

С.А. Мирер

МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Учебное пособие

Часть III

Оглавление

Глава 7. Возмущенное движение	192
7.1. Уравнения в оскулирующих элементах	192
7.2. Касательное, нормальное и бинормальное ускорения	210
Глава 8. Влияние несферичности планеты	218
8.1. Потенциал тела произвольной формы	218
8.2. Задача о двух фиксированных центрах	225
8.3. Влияние сплюснутости планеты на орбиту спутника	228
Глава 9. Возмущенное движение ИСЗ под действием	236
сопротивления атмосферы	236
9.1. Парадокс спутника	242
9.2. Время жизни спутника	245
Литература	253

Глава 7. Возмущенное движение

До сих пор мы рассматривали движение тела в центральном поле тяготения, полагая, что равнодействующая других сил равна нулю. В действительности тело испытывает на себе возмущения за счет влияния других небесных тел, торможения в атмосфере и отклонения поля тяготения от центрального. Движение с учетом возмущающих сил называется возмущенным. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ - возмущающее ускорение.

Чтобы представить, какого порядка может быть возмущающее ускорение, обусловленное тем или иным возмущающим фактором, действующим отдельно, рассмотрим следующую таблицу¹

Земля	0.89	Юпитер	3.2×10^{-8}
Солнце	6.0×10^{-4}	Сатурн	2.3×10^{-9}
Луна	3.3×10^{-3}	Уран	8.0×10^{-11}
Меркурий	2.6×10^{-10}	Нептун	3.6×10^{-11}
Венера	1.9×10^{-8}	Плутон	1.0×10^{-12}
Марс	7.1×10^{-10}	Сплюснутость Земли	1.0×10^{-3}

В таблице приведены величины возмущающего ускорения искусственного спутника Земли на круговой орбите высотой 200 морских миль (1 морская миля = 1852 м). Причем эти значения выражены в долях ускорения свободного падения на поверхности Земли.

7.1. Уравнения в оскулирующих элементах

Если $\mathbf{F} = 0$, то (1) представляет собой дифференциальное уравнение задачи двух тел и определяет кеплерову орбиту. Положение, форма, размеры орбиты полностью характеризуются элементами орбиты, например, $\Omega, i, \omega, p, e, \tau_{\pi}$.

Если $\mathbf{F} \neq 0$, то орбита, вообще говоря, не будет коническим сечением. Однако можно считать, что в каждый момент времени спутник находится на некотором

¹ R.R. Bate, D.D. Mueller, J.E. White. Fundamentals of Astrodynamics. Dover Public., New York, 1971.

коническом сечении, а именно, на той кеплеровой орбите, на которой он оказался бы, если в рассматриваемый момент времени действие возмущающего ускорения прекратится.

Для каждого момента времени t будет своя такая кеплерова орбита. Ее элементы с течением времени меняются, но в каждый момент времени эта орбита касается истинной траектории спутника в той самой точке, где в этот момент находится спутник (Рис. 7.1). Непрерывно меняющаяся кеплерова орбита, которая строится таким образом, называется оскулирующей орбитой, а ее элементы

$$\Omega(t), i(t), \omega(t), p(t), e(t), \tau_{\pi}(t) \quad (2)$$

называются оскулирующими². Если функции (2) известны, то можно найти положение спутника в любой момент времени.

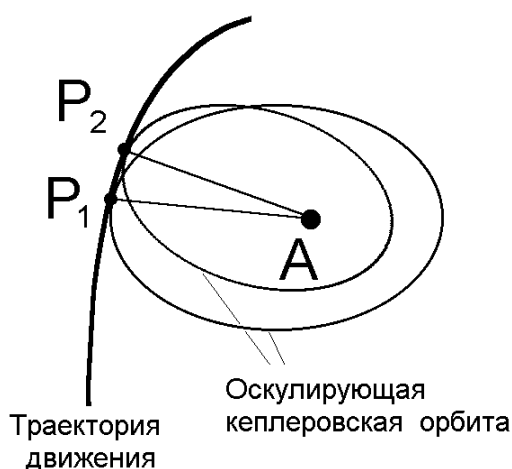


Рис. 7.1

Для нахождения функций (2) используют вспомогательные уравнения, которые связывают производные от этих функций с самими функциями. Эти дифференциальные уравнения называются уравнениями в оскулирующих элементах³. Выведем их.

Пусть $Axyz$ - декартова система координат, A - притягивающий центр. Единичные векторы обозначим соответственно i, j, k . Введем три взаимно ортогональных единичных вектора: e_1 - орт радиус-вектора спутника AP ; e_2 - орт поперечной составляющей скорости спутника V_n ; $e_3 = e_1 \times e_2$. Перенесем начала этих трех единичных векторов в точку A (Рис. 7.2). Триэдр, образованный ими, можно

² От *osculate* – соприкасаться.

³ По существу, здесь применяется метод Лагранжа вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу, решение возмущенной задачи ищется в том же виде, что и решение невозмущенной задачи двух тел, но теперь элементы орбиты считаются не постоянными, а функциями времени. Полученные в результате уравнения иногда называют уравнениями Ньютона-Лагранжа.

рассматривать как некоторое твердое тело. С течением времени триэдр вращается, но одна его точка (A) остается неподвижной. Оси подвижной системы координат $A\xi\eta\zeta$ направим вдоль векторов e_1, e_2, e_3 . Проекции возмущающего ускорения F на эти оси обозначим соответственно F_1, F_2, F_3 . Заметим, что плоскость $A\xi\eta$ совпадает с мгновенной плоскостью орбиты, а ось $A\zeta$ направлена по внешней нормали к плоскости орбиты.

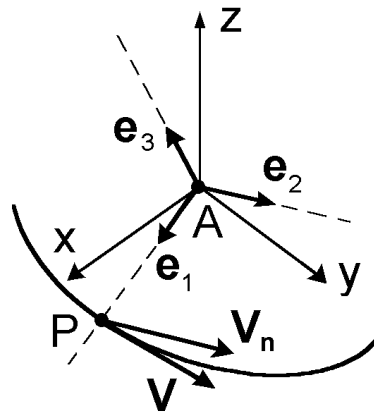


Рис. 7.2

Если в момент t_* прекратиться действие возмущающей силы, то спутник будет двигаться по кеплеровой орбите с элементами $\Omega(t_*), i(t_*), \omega(t_*), p(t_*), e(t_*), \tau_\pi(t_*)$. При этом уравнение орбиты имеет вид

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (3)$$

а скорость \mathbf{V} определяется формулой

$$\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_1 + V_n \mathbf{e}_2,$$

где

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) = \frac{\sqrt{\mu p}}{r}. \quad (4)$$

Здесь величины e и p остаются постоянными. В возмущенном движении, меняя t , мы будем переходить от одной кеплеровой орбиты к другой. Каждый раз \mathbf{r} и \mathbf{V} будут определяться теми же формулами, но теперь уже e и p будут функциями времени.

В каждый момент времени по-прежнему имеет место равенство

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = V_r \mathbf{e}_1 + V_n \mathbf{e}_2$$

или

$$\frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_1) = V_r\mathbf{e}_1 + V_n\mathbf{e}_2. \quad (5)$$

Продифференцируем его:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(V_r\mathbf{e}_1 + V_n\mathbf{e}_2).$$

С другой стороны, в силу (1),

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(V_r\mathbf{e}_1 + V_n\mathbf{e}_2) = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{F}. \quad (6)$$

Два векторных равенства (5), (6) являются дифференциальными уравнениями возмущенного движения. В дальнейшем мы сделаем следующее:

1. Заменяем векторные равенства (5), (6) шестью скалярными уравнениями.
2. Выразим входящие в эти уравнения величины через оскулирующие элементы и их первые производные.
3. Получим выражения для производных от оскулирующих элементов. Это и будут уравнения в оскулирующих элементах..

Дифференцируя (5), (6), получаем

$$r \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_1 = V_r\mathbf{e}_1 + V_n\mathbf{e}_2, \quad (7)$$

$$V_r \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + \frac{dV_r}{dt}\mathbf{e}_1 + V_n \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + \frac{dV_n}{dt}\mathbf{e}_2 = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{F}. \quad (8)$$

Выведем выражения для $d\mathbf{e}_1/dt, d\mathbf{e}_2/dt$. Рассматривая триэдр $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ как твердое тело, можно записать вектор его мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = (\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1 = \\ &= \omega_2(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + \omega_3(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = -\omega_2\mathbf{e}_3 + \omega_3\mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 = (\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_2 = \\ &= \omega_1(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + \omega_3(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) = \omega_1\mathbf{e}_3 - \omega_3\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Подставляя (9) в (7), (8), получаем

$$r(-\omega_2 \mathbf{e}_3 + \omega_3 \mathbf{e}_2) + \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_1 = V_r \mathbf{e}_1 + V_n \mathbf{e}_2 ,$$

$$V_r(-\omega_2 \mathbf{e}_3 + \omega_3 \mathbf{e}_2) + \frac{dV_r}{dt} \mathbf{e}_1 + V_n(\omega_1 \mathbf{e}_3 - \omega_3 \mathbf{e}_1) + \frac{dV_n}{dt} \mathbf{e}_2 = -\frac{\mu}{r^2} \mathbf{e}_1 + \mathbf{F} .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах, получаем шесть скалярных соотношений:

$$\frac{dr}{dt} = V_r ,$$

$$r\omega_3 = V_n ,$$

$$\omega_2 = 0 ,$$

$$\frac{dV_r}{dt} - V_n \omega_3 = -\frac{\mu}{r^2} + F_1 ,$$

$$V_r \omega_3 + \frac{dV_n}{dt} = F_2 ,$$

$$-V_r \omega_2 + V_n \omega_1 = F_3 .$$

Выражая из трех уравнений компоненты угловой скорости ω_i и подставляя их в оставшиеся три уравнения, окончательно получаем систему уравнений

$$\frac{dr}{dt} = V_r ,$$

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_n^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + F_1 ,$$

$$\frac{dV_n}{dt} = -\frac{V_r V_n}{r} + F_2 ;$$

(10)

$$\omega_1 = \frac{F_3}{V_n} ,$$

$$\omega_2 = 0 ,$$

$$\omega_3 = \frac{V_n}{r} .$$

Теперь выразим входящие в (10) величины ω_i через оскулирующие элементы и их производные. Напомним, что $\boldsymbol{\omega}$ это вектор мгновенной угловой скорости триэдра $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Положение этого триэдра относительно системы координат $Axuz$ задается тремя углами Ω, i, u (Рис. 7.3). Для того, чтобы перейти от $Axuz$ к $A\xi\eta\zeta$, надо совершить три последовательных поворота: на угол Ω вокруг оси Az (первому повороту отвечает угловая скорость $\dot{\Omega}\mathbf{k}$), затем на угол i вокруг линии узлов $A\Omega$ (второму

откуда

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{d\Omega}{dt} \sin i \sin u + \frac{di}{dt} \cos u, \\ \omega_2 &= \frac{d\Omega}{dt} \sin i \cos u - \frac{di}{dt} \sin u, \\ \omega_3 &= \frac{d\Omega}{dt} \cos i + \frac{du}{dt}.\end{aligned}\tag{13}$$

Таким образом, мы выразили величины $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ через наклонение i , аргумент широты u и производные от Ω, i, u .

Подставим (13) в последние три равенства (10) и учтем известное выражение для V_n . Тогда получим

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} \sin i \sin u + \frac{di}{dt} \cos u &= F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}}, \\ \frac{d\Omega}{dt} \sin i \cos u - \frac{di}{dt} \sin u &= 0, \\ \frac{d\Omega}{dt} \cos i + \frac{du}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.\end{aligned}\tag{14}$$

Из первых двух равенств (14) легко найти $d\Omega/dt$ и di/dt (умножаем первое уравнение на $\sin u$, второе на $\cos u$ и результаты складываем и т.д.):

$$\frac{d\Omega}{dt} = F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i},\tag{15}$$

$$\frac{di}{dt} = F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u.\tag{16}$$

Затем из третьего уравнения системы (14) с учетом (15) получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i$$

или, поскольку $u = \omega + \mathcal{G}$,

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} + \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i.\tag{17}$$

Уравнения (15), (16) это первые два из шести уравнений системы в оскулирующих элементах. Уравнение (17) в дальнейшем будет использовано как вспомогательное.

Перейдем теперь к выводу уравнений для $d\omega/dt, dp/dt$ и de/dt . Для этого обратимся к первым трем уравнениям системы (10). С учетом (4) имеем

$$\frac{dr}{dt} = V_r, \quad \frac{dV_r}{dt} = \frac{\mu}{r^2} e \cos \vartheta + F_1, \quad \frac{dV_n}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} e \sin \vartheta + F_2. \quad (18)$$

Кроме того, дифференцируя соотношения

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) = \frac{\sqrt{\mu p}}{r},$$

получаем (с учетом того, что p и e также являются функциями времени)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \left(\cos \vartheta \frac{de}{dt} - e \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right) = \\ &= \frac{r^2}{p} \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dt} - \cos \vartheta \frac{de}{dt} + \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right), \\ \frac{dV_r}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{1}{2p} e \sin \vartheta \frac{dp}{dt} + \sin \vartheta \frac{de}{dt} + e \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_n}{dt} &= -\frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \frac{dp}{dt} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos \vartheta \frac{de}{dt} - \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{1}{2r} \frac{dp}{dt} + \cos \vartheta \frac{de}{dt} - e \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right). \end{aligned}$$

Далее подставим (19) в (18) и учтем соотношения (3), (4). В результате будет получена система трех линейных уравнений относительно трех неизвестных $d\omega/dt$ (здесь мы также воспользуемся соотношением (17)), dp/dt , de/dt .

Итак, первое соотношение (18) принимает вид

$$\frac{r^2}{p} \left[\frac{1}{r} \frac{dp}{dt} - \cos \vartheta \frac{de}{dt} - e \sin \vartheta \left(\frac{d\omega}{dt} - \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctgi} \right) \right] = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta,$$

откуда после умножения на p/r^2 , приходим к первому уравнению системы

$$-e \sin \vartheta \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dt} - \cos \vartheta \frac{de}{dt} = F_3 \frac{re \sin \vartheta}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctgi}. \quad (20)$$

Аналогично из второго соотношения (18) после умножения на $\sqrt{p/\mu}$ получаем второе уравнение

$$-e \cos \vartheta \frac{d\omega}{dt} - \frac{e \sin \vartheta}{2p} \frac{dp}{dt} + \sin \vartheta \frac{de}{dt} = F_1 \sqrt{\frac{p}{\mu}} + F_3 \frac{re \cos \vartheta}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctgi}. \quad (21)$$

Наконец из третьего соотношения (18) находим

$$e \sin \vartheta \frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2r} \frac{dp}{dt} + \cos \vartheta \frac{de}{dt} = F_2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} - F_3 \frac{re \sin \vartheta}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctg} i. \quad (22)$$

Складывая (20) и (22) и умножая результат на $2r$, получаем еще одно уравнение системы в оскулирующих элементах

$$\frac{dp}{dt} = 2F_2 r \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \quad (23)$$

После подстановки dp/dt в (20) и (21), приходим к системе

$$\begin{aligned} e \sin \vartheta \frac{d\omega}{dt} + \cos \vartheta \frac{de}{dt} &= A = 2F_2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} - F_3 \frac{re \sin \vartheta}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctg} i, \\ -e \cos \vartheta \frac{d\omega}{dt} + \sin \vartheta \frac{de}{dt} &= B = F_1 \sqrt{\frac{p}{\mu}} + F_2 \frac{re \sin \vartheta}{\sqrt{\mu p}} + F_3 \frac{re \cos \vartheta}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctg} i, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} e \frac{d\omega}{dt} &= A \sin \vartheta - B \cos \vartheta, \\ \frac{de}{dt} &= A \cos \vartheta + B \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Таким образом, еще два уравнения системы в оскулирующих элементах имеют вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-F_1 \cos \vartheta + F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - F_3 e \frac{r}{p} \sin u \cdot \text{ctg} i \right], \quad (24)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ F_1 \sin \vartheta + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}. \quad (25)$$

Остается еще вывести последнее уравнение системы, а именно, уравнение для оскулирующего момента прохождения через перицентр τ_π . Однако предварительно необходимо получить ряд вспомогательных соотношений. Определим сначала скорость ухода линии апсид (направления на перицентр) в мгновенной плоскости орбиты.

