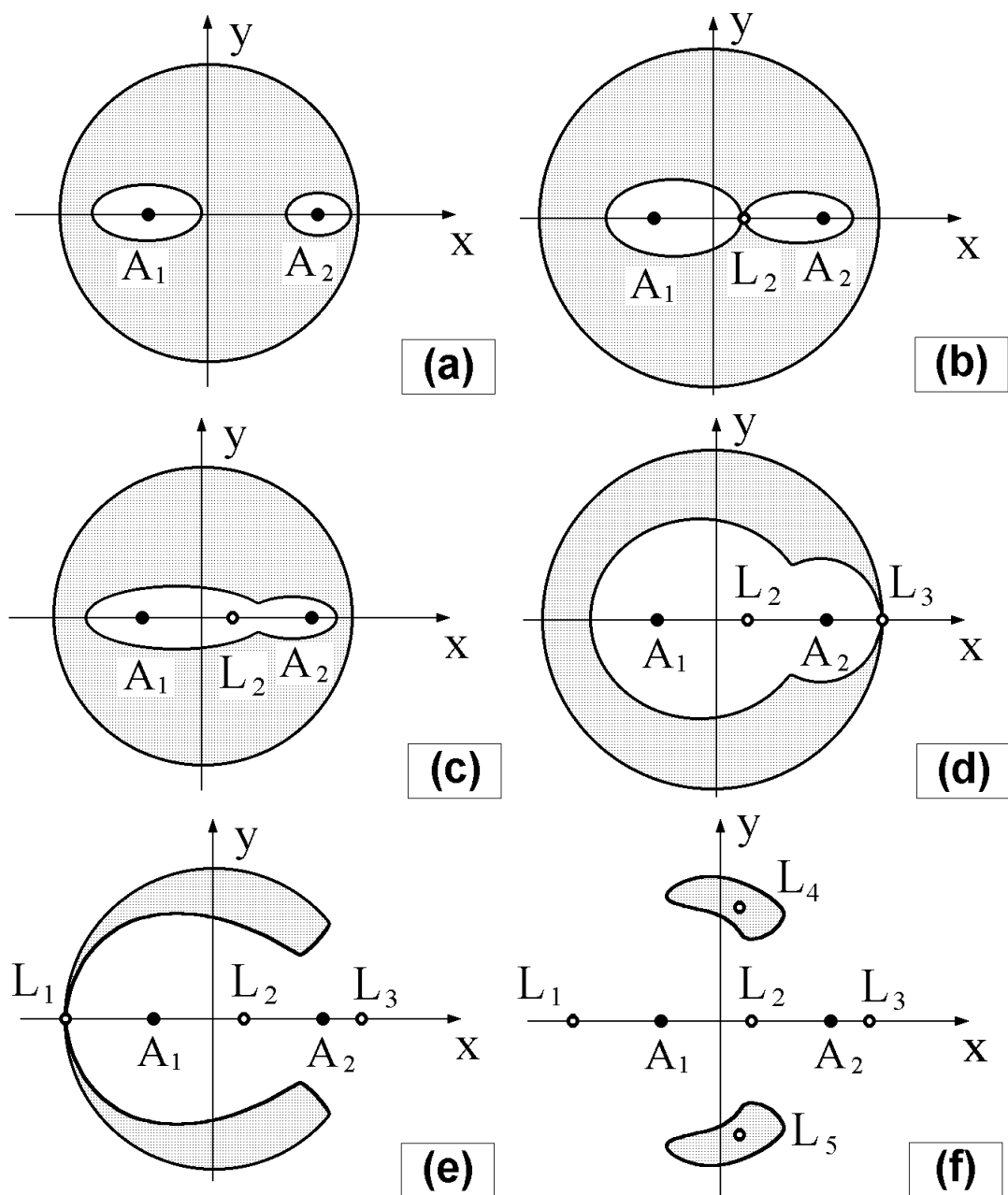


Рис. 6.4

Пусть сначала константа интеграла Якоби $C = C_1$ достаточно велика. Из (17) видно, что если C_1 и $x^2 + y^2$ велики, то получаем уравнение, близкое уравнению окружности $x^2 + y^2 \approx C_1$. Однако, если C_1 велико, а r_1 либо r_2 очень мало, то кривая превращается в отдельные овалы, окружающие точки $1 - \mu$ и μ (Рис. 6.4а). В заштрихованной области частица находиться не может - там $V^2 < 0$.

