

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. КЕЛДЫША РАН

*На правах рукописи*

Иванов Данил Сергеевич

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ  
МИКРОСПУТНИКА НА ЛАБОРАТОРНОМ СТЕНДЕ  
И В ОРБИТАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
профессор, д.ф.-м.н.  
М.Ю.Овчинников

Москва – 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ .....	11
1.1. Задача фильтрации .....	11
1.2. Оценка точности работы фильтра Калмана в стационарном случае ..	16
1.3. Исследование влияния неучтенных возмущений на точность оценок фильтра Калмана .....	21
1.4. Заключение к главе 1 .....	24
2. АНАЛИЗ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАКЕТА СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ .....	26
2.1. Постановка задачи .....	26
2.2. Уравнения движения макета системы ориентации .....	28
2.3. Исследование алгоритма определения движения макета .....	31
2.4. Лабораторные испытания алгоритма определения движения макета.	46
2.5. Заключение к главе 2 .....	57
3. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОСПУТНИКА "ЧИБИС-М" .....	58
3.1. Микроспутник "Чибис-М". Постановка задачи .....	58
3.2. Модель движения микроспутника .....	62
3.3. Модель измерений .....	69
3.4. Исследование алгоритма определения движения микроспутника .....	70
3.5. Заключение к главе 3 .....	81
4. ЛАБОРАТОРНЫЕ И ЛЕТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОСПУТНИКА "ЧИБИС-М" .....	82
4.1. Испытания алгоритма на лабораторном стенде .....	82
4.2. Летные испытания алгоритма стабилизации .....	90
4.3. Заключение к главе 4 .....	101

ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	102
БЛАГОДАРНОСТИ.....	103
ЛИТЕРАТУРА .....	103
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СТЕНД ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ МИКРОСПУТНИКА "ЧИБИС-М" .....	111
ПРИЛОЖЕНИЕ II. АНАЛИЗ ВОЗМУЩЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА МАКЕТ, И ОЦЕНКИ ИСТОЧНИКИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ .....	117
II.1. Источники погрешностей измерений и их оценки .....	117
II.1.1. Источники погрешностей измерения магнитного поля .....	118
II.1.2. Источники погрешностей измерения направления на Солнце .	120
II.2. Оценка возмущений, действующих на макет.....	123
II.2.1. Момент от силы вязкости, действующий на подшипник .....	123
II.2.2. Неидеальность поверхностей чаши и подшипника .....	125
II.2.3. Взаимодействие макета с окружающим воздухом .....	126
II.2.4. Возмущения от магнитного поля.....	128
II.2.5. Влияние давления света.....	128
II.2.6. Влияние вращения Земли .....	129
II.2.7. Моменты со стороны макета.....	130

## ВВЕДЕНИЕ

Использование малогабаритных спутников позволяет удешевить стоимость миссии и сократить срок её разработки, но сопряжено с трудностями, обусловленными серьезными ограничениями по энергетике и по вычислительным ресурсам на борту аппаратов. Эти ограничения касаются и системы управления ориентацией. В табл. 1 приведены основные особенности микроспутников и возникающие при этом требования и ограничения, накладываемые на систему ориентации; в качестве примера приведены параметры микроспутника "Чибис-М". Активное управление ориентацией микроспутников требует определения движения аппарата относительно центра масс в режиме реального времени. Рекурсивные алгоритмы оценивания параметров движения по типу фильтра Калмана [1; 2] позволяют на основе измерений датчиков ориентации и модели движения микроспутника получить наилучшую по среднеквадратичному критерию оценку вектора состояния аппарата относительно центра масс. Однако ограничения по вычислительным ресурсам на борту микроспутника не позволяют учесть в модели движения множество возмущений, действующих как со стороны внешней среды, так и вызванные неидеальностью управляющих ориентацией актюаторов. Кроме того, измерения датчиков ориентации вследствие неучтенных факторов могут несколько отличаться от модели измерений, используемой алгоритмом определения. Все это приводит к ухудшению точности определения углового движения микроспутника относительно центра масс, а следовательно, и к ухудшению точности управления ориентацией. Поэтому возникает необходимость исследования влияния неучтенных в модели движения возмущений и факторов на точность определения движения. Малые размеры микроспутников позволяют провести лабораторные испытания всей системы ориентации в целом, успешное проведение которых позволяет с большей степенью уверенности надеяться на успешную работу в орбитальном полете.