Рассмотрим изменение аргумента перицентра при возмущенном движении. Если плоскость орбиты неизменна, то и линия узлов неподвижна. Если же плоскость орбиты изменяет свое положение в пространстве, смещается и линия узлов. Поэтому аргумент перицентра ω - угол между линией узлов (единичный вектор \mathbf{b}) и направлением линии апсид (вектор \mathbf{f}) - изменяется как за счет перемещения линии апсид, так и за счет перемещения линии узлов, т.е.

$$d\omega = df - dN,$$

где df и dN обозначают смещение линии апсид и линии узлов в мгновенной плоскости орбиты (Рис. 7.4). Очевидно,

$$d\omega = df - d\Omega \cos i,$$

откуда

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \cos i.$$

Подставляя сюда выражения для $d\omega/dt$ и $d\Omega/dt$, окончательно получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - F_1 \cos \vartheta \right]. \quad (26)$$

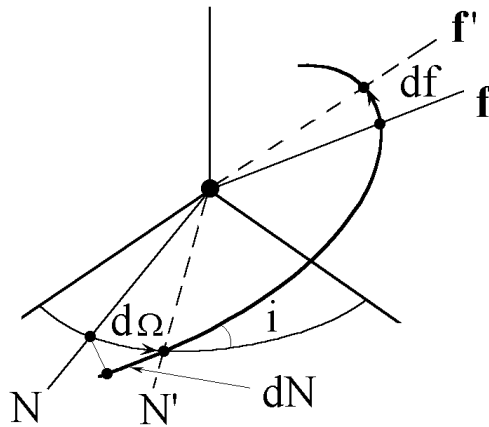


Рис. 7.4

Рассмотрим интеграл площадей в полярных координатах $r^2 \dot{\vartheta} = \sqrt{\mu p}$. Перепишем его в виде

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r^2 d\vartheta = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2} (1 + e \cos \vartheta)^2} d\vartheta$$

и проинтегрировав в случае невозмущенного движения, получаем

$$t - \tau_\pi = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}} J, \quad (27)$$

куда τ_π входит как постоянная интегрирования. Теперь, считая движение возмущенным, продифференцируем (27) по времени. Тогда получим

$$1 - \frac{d\tau_\pi}{dt} = \frac{3}{2} \frac{p^{1/2}}{\mu^{1/2}} J \frac{dp}{dt} + \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}} \left[\frac{\partial J}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{1}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \frac{d\vartheta}{dt} \right]$$

или, учитывая (17),

$$\frac{d\tau_\pi}{dt} = \frac{p^{3/2}}{\mu^{1/2}} \left[\frac{1}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \left(\frac{d\omega}{dt} + F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \text{ctg} i \right) - \frac{3}{2} \frac{J}{p} \frac{dp}{dt} + J_1 \frac{de}{dt} \right]. \quad (28)$$

Здесь введено обозначение

$$J_1 = -\frac{\partial J}{\partial e} = 2 \int_0^{\vartheta} \frac{\cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3} d\vartheta.$$

Докажем справедливость тождества

$$3eJ + (1 - e^2)J_1 = \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta. \quad (29)$$

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(\vartheta) = \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta$$

и продифференцируем ее по ϑ . Имеем

$$\frac{dR}{dt} = \frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + \left(2 \frac{r}{p} + 1 \right) \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{r}{p} \right),$$

причем

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{r}{p} \right) = \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \right) = \frac{e \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{r^2}{p^2} e \sin \vartheta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \frac{r^2}{p^2} \left[\left(1 + \frac{p}{r} \right) \cos \vartheta + \left(2 \frac{r}{p} + 1 \right) e \sin^2 \vartheta \right] = \\ &= \frac{r^2}{p^2} \left[(2 + e \cos \vartheta) \cos \vartheta + e \sin^2 \vartheta + \frac{2e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] = \\ &= \frac{r^2}{p^2} \left[e + 2 \cos \vartheta + \frac{2e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] = \frac{r^2}{p^2} \left[3e + 2(\cos \vartheta - e) + \frac{2e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] = \\ &= \frac{r^2}{p^2} \left[3e + 2 \frac{(\cos \vartheta - e)(1 + e \cos \vartheta) + e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] = \\ &= \frac{r^2}{p^2} \left[3e + \frac{2(1 - e^2) \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] = \frac{r^2}{p^2} \left[3e + (1 - e^2) 2 \frac{r}{p} \cos \vartheta \right] \end{aligned}$$

или окончательно

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3e}{(1 + e \cos \vartheta)^2} + (1 - e^2) \frac{2 \cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3},$$

т.е.

$$\frac{dR}{dt} = 3e \frac{dJ}{d\vartheta} + (1 - e^2) \frac{dJ_1}{d\vartheta}.$$

Если теперь проинтегрировать последнее равенство по ϑ , то получим тождество (29).

Из (29) получаем

$$J = \left[\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - (1 - e^2) J_1 \right] \frac{1}{3e}.$$

Подставляя в (28) J , dp/dt из (23), de/dt из (25), $d\omega/dt$ из (24) и обозначая

$$N = \frac{p^2}{r^2} J_1 = \frac{p^2}{r^2} \int_0^{\vartheta} \frac{2 \cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^3} d\vartheta,$$

после несложных преобразований получим соотношение

$$\frac{d\tau_\pi}{dt} = \frac{r^2}{e\mu} \left[(Ne \sin \vartheta - \cos \vartheta) F_1 + N \frac{p}{r} F_2 \right], \quad (30)$$

которое является последним уравнением системы. Таким образом, соотношения (15), (16), (23)-(25), (30) представляют собой искомую систему уравнений в оскулирующих элементах

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{dt} &= F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u, \\ \frac{dp}{dt} &= 2F_2 r \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-F_1 \cos \vartheta + F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - F_3 e \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \cdot \sin u \right], \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ F_1 \sin \vartheta + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \\ \frac{d\tau_\pi}{dt} &= \frac{r^2}{e\mu} \left[(Ne \sin \vartheta - \cos \vartheta) F_1 + N \frac{p}{r} F_2 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что величину N можно выразить через элементы орбиты, время и истинную аномалию. Подставляя

$$J = \frac{\mu^{1/2}}{p^{3/2}} (t - \tau_\pi), \quad J_1 = \left(\frac{r}{p} \right)^2 N$$

в (29), получаем

$$\frac{r}{p} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta = 3e \frac{\mu^{1/2}}{p^{3/2}} (t - \tau_\pi) + (1 - e^2) \left(\frac{r}{p} \right)^2 N,$$

откуда

$$N = \frac{1}{1-e^2} \left[\left(1 + \frac{p}{r} \right) \sin \mathcal{G} - 3e(t - \tau_\pi) \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \right].$$

Истинная аномалия \mathcal{G} , входящая в правые части уравнений, определяется через эксцентрическую аномалию E (в случае эллиптической орбиты) из соотношения

$$\operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

после решения уравнения Кеплера

$$t - \tau_\pi = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} (E - e \sin E).$$

Чтобы избежать решения этого уравнения, можно воспользоваться полученным ранее вспомогательным соотношением

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i \quad (32)$$

или

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} + \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i.$$

После подстановки сюда выражения для $d\omega/dt$ получаем

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[F_1 \cos \mathcal{G} - F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \mathcal{G} \right]. \quad (33)$$

Заменяя шестое уравнение системы в оскулирующих элементах (31) - уравнение для момента прохождения через перицентр - на уравнение для истинной аномалии (33), получаем более удобную систему, которая также позволяет определить все элементы орбиты. При этом τ_π легко выражается из уравнения Кеплера.

Заметим, что система уравнений движения в оскулирующих элементах имеет определенные преимущества по сравнению с исходным уравнением возмущенного движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}.$$

Так, в случае малых возмущающих ускорений

$$F \ll \frac{\mu}{r^2}$$

оскулирующие элементы изменяются медленно вдоль траектории и на этом обычно основываются различные приближенные методы. Кроме того, полученные в результате решения системы в оскулирующих элементах зависимости $\Omega(t), \dots$ позволяют наглядно

представить эволюцию орбиты под действием возмущающих сил, т.е. провести качественный анализ движения.

Часто на практике возмущающее ускорение F не зависит явно от времени, а определяется только положением тела на орбите. Тогда и правые части дифференциальных уравнений тоже не зависят явно от времени и целесообразно принять на независимую переменную вместо времени аргумент широты или истинную аномалию.

Рассмотрим, например, случай выбора аргумента широты в качестве новой независимой переменной. Для получения соответствующих уравнений снова воспользуемся вспомогательным соотношением (32), представив его в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \gamma,$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{F_3 r^3}{\mu p} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i.$$

Пусть a - некоторый элемент орбиты. Тогда

$$\frac{da}{du} = \frac{da}{dt} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{da/dt}{du/dt} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p} \gamma} \frac{da}{dt}.$$

Используя эту связь между da/dt и da/du , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_3 \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_3 \cos u, \\ \frac{dp}{du} &= \frac{1}{\gamma} 2F_2 \frac{r^3}{\mu}, \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu e} \left[-F_1 \cos \mathcal{G} + F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \mathcal{G} - F_3 \frac{r}{p} e \operatorname{ctg} i \cdot \sin u \right], \\ \frac{de}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ F_1 \sin \mathcal{G} + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \mathcal{G} + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{34}$$

В качестве шестого уравнения, которое необходимо для привязки эволюции орбиты ко времени и, в частности, для определения τ_π , возьмем (32), переписав его в виде

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}. \tag{35}$$

Обратим внимание, что истинная аномалия \mathcal{G} , входящая в правые части уравнений (34), определяется из соотношения $\mathcal{G} = u - \omega$, а оскулирующий момент прохождения через

перицентр τ_π может быть найден, например, в случае эллиптической орбиты с использованием уравнения Кеплера

$$t - \tau_\pi = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} (E - e \sin E), \quad \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}.$$

Заметим, что введение γ оправдано тем, что на практике величина γ часто близка единице. В частности, $\gamma = 1$, если $F_3 = 0$, и $\gamma \approx 1$, если

$$F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i \ll \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} = \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{V_n}{r},$$

это условие принимает вид

$$\frac{d\Omega}{dt} \cos i \ll \frac{V_n}{r}.$$

Смысл последнего неравенства состоит в том, что скорость поворота линии узлов в плоскости орбиты много меньше скорости поворота радиуса-вектора.

Следует обратить внимание на то, что в некоторых случаях использование истинной аномалии или аргумента широты в качестве независимой переменной недопустимо. Рассмотрим следующий пример. Предположим, что КА под действием возмущающего ускорения \mathbf{F} движется по круговой орбите радиуса ρ , плоскость которой не проходит через притягивающий центр. Такое движение может иметь место, например, если возмущающее ускорение параллельно оси Az (Рис. 7.5). При этом суммарное ускорение $\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{F}$ направлено к центру орбиты C . Следовательно,

$$F = g \sin i = \frac{\mu}{r^2} \sin i, \quad a = g \cos i = \frac{\mu}{r^2} \cos i.$$

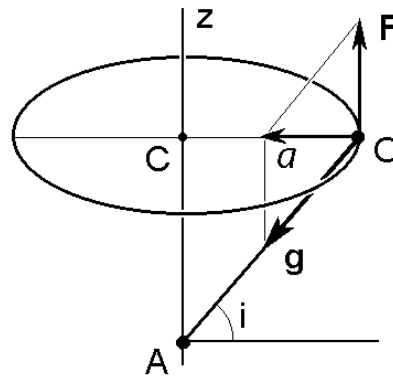


Рис. 7.5

Поскольку движение происходит по окружности радиуса $\rho = r \cos i$, имеем

$$V^2 = a\rho = \frac{\mu}{r^2} \cos i \cdot r \cos i = \frac{\mu}{r} \cos^2 i$$

или

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \cos i = V_{кр}(r) \cos i.$$

Переходя к оскулирующей орбите, заметим, что она является эллиптической, поскольку константа энергии отрицательна,

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{r} (\cos^2 i - 2) < 0.$$

Кроме того, точка O является апсидальной, поскольку $\mathbf{V} \perp \mathbf{r}$, а с учетом условия $V < V_{кр}$ можно утверждать, что точка O является апоцентром оскулирующей орбиты.

Таким образом, при движении КА он постоянно находится в апоцентре оскулирующей орбиты, т.е. в каждый момент времени имеет место $\mathcal{G} = \pi$. Это означает, что линия апсид оскулирующей орбиты поворачивается синхронно с КА.

Определим направление линии узлов оскулирующей орбиты. Линия узлов это линия пересечения плоскости оскулирующей орбиты и плоскости Ax_u , которая параллельна плоскости реального движения КА. Прямая пересечения этих плоскостей совпадает с вектором скорости, поэтому ясно, что линия узлов параллельна вектору скорости и, следовательно, перпендикулярна $AO(r)$, т.к. $\mathbf{V} \perp \mathbf{r}$. Отсюда получаем $u = \pi/2$, т.е. ни истинная аномалия $\mathcal{G} (= \pi)$, ни аргумент широты $u (= \pi/2)$ не могут выбираться в качестве независимой переменной, т.к. при движении они остаются постоянными.

Рассмотрим эволюцию элементов оскулирующей орбиты в данном случае. Аргумент перицентра оскулирующей орбиты (угол между направлением на восходящий узел и направлением на перицентр) $\omega = 3\pi/2$. Для параметра и эксцентриситета имеем

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{V^2 r^2}{\mu} = r \cos^2 i,$$

$$e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + h \frac{c^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \left(V^2 - \frac{2\mu}{r}\right) \frac{c^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{\mu}{r} (\cos^2 i - 2) \frac{r}{\mu} \cos^2 i} = \sin^2 i,$$

т.е. параметр и эксцентриситет оскулирующей орбиты постоянны (наклонение i , разумеется, тоже постоянно). Для выяснения характера эволюции долготы восходящего узла и момента прохождения через перицентр надо воспользоваться соответствующими уравнениями системы в оскулирующих элементах (31). При этом надо учесть выражения для проекций возмущающего ускорения на радиус-вектор, трансверсаль и нормаль к плоскости оскулирующей орбиты

$$F_1 = F \sin i = \frac{\mu}{r^2} \sin^2 i, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = F \cos i = \frac{\mu}{r^2} \sin i \cos i.$$

В результате получаем (с учетом, что $\mathcal{G} = \pi$, $u = \pi/2$)

$$\frac{d\Omega}{dt} = F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \text{const},$$

$$\frac{d\tau_\pi}{dt} = \frac{r^2}{e\mu} \left[(Ne \sin \mathcal{G} - \cos \mathcal{G}) F_1 + N \frac{p}{r} F_2 \right] = 1,$$

т.е. линия узлов равномерно вращается в плоскости Ax_u , а момент прохождения через перигеум изменяется синхронно со временем.