При уменьшении C внутренние овалы расширяются, а внешняя поверхность сжимается и при некотором значении $C = C_2$ внутренние овалы касаются друг-друга в точке

L_2 (Рис. 6.4b). Заметим, что такие точки, имеющие общую касательную, называются двойными.

Дальнейшее уменьшение C приводит к слиянию внутренних овалов и образованию замкнутой кривой, имеющей форму гантели, с узкой перемычкой, через которую частица может из окрестности одной конечной массы перейти в окрестность другой конечной массы (Рис. 6.4с).

При дальнейшем уменьшении константы интеграла Якоби при некотором $C = C_4$ внутренняя и внешняя области сливаются в двойной точке L_3 (Рис. 6.4d), а затем, при еще меньшем $C = C_5$, эти области сливаются и в точке L_1 (Рис. 6.4е). При этом по мере расширения перемычки у точки L_3 частица получает возможность покинуть окрестность двух конечных масс и перейти во внешнее пространство. Если этот процесс продолжить, то запрещенные области в плоскости Oxy , куда частица попасть не может, будут сжиматься до тех пор, пока не стянутся в точки L_4 и L_5 (Рис. 6.4f).

Из аналитической геометрии известно, что в двойной точке поверхности, определяемой уравнением $f(x, y, z) = 0$, частные производные функции f обращаются в нуль, т.е. имеют место равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

В данном случае

$$f = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C = 2U - C,$$

и в двойных точках выполняются условия

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Но в силу уравнений движения частицы

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (19)$$

С учетом того, что поверхности Хилла это поверхности нулевой скорости (т.е. на них $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$), а в двойных точках имеет место (18), из (19) получаем

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, равнодействующая всех сил приложенных к частице, находящейся в одной из пяти двойных точек L_i , равна нулю. Если частицу поместить в такую точку с нулевой относительной скоростью, то она там и останется. Следовательно, двойные точки представляют собой стационарные решения или положения относительного равновесия в ограниченной круговой задаче трех тел. Это так называемые точки Лагранжа или точки либрации.

Исследуем точки либрации более подробно. Сначала определим их координаты, для чего воспользуемся уравнениями (18). Подставляя выражение для U в (18), получаем систему уравнений

$$x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0, \quad (21)$$

$$y - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y = 0, \quad (22)$$

$$\frac{1-\mu}{r_1^3}z + \frac{\mu}{r_2^3}z = 0. \quad (23)$$

Из (23) следует, что $z = 0$. Из (22) следует, что возможны два случая:

$$y = 0, \quad (24)$$

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0. \quad (25)$$

Очевидно, случай (24) отвечает прямолинейным решениям, которые могут быть найдены из уравнения

$$x - \frac{1-\mu}{|x-x_1|^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{|x-x_2|^3}(x-x_2) = 0, \quad (26)$$

где

$$x_1 = -\mu, \quad x_2 = 1-\mu. \quad (27)$$

Треугольные решения находятся из системы (21), (25). Определим координаты треугольных точек либрации. Умножая (25) на $x-x_1$ и на $x-x_2$, находим

$$x-x_1 - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_1) = 0, \quad (28)$$

$$x-x_2 - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_2) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0. \quad (29)$$

Теперь вычтем (28) из (21) и (29) из (21). Тогда получим

$$x_1 + \frac{\mu}{r_2^3}(x_2-x_1) = 0,$$

$$x_2 - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x_2-x_1) = 0$$

или, с учетом (27),

$$1 - \frac{1}{r_2^3} = 0, \quad 1 - \frac{1}{r_1^3} = 0.$$

Отсюда следует $r_1 = r_1 = 1$, что имеет место в вершинах правильных треугольников, одна из сторон которых совпадает с отрезком A_1A_2 (Рис. 6.5). Таким образом, найдены два треугольных решения - точки либрации $L_4(1/2 - \mu, \sqrt{3}/2, 0)$ и $L_5(1/2 - \mu, -\sqrt{3}/2, 0)$.