Табл.1. Основные особенности микроспутников и требования к системе определения углового движения

Особенность	Пример: "Чибис-М"	Требования и ограничения
Малая энерго-вооруженность	50Вт. Система ориент. 12Вт	Датчики невысокой точности (как правило), маломощный бортовой компьютер
Маломощный бортовой компьютер	Тактовая частота: 60МГц	Ограниченный по вычислительной сложности алгоритм определения движения
Малый объем памяти бортового компьютера	64Кб	Хранение небольшого объема данных
Активное управление ориентацией	Частота определения: 0.2 Гц. Точность определения: 0.1 град, 0.01 град/с	Оценка фазового состояния спутника в режиме реального времени, требуется достаточно высокая точность определения углового движения.

Фильтр Калмана, несмотря на ограничения по бортовым вычислительным мощностям, широко используется на малогабаритных космических аппаратах. В качестве примера можно привести португальский микроспутник PoSAT-1 [3]: фильтр строится на измерениях солнечного датчика, звездного датчика и магнитометра. В работах [4], [5] рассматривается алгоритм определения движения, основанный только на измерениях звездного датчика. Для немецкой миссии ABRIXAS был разработан фильтр Калмана, основанный на данных солнечного датчика и магнитометра [6]. Некоторые миссии используют фильтр, основанный только на измерениях магнитометра [7]. В работах [8; 9] также магнитометр рассматривается как единственный источник измерений для определения движения относительно центра масс. Существуют также системы, которые на-

ряду с позиционными датчиками используют измерения датчика угловой скорости для получения оценки параметров ориентации [10],[11], [12], [13], [14], [15]. Алгоритмы на основе векторных измерений, оценивающие ориентацию в углах Эйлера, представлены в работе [16], а в работе [17] рассматриваются алгоритмы, позволяющие оценить ориентацию в кватернионах. Обзор различных способов представления ориентации космических аппаратов сделан в работе [18]. Однако наибольшее распространение для описания движения получили кватернионы по причине их невырождаемости, минимальной размерности и линейности кинематических уравнений [19].

Несмотря на большую популярность рекурсивной фильтрации как метода оценки параметров ориентации в режиме реального времени, существует ряд проблем при его использовании. Выбор матриц ошибок измерений и ошибок модели движения, который называется часто как "настройка фильтра", является основной проблемой использования фильтра Калмана. Эти матрицы имеют значительное влияние на качество работы фильтра: точность оценок вектора состояния и время сходимости. Gelb в работе [20] показал, что чувствительность точности фильтра Калмана в стационарном случае для скалярной величины сильно зависит от выбора матриц ошибок измерений и модели движения, что демонстрирует эффект настройки фильтра. При некоторых значениях дисперсии шумов, отличных от реально действующих в системе, точность оценок движения была выше, чем при истинных значениях.

На практике настройка фильтра – это некоторый специальный процесс поиска матриц шумов для достижения желаемых характеристик работы фильтра Калмана, часто основанный на методе проб и ошибок. Однако существует ряд автоматизированных методик настройки фильтра. Маубек и другие [21], [22] предложили метод настройки фильтра Калмана с помощью техники численной минимизации. В качестве функционала выбиралась сумма квадратов разностей оценок от вектора состояния и его реальной величиной, известной при математическом моделировании, в качестве параметров рассматривались

элементы матриц ошибок. Далее с помощью моделирования работы фильтра Калмана проводилась процедура численной минимизации функционала. В работе [23], например, минимизация функционала проводилась симплекс-методом.

Другой подход настройки фильтра заключается в применении метода Монте-Карло, который основан на множественном моделировании работы фильтра при случайно выбираемых значениях матриц ошибок и начальных условий. Oshman и другие [24] используют этот метод для статистического анализа точности оценок фильтра и демонстрации его устойчивости по отношению к заданию начальных условий.