По поводу полученной системы уравнений движения в оскулирующих элементах необходимо сделать следующее замечание. Стандартный набор элементов орбиты не всегда удобен при решении практических задач. Например, рассмотрим орбиту малого эксцентриситета. В этом случае аргумент перигеума ω уже не является медленно меняющейся величиной, а при нулевом эксцентриситете аргумент перигеума и вовсе становится неопределенным. Эта особенность затрудняет описание движения спутника по почти круговым орбитам. Однако можно легко обойти указанную проблему, вводя вместо ω и e новые элементы $k = e \sin \omega$ и $q = e \cos \omega$. Фактически, эти новые элементы представляют собой проекции вектора Лапласа на линию узлов и линию в плоскости орбиты, перпендикулярную линии узлов, соответственно. При этом нужно заменить уравнения для $d\omega/du$, de/du в системе (34) на уравнения

$$\frac{dq}{du} = \frac{\partial q}{\partial \omega} \cdot \frac{d\omega}{du} + \frac{\partial q}{\partial e} \cdot \frac{de}{du},$$

$$\frac{dk}{du} = \frac{\partial k}{\partial \omega} \cdot \frac{d\omega}{du} + \frac{\partial k}{\partial e} \cdot \frac{de}{du}.$$

После подстановки выражений для $d\omega/du$ и de/du и учета очевидных соотношений

$$\frac{\partial q}{\partial \omega} = -e \sin \omega, \quad \frac{\partial k}{\partial \omega} = e \cos \omega, \quad \frac{\partial q}{\partial e} = \cos \omega, \quad \frac{\partial k}{\partial e} = \sin \omega,$$

эти уравнения принимают вид

$$\frac{dq}{du} = \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ F_1 \sin u + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} q \right] + F_3 \frac{r}{p} k \operatorname{ctg} i \cdot \sin u \right\},$$

$$\frac{dk}{du} = \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ -F_1 \cos u + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} k \right] - F_3 \frac{r}{p} q \operatorname{ctg} i \cdot \sin u \right\}.$$

Здесь и в остальных уравнениях (34), (35)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} = \frac{p}{1 + q \cos u + k \sin u}.$$

Введение новых элементов k и q позволяет использовать уравнения в оскулирующих элементах в случае малого эксцентриситета. Однако аналогичные трудности возникают также при рассмотрении почти экваториальных орбит, когда $i \simeq 0$. В этом случае линия узлов становится неопределенной и, следовательно, становятся неопределенными Ω (долгота восходящего узла) и ω (аргумент перицентра). Если наклонение i мало, тогда $\operatorname{ctg} i$ становится большим, поэтому производная $d\omega/du$ возрастает и возрастает также ошибка численного интегрирования. Поэтому лучше перейти к новому оскулирующему элементу $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$, который изменяется медленно. Тогда имеем

$$\frac{d\tilde{\omega}}{du} = \frac{d\omega}{du} + \frac{d\Omega}{du} = \frac{1}{\gamma \mu e} r^2 \left[-F_1 \cos \vartheta + F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta + F_3 e \frac{r}{p} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin u \right].$$

Можно ввести элементы орбиты таким образом, что уравнения не будут иметь особенностей ни при $e \simeq 0$, ни при $i \simeq 0$:

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega), \quad i_x = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega,$$

$$e_y = e \sin(\omega + \Omega), \quad i_y = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega,$$

$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \quad F = \Omega + \omega + \vartheta.$$

Тогда дифференциальные уравнения в оскулирующих элементах будут иметь вид

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h^2}{\xi} F_2,$$

$$\frac{de_x}{dt} = h \left\{ F_1 \sin F + F_2 [(\xi + 1) \cos F + e_x] - F_3 e_y \frac{\eta}{\xi} \right\},$$

$$\frac{de_y}{dt} = h \left\{ -F_1 \cos F + F_2 [(\xi + 1) \sin F + e_y] + F_3 e_x \frac{\eta}{\xi} \right\},$$

$$\frac{di_x}{dt} = \frac{h\tilde{\varphi}}{2\xi} F_3 \cos F,$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{h\tilde{\varphi}}{2\xi} F_3 \sin F,$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\xi^2}{h^2 \mu} + F_3 h \eta.$$

Здесь

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F, \quad \eta = i_x \sin F - i_y \cos F, \quad \tilde{\varphi} = 1 + i_x^2 + i_y^2.$$

7.2. Касательное, нормальное и бинормальное ускорения

Прежде, чем приступить к анализу влияния конкретных физических возмущений, обсудим эволюцию оскулирующей орбиты под действием отдельных проекций возмущающего ускорения. При этом рассмотрим другой способ разложения вектора F на компоненты. До сих пор возмущающее ускорение раскладывалось на радиальную F_1 , трансверсальную F_2 и бинормальную F_3 компоненты. Однако на практике часто оказывается удобнее использовать касательную F_t и нормальную F_s компоненты вместо радиальной и трансверсальной. Например, такая ситуация имеет место при учете сопротивления атмосферы. Заметим, что при этом за положительное направление касательного ускорения F_t выбирается направление вектора скорости, а положительное нормальное ускорение F_s направлено к центру кривизны траектории (рис. 7.6).

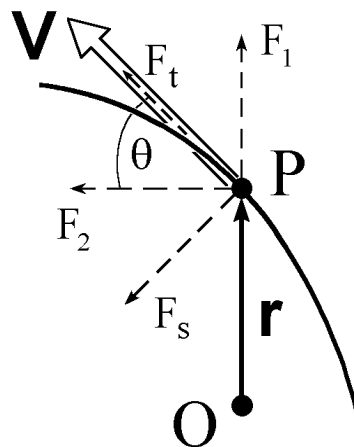


Рис. 7.6

Чтобы перейти к новой форме уравнений в оскулирующих элементах, надо выразить F_1 и F_2 через F_t и F_s и подставить полученные выражения в соответствующие уравнения.

Имеем

$$F_1 = F_t \sin \theta - F_s \cos \theta, \quad F_2 = F_t \cos \theta + F_s \sin \theta.$$

Здесь θ - угол между касательной к траектории (вектором скорости V) и трансверсалью (нормалью к радиус-вектору r в плоскости орбиты). Очевидно

$$\sin \theta = \frac{V_r}{V} = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad \cos \theta = \frac{n}{V} = \frac{1}{V} \frac{\sqrt{\mu p}}{r},$$

таким образом, получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(F_t e \sin \vartheta - F_s \frac{p}{r} \right), \\ F_2 &= \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(F_t \frac{p}{r} + F_s e \sin \vartheta \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Легко вывести также следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(F_1 e \sin \vartheta + F_2 \frac{p}{r} \right), \\ F_s &= \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-F_1 \frac{p}{r} + F_2 e \sin \vartheta \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + 2e \cos \vartheta + e^2)^{1/2}.$$

Подставляя (36) в уравнения в оскулирующих элементах, после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{2}{V} (F_t p + F_s r e \sin \vartheta), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{eV} \left[2F_t \sin \vartheta + F_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{V} \left[2F_t (e + \cos \vartheta) + F_s \frac{r}{p} (e^2 - 1) \sin \vartheta \right], \\ \frac{d\tau_\pi}{dt} &= \frac{r^2}{eV \sqrt{\mu p}} \left[F_t \left(e^2 N \sin^2 \vartheta - e \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{p^2}{r^2} N \right) + F_s \frac{p}{r} \cos \vartheta \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Заметим, что уравнения для долготы восходящего узла $d\Omega/dt$ и наклона di/dt не изменяются и здесь не приводятся, поскольку их правые части зависят только от бинормальной компоненты возмущающего ускорения F_3 .

Во многих задачах очень полезной может оказаться информация о скорости вращения линии апсид в плоскости орбиты df/dt и скорости изменения большой полуоси da/dt . Воспользовавшись соотношением

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \cos i,$$

находим

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{eV} \left[2F_t \sin \vartheta + F_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right].$$

Что касается производной da/dt , ее легко вывести из $a = p/(1 - e^2)$ в случае эллиптического или $a = p/(e^2 - 1)$ в случае гиперболического движения и принимая во внимание уже имеющиеся выражения для dp/dt и de/dt . Например, в случае эллиптического движения

$$\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{1 - e^2} \right) = \frac{1}{1 - e^2} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{2pe}{(1 - e^2)^2} \cdot \frac{de}{dt} = \frac{a}{p} \left(\frac{dp}{dt} + 2ae \frac{de}{dt} \right).$$

Подставляя dp/dt и de/dt , находим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{a}{p} \left\{ \frac{2p}{V} \left(F_t + F_s \frac{r}{p} e \sin \vartheta \right) + \frac{2ae}{V} \left[2F_t (e + \cos \vartheta) + F_s \frac{r}{p} (e^2 - 1) \sin \vartheta \right] \right\} = \\ &= 2F_t \frac{a^2}{pV} [1 - e^2 + 2e(e + \cos \vartheta)] \end{aligned}$$

или, принимая во внимание выражение для скорости V , окончательно

$$\frac{da}{dt} = 2F_t \frac{a^2}{\mu} V.$$

Заметим, что последнее уравнение можно вывести непосредственно из интеграла энергии

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h. \quad (39)$$

Дифференцируя (39), получаем

$$2V \frac{dV}{dt} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt}. \quad (40)$$

Учитывая уравнение движения

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F},$$

преобразуем (40)

$$\frac{dh}{dt} = 2V \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F} \right) + \frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = 2V\mathbf{F} + \frac{2\mu}{r^3} \left(r \frac{dr}{dt} - \mathbf{r} \frac{dr}{dt} \right) = 2V\mathbf{F},$$

откуда

$$\frac{dh}{dt} = 2VF_t. \quad (41)$$

Таким образом, в случае эллиптического движения, принимая во внимание выражение для константы энергии $h = -\mu/a$, получаем

$$\frac{da}{dt} = 2F_t \frac{a^2}{\mu} V. \quad (42)$$

В случае гиперболического движения $h = -\mu/a$ и, следовательно,

$$\frac{da}{dt} = -2F_t \frac{a^2}{\mu} V. \quad (43)$$

Теперь перейдем к анализу влияния отдельных компонент возмущающего ускорения на эволюцию элементов орбиты.

7.3. Влияние касательного ускорения ($F_t \neq 0, F_s = 0, F_3 = 0$)

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{df}{dt} = \frac{2p}{V} F_t, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2}{eV} F_t \sin \vartheta, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2}{V} F_t (e + \cos \vartheta), \\ \frac{d\tau_\pi}{dt} &= \frac{r^2}{eV\sqrt{\mu p}} F_t \left(e^2 N \sin^2 \vartheta - e \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{p^2}{r^2} N \right), \\ \frac{dh}{dt} &= 2VF_t. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассмотрим эллиптическую орбиту. Из (44) следует, что положительное касательное ускорение $F_t > 0$ приводит к увеличению большой полуоси орбиты. То же самое можно сказать и относительно параметра орбиты p . Из соотношения

$$\frac{de}{dt} = 2F_t \frac{e + \cos \vartheta}{V}$$

следует, что эксцентриситет орбиты ведет себя более сложным образом. Знак производной de/dt определяется знаком выражения $e + \cos \vartheta$. Воспользуемся соотношением

$$x = r \cos \vartheta + ae.$$

Имеем

$$x = r \cos \vartheta + e \frac{p}{1 - e^2} = r \cos \vartheta + e \frac{r}{1 - e^2} (1 + e \cos \vartheta) = \frac{r}{1 - e^2} (e + \cos \vartheta),$$

откуда

$$e + \cos \vartheta = \frac{x}{r}(1 - e^2).$$

Следовательно, на концах малой полуоси (рис. 7.7), где $x=0$, $e + \cos \vartheta = 0$. Если спутник находится правее малой оси ($x > 0$), то $e + \cos \vartheta > 0$ и эксцентриситет увеличивается. Когда спутник находится левее малой оси, эксцентриситет наоборот уменьшается.

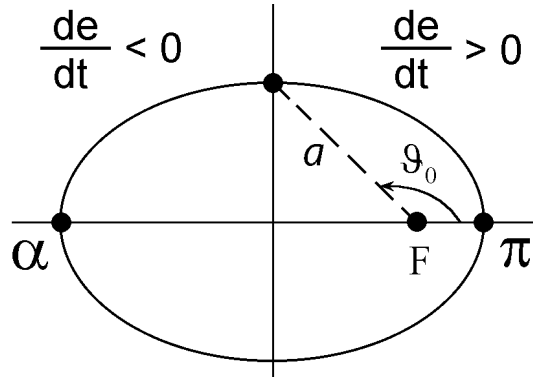


Рис. 7.7

Угол поворота линии апсид f (или аргумент перицентра ω , в данном случае это все равно, т.к. при $F_3 = 0$ линия узлов сохраняет неизменное положение в пространстве) также изменяется немонотонно. Как видно из соотношения

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = 2F_t \frac{\sin \vartheta}{eV},$$

на восходящей части траектории (от перицентра до апоцентра, где $\sin \vartheta > 0$) $df/dt > 0$ и линия апсид вращается в направлении движения. На заходящей части траектории (от апоцентра до перицентра, где $\sin \vartheta < 0$) $df/dt < 0$ и линия апсид вращается в противоположном направлении. Таким образом, касательное ускорение приводит к изменению ориентации орбиты в ее плоскости и изменяет форму и размеры орбиты. В то же время положение плоскости орбиты в пространстве остается неизменным, т.к. $d\Omega/dt = 0, di/dt = 0$.

Выясним также, как влияет касательное ускорение на энергию спутника. Поскольку энергия пропорциональна константе энергии h , а в случае эллиптического движения $h = -\mu/a$, то ясно, что положительное касательное ускорение, увеличивая большую полуось орбиты, увеличивает и энергию спутника. Если касательное ускорение тормозит движение, т.е. $F_t < 0$, то энергия уменьшается.

В случае гиперболического движения $h = \mu/a$. При этом положительное касательное ускорение F_t уменьшает большую полуось орбиты и, следовательно, снова приводит к увеличению энергии.

Заметим, что в данном случае удобнее вместо уравнения da/dt воспользоваться уравнением

$$\frac{dh}{dt} = 2F_t V.$$

Тогда результат действия касательного ускорения становится очевидным независимо от типа орбиты.

Заметим также, что в случае гиперболического движения эксцентриситет под действием положительного касательного ускорения монотонно возрастает, а в случае, когда ускорение направлено против движения, убывает.