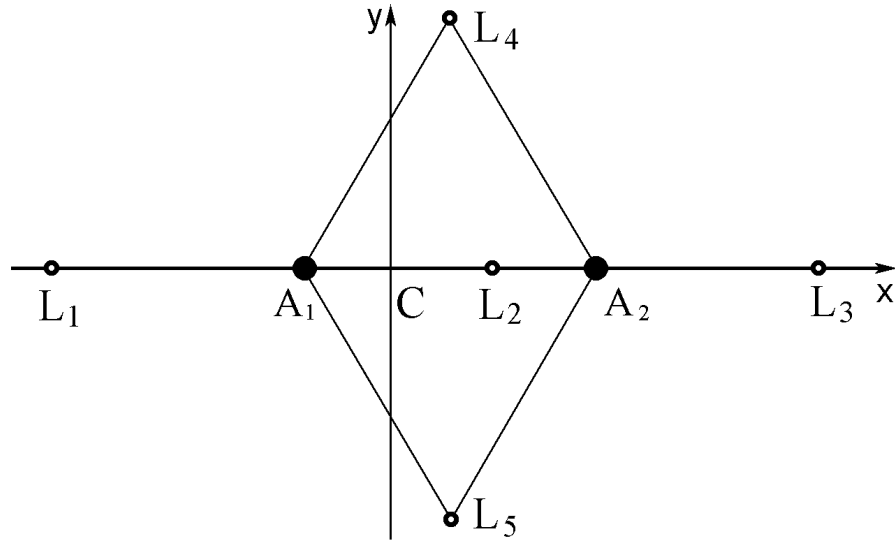


Рис. 6.5

Обратимся теперь к случаю $y = 0$, соответствующему прямолинейным решениям. Эти решения удовлетворяют уравнению

$$\varphi(x) = x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0, \quad r_i^2 = (x-x_i)^2, \quad i=1,2. \quad (30)$$

Проанализируем характер функции $\varphi(x)$. Из выражения для ее производной

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} + 3\frac{1-\mu}{r_1^5}(x-x_1)^2 + 3\frac{\mu}{r_2^5}(x-x_2)^2 = 1 + 2\frac{1-\mu}{r_1^3} + 2\frac{\mu}{r_2^3} > 0$$

следует, что на каждом из интервалов непрерывности функции $\varphi(x)$

$$-\infty < x < x_1, \quad x_1 < x < x_2, \quad x_2 < x < +\infty$$

она монотонно возрастает. В точках $x = x_{1,2}$ функция $\varphi(x)$ имеет разрыв второго рода (стремится к $\pm\infty$). Качественный вид $\varphi(x)$ показан на Рис. 6.6.

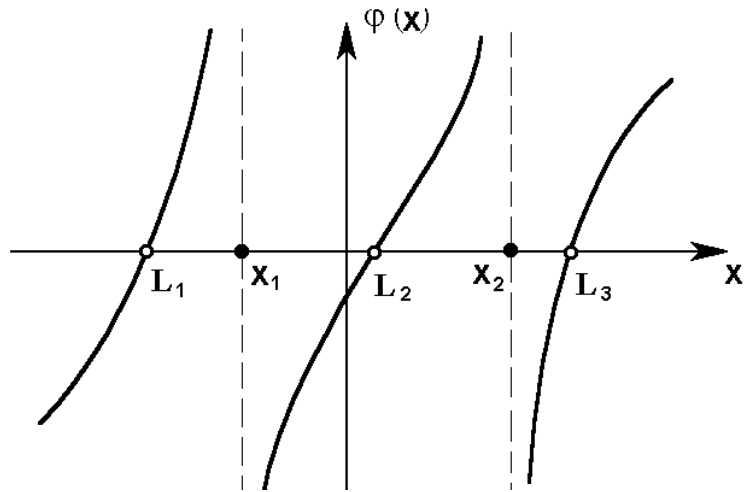


Рис. 6.6

Ясно, что уравнение (30) всегда имеет три решения: точки L_1 , L_2 и L_3 . Точка L_1 расположена левее точки x_1 , где находится тело большей массы $(1 - \mu)$. Точка L_3 - правее x_2 , где находится тело меньшей массы (μ) . Точка L_2 - между центром масс системы (началом координат) и телом меньшей массы (x_2). Действительно, принимая во внимание $\mu < 1/2$, имеем

$$\varphi(0) = -\frac{1-\mu}{\mu^2} + \frac{\mu}{(1-\mu)^2} = \frac{\mu^3 - (1-\mu)^3}{\mu^2(1-\mu)^2} < 0.$$