Oshman также использовал генетические алгоритмы для настройки фильтра Калмана [25]. Суть генетических алгоритмов заключается в случайном изменении вектора параметров ("мутации"), которое может привести либо к ухудшению, либо к улучшению точности оценок фильтра Калмана. После нескольких "мутаций" выбирается вектор параметров, который привел к наилучшей точности, и на следующей стадии "мутации" подвергается уже этот вектор параметров. Так "эволюция" продолжается до тех пор, пока на некотором "поколении" все "мутации" не приведут к улучшению точности оценок фильтра. Главной особенностью генетических алгоритмов является то, что с их помощью возможно найти только локальные минимумы функционала, и поэтому они плохо подходят для задачи настройки фильтров.

Все вышеперечисленные методы численной настройки фильтра требуют больших вычислительных мощностей, так как основаны на множественном моделировании работы фильтра. Так как при моделировании работы фильтра используются случайные шумы системы и измерений, то и результат методов настройки будет некоторой случайной величиной, математическое ожидание и дисперсию которой также необходимо определить. Для оценки влияния неучтенных в модели движения возмущений на точность фильтра моделирование

работы фильтра проводится с учетом этих возмущений на исходное "идеальное" движение.

Другой метод исследования точности оценок движения может быть использован для стационарного движения. Этот метод не требует моделирования работы фильтра Калмана и является аналитическим. В работах [26], [27] показано, что для стационарной системы матрица ошибок фильтра после сходимости может быть получена из квадратного матричного уравнения. Для оценки одноосного движения это уравнение решается в конечных формулах [28; 29]. Для более общего случая квадратное матричное уравнение может быть решено только численно. Тем не менее рассматриваемый аналитический метод не позволяет получить оценку влияния неучтенных в модели движения возмущений на точность фильтра.

В настоящей диссертационной работе разработан и предложен аналитический метод настройки фильтра, который может быть применен для квазистационарного движения. Метод основан на вычислении ковариационной матрицы после сходимости, после чего оценивается влияние неучтенных в модели движения возмущений на точность определения движения. Преимущество этого метода заключается в том, что он не требует моделирования работы фильтра Калмана, оценка качества работы производится на момент стабилизации системы, и таким образом можно узнать, как будет работать фильтр после сходимости. Сравнительная таблица основных свойств методов исследования точности оценок фильтра Калмана приведена в табл. 2.



Табл. 2 Свойства методов для оценки точности фильтра Калмана

<b>Метод</b>	<b>Метод Монте-Карло, численная минимизация</b>	<b>Генетические алгоритмы</b>	<b>Решение матричного уравнения для стац. случая</b>	<b>Разработанный в диссертации метод</b>
Влияние неучтенных возмущений	+	+	–	+
Вычислительная простота	–	–	+	+
Нестационарность движения	+	+	–	+
Достоверность результатов исследования	+	–	+	+

Работа состоит из четырех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Во введении обосновывается актуальность темы, дается краткий обзор и краткое содержание диссертации.

В первой главе приводится краткое описание моделей и допущений, используемых для построения алгоритмов, приводится описание разработанного метода настройки рекурсивного алгоритма определения углового движения, основанного на вычислении ковариационной матрицы ошибок в стационарном состоянии.

Во второй главе настоящей работы для верификации разработанной методики определения углового движения микроспутника исследуется алгоритм определения движения тела, подвешенного на струне, основанный на измерениях датчика угловой скорости и прототипа солнечного датчика. Рассматрива-

ется влияние неучтенного в модели движения возмущения от упругости струны и неучтенного в модели измерений смещения нуля датчика угловой скорости. Приводятся результаты полунатурных испытаний на макете системы ориентации, которые демонстрируют удовлетворительное соответствие точности определения движения с полученными теоретическими значениями.

В третьей главе рассматривается алгоритм определения движения относительно центра масс микроспутника "Чибис-М". В состав датчиков определения движения входят магнитометр и набор солнечных датчиков. Исследуется влияние неучтенных в модели движения возмущений на точность определения углового движения и на время сходимости алгоритма, а также зависимость точности определения углового движения от угла между направлением на Солнце и вектором локального геомагнитного поля.

В четвертой главе представлены результаты полунатурных испытаний алгоритма определения движения на стенде, в состав которого входит имитатор геомагнитного поля, имитатор Солнца и макет системы ориентации микроспутника "Чибис-М" на аэродинамическом подвесе. Проводится также анализ результатов летных испытаний алгоритма определения вращательного движения микроспутника.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в диссертации.