7.4. Влияние нормального ускорения ($F_t = 0, F_s \neq 0, F_3 = 0$)

Рассмотрим теперь, как влияет на элементы оскулирующей орбиты нормальная компонента возмущающего ускорения F_s . Из

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2re}{V} F_s \sin \vartheta,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{df}{dt} = F_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{eV(1 + e \cos \vartheta)},$$

$$\frac{de}{dt} = F_s \frac{r}{Vp} (e^2 - 1) \sin \vartheta,$$

$$\frac{d\tau_\pi}{dt} = \frac{1}{eV} \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_s \cos \vartheta,$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.$$

видно, что если $F_s > 0$, то параметр орбиты возрастает на восходящей части траектории и убывает на ее заходящей части. Постоянство константы энергии означает, что $a = const$.

Из уравнения для скорости изменения эксцентриситета следует, что если движение эллиптическое, то $e^2 - 1 < 0$ и $de/dt < 0$ на восходящей части орбиты и $de/dt > 0$ на ее заходящей части. В случае гиперболического движения, напротив, эксцентриситет возрастает при удалении от перицентра ($0 < \vartheta < \vartheta_{\text{пред}}$) и убывает при приближении к перицентру ($2\pi - \vartheta_{\text{пред}} < \vartheta < 0$).

Эволюция аргумента перицентра ω и угла f , определяющего положение оси апсид в плоскости орбиты, совпадает, поскольку при $F_3 = 0$ $\dot{\omega} = \dot{f}$. При этом характер

эволюции зависит от того, в какой точке орбиты находится спутник. В случае эллиптической орбиты знак производной

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{df}{dt} = F_s \frac{2e + (1 + e^2)\cos \mathcal{G}}{eV(1 + e\cos \mathcal{G})}$$

совпадает со знаком выражения $2e + (1 + e^2)\cos \mathcal{G}$, которое удобно переписать в виде

$$(1 + e^2)(\cos \mathcal{G} - \cos \mathcal{G}_0),$$

где

$$\cos \mathcal{G}_0 = -\frac{2e}{1 + e^2}. \quad (45)$$

Легко показать, что условие $\cos \mathcal{G} = \cos \mathcal{G}_0$ выполняется в двух точках орбиты на пересечении с прямой PP' , параллельной малой оси и проходящей через пустой фокус F' (рис. 7.8). В самом деле, в точках P и P' имеем $r = 2a - p$, $FF' = 2ae$ и, следовательно,

$$\cos \mathcal{G}_0 = -\frac{2ae}{2a - p} = -\frac{2ae}{2a - a(1 - e^2)} = -\frac{2e}{1 + e^2}.$$

Таким образом, справа от линии PP' $\cos \mathcal{G} > \cos \mathcal{G}_0$ и линия апсид вращается в направлении движения. Когда спутник находится на части орбиты левее прямой PP' , то $\cos \mathcal{G} < \cos \mathcal{G}_0$ и линия апсид вращается в противоположном направлении (против движения).

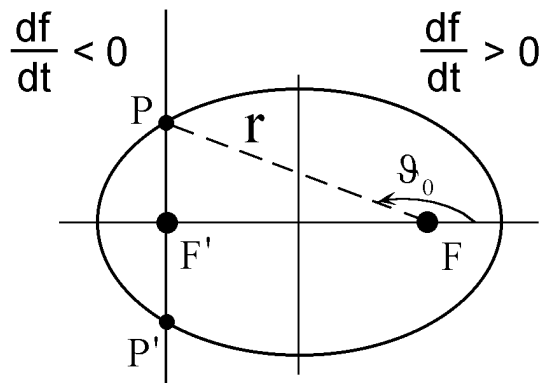


Рис. 7.8

Если орбита гиперболическая, то в силу условия $\cos \mathcal{G} > -1/e$ имеем

$$2e + (1 + e^2)\cos \mathcal{G} > 2e - \frac{1 + e^2}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} > 0$$

и, следовательно, при $F_s > 0$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{df}{dt} > 0.$$

Заметим, что нормальное ускорение не приводит ни к каким изменениям положения плоскости оскулирующей орбиты в пространстве. Точно так же оно не влияет на энергию спутника, хотя форма, размеры и ориентация орбиты в ее плоскости под действием нормального ускорения изменяются.

7.5. Влияние бинормального ускорения ($F_t = 0, F_s = 0, F_3 \neq 0$)

Наконец, рассмотрим случай, когда действует только компонента возмущающего ускорения F_3 , перпендикулярная плоскости оскулирующей орбиты. Тогда имеем

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau_x}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 0.$$

Это означает, что размеры (p), форма (e) и ориентация оскулирующей орбиты в ее плоскости (f) остаются неизменными. При этом, разумеется, сохраняется и величина энергии (h). В то же время

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}, \quad (\sin i \neq 0) \\ \frac{d\omega}{dt} &= -F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i, \end{aligned} \tag{46}$$

т.е. положение плоскости орбиты в пространстве под действием бинормального ускорения изменяется.

Из первого соотношения (46) видно, что бинормальное ускорение позволяет изменить наклонение орбиты i . При этом, очевидно, максимальный эффект, т.е. максимальное изменение наклонения di/dt , может быть достигнуто в тех точках орбиты, где произведение $r \cos u$ максимально. В частности, в случае круговой орбиты предпочтительнее включать двигатель вблизи линии узлов, где $|\cos u| \approx 1$. В восходящем узле $\cos u = 1$ и ускорение F_3 должно быть направлено вдоль бинормали к орбите. В заходящем узле $\cos u = -1$ и ускорение должно иметь противоположное направление.

Глава 8. Влияние несферичности планеты

До сих пор рассматривалось движение тела в гравитационном поле с ньютоновским потенциалом

$$U = f \frac{M}{r}, \quad (1)$$

что соответствует движению в поле притяжения материальной точки или тела со сферическим распределением плотности. Упрощенная модель гравитационного потенциала планеты дает достаточно хороший прогноз при рассмотрении орбит высоких спутников (обращающихся вокруг Земли на высоте 40-50 тысяч километров). Такое допущение приводит к полезному первому приближению также и в случае низколетящего спутника, если нас интересует его движение лишь в течение небольшого промежутка времени. Если же нас интересует движение низколетящего спутника в течение длительного промежутка времени, то для получения результатов, хорошо согласующихся с практикой, необходимо пользоваться другой, более точной моделью, например, рассматривать Землю как эллипсоид вращения (сфероид) или трехосный эллипсоид. В еще большей мере использование более точных моделей оправдано при изучении движения спутников других планет, например, Юпитера, Нептуна, Марса, гравитационные потенциалы которых в значительно большей степени отличаются от ньютоновского.

Следует отметить, что эти отличия связаны в основном со сплюснутостью (полярным сжатием) планет. В качестве меры сплюснутости обычно принимают отношение

$$\alpha = \frac{R - R_p}{R},$$

где R - экваториальный радиус планеты, R_p - полярный радиус. Так для Земли $\alpha \approx 1/300$, для Марса $\alpha \approx 1/150$, для Юпитера $\alpha \approx 1/60$.

8.1. Потенциал тела произвольной формы

Рассмотрим потенциал в точке P , создаваемый телом произвольной формы с произвольным распределением масс, причем точка P расположена вне тела (рис. 8.1). Введем связанную с телом прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тела O . Потенциал в точке P с радиус-вектором $\mathbf{OP} = \mathbf{r} = (x, y, z)^T$, создаваемый элементом массы Δm с радиус-вектором $\mathbf{OQ} = \mathbf{s} = (\xi, \eta, \zeta)^T$, имеет вид

$$\Delta U = f \frac{\Delta m}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|},$$

откуда, интегрируя по всему телу, получаем

$$U = f \iiint_M \frac{dm}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}. \quad (2)$$

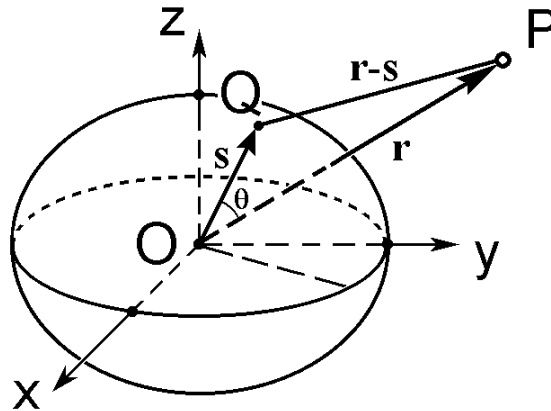


Рис. 8.1

Преобразуем квадрат расстояния между точками P и Q следующим образом:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{s})^2 = r^2 - 2rs + s^2 = r^2 \left[1 - 2 \left(\frac{s}{r} \right) \cos \theta + \left(\frac{s}{r} \right)^2 \right] = r^2 (1 - 2q\alpha + \alpha^2),$$

где

$$\alpha = \frac{s}{r}, \quad q = \cos \theta = \frac{\mathbf{r}\mathbf{s}}{rs} = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{rs}.$$

Тогда (2) принимает вид

$$U = f \iiint_M \frac{dm}{\sqrt{1 - 2q\alpha + \alpha^2}}. \quad (3)$$

Поскольку $0 < \alpha < 1$ и $|q| \leq 1$, подынтегральное выражение в (3) можно разложить в ряд по степеням α ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2q\alpha+\alpha^2}} &= [1-(2q\alpha-\alpha^2)]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(2q\alpha-\alpha^2) + \frac{3}{8}(2q\alpha-\alpha^2)^2 + \frac{5}{16}(2q\alpha-\alpha^2)^3 + \dots = \\ &= 1 + q\alpha + \frac{1}{2}(3q^2-1)\alpha^2 + \frac{1}{2}(5q^3-3q)\alpha^3 + \dots \end{aligned}$$

Следует заметить, что в теории специальных функций доказана формула

$$\frac{1}{\sqrt{1-2q\alpha+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(q)\alpha^n, \quad (4)$$

где $P_n(q)$ - полиномы Лежандра - функции, часто встречающиеся в математической физике. Для полиномов Лежандра справедлива формула

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dq^n} (q^2 - 1)^n$$

и имеет место рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(q) = \frac{2n+1}{n+1} q P_n(q) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(q).$$

Несколько первых полиномов Лежандра имеют вид

$$P_0 = 1, \quad P_1 = q, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3q^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5q^3 - 3q).$$

Таким образом, гравитационный потенциал (3) принимает вид

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

и задача его определения сводится к вычислению интегралов

$$U_n = \frac{f}{r} \iiint_M P_n(q) \alpha^n dm.$$

Получим выражения для нескольких первых членов разложения потенциала.

Имеем

$$U_0 = \frac{f}{r} \iiint_M P_0 dm = \frac{f}{r} \iiint_M dm = f \frac{M}{r},$$

где M - масса тела.

Для следующего члена разложения имеем

$$U_1 = \frac{f}{r} \iiint_M P_1(q) \alpha dm = \frac{f}{r} \iiint_M q \alpha dm = \frac{f}{r} \iiint_M \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^2} dm =$$

$$= \frac{f}{r^3} \left(x \iiint_M \xi dm + y \iiint_M \eta dm + z \iiint_M \zeta dm \right) = 0,$$

поскольку начало координат совпадает с центром масс тела.

Вычислим U_2 . Имеем

$$U_2 = \frac{f}{r} \iiint_M P_2(q) \alpha^2 dm = \frac{f}{2r} \iiint_M (3q^2 - 1) \frac{s^2}{r^2} dm = \frac{f}{2r^3} \iiint_M (3X^2 - s^2) dm,$$

где $X = s \cos \theta$ - проекция вектора s на OP . Если обозначить две другие проекции вектора s на оси, дополняющие ось OP до правой прямоугольной тройки, через Y и Z , то $s^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ и

$$3X^2 - s^2 = 3(s^2 - Y^2 - Z^2) - s^2 = 2s^2 - 3(Y^2 + Z^2) =$$

$$= (\eta^2 + \zeta^2) + (\zeta^2 + \xi^2) + (\xi^2 + \eta^2) - 3(Y^2 + Z^2).$$

Но моменты инерции тела относительно осей Ox , Oy , Oz и OP равны соответственно

$$A = \iiint_M (\eta^2 + \zeta^2) dm, \quad B = \iiint_M (\zeta^2 + \xi^2) dm,$$

$$C = \iiint_M (\xi^2 + \eta^2) dm, \quad I = \iiint_M (Y^2 + Z^2) dm,$$

следовательно, U_2 окончательно принимает вид

$$U_2 = \frac{f}{2r^3} (A + B + C - 3I). \quad (5)$$

Заметим, что форма большинства небесных тел близка к сфере. Поэтому U_2 мало по сравнению с U_0 . Формула для потенциала, в которой учтены только U_0 , U_1 и U_2 ,

$$U = f \frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3} (A + B + C - 3I), \quad (6)$$

называется формулой Мак-Калуфа. Для большинства астрономических задач она достаточно точна. В частности, если тело шар, то $A = B = C = I$ и (6) совпадает с (1).

Рассмотрим следующий член в разложении гравитационного потенциала

$$U_3 = \frac{f}{r} \iiint_M P_3(q) \alpha^3 dm. \quad (7)$$

Из вида подынтегрального выражения

$$P_3(q)\alpha^3 = \frac{1}{2}(5q^3 - 3q)\left(\frac{s}{r}\right)^3 = \frac{1}{2r^3}(5q^2s^2 - 3s^2)qs$$

$$= \frac{1}{2r^3} \left[5 \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} \right)^2 - 3(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right] \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r}$$

следует, что при вычислении (7) мы приходим к сложному выражению, представляющему собой сумму с некоторыми коэффициентами интегралов вида

$$\iiint_M \xi^a \eta^b \zeta^c dm,$$

где a, b, c - положительные целые числа от нуля до трех, причем $a + b + c = 3$.

Если тело симметрично относительно всех трех координатных плоскостей (например, однородный эллипсоид с тремя неравными осями), то все такие интегралы равны нулю, так что $U_3 = 0$. Более того, в этом случае обращаются в нуль все U_n с нечетными индексами.