Заметим, что при $\mu = 1/2$, т.е. когда два массивных тела одинаковы, $\varphi(0) = 0$ и точка L_2 совпадает с началом координат. Результаты численного решения уравнения (26) для $\mu \in [0, 1/2]$ показаны на Рис. 6.7.

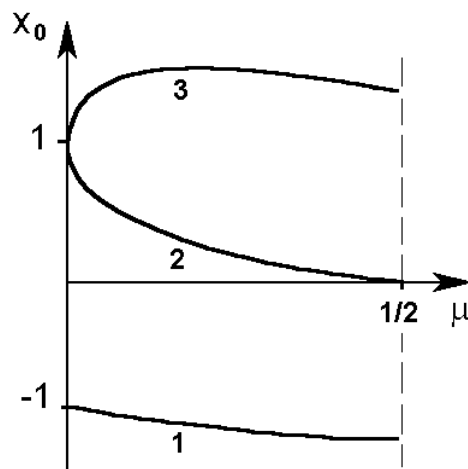


Рис. 6.7

6.4. Устойчивость точек либрации

Пусть во вращающейся системе точка Лагранжа имеет координаты $(x_0, y_0, 0)$, а частица смещена в точку $(x_0 + \xi, y_0 + \eta, \zeta)$. При этом ее скорость имеет компоненты $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$. Подставим эти величины в уравнения движения (19) и разложим правые части в ряд Тейлора в окрестности точки Лагранжа. Имеем

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right)_0 \zeta + \dots,$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \right)_0 \zeta + \dots,$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)_0 \eta + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 \zeta + \dots.$$

Здесь индекс "0" означает, что частные производные U вычисляются в точке Лагранжа $(x_0, y_0, 0)$. Далее будем использовать обозначения

$$U_{xx} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0, \quad U_{xy} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_0, \quad \dots$$

Если смещения ξ, η, ζ малы, то членами второго порядка по ξ, η, ζ можно пренебречь. Кроме того, учтем, что в точках либрации

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = 0.$$

В результате приходим к линейной системе с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= U_{xx}\xi + U_{xy}\eta + U_{xz}\zeta, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= U_{yx}\xi + U_{yy}\eta + U_{yz}\zeta, \\ \ddot{\zeta} &= U_{zx}\xi + U_{zy}\eta + U_{zz}\zeta. \end{aligned} \tag{31}$$

Получим теперь выражения для коэффициентов линейной системы (31). Имеем

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad r_i^2 = (x - x_i)^2 + y^2 + z^2, \quad i = 1, 2.$$

Дифференцируя U и вводя обозначения

$$A = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}, \quad B = 3 \left(\frac{1-\mu}{r_1^5} + \frac{\mu}{r_2^5} \right), \quad C = 3 \left[\frac{1-\mu}{r_1^5} (x_0 - x_1) + \frac{\mu}{r_2^5} (x_0 - x_2) \right],$$

получаем

$$\begin{aligned}
U_{xx} &= 1 - A + 3 \frac{1 - \mu}{r_1^5} (x_0 - x_1)^2 + 3 \frac{\mu}{r_2^5} (x_0 - x_2)^2, \\
U_{yy} &= 1 - A + B y_0^2, \\
U_{zz} &= -A, \\
U_{xy} &= U_{yx} = C y_0, \\
U_{xz} &= U_{zx} = U_{yz} = U_{zy} = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, система (31) принимает вид

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= U_{xx}\xi + U_{xy}\eta, \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= U_{yx}\xi + U_{yy}\eta, \\
\ddot{\zeta} &= -A\zeta,
\end{aligned} \tag{33}$$

т.е. распадается. Первые два уравнения, отвечающие движению в плоскости (x, y) , не зависят от третьего уравнения, описывающего движение по z . При этом заметим, что движение по z представляет собой простые гармонические колебания, поскольку $A > 0$, и, следовательно, устойчиво.