В первом приложении приведено описание лабораторного стенда, на котором проводилась лабораторная верификация методики исследования алгоритмов определения ориентации, и в разработке и создании которого принимал непосредственное участие автор. Во втором приложении приведен анализ действующих на макет системы ориентации возмущений и оценка источников ошибок измерений датчиков определения движения на лабораторном стенде.

# 1. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В настоящей главе приводится описание разработанного метода для оценки точности определения движения микроспутника. Описаны основы рекурсивной фильтрации, рассматривается постановка задачи оценивания влияния неучтенных в модели движения возмущений на точность рекурсивных алгоритмов по типу фильтра Калмана. Разработанный метод используется в дальнейшем для определения движения тела, подвешенного на струне и определения движения макета системы ориентации микроспутника "Чибис-М".

## 1.1. Задача фильтрации

Фильтр Калмана – последовательный рекурсивный алгоритм, использующий принятую модель динамической системы и измерения датчиков для получения оценки вектора состояния системы. Этот алгоритм находит применение в процессе управления многими сложными динамическими системами, например, непрерывными производственными процессами, самолетами, кораблями и космическими аппаратами. При управлении некоторыми динамическими системами необходимо полностью знать ее фазовое состояние в каждый момент времени. Но прямое измерение всех переменных, которыми необходимо управлять, не всегда возможно. В этих случаях фильтр Калмана является тем средством, которое позволяет восстановить недостающую информацию посредством имеющихся зашумленных и в общем случае косвенных измерений [30].

В постановке задачи оценивания рассматривается линейная непрерывная система, которая описывается векторным уравнением [31]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – вектор состояния,  $F(t)$  – матрица динамики системы,  $\mathbf{w}(t)$  – вектор шумов системы, который определяет неточность знания реальной модели системы или иногда характеризует шумы датчиков (например, для систем безплатформенной инерциальной навигации). Измерения датчиков определяется вектором  $\mathbf{z}(t)$ , который линейно зависит от вектора состояния и зашумлен вектором ошибок измерений  $\mathbf{v}(t)$ .

$$\mathbf{z}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (1.2)$$

где  $H(t)$  – матрица чувствительности.

Задача оценивания в режиме реального времени состоит в следующем. Располагая данными измерений  $\mathbf{z}(t)$  на момент времени  $t$ , модель которых соответствует (1.2), и имея оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  на некоторый момент времени  $t_0$  ( $t_0 < t$ ) определить наилучшую оценку  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , удовлетворяющую определенному критерию. Необходимым условием оценивания вектора  $\mathbf{x}$  является его наблюдаемость [32].

Предполагается, что известны статистические характеристики шумов системы  $\mathbf{w}(t)$ , шумов измерений  $\mathbf{v}(t)$ , вектора  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ . Как правило, используется следующая модель [33]:

- $\mathbf{w}(t)$  – векторный случайных гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием  $M[\mathbf{w}(t)] = 0$  и ковариационной матрицей вида

$$\text{cov}[\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(\tau)] = M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(\tau)^T] = \delta(t - \tau)Q(t),$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $Q(t)$  – симметрическая, неотрицательно определенная матрица.

- $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  – гауссова векторная случайная величина, не зависящая от  $\mathbf{w}(t)$  с известным средним значением  $M[\hat{\mathbf{x}}(t_0)] = \mathbf{x}_0$  и известной ковариационной матрицей

$$\text{cov}[\hat{\mathbf{x}}(t_0), \hat{\mathbf{x}}(t_0)] = M[(\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}_0)^T] = P_0.$$

- $\mathbf{v}(t)$  – белый гауссов шум с нулевым математическим ожиданием  $M[\mathbf{v}(t)] = 0$  и ковариационной матрицей

$$\text{cov}[\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(\tau)] = M[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}(\tau)^T] = \delta(t - \tau)R(t),$$

где  $R(t)$  – симметрическая, неотрицательно определенная матрица.