Положение точки P удобно определять при помощи сферических координат r, λ и Φ (рис. 8.2): r - радиус-вектор; λ - долгота - угол между осью Ox и проекцией r на плоскость Oxy ; Φ - широта - угол наклона вектора r к плоскости Oxy . Декартовы координаты x, y, z выражаются через сферические координаты следующим образом:

$$x = r \cos \Phi \cos \lambda, \quad y = r \cos \Phi \sin \lambda, \quad z = r \sin \Phi.$$

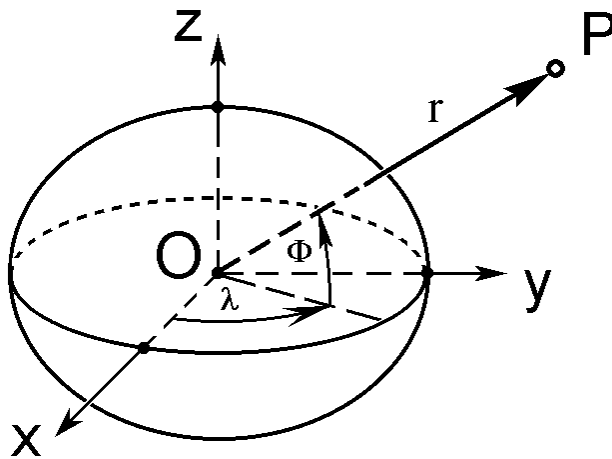


Рис. 8.2

Тогда, принимая во внимание, что

$$I = A \left(\frac{x}{r} \right)^2 + B \left(\frac{y}{r} \right)^2 + C \left(\frac{z}{r} \right)^2 = (A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda) \cos^2 \Phi + C \sin^2 \Phi,$$

выражение U_2 принимает вид

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{f}{2r^3} \left[A + B + C - 3(A \cos^2 \lambda + B \sin^2 \lambda) \cos^2 \Phi - 3C \sin^2 \Phi \right] = \\
&= \frac{f}{2r^3} \left\{ C(1 - 3 \sin^2 \Phi) + 2 \frac{A + B}{2} - \right. \\
&\quad \left. - 3 \left[\left(\frac{A + B}{2} + \frac{A - B}{2} \right) \cos^2 \lambda + \left(\frac{A + B}{2} - \frac{A - B}{2} \right) \sin^2 \lambda \right] \cos^2 \Phi \right\} = \\
&= \frac{f}{2r^3} \left[\left(C - \frac{A + B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \Phi) - \frac{3}{2} (A - B) \cos 2\lambda \cos^2 \Phi \right].
\end{aligned}$$

Если тело обладает симметрией относительно оси z , т.е. планета является сфероидом (телом вращения), то $A = B$. При этом, вообще говоря, планета не обязательно симметрична относительно экваториальной плоскости Oxy . Кстати, именно такая ситуация имеет место для Земли, форма которой напоминает грушу. Тогда

$$U_2 = \frac{f}{2r^3} (C - A) (1 - 3 \sin^2 \Phi)$$

и (6) преобразуется к виду

$$U = f \frac{M}{r} \left[1 - \frac{C - A}{MR^2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \Phi) \right], \quad (8)$$

где R - экваториальный радиус планеты. Заметим, что в случае сплюснутой планеты ($R > R_p$) осевой момент инерции C больше экваториального момента инерции A .

Приведем теперь без вывода окончательные выражения для потенциала сфероидов и трехосного эллипсоида во внешней точке. Если предположить, что тело является сфероидом, распределение плотности которого обладает осевой симметрией (это означает, что во всех точках сфероидов, имеющих одни и те же координаты r , Φ , но разные значения долготы λ , плотность одна и та же; при этом в точках, симметричных относительно плоскости экватора, плотность может, вообще говоря, оказаться различной), то его потенциал можно представить бесконечным рядом

$$U = f \frac{M}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi) \right]. \quad (9)$$

Впервые этот результат был получен Лапласом. Заметим, что если положить

$$J_2 = \frac{C - A}{MR^2},$$

то первые два члена (9) дадут (8). В (9) J_n - некоторые вполне определенные для данного сфероидов константы, зависящие от его размеров, формы и распределения масс. При этом, очевидно, в случае сжатого сфероидов $J_2 > 0$.

Для земного сфероида

$$J_2 \approx 1082.23 \times 10^{-6}, \quad J_3 \approx -2.3 \times 10^{-6}, \quad J_4 \approx -2.12 \times 10^{-6}.$$

Члены ряда (9)

$$-f \frac{M}{r} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi) \quad (10)$$

представляют собой периодические функции широты Φ с периодом 2π . При этом знак (10) зависит от знака соответствующего полинома Лежандра $P_n(\sin \Phi)$. Известно, что полином Лежандра n -го порядка имеет n различных действительных корней, причем все эти корни по абсолютной величине меньше 1. Это означает, что $P_n(\sin \Phi)$ меняет знак на n широтах. Следовательно, сфера разделяется на $n+1$ широтную зону, где слагаемые (10) принимают попеременно положительные и отрицательные значения. Поэтому слагаемые (10) называются зональными гармониками n -го порядка.

Заметим, что в случае тела произвольной формы его потенциал имеет вид

$$U = f \frac{M}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \Phi) \times (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) \right]. \quad (11)$$

Здесь $P_n^{(k)}(z)$ - присоединенная функция Лежандра порядка n и индекса k ,

$$P_n^{(k)}(z) = (1-z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}.$$

Например, присоединенные функции Лежандра 2-ого порядка имеют вид

$$P_2^{(1)}(\sin \Phi) = 3 \cos \Phi \sin \Phi, \quad P_2^{(2)}(\sin \Phi) = 3 \cos^2 \Phi.$$

Ряд (11) сходится, если расстояние r от центра притягивающего тела до точки P больше, чем расстояние от центра тела до его наиболее удаленной точки.

Слагаемые второй суммы в (11) называются тессеральными (при $n \neq k$) и секториальными (при $n = k$) гармониками. Тессеральные гармоники сохраняют знак внутри сферических трапеций, на которые сфера делится $2k$ меридианами и $n-k$ параллелями. Секториальные гармоники сохраняют знак внутри сферических секторов, на которые сфера делится n меридианами.

Разложение гравитационного потенциала несферической планеты на отдельные гармоники имеет вполне определенный физический смысл. Первое слагаемое в (11), μ/r , соответствует шару со сферическим распределением плотности. Вторая зональная гармоника

$$J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \Phi)$$

учитывает полярное сжатие планеты (вдоль оси вращения) и является самой существенной поправкой. Зональные гармоники нечетного порядка и тессеральные гармоники, для которых $n + k$ нечетно, учитывают асимметрию планеты относительно плоскости экватора, а секториальные и остальные тессеральные гармоники учитывают асимметрию относительно оси вращения планеты.

В частности, если планета обладает осевой симметрией, т.е. является сфероидом (эллипсоидом вращения), и симметрична относительно экваториальной плоскости (в точках, симметричных относительно экваториальной плоскости, плотность одна и та же), то в (11) остаются только зональные гармоники четного порядка и потенциал принимает вид

$$U = f \frac{M}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{R}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \right]. \quad (12)$$

В случае земного сфероида влияние зональных гармоник выше четвертого порядка мало, а коэффициенты J_n при $n > 4$ известны весьма грубо. Поэтому при изучении движения искусственных спутников можно получить хорошее приближение, если в формуле для U пренебречь членами, в которых $1/r$ входит в степени выше четвертой. Однако и тогда выкладки оказываются весьма громоздкими, а расчеты траектории очень длительными.

Было предложено несколько различных способов такой замены потенциала сжатого сфероида другим, близким потенциалом, при которой дальнейшие расчеты движения спутника становятся значительно менее громоздкими. В 1960-1962 годах интересный способ был предложен Аксеновым, Гребенниковым и Деминым.

8.2. Задача о двух фиксированных центрах

Пусть имеются две точечные массы M_1 и M_2 , расположенные в двух фиксированных (не меняющих своего положения) точках A_1 и A_2 . Эти массы создают силовое поле с потенциалом в точке P

$$U_0 = f \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right), \quad (13)$$

где r_1 и r_2 - расстояния от A_1 и A_2 до P . Введем систему координат $Oxyz$ с началом в центре отрезка A_1A_2 и осью Oz , направленной в сторону A_2 (рис. 8.3), и обозначим координаты точек A_1 , A_2 и P в этой системе $(0, 0, -a)$, $(0, 0, a)$ и (x, y, z) , соответственно. Тогда

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}.$$

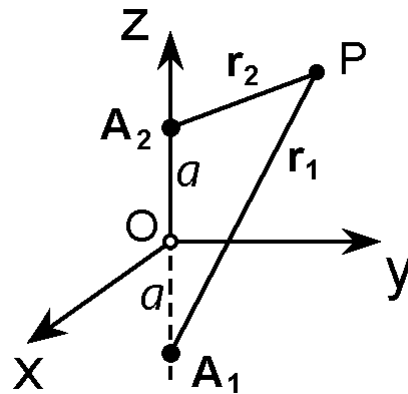


Рис. 8.3

Пусть требуется определить движение точки P , если известно ее положение и скорость в некоторый момент времени. Эта задача носит название задачи о двух фиксированных центрах; она была решена в замкнутом виде Эйлером еще в XXVIII веке.

Рассмотрим частный случай задачи о двух фиксированных центрах, когда

$$M_1 = M_2 = M/2 \quad (14)$$

и воспользуемся тем, что известные методы решения данной задачи применимы и в том случае, когда силовое поле задается потенциалом (13), где a - чисто мнимое: $a = ci$ ($c > 0$, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица). При этом r_1 и r_2 оказываются комплексно сопряженными числами и с учетом (14) потенциал U_0 будет вещественным,

$$U_0 = \frac{1}{2} fM \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm a)^2}.$$

Для нас сейчас несущественно, при каком именно реальном распределении масс может возникнуть такой потенциал, - важно то, что при таком потенциале можно получить достаточно удобные формулы, описывающие движение материальной точки P .

Разложим функцию U_0 в ряд по полиномам Лежандра. Имеем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{z}{r}\right)\left(-i\frac{c}{r}\right) + \left(-i\frac{c}{r}\right)^2}},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и воспользовавшись (4) при

$$\alpha = -i \frac{c}{r}, \quad \lambda = \frac{z}{r},$$

получаем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-i \frac{c}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right).$$

Аналогично

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \frac{c}{r} \right)^n P_n \left(\frac{z}{r} \right),$$

откуда

$$U_0 = f \frac{M}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \right]. \quad (15)$$

Сравним (15) с выражением (12) для потенциала земного сфероид (в предположении симметрии относительно экваториальной плоскости). Если положить $c = R\sqrt{J_2}$ (J_2 - положительное число), то у этих рядов окажутся равными два первых члена. Вычисления показывают, что третьи члены у этих рядов обычно тоже достаточно близки (например, если речь идет о земном сфероиде).

Полагая $\Delta = U - U_0$, имеем $U = U_0 + \Delta$. Таким образом, потенциал сфероид распадается на два слагаемых, из которых одно (U_0) мало отличается от U , а второе (Δ) не только мало, но еще содержит параметры, которые практически определяются весьма неточно. Выражение U_0 назовем нормальной составляющей потенциала сфероид, а Δ - его аномальной частью. Гравитационное поле с потенциалом U_0 можно назвать нормальным гравитационным полем сфероид. На практике при изучении движения спутника в поле сжатого сфероид мы получим достаточно хороший результат, если вместо поля с потенциалом U будем рассматривать движение спутника в поле с потенциалом U_0 . Та же идея использования потенциала задачи двух фиксированных центров (13) при мнимых значениях некоторых параметров (расстояний, масс) может быть применена и для случая, когда сфероид не обладает симметрией относительно экваториальной плоскости. Потенциал сфероид в этом случае имеет вид

$$U = f \frac{M}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi) \right]$$

и заменяется потенциалом вида (13), но с комплексными параметрами. Такая модель сфероид выгодна в тех случаях, когда мы хотим учесть влияние на движение искусственного спутника Земли ее грушевидности.

8.3. Влияние сплюснутости планеты на орбиту спутника

Перейдем теперь собственно к обсуждению влияния сплюснутости планеты на траекторию спутника. Для Земли J_2 имеет порядок 10^{-3} , а все остальные коэффициенты разложения (11) имеют порядок 10^{-6} и выше. Поэтому при оценке влияния несферичности Земли на движение спутника можно ограничиться учетом только второй зональной гармоники, т.е. принять

$$U \approx f \frac{M}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \Phi) \right]. \quad (16)$$

Напомним, что для планеты, симметричной относительно оси вращения, имеет место соотношение

$$J_2 = \frac{C - A}{MR^2},$$

где A и C - экваториальный и осевой моменты инерции планеты (очевидно для сплюснутой планеты $A < C$ и, следовательно, $J_2 > 0$).

Принимая во внимание выражение для полинома Лежандра второго порядка и обозначая

$$\delta = \frac{3}{2} J_2 \mu R^2,$$

имеем

$$U = \frac{\mu}{r} + U_1,$$

где U_1 - возмущающий потенциал

$$U_1 = \frac{\delta}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi \right). \quad (17)$$

Введем систему координат $Axuz$ (рис. 8.2) так, что Axu - плоскость экватора, ось Ax направлена в точку весеннего равноденствия⁴, ось Az - в один из полюсов планеты, ось Au дополняет Ax и Az до правой тройки. За возмущающую силу примем разность

⁴ Та из двух точек пересечения эклиптики с небесным экватором, в которой Солнце при своем видимом годичном перемещении среди звезд переходит из южного полушария небесной сферы в северное.

По современному календарю Солнце проходит точку весеннего равноденствия 20 или 21 марта. В этот день продолжительность светлого времени суток на Земле повсюду равна продолжительности ночи, т.е. наступает равноденствие, а в северном полушарии по астрономическому счету начинается весна. Вследствие прецессии точка весеннего равноденствия медленно перемещается по небесной сфере. Два тысячелетия назад она находилась в зодиакальном созвездии Овна (обозначается астрономическим знаком Овна Υ), в настоящее время находится в созвездии Рыб.

между силой, с которой спутник притягивается к планете, и силой, с которой спутник притягивался бы к точке A , если бы в ней была сосредоточена вся масса планеты. Для того, чтобы можно было воспользоваться системой уравнений в оскулирующих элементах, определим проекции возмущающего ускорения на оси системы координат $A\xi\eta\zeta$. Напомним, что ось $A\xi$ направлена по радиус-вектору, $A\eta$ - в плоскости орбиты перпендикулярно к радиус-вектору в сторону движения, $A\zeta$ - по нормали к плоскости орбиты. Возмущающая сила имеет потенциал (17), следовательно

$$F_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \xi}, \quad F_2 = \frac{\partial U_1}{\partial \eta}, \quad F_3 = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta}.$$

Проектируя на небесную сферу плоскости меридиана, экватора и орбиты спутника (рис. 8.4), получим прямоугольный сферический треугольник. Величины u , Φ , i являются в этом треугольнике соответственно гипотенузой, катетом и углом, противолежащим этому катету. Согласно формуле

$$\frac{\sin \Phi}{\sin i} = \frac{\sin u}{\sin(\pi/2)}$$

имеем

$$\sin \Phi = \sin u \sin i.$$

Таким образом, возмущающий потенциал (17) принимает вид

$$U_1 = \frac{\delta}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 u \sin^2 i \right). \quad (18)$$

Вычислим радиальную компоненту возмущающего ускорения

$$F_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = \frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1).$$

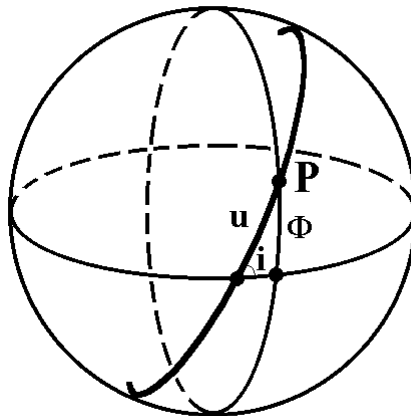


Рис. 8.4

Определим теперь трансверсальную компоненту F_2 . Для этого дадим величине u малое приращение Δu , а радиус-вектор r и наклонение i оставим без изменения. Тогда ξ и ζ не изменятся, а η получит приращение $\Delta\eta = r\Delta u$ и в результате возмущающий потенциал U_1 получит приращение ΔU_1 . Таким образом, имеем

$$F_2 = \frac{\partial U_1}{\partial \eta} = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta\eta} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta u} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial u} = -\frac{\delta}{r^4} \sin 2u \sin^2 i.$$