Рассмотрим движение в плоскости (x, y) . Общее решение системы

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= U_{xx}\xi + U_{xy}\eta, \\
\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= U_{yx}\xi + U_{yy}\eta
\end{aligned} \tag{34}$$

имеет вид

$$\xi = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e^{\lambda_i t}, \quad \eta = \sum_{i=1}^4 \beta_i e^{\lambda_i t},$$

где α_i - постоянные интегрирования; β_i - постоянные, зависящие от α_i и коэффициентов системы; λ_i - корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - U_{xx} & -2\lambda - U_{xy} \\ 2\lambda - U_{yx} & \lambda^2 - U_{yy} \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя характеристическое уравнение принимает вид

$$(\lambda^2 - U_{xx})(\lambda^2 - U_{yy}) + 4\lambda^2 - U_{xy}^2 = 0,$$

или

$$\lambda^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\lambda^2 + U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 = 0. \tag{35}$$

Если все λ_i являются чисто мнимыми, то ξ и η являются периодическими функциями и, следовательно, в окрестности точки $(x_0, y_0, 0)$ определяют устойчивые решения. Если какие-нибудь из λ_i окажутся действительными или комплексными, то ξ и η

со временем будут возрастать, так что решение будет неустойчивым (поскольку наряду с корнем λ биквадратное характеристическое уравнение имеет также корень $-\lambda$).

Легко показать, что для того, чтобы все корни биквадратного уравнения (35) были чисто мнимыми, должны выполняться условия

$$\begin{aligned} 4 - U_{xx} - U_{yy} &> 0, \\ \frac{(4 - U_{xx} - U_{yy})^2}{4} &> U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2 > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь приступим к непосредственному анализу устойчивости точек либрации. Рассмотрим сначала коллинеарные решения. В этом случае $y_0 = 0$, так что

$$r_i^2 = (x_0 - x_i)^2, \quad i = 1, 2,$$

следовательно,

$$U_{xx} = 1 + 2A, \quad U_{xy} = 0, \quad U_{yy} = 1 - A$$

и условия устойчивости (36) принимают вид

$$2 - A > 0, \quad \frac{1}{4}(2 - A)^2 > (1 + 2A)(1 - A) > 0. \quad (37)$$

Заметим, что каждому коллинеарному решению L_1 , L_2 , L_3 отвечает свое значение A , но все они удовлетворяют условию $A > 0$. Покажем, что каждое из этих трех значений при любых μ (напомним, что $\mu \leq 1/2$) удовлетворяет также неравенству $A > 1$.

Что касается точки L_2 , то доказательство тривиально. Действительно, поскольку точка L_2 расположена между телами системы, $r_{1,2} < 1$ и, следовательно,

$$A = \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} > 1 - \mu + \mu = 1.$$

Покажем теперь, что $A > 1$ для точек L_1 и L_3 . Перепишем уравнение (26), решения которого отвечают коллинеарным точкам либрации, в виде

$$x \left(1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) + \frac{1 - \mu}{r_1^3} x_1 + \frac{\mu}{r_2^3} x_2 = 0$$

или, учитывая, что $x_1 = -\mu$, $x_2 = 1 - \mu$,

$$A - 1 = \frac{1 - \mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} - 1 = \frac{\mu(1 - \mu)}{x} \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} \right).$$

Теперь обратим внимание, что для точки L_1 выполняются условия $x < 0$, $r_2 > r_1$, а для точки L_3 - условия $x > 0$, $r_2 < r_1$. Таким образом, в обоих случаях $A - 1 > 0$. Но тогда для всех коллинеарных решений нарушается последнее условие устойчивости (37). Значит точки либрации L_1 , L_2 , L_3 всегда неустойчивы.