Кроме того, предполагается, что  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  и  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$  – некоррелированы. Если эти предположения выполняются, то применяются методы статистического оценивания, в которых оценка должна быть несмещенной ( $M[\hat{\mathbf{x}}] = M[\mathbf{x}]$ ) и минимизируется дисперсия ошибки оценки. В линейных фильтрах, получивших наибольшее распространение, оценка формируется на основе уравнения [34]

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = F(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + K(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t)],$$

где  $K(t)$  – весовая матрица. Такие фильтры называются фильтрами калмановского типа.

Заметим, что возможны различного рода усложнения моделей шумов, рассмотренных выше и, как следствие, различные модификации фильтра Калмана. В настоящей работе рассматривается классическая постановка задачи оценивания, описанная выше.

Предположим, что уравнения оцениваемой системы и уравнения измерений системы удовлетворяют (1.1) и (1.2). Рассмотрим следующий функционал ошибки оценивания:

$$J = P(t) = M[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t)],$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ . Фильтр Калмана вычисляет такую оценку вектора  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ , которая обеспечивает минимум среднеквадратичного отклонения ошибки оценивания, то есть

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \arg \min(\text{tr } P(t)).$$

Уравнения для непрерывного фильтра Калмана имеют вид [27]:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = F(t)\hat{\mathbf{x}} + K(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t)],$$

$$K = PH^T R^{-1}, \quad (1.3)$$

$$\dot{P} = FP + PF^T - PH^T R^{-1} HP + Q.$$

В случае, если измерения поступают дискретно в некоторые моменты времени  $t_k$ , то и оценку вектора состояния можно сделать только для этих моментов времени  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(t_k)$ . Дискретный фильтр Калмана работает по системе прогноз-коррекция (рис.1.1) [35], [36]. Пусть на некотором шаге  $k-1$  известна оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  и ковариационная матрица ошибки  $P_{k-1}^+$ . Требуется найти оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Для этого на этапе прогноза путем интегрирования модели движения (1.1) вычисляется априорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , а на этапе коррекции с помощью обработки вектора измерений  $\mathbf{z}_k$  вычисляется апостериорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Ковариационная матрица ошибок вектора состояния  $P_k^-$  прогнозируется с помощью дискретного уравнения Риккати, и после получения измерения вычисляется апостериорная матрица  $P_k^+$ .

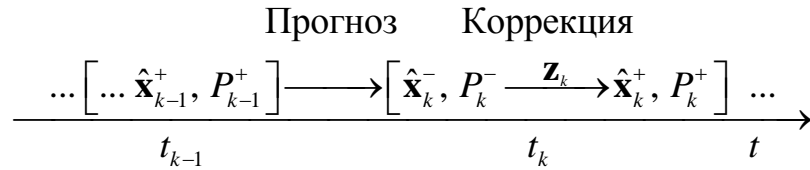


Рис. 1.1. Принцип работы фильтра Калмана

Уравнения для дискретного фильтра Калмана следующий вид [27]:

Этап прогноза:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \\ P_k^- &= \Phi_k P_{k-1}^+ \Phi_k^T + Q_k. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k [\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k^-], \\ P_k^+ &= [E - K_k H_k] P_k^-. \end{aligned}$$

где  $E$  – единичная матрица, матрица  $\Phi_k$  – это переходная матрица от состояния  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  в состояние  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , которая может быть вычислена с помощью разложения в ряд следующим образом:

$$\Phi_k = E + F_k(t_k - t_{k-1}) + F_k^2(t_k - t_{k-1})^2 / 2 + \dots$$

Фильтр Калмана может быть построен и в случае, если уравнение движения и уравнение измерений являются нелинейными функциями от времени и вектора состояния:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(t), \quad (1.5)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t). \quad (1.6)$$

Для построения фильтра функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  представляются в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности оценки текущего вектора состояния [32], [37]. После этого удерживаются только линейные члены разложения. Матрица динамики системы и матрица модели измерений вычисляются следующим образом:

$$H_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}, \quad F_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}. \quad (1.7)$$

Уравнения расширенного фильтра Калмана для дискретно поступающих измерений аналогичны уравнениям (1.4) с тем отличием, что вектор состояния на этапе прогноза вычисляется путём интегрирования нелинейных уравнений движения (1.5) и на этапе коррекции используется нелинейная модель измерений (1.6) [38]:

Этап прогноза:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, t) dt, \quad (1.8)$$

$$P_k^- = \Phi_k P_{k-1}^+ \Phi_k^T + Q_k.$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t_k)], \\ P_k^+ &= [E - K_k H_k] P_k^-. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Далее в настоящей работе будет рассматриваться расширенный фильтр Калмана, уравнения которого приведены в (1.8) и (1.9).