Наконец, для определения компоненты F_3 возмущающего ускорения, направленной по нормали к плоскости орбиты, дадим малое приращение Δi наклонению орбиты i , а величины радиус-вектора r и аргумента широты u зафиксируем. Тогда ξ и η не изменятся, а ζ получит приращение $\Delta\zeta$. Определим его. Для этого рассмотрим сферу радиуса r и проекции на нее плоскостей орбиты, соответствующих значениям наклонения i и $i + \Delta i$ (рис. 8.5). Из сферического треугольника ABC ($BC = x$ - неизвестная дуга) имеем

$$\frac{\sin u}{\sin B} = \frac{\sin x}{\sin \Delta i}.$$

Кроме того,

$$\sin B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta i}{2}\right) = \cos \frac{\Delta i}{2}$$

и при малых Δi , учитывая $\sin \Delta i = \Delta i$, $\cos(\Delta i/2) = 1$, $\sin x = x$, получаем $x = \Delta i \sin u$. Таким образом,

$$\Delta\zeta = rx = r\Delta i \sin u.$$

Следовательно,

$$F_3 = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta} = \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta\zeta} = \frac{1}{r \sin u} \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta U_1}{\Delta i} = \frac{1}{r \sin u} \frac{\partial U_1}{\partial i} = -\frac{\delta}{r^4} \sin u \sin 2i.$$

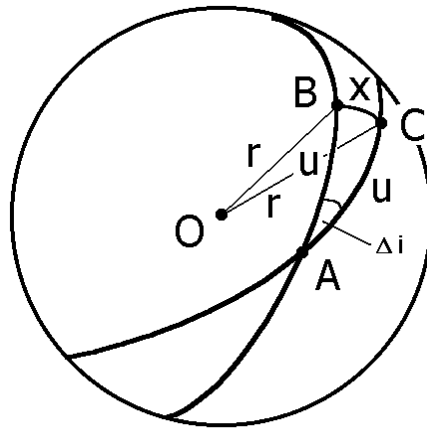


Рис. 8.5

Получим теперь (в первом приближении) скорость изменения элементов орбиты спутника в предположении, что оскулирующая орбита - эллипс. Начнем с долготы восходящего узла Ω . Обозначим через $d\Omega/dN$ изменение параметра Ω за один оборот спутника по орбите, т.е. от того момента, когда $u = 0$, до момента, когда $u = 2\pi$,

$$\frac{d\Omega}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du. \quad (19)$$

Но

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_3 \frac{\sin u}{\sin i},$$

Подставляя в правую часть выражение для F_3 и учитывая, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(u - \omega)}{p},$$

получаем

$$\frac{d\Omega}{du} = -\frac{1}{\gamma} \frac{2\delta}{\mu p^2} \cos i \sin^2 u [1 + e \cos(u - \omega)].$$

Проинтегрируем это выражение по аргументу широты от 0 до 2π . При этом можно в первом приближении принять $\gamma = 1$. Кроме того, будем считать, что p , ω , i и e меняются настолько медленно, что их изменениями на одном витке при вычислении интеграла (19) можно пренебречь. Иными словами, считаем p , ω , i и e постоянными.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dN} &= -\frac{2\delta}{\mu p^2} \cos i \int_0^{2\pi} \sin^2 u [1 + e \cos(u - \omega)] du = -\frac{2\pi\delta}{\mu p^2} \cos i \text{ рад/об} = \\ &= -360 \frac{\delta}{\mu p^2} \cos i \text{ град/об}. \end{aligned} \quad (20)$$

При вычислении интеграла мы воспользовались тем, что

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 u du = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 u \cos u du = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^3 u du = 0.$$

Покажем, например, справедливость первого равенства. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 u du &= - \int_0^{2\pi} \sin u d(\cos u) = \int_0^{2\pi} \cos u d(\sin u) = \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 u) du = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 u du, \end{aligned}$$

откуда следует первое равенство. Что касается второго и третьего равенств, то их доказательство тривиально.

Аналогично получаем выражение для $d\omega/dN$. Имеем

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{1}{\gamma \mu e} \left[-F_1 \cos \vartheta + F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - F_3 \frac{r}{p} \operatorname{ectg} i \sin u \right],$$

$$F_1 = \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1),$$

$$F_2 = -\frac{\delta}{r^4} \sin 2u \sin^2 i,$$

$$F_3 = -\frac{\delta}{r^4} \sin u \sin 2i.$$

Отсюда, пропуская громоздкие, но несложные выкладки, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dN} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{du} du = \pi \frac{\delta}{\mu p^2} (5 \cos^2 i - 1) \text{ рад/об} = \\ &= 180 \frac{\delta}{\mu p^2} (5 \cos^2 i - 1) \text{ град/об}. \end{aligned} \tag{21}$$

Что касается других элементов орбиты спутника (p, e, i, τ_π) , то они могут из-за сплюснутости планеты испытывать довольно значительные периодические изменения. Однако окончательные изменения этих элементов за один полный оборот (вековые уходы) будут малыми и ими можно в первом приближении пренебречь. Так, например, из приближенных выражений для производных наклона i и параметра p орбиты по аргументу широты

$$\frac{di}{du} = F_3 \frac{r^3}{\mu p} \cos u = -\frac{\delta}{\mu p^2} \sin 2i \sin u \cos u [1 + e \cos(u - \omega)],$$

$$\frac{dp}{du} = 2F_3 \frac{r^3}{\mu} = -\frac{4\delta}{\mu p} \sin^2 i \sin u \cos u [1 + e \cos(u - \omega)]$$

нетрудно показать, что

$$\frac{di}{dN} = 0, \quad \frac{dp}{dN} = 0.$$

Легко убедиться также, что отсутствует вековой уход эксцентриситета орбиты. Для этого достаточно вспомнить, что гравитационные силы потенциальны. Следовательно, существует интеграл энергии, а это означает постоянство большой полуоси орбиты a . Но поскольку $e = \sqrt{1 - p/a}$ и, как уже показано, вековое изменение параметра орбиты равно нулю, то и эксцентриситет в среднем постоянен.

Преобразуем выражения (20) и (21) для скоростей изменения долготы восходящего узла и аргумента перицентра оскулирующей орбиты к более удобному виду. Если экваториальный радиус планеты R и большая полуось орбиты a измеряются в километрах, а гравитационный параметр μ имеет размерность $[\text{км}^3/\text{с}^2]$, то для периода имеем

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} \quad [\text{с}].$$

Поэтому долгота восходящего узла в среднем за одну секунду изменяется на величину

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{T} \frac{d\Omega}{dN} = -\frac{\delta}{\sqrt{\mu a^7}} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} \quad [\text{рад/с}].$$

Для орбит спутников, имеющих эксцентриситет $e < 0.1$, можно заменить эту формулу более простой. Для этого подставим в нее приближенные числовые значения

$$J_2 = 1082.8 \times 10^{-6}, \quad \mu = 398600 \text{ [км}^3/\text{с}^2], \quad R = 6378 \text{ [км]},$$

и, разложив в ряд по e , отбросим члены второй и более высоких степеней

$$\dot{\Omega} \approx -10 \left(\frac{R}{a} \right)^{7/2} \cos i \quad [\text{град/сут}]. \quad (22)$$

Аналогичным образом можно упростить формулу для угловой скорости движения перицентра орбиты спутника

$$\dot{\omega} = \frac{\delta}{2\sqrt{\mu a^7}} \frac{1}{(1 - e^2)^2} (5 \cos^2 i - 1) \quad [\text{рад/сут}]. \quad (23)$$

Для спутников Земли на орбитах с малым эксцентриситетом (при $e < 0.1$)

$$\dot{\omega} \approx 5 \left(\frac{R}{a} \right)^{7/2} (5 \cos^2 i - 1) \quad [\text{град/сут}]. \quad (24)$$

Из формулы (22) видно, что полярное сжатие планеты вызывает вращение восходящего узла орбиты в направлении, противоположном направлению вращения спутника. В течение небольших промежутков времени (в случае близких спутников Земли - до нескольких суток) это вращение можно считать равномерным.

Вращение линии узлов происходит тем быстрее, чем меньше наклон плоскости орбиты к плоскости экватора. Для плоскости орбиты, проходящей через оба полюса планеты (полярная орбита), восходящий узел, а вместе с ним и вся плоскость орбиты

практически не вращаются вокруг оси планеты. Для спутников, близких к экваториальным, это вращение происходит быстрее всего; для почти экваториального спутника Земли эта скорость может составить около 9° в сутки. Заметим, что для экваториального спутника линия узлов становится неопределенной и понятие восходящего узла теряет смысл. Однако это вовсе не означает, что нельзя говорить об эволюции экваториальной орбиты. В этом случае вместо неопределенных долготы восходящего узла Ω и аргумента перицентра ω можно рассматривать величину $\Omega + \omega$ - угол между осью Ox и направлением на перицентр (линией апсид). Из формул (20), (21) при $i = 0$ получаем

$$\frac{d}{dT}(\Omega + \omega) = 2\pi \frac{\delta}{\mu p^2} \quad [\text{рад/об}]$$

или

$$\frac{d}{dT}(\Omega + \omega) \approx 10 \left(\frac{R}{a} \right)^{7/2} \quad [\text{град/сут}],$$

т.е. полярное сжатие планеты приводит к вращению линии апсид орбиты экваториального спутника в направлении орбитального движения спутника. При этом положение плоскости орбиты в пространстве остается неизменным. Качественный вид эволюции экваториальной орбиты показан на рис. 8.6.

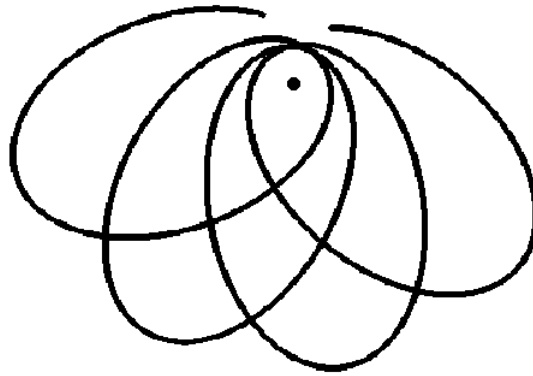


Рис. 8.6

Формула (24) показывает, что перицентр орбиты спутника, а вместе с ним и ось орбиты спутника (линия апсид), вращаются в плоскости орбиты практически равномерно. Это вращение происходит в том же направлении, что и движение спутника, если $i < 63.4^\circ$ (при этом $5 \cos^2 i - 1 > 0$) и в противоположном направлении, если $i > 63.4^\circ$. При критическом значении наклона $i_* \approx 63.4^\circ$ перицентр орбиты практически не вращается. Для первых советских искусственных спутников Земли ($i \approx 65^\circ$) перицентр медленно поворачивался со скоростью примерно 0.4° за сутки против движения

спутника. В случае почти экваториального спутника величина $\dot{\omega}$ может достигать 17° за сутки. В обратном направлении возможное предельное значение $\dot{\omega}$ составляет примерно -4.5° за сутки (при $i = 90^\circ$). Такая картина имела место, например, для американского полярного спутника "Discoverer 2" ($i = 89.9^\circ$, $p/R = 1.046$, $\dot{\omega} = -4.3$ град/сут).

Заметим, что наличие в формулах для $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ множителя $a^{-7/2}$ приводит к тому, что $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ быстро убывают при увеличении среднего расстояния от планеты.

Таким образом, полученные результаты показывают, что полярное сжатие планеты в первом приближении приводит к значительным изменениям положения орбиты близкого спутника планеты; однако оно практически не сказывается на форме и размерах орбиты.

Глава 9. Возмущенное движение ИСЗ под действием сопротивления атмосферы

На полет ИСЗ на небольших высотах значительное влияние оказывает атмосфера Земли. Сопротивление воздуха тормозит движение спутника, причем на высотах менее 150 км воздействие атмосферы становится столь существенным, что спутник начинает быстро снижаться и не совершив даже одного оборота входит в плотные слои атмосферы и в зависимости от материала, из которого он изготовлен, сгорает или падает на Землю. Поэтому при решении ряда практических задач необходимо учитывать воздействие атмосферы на параметры орбиты спутника и уметь определять время его существования, т.е. время от момента выведения на орбиту до момента входа в плотные слои атмосферы.

Для изучения эволюции орбиты спутника под действием сопротивления атмосферы можно использовать систему уравнений в оскулирующих элементах, выбрав в качестве независимой переменной аргумент широты. Тогда уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_3 \frac{\sin u}{\sin i}, \\
 \frac{di}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_3 \cos u, \\
 \frac{dp}{du} &= \frac{1}{\gamma} 2F_2 \frac{r^3}{\mu}, \\
 \frac{d\omega}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu e} \left[-F_1 \cos \vartheta + F_2 \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - F_3 \frac{r}{p} e \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\
 \frac{de}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ F_1 \sin \vartheta + F_2 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \\
 \frac{d\tau_\pi}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^4}{e \mu \sqrt{\mu p}} \left[(Ne \sin \vartheta - \cos \vartheta) F_1 + N \frac{p}{r} F_2 \right].
 \end{aligned} \tag{1}$$

В правые части уравнений в оскулирующих элементах входят проекции возмущающего ускорения F_1, F_2, F_3 на радиус вектор спутника в данный момент времени, на направление поперечной составляющей скорости и на нормаль к мгновенной плоскости орбиты соответственно. Определим величины этих проекций. Будем считать Землю сферой. Расчеты показывают, что такое упрощение может приводить к отклонениям высоты орбиты h до 10-15 км и, как следствие, к неверным значениям плотности атмосферы $\rho(h)$. Правда на больших высотах эти отклонения не очень существенны.

Сила сопротивления воздуха

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2} \rho(h) S c_x V \mathbf{V}$$

направлена против вектора скорости центра масс спутника \mathbf{V} . Здесь $\rho(h)$ - плотность воздуха как функция высоты; S - площадь характерного поперечного сечения (миделя) спутника; c_x - коэффициент лобового сопротивления.

Заметим, что при этом не учитываются изменения плотности атмосферы, связанные с суточными и сезонными вариациями, а также с вариациями, обусловленными периодами солнечной активности (около 11 лет). В рамках принятой модели воздействия атмосферы на спутник сила сопротивления все время лежит в плоскости орбиты, т.е. проекция возмущающего сопротивления на нормаль к плоскости орбиты равна нулю, $F_3 = 0$. Следовательно, коэффициент $\gamma = 1$ в (1).

Проекция возмущающего ускорения спутника, вызванного сопротивлением атмосферы, на оси $A\xi$ и $A\eta$ можно записать в виде

$$F_1 = -\frac{D V_r}{m V} = -\frac{S c_x}{m} \frac{1}{2} \rho(h) V V_r,$$

$$F_2 = -\frac{D V_n}{m V} = -\frac{S c_x}{m} \frac{1}{2} \rho(h) V V_n,$$

где V_r и V_n - радиальная и поперечная составляющие скорости

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + 2 \cos \vartheta), \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + 2e \cos \vartheta + e^2)^{1/2}.$$

В выражения для F_1, F_2 входят величины c_x и $\rho(h)$. Точный расчет коэффициента c_x невозможен ввиду того, что он зависит от ряда факторов, учесть которые затруднительно. Расчеты показывают, что c_x сильно зависит от угла атаки α . Для неориентированного спутника c_x целесообразно брать средним значением, постоянным для данного тела. Поэтому в дальнейшем будем считать $c_x = const$.