Перейдем к анализу устойчивости треугольных решений. Рассмотрим, например, точку L_4 (Рис. 6.8). Учитывая, что $x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = 1/2$ и $r_1 = r_2 = 1$, получаем

$$A = 1, \quad B = 3, \quad C = \frac{3}{2}(1 - 2\mu).$$

Кроме того, точка L_4 имеет координаты

$$x_0 = \frac{1}{2} - \mu, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 0,$$

следовательно,

$$U_{xx} = \frac{3}{4}, \quad U_{yy} = \frac{9}{4}, \quad U_{zz} = -1, \quad U_{xy} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1).$$

Таким образом, условия устойчивости (37) выполняются, если

$$1 - 27\mu(1 - \mu) > 0,$$

откуда, учитывая, что $\mu \leq 1/2$, следует

$$\mu < \mu_* = \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0.0385. \quad (38)$$

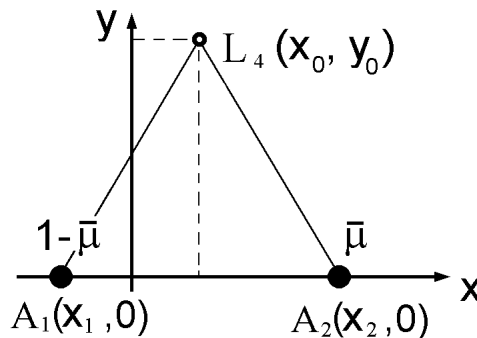


Рис. 6.8

При нарушении условия (38) треугольные точки либрации неустойчивы. Если же условие (38) выполнено, то можно говорить лишь об устойчивости в первом приближении. Дело в том, что при этом характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет чисто мнимые корни. Поэтому для окончательного ответа на вопрос об устойчивости треугольных точек либрации необходимо проанализировать уравнения возмущенного движения с учетом нелинейных членов, так как при наличии чисто мнимых корней характеристического уравнения рассмотрение только линеаризованной системы недостаточно.

Строгое рассмотрение показало, что в случае плоской круговой задачи трех тел устойчивость треугольных решений имеет место для всех значений μ , удовлетворяющих (38), кроме

$$\mu_{*1} = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} \approx 0.0243, \quad \mu_{*2} = \frac{15 - \sqrt{213}}{30} \approx 0.0135,$$

При которых имеет место неустойчивость. В пространственной задаче неустойчивость при $\mu = \mu_{*1}$ и $\mu = \mu_{*2}$ остается, а при остальных значениях μ , удовлетворяющих (38), доказана устойчивость для большинства начальных условий.

Устойчивость треугольных точек либрации означает, что космический аппарат, выведенный в близкую окрестность точки L_4 (или L_5) с небольшой относительной скоростью, будет оставаться вблизи этой точки достаточно долго.

Точки либрации тел Солнечной системы представляют большой практический интерес. Например, их можно использовать для размещения связанных спутников. В устойчивых точках либрации планет могут скапливаться астероиды. Иллюстрацией этого факта служит система Солнце-Юпитер, для которой $\mu \sim 0.001$ и условие (38) выполнено. Действительно, в окрестности треугольных точек либрации наблюдаются астероиды Троянской группы⁸. Заметим, что условие (38) выполняется также и в системе Земля-Луна, для которой $\mu \sim 0.01$. Естественно полагать, что и вблизи треугольных точек либрации в системе Земля-Луна также постоянно движутся какие-то космические тела. Это предположение подтвердилось в 1961 году, когда польский астроном Казимир Кордылевский обнаружил два космических "облака" (скопления метеорной пыли) в районе точек L_4 и L_5 системы Земля-Луна.

Троянские астероиды в точках L_4 и L_5 есть не только у Юпитера, но и у Нептуна. В 2011 г. был обнаружен и первый троянский астероид у Земли (в системе Солнце-Земля).

⁸ Названы в честь героев троянской войны. Существует традиция называть астероиды в окрестности точки L_4 именами греческих героев (Ахейский лагерь - Греки), а астероиды в окрестности точки L_5 - именами защитников Трои (Троянский лагерь – собственно Троянцы).

Литература

Основная:

1. Мирер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. – М.: Резолит, 2007.
2. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
3. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. - М.: Наука, 1965.
4. Балк М.Б., Демин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1972. (<http://en.bookfi.org/book/725312>)
5. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. Учебное пособие для ВУЗов. – 2-е изд., М.: Дрофа, 2004.

Дополнительная:

6. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. - М.: Наука, 1990.
7. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. – М.: Наука, 1987.
8. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1972.
9. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. - М.: Наука, 1965.
10. Battin R.H. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Inc. Publ., 1999.