## 1.2. Оценка точности работы фильтра Калмана в стационарном случае

При работе с фильтром Калмана основной задачей является определение точности оценок фильтра – с какой точностью оценка вектора состояния соответствует действительности. Так как точность оценок может меняться со временем, то можно условно говорить о статических и динамических задачах определения точности оценок вектора состояния. Кроме того, возникает вопрос о качестве оценки, которое определяется двумя характеристиками: несмещенностью и состоятельностью [26].

Оценка  $\tilde{\mathbf{x}}$  величины  $\mathbf{x}$  называется *несмещенной*, если в среднем по вероятности она равна оцениваемой величине:

$$M[\tilde{\mathbf{x}}] = \mathbf{x}.$$

Пусть  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  – оценка, использующая результаты  $n$  измерений. Оценка  $\hat{\mathbf{x}}$  называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемой величине

$$P\{|\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В некотором смысле состоятельность является стохастическим аналогом *асимптотической устойчивости*.

Качественной характеристикой результата оценивания служит эффективность. Оценка эффективна (оптимальна), если она наилучшая из всех возможных оценок с точки зрения некоторого заданного критерия. Так как принято,



что погрешности и возмущения имеют нормальное распределение, характеристики которого известны, то это приводит к квадратичному критерию точности.

Если исходные предположения относительно шумов системы, шумов измерений выполняются и используются точные модели движения и измерений, то матрица ковариации ошибок оценки фильтра Калмана  $P$  является количественной характеристикой точности определения вектора состояния. Поэтому, если в некоторый момент времени  $t_k$  известно значение  $P_k$ , то известно с какой точностью определен вектор состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k$ . Однако значение  $P_k$  зависит от множества факторов, а именно – от начального значения  $P_0$ , от начального состояния системы  $\mathbf{x}_0$ , от ковариационных матриц шумов системы  $Q$  и шумов измерений  $R$ , от динамики системы (изменения  $F(\mathbf{x}, t)$  на отрезке  $[t_0, t_k]$ ). В общем случае требуется решить динамическую задачу определения точности оценок вектора состояния. Однако в этом случае нельзя заранее вычислить матрицу ковариации  $P_k$  без проведения моделирования работы фильтра Калмана с заданными характеристиками шумов и с заданными начальными условиями. Вследствие воздействия случайных шумов и обработки случайных измерений матрица  $P_k$  будет являться случайной величиной, математическое ожидание которой можно получить только путем многократного моделирования работы фильтра Калмана. При таком подходе исследование точности фильтра Калмана занимает достаточно продолжительное время, а результаты исследования справедливы с некоторой вероятностью, которая будет зависеть от количества численных экспериментов.

В некоторых случаях возможен другой подход к задаче исследования точности работы фильтра Калмана. Если движение объекта достаточно медленное (или частота измерений высока), то его можно считать квазистационарным (условия квазистационарности рассмотрены ниже). Для дискретного расширенного фильтра можно вычислить значение ковариационной матрицы ошибки  $P_\infty$ .

после сходимости, то есть выяснить точность оценок фильтра после переходных процессов.

Рассмотрим стационарную систему. Для этой системы справедливо:

$$\Phi_k = \Phi = const, H_k = H = const, Q_k = Q = const, R_k = R = const.$$

Поскольку  $Q \geq 0$ , то существует представление  $Q = BB^T$ , где матрица  $B$  называется квадратным корнем из матрицы  $Q$ . Известно [26], что если пара  $(\Phi, H)$  наблюдаема, пара  $(\Phi, B)$  управляема, тогда на бесконечном интервале наблюдения ( $k \rightarrow \infty$ ):

1) существуют  $P_\infty^-, P_\infty^+, K_\infty$ , определяемые соотношениями

$$P_\infty^- = \Phi P_\infty^+ \Phi^T + Q