Зависимость плотности атмосферы от высоты $\rho(h)$ можно аппроксимировать с помощью различных формул. В ряде работ $\rho(h)$ аппроксимируется формулами вида

$$\rho(h) = \rho_1 \Delta,$$

где ρ_1 - плотность на некоторой фиксированной высоте, а Δ может определяться различными способами, например,

$$\Delta = \frac{\kappa}{\left(1 + \frac{h - h_0}{\alpha}\right)^k},$$

где κ , k , h_0 , α - постоянные. Их значения приведены в таблице

h (км)	κ	α (км)	h_0 (км)	k
100 – 150	1	55	100	8
150 – 250	5.667×10^{-3}	100	150	7
250 – 900	4.428×10^{-5}	215	250	6

Очевидно, при этом $\rho_1 = \rho(100 \text{ км})$.

Можно для Δ пользоваться и другим выражением

$$\Delta = e^{-\frac{h-h_\pi}{H}}, \quad (2)$$

где h_π - высота перигея; H - так называемая высота однородной атмосферы, определяемая формулой

$$H = \frac{RT}{Mg}.$$

Здесь R - универсальная газовая постоянная, M - молярная масса воздуха, T - абсолютная температура, g - ускорение силы тяжести. Кстати в этом случае $\rho_1 = \rho(h_\pi)$.

Эта формула выводится в рамках изотермической модели атмосферы следующим образом. Запишем условие вертикального равновесия атмосферы

$$dP = -\rho g dh, \quad (3)$$

где dP - изменение давления воздуха при изменении высоты h на величину dh , g - ускорение силы тяжести. Из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

находим плотность

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (4)$$

Подставляя в (3), получаем

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

или, после интегрирования,

$$P(h) = P_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}.$$

Как видно из (4), плотность пропорциональна давлению, поэтому имеет место

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}.$$

Если в качестве h_0 выбрать h_π , то

$$\rho(h) = \rho_\pi e^{-\frac{h-h_\pi}{H}} = \rho_1 \cdot \Delta,$$

где $\rho_1 = \rho(h_\pi)$, $\Delta = e^{-\frac{h-h_\pi}{H}}$.

Физический смысл величины H становится ясен из следующих рассуждений. Если записать уравнение состояния (4) для высоты h_0 , т.е.

$$\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT},$$

а затем представить его в виде

$$P_0 = \rho_0 \frac{RT}{M} = \rho_0 g \frac{RT}{Mg} = \rho_0 g H,$$

то становится ясно, что величина H равна высоте столба однородной атмосферы, имеющей плотность ρ_0 , который при $h = h_0$ имеет такое же давление, что и рассматриваемая изотермическая атмосфера.

В дальнейшем будем полагать, что зависимость $\rho(h) = \rho_1 \Delta$ известна. Кроме того, обозначим

$$\frac{c_x S}{m} = c = const.$$

Обратимся теперь к системе дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах. При этом, поскольку возмущающее ускорение \mathbf{D}/m направлено по касательной к орбите, воспользуемся той формой уравнений, когда вместо радиальной и трансверсальной проекций вводятся тангенциальная и нормальная. В данном случае уравнения упрощаются, т.к.

$$F_t = -\frac{D}{m} = -\frac{\rho(h)}{2m} S c_x V^2, \quad F_s = F_3 = 0.$$

Уравнение для параметра оскулирующей орбиты принимает вид

$$\frac{dp}{du} = \frac{2r^2}{V} \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_t = -c \rho_1 p^2 \Delta \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}$$

или

$$\frac{dp}{du} = -c \rho_1 \phi(p, e, \omega, u), \tag{5}$$

где

$$\phi = p^2 \Delta \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}.$$

Уравнение для эксцентриситета оскулирующей орбиты

$$\frac{de}{du} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \frac{2}{V} (e + \cos \vartheta) F_t$$

принимает вид

$$\frac{de}{du} = -c \rho_1 p \Delta \frac{(e + \cos \vartheta) \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}$$

или

$$\frac{de}{du} = -c \rho_1 \psi(p, e, \omega, u), \quad (6)$$

где

$$\psi = p \Delta \frac{(e + \cos \vartheta) \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2}.$$

Уравнение для аргумента перицентра

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \frac{2}{eV} F_t \sin \vartheta$$

приводится к виду

$$\frac{d\omega}{du} = -c \rho_1 p \Delta \sin \vartheta \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{e(1 + e \cos \vartheta)},$$

т.е.

$$\frac{d\omega}{du} = -c \rho_1 \chi(p, e, \omega, u), \quad (7)$$

где

$$\chi = p \Delta \sin \vartheta \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{e(1 + e \cos \vartheta)}.$$

Наконец, уравнения для долготы восходящего узла и наклоения оскулирующей орбиты с учетом того, что $F_3 = 0$, дают

$$\frac{d\Omega}{du} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{di}{du} = 0. \quad (9)$$

Отсюда сразу следует $\Omega = \Omega_0 = const, i = i_0 = const$. Иными словами, сопротивление атмосферы не приводит к изменению положения плоскости орбиты в пространстве.

Итак, получена система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dp}{du} &= -c\rho_1\phi(p, e, \omega, u), \\ \frac{de}{du} &= -c\rho_1\psi(p, e, \omega, u), \\ \frac{d\omega}{du} &= -c\rho_1\chi(p, e, \omega, u),\end{aligned}\tag{10}$$

аналитическое решение которой невозможно. Непосредственное же численное интегрирование этих уравнений нецелесообразно ввиду того, что из-за большого времени существования спутника расчет даже на быстродействующей ЭВМ требует больших затрат времени. Кроме того, вследствие ограниченного шага интегрирования по u и большого количества повторений циклов при численном интегрировании может накопиться значительная погрешность в определении искомых функций p, e, ω .

Для того, чтобы избежать решения этой громоздкой системы нелинейных дифференциальных уравнений, применяют метод усреднения. Для этого вычисляют средние изменения $\Delta p, \Delta e, \Delta \omega$ элементов p, e, ω за один полный оборот спутника по орбите, т.е. при изменении аргумента широты u от 0 до 2π :

$$\begin{aligned}\Delta p &= -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \phi(p, e, \omega, u) du, \\ \Delta e &= -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \psi(p, e, \omega, u) du, \\ \Delta \omega &= -c\rho_1 \int_0^{2\pi} \chi(p, e, \omega, u) du.\end{aligned}$$

Величины p, e, ω при вычислении этих интегралов считают постоянными, т.к. они за один оборот мало изменяются. Можно показать, что при таких предположениях $\Delta \omega = 0$. Это означает, что постоянно накапливающимися изменениями (вековыми возмущениями) величины ω в первом приближении допустимо пренебречь. Иначе говоря, можно считать, что $\omega = \omega_0 = const$. Вычислив при таком предположении величины Δp и Δe , мы найдем среднее изменение элементов p и e за один оборот спутника.

Напомним, что при анализе влияния касательного ускорения ранее было показано, что отрицательное F_t (касательное торможение) приводит к уменьшению большой полуоси эллиптической орбиты и, следовательно, к уменьшению энергии. Аналогично

ведет себя и параметр орбиты - он монотонно уменьшается. Что касается эксцентриситета, то он на каждом витке изменяется немонотонно, однако в среднем за виток убывает, т.е. орбита уменьшает свою эллиптичность и стремится к круговой. Величина аргумента перигея ω , которая определяет ориентацию орбиты в ее плоскости, также изменяется немонотонно, но, как уже сказано, в среднем за виток $\Delta\omega = 0$.

Рассмотрим теперь один любопытный частный результат, относящийся к влиянию атмосферы на движение космического аппарата.

9.1. Парадокс спутника

В 1957 году на околоземную орбиту был выведен первый искусственный спутник. Практически на ту же орбиту оказалась выведенной и последняя ступень ракеты-носителя. Вначале орбиты этих двух тел мало отличались друг от друга и были эллипсами малого эксцентриситета (≈ 0.05). Однако ракета-носитель значительно больше по размерам, чем спутник (но в то же время это тело сравнительно малой плотности, поскольку все горючее и окислитель уже израсходованы), и поэтому испытывала значительно большее сопротивление атмосферы и, как следствие, значительно большее возмущающее ускорение (касательное, направленное против скорости центра масс). Зададимся вопросом: какое из двух тел должно двигаться медленнее - спутник или ракета-носитель? Ответ оказался довольно неожиданным - ракета-носитель значительно опережала спутник и по количеству оборотов вокруг Земли, и по количеству пройденных километров. Рассмотрим эту задачу в максимально упрощенной постановке.

Пусть спутник P выведен на круговую орбиту вокруг Земли (A - центр Земли). Вследствие торможения атмосферой спутник начнет снижаться и по пологой спиралевидной траектории будет входить в более плотные слои атмосферы. Движение спутника происходит в плоскости, которая содержит притягивающий центр, точку A , и вектор скорости спутника V . В этой плоскости введем прямоугольную систему координат Ax с началом в центре Земли (рис. 9.1). Будем считать Ax плоскостью комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть радиус-вектор $r = AP$ в момент t образует с осью Ax угол φ ; $\angle APN = \pi/2$, $\angle NPF = \alpha$. Обозначим силу торможения спутника атмосферой D , а силу притяжения спутника Землей - W ,

$$W = |W| = f \frac{Mm}{r^2},$$

где M - масса Земли, m - масса спутника. Сила лобового сопротивления D направлена противоположно вектору V .

Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m \frac{dV}{dt} = W + D. \tag{11}$$

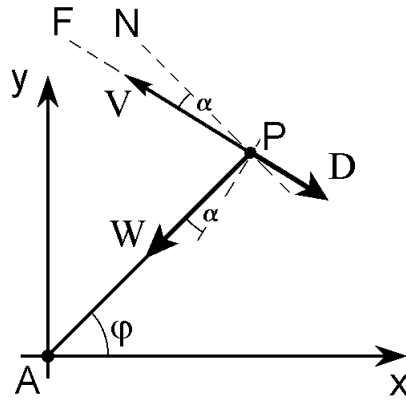


Рис. 9.1

Перепишем (11) в комплексной форме. Для этого сначала представим входящие в него векторы следующим образом:

$$\mathbf{W} = We^{i(\varphi+\pi)} = -We^{i\varphi}, \quad (12)$$

$$\mathbf{D} = De^{i(\varphi+\pi/2+\alpha-\pi)} = De^{i(\varphi+\alpha-\pi/2)}, \quad (13)$$

$$\mathbf{V} = Ve^{i(\varphi+\alpha+\pi/2)},$$

откуда, дифференцируя, получаем

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = [\dot{V} + iV(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})]e^{i(\varphi+\alpha+\pi/2)}. \quad (14)$$

Подставляя (12)-(14) в (10), получаем

$$m[\dot{V} + iV(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})]e^{i(\varphi+\alpha+\pi/2)} = -We^{i\varphi} + De^{i(\varphi+\alpha-\pi/2)}$$

или, после умножения на $e^{-i(\varphi+\alpha+\pi/2)}$,

$$m[\dot{V} + iV(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})] = -We^{-i(\alpha+\pi/2)} - D = We^{i(\pi/2-\alpha)} - D. \quad (15)$$

Принимая во внимание известное тождество

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

комплексное равенство (15) заменяем равносильной системой двух вещественных равенств

$$W \sin \alpha - D = m\dot{V}, \quad (16)$$

$$W \cos \alpha = mV(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}). \quad (17)$$

Получим также кинематические соотношения. Имеем

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(re^{i\varphi}) = (\dot{r} + ir\dot{\varphi})e^{i\varphi},$$

но с другой стороны

$$V = Ve^{i(\varphi+\alpha+\pi/2)}.$$

Отсюда

$$Ve^{i(\alpha+\pi/2)} = \dot{r} + ir\dot{\varphi}$$

или

$$-V \sin \alpha = \dot{r}, \quad V \cos \alpha = r\dot{\varphi}.$$

Тогда (17) с учетом выражений

$$\dot{\varphi} = \frac{V}{r} \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \dot{\varphi}, \quad W = f \frac{Mm}{r^2}$$

записывается в виде

$$f \frac{Mm}{r^2} \cos \alpha = \frac{mV^2 \cos \alpha}{r} \left(1 + \frac{d\alpha}{dt} \right). \quad (18)$$

Пока сопротивление атмосферы не очень велико, можно считать, что при вращении спутника вокруг Земли угол снижения α меняется достаточно медленно, т.е. допустимо пренебречь величиной $d\alpha/d\varphi$ по сравнению с единицей. Тогда из (18) следует приближенное равенство

$$V^2 = f \frac{M}{r}.$$

Используя полученное соотношение и кинематическую связь $-V \sin \alpha = \dot{r}$, можно написать

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= m \frac{dV}{dr} \dot{r} = m \frac{dV}{dr} (-V \sin \alpha) = -\frac{m}{2} \sin \alpha \frac{d}{dr} V^2 = \\ &= -\frac{m}{2} \sin \alpha \frac{d}{dr} \left(f \frac{M}{r} \right) = \frac{m}{2} \sin \alpha f \frac{M}{r^2} = \frac{W}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Теперь из (16) следует

$$\frac{W}{2} \sin \alpha = W \sin \alpha - D$$

или

$$\sin \alpha = 2 \frac{D}{W}.$$

Упростим полученную формулу. Вес спутника определяется следующим образом:

$$P = f \frac{Mm}{R^2}.$$

Здесь R - радиус Земли. Если спутник движется на небольшой высоте (порядка 200-400 км), то можно приближенно положить $r/R \sim 1$ (погрешность не превзойдет 12%), и поэтому W допустимо считать равным весу спутника. Угол снижения спутника α будет мал (если не рассматривать последние витки непосредственно перед падением спутника

на Землю), так что допустимо считать $\sin \alpha = \alpha$ (α в радианах). Таким образом, получаем формулу

$$\alpha = 2 \frac{D}{W},$$

полезную при проведении приближенных оценок. Иными словами, оказалось, что измеренный в радианах угол снижения α спутника, движущегося по почти круговой орбите, примерно вдвое больше отношения атмосферного торможения спутника к его весу.

Из соотношений

$$W \sin \alpha - D = m \dot{V}, \quad \frac{W}{2} \sin \alpha = D$$

видно, что

$$m \dot{V} = D.$$

Эта формула и выражает "парадокс спутника". Вследствие торможения атмосферой линейная скорость спутника, движущегося по орбите, близкой к круговой, возрастает; ускорение в направлении движения оказывается таким же, каким оно было бы, если бы сила лобового сопротивления изменила свое направление на противоположное и не тормозила спутник, а наоборот толкала бы его вперед.

Отсюда, в частности, следует, что из двух спутников, выведенных на одну и ту же орбиту, быстрее будет двигаться тот, который испытывает большее торможение. Ракета-носитель из-за более сильного сопротивления атмосферы снижается быстрее, поэтому быстрее растет и ее линейная скорость.

9.2. *Время жизни спутника*

На продолжительность жизни спутника оказывают влияние многие факторы. К ним относится не только сопротивление верхних слоев атмосферы, а также сплюснутость Земли, вращение атмосферы, давление солнечных лучей, притяжение Луны и Солнца. Так, например, возмущающее действие Луны и Солнца вызывает периодические колебания высоты перигея орбиты спутника. А поскольку при опускании перигея в более плотные слои атмосферы торможение возрастает, это приводит к сокращению времени жизни. Проиллюстрируем данный эффект на примере американского спутника Эксплорер-6. Под влиянием Луны высота перигея каждые три месяца изменялась от 250 до 160 км; в результате спутник оставался на орбите всего около двух лет вместо 20 лет, которые он просуществовал бы, если бы не было воздействия Луны.

Сплюснутость Земли приводит к изменению положения перигея в пространстве. В результате перигей может сместиться из полярной области в экваториальную, высота над поверхностью Земли уменьшится и плотность атмосферы увеличится.

Рассмотрим один приближенный и достаточно простой метод прогноза времени жизни спутника, если известны данные о его орбите в первые дни полета. Точность прогноза по этому методу в зависимости от типа орбиты может составлять 10-20%.

Будем считать, что Земля имеет сферическую форму, плотность атмосферы определяется барометрической формулой

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H},$$

орбита эллиптическая с небольшим эксцентриситетом $0.02 < e < 0.2$.

Ранее были получены уравнения для оскулирующих элементов орбиты (параметра и эксцентриситета) при учете сопротивления атмосферы

$$\frac{dp}{du} = -\delta \rho p^2 \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2},$$

$$\frac{de}{du} = -\delta \rho p \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} (e + \cos \vartheta),$$

где $\delta = c_x S / m$. Воспользовавшись соотношением

$$\frac{dp}{du} = \frac{dp}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{du} = \frac{dp}{d\vartheta} \frac{d\vartheta/dt}{du/dt},$$

перейдем к дифференцированию по истинной аномалии. Напомним, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{eV} \left[2F_t \sin \vartheta + F_s \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \right] - F_3 \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u \cdot \operatorname{ctg} i,$$

поэтому в случае действия касательного ускорения

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{d\omega}{dt} = \frac{du}{dt} - F_t \frac{2 \sin \vartheta}{eV} = \frac{du}{dt} \left(1 - F_t \frac{r^2}{e\mu} \frac{2 \sin \vartheta}{\sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}} \right).$$

Будем считать, что

$$F_t \ll e \frac{\mu}{r^2} = eg,$$

тогда второй член в скобках много меньше единицы и приближенно можно положить $d\vartheta/dt = du/dt$. Таким образом, $dp/d\vartheta \approx dp/du$. Аналогично можно показать, что $de/d\vartheta \approx de/du$.

Воспользовавшись соотношениями

$$r_{\pi} = \frac{p}{1+e}, \quad r_{\alpha} = \frac{p}{1-e},$$

получим формулы для $dr_{\pi}/d\vartheta$ и $dr_{\alpha}/d\vartheta$. Имеем

$$\frac{dr_{\pi}}{d\vartheta} = \frac{1}{1+e} \frac{dp}{d\vartheta} - \frac{p}{(1+e)^2} \frac{de}{d\vartheta} = r_{\pi}^2 \left(\frac{1+e}{p^2} \frac{dp}{d\vartheta} - \frac{1}{p} \frac{de}{d\vartheta} \right),$$

$$\frac{dr_{\alpha}}{d\vartheta} = \frac{1}{1-e} \frac{dp}{d\vartheta} + \frac{p}{(1-e)^2} \frac{de}{d\vartheta} = r_{\alpha}^2 \left(\frac{1-e}{p^2} \frac{dp}{d\vartheta} + \frac{1}{p} \frac{de}{d\vartheta} \right).$$

Подставляя выражения для $dp/d\vartheta$ и $de/d\vartheta$, находим

$$\frac{dr_{\pi}}{d\vartheta} = -r_{\pi}^2 \delta \rho \frac{\sqrt{1+2e \cos \vartheta + e^2}}{(1+e \cos \vartheta)^2} (1 - \cos \vartheta),$$

$$\frac{dr_{\alpha}}{d\vartheta} = -r_{\alpha}^2 \delta \rho \frac{\sqrt{1+2e \cos \vartheta + e^2}}{(1+e \cos \vartheta)^2} (1 + \cos \vartheta).$$

Теперь воспользуемся малостью эксцентриситета и заменим уравнение орбиты

$$r = \frac{p}{1+e \cos \vartheta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta}$$

приближенным соотношением

$$r \approx a(1 - e \cos \vartheta) = a - ae + ae - ae \cos \vartheta = r_{\pi} + ae(1 - \cos \vartheta)$$

или, вводя высоту над поверхностью Земли $h = r - R$ (соответственно $h_{\pi} = r_{\pi} - R$,

$$h_{\alpha} = r_{\alpha} - R),$$

$$h = h_{\pi} + c(1 - \cos \vartheta).$$

Здесь $c = ae$ - линейный эксцентриситет эллипса. Заметим, что $2c = r_{\alpha} - r_{\pi} = h_{\alpha} - h_{\pi}$,

откуда, в частности, можно выразить

$$\frac{dc}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr_{\alpha}}{d\vartheta} - \frac{dr_{\pi}}{d\vartheta} \right).$$

Теперь оценим изменение величин r_{π} и c за один оборот спутника по орбите,

например, при изменении ϑ от $-\pi$ до π . Имеем

$$\Delta r_{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dr_{\pi}}{d\vartheta} d\vartheta, \quad \Delta c = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dc}{d\vartheta} d\vartheta.$$

Обратимся сначала к изменению за один оборот перицентрического расстояния r_{π} в случае малого эксцентриситета. Раскладываем подынтегральную функцию в ряд по степеням эксцентриситета и оставляем только члены нулевого порядка малости. Тогда получаем

$$\Delta r_{\pi} = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho(1 - \cos \vartheta) d\vartheta,$$

где $A = r_{\pi}^2 \delta = r_{\pi}^2 c_x S / m$ - положительная постоянная.

Для приближенного вычисления интеграла воспользуемся тем, что хотя эксцентриситет и мал, но орбита некруговая. Поэтому сопротивление атмосферы оказывает свое влияние на движение спутника в основном в районе перигея, где высота минимальна и плотность атмосферы больше, чем на остальных участках орбиты. Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(1 - \cos \vartheta) d\vartheta \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(1 - \cos \vartheta) d\vartheta = \rho_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{h}{H}} (1 - \cos \vartheta) d\vartheta,$$

где α мало. Более того, при $\vartheta \in [-\alpha, \alpha]$ имеют место приближенные соотношения

$$\cos \vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2},$$

$$h = h_{\pi} + c(1 - \cos \vartheta) \approx h_{\pi} + c \frac{\vartheta^2}{2}.$$

Таким образом, обозначая $z = h_{\pi} / H$, получаем

$$\Delta r_{\pi} = -\frac{1}{2} A \rho_0 e^{-z} \int_{-\alpha}^{\alpha} \vartheta^2 e^{-\frac{c\vartheta^2}{2H}} d\vartheta.$$

Обратим внимание, что подынтегральная функция очень быстро убывает с ростом ϑ . Это свойство делает возможным, не совершая большой ошибки, вместо интегрирования от $-\alpha$ до α перейти к интегрированию от $-\infty$ до $+\infty$, т.е.

$$\Delta r_{\pi} \approx -\frac{1}{2} A \rho_0 e^{-z} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta^2 e^{-\frac{c\vartheta^2}{2H}} d\vartheta = -A \rho_0 e^{-z} \int_0^{\infty} \vartheta^2 e^{-\frac{c\vartheta^2}{2H}} d\vartheta.$$

Обозначая $x = \vartheta \sqrt{c/2H}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \vartheta^2 e^{-\frac{c\vartheta^2}{2H}} d\vartheta &= (2H/c)^{3/2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} (2H/c)^{3/2} \int_0^{\infty} x d(e^{-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} (2H/c)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

В последнее выражение входит известный интеграл Эйлера-Пуассона⁵

⁵ Также гауссов интеграл – интеграл от функции Гаусса.

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Покажем, как он вычисляется. Выполняя подстановку $x = uy$ ($u > 0$), получаем

$$J = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 y^2} dy.$$

Теперь умножим обе части равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем по u от 0 до ∞ :

$$J \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^{\infty} u e^{-u^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2 y^2} dy \right) du.$$

Изменяя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2(y^2+1)} u du \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2(y^2+1)} d[u^2(y^2+1)] \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy. \end{aligned}$$

Далее делаем подстановку $y = \operatorname{tg} \varphi$ и окончательно получаем

$$J^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

откуда $J = \sqrt{\pi}/2$.

Итак,

$$\Delta r_{\pi} = \Delta h_{\pi} = H \Delta z = -A \rho_0 e^{-z} \left(\sqrt{\pi}/4 \right) (2H/c)^{3/2},$$

откуда

$$\Delta z = -A \rho_0 e^{-z} \frac{1}{2c} \sqrt{2\pi H/c}.$$

Аналогично оценим изменение величины c за один оборот спутника по орбите

$$\Delta c = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dc}{d\vartheta} d\vartheta.$$

Поскольку $2c = r_{\alpha} - r_{\pi} = h_{\alpha} - h_{\pi}$, имеем

$$\frac{dc}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr_{\alpha}}{d\vartheta} - \frac{dr_{\pi}}{d\vartheta} \right)$$

и, подставляя выражения для $\frac{dr_\alpha}{d\vartheta}$ и $\frac{dr_\pi}{d\vartheta}$, находим

$$\begin{aligned}\frac{dc}{d\vartheta} &= -\frac{1}{2}\delta\rho\frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}\left[r_\alpha^2(1+\cos\vartheta)-r_\pi^2(1-\cos\vartheta)\right]= \\ &= -\frac{1}{2}r_\pi^2\delta\rho\frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2(1+\cos\vartheta)-(1-\cos\vartheta)\right]= \\ &= -r_\pi^2\delta\rho\frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}\left[\cos\vartheta+\frac{2e}{(1-e)^2}(1+\cos\vartheta)\right].\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\Delta c = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho \frac{\sqrt{1+2e\cos\vartheta+e^2}}{(1+e\cos\vartheta)^2} \left[\cos\vartheta + \frac{2e}{(1-e)^2}(1+\cos\vartheta) \right] d\vartheta.$$

Снова раскладываем подынтегральную функцию в ряд по степеням малого эксцентриситета и оставляем только члены нулевого порядка малости. Тогда

$$\Delta c = -A \int_{-\pi}^{\pi} \rho \cos\vartheta d\vartheta \approx -A \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \cos\vartheta d\vartheta = -A\rho_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{h}{H}} \cos\vartheta d\vartheta$$

и, учитывая, что

$$\cos\vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}, \quad \frac{h}{H} \approx z + \frac{c\vartheta^2}{2H},$$

$$\begin{aligned}\Delta c &= -A\rho_0 e^{-z} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{c\vartheta^2}{2H}} d\vartheta \approx -2A\rho_0 e^{-z} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{c\vartheta^2}{2H}} d\vartheta = -2A\rho_0 e^{-z} \sqrt{2H/c} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \\ &= -A\rho_0 e^{-z} \sqrt{2\pi H/c}.\end{aligned}$$

Введем средние скорости изменения z и c за виток

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\Delta z}{T}, \quad \frac{dc}{dt} = \frac{\Delta c}{T},$$

т.е. за время, равное периоду орбиты

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}.$$

Тогда получаем

$$\frac{dz}{dt} = -C_2 e^{-z} c^{-3/2},$$

$$\frac{dc}{dt} = -2C_2 e^{-z} c^{-1/2}.$$
(19)

Здесь введено обозначение

$$C_2 = \frac{A\rho_0}{2T} \sqrt{2\pi H} > 0$$

Разделив второе уравнение (19) на первое, получаем

$$\frac{dc}{dz} = 2c,$$

откуда

$$c = C_3 e^{2z}, \quad e^{-z} = \sqrt{C_3/c}$$

и после подстановки во второе уравнение (19)

$$c \frac{dc}{dt} = -2C_2 \sqrt{C_3} = -C_4.$$
(20)

Интегрируя, получаем

$$c^2 = -2C_4 t + C_5.$$

Удобно константу интегрирования C_5 представить в виде $C_5 = 2C_4 t_K$. Тогда

$$c^2 = 2C_4 (t_K - t)$$
(21)

Отсюда видно, что при $t \rightarrow t_K$ $c \rightarrow 0$, т.е. орбита становится круговой.

Для реальных спутников, орбиты которых имеют перигей на высоте порядка 200-300 км и эксцентриситет $e > 0.02$, как показывают численные исследования, момент t_K с точностью до одних-двух суток совпадает с моментом прекращения существования спутника.

Определим t_K . Имеем

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mu}$$

или, после дифференцирования,

$$2T \frac{dT}{dt} = 12\pi^2 \frac{a^2}{\mu} \frac{da}{dt}$$

откуда, разделив левую часть на $3T^2$, а правую часть на $3T^2 = 12\pi^2 a^3/\mu$, получаем

$$\frac{2}{3} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}.$$

Заметим, что в рамках приближенного рассмотрения в последнем равенстве допустимо da/dt заменить на dc/dt . В самом деле, поскольку в течении одного оборота спутника снижение перигея во много раз меньше снижения апогея, вполне можно принять $\Delta r_\pi \approx 0$ и, следовательно,

$$2\Delta a = \Delta(r_\alpha + r_\pi) \approx \Delta r_\alpha, \quad 2\Delta c = \Delta(r_\alpha - r_\pi) \approx \Delta r_\alpha,$$

т.е. $\Delta a/T = \Delta c/T$ или $da/dt = dc/dt$. Таким образом,

$$\frac{da}{dt} = \frac{dc}{dt} = \frac{2}{3} \frac{a}{T} \frac{dT}{dt}.$$

Наконец, принимая во внимание полученные ранее соотношения

$$c \frac{dc}{dt} = -C_4, \quad c^2 = 2C_4(t_K - t),$$

имеем

$$t_K - t = \frac{c^2}{2C_4} = -\frac{c}{2dc/dt} = \frac{3}{4} \frac{c}{a} \frac{T}{(-dT/dt)}$$

или, учитывая соотношение $2c = r_\alpha - r_\pi = h_\alpha - h_\pi$, получаем окончательную формулу

$$t_K - t = \frac{3}{8} \frac{h_\alpha - h_\pi}{a} \frac{T}{(-dT/dt)}, \quad (22)$$

позволяющую оценить оставшееся время существования спутника, если известны текущие параметры орбиты и скорость уменьшения периода. Для орбит

$$0.02 < e < 0.2, \quad 180 < h_\pi < 400 \text{ (км)}$$

формула (21) дает ответ с погрешностью 10%.

Литература

Основная:

1. Мирер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. – М.: Резолит, 2007.
2. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
3. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. - М.: Наука, 1965.
4. Балк М.Б., Демин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1972. (<http://en.bookfi.org/book/725312>)
5. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. Учебное пособие для ВУЗов. – 2-е изд., М.: Дрофа, 2004.

Дополнительная:

6. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. - М.: Наука, 1990.
7. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. – М.: Наука, 1987.
8. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1972.
9. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. - М.: Наука, 1965.
10. Battin R.H. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. AIAA Inc. Publ., 1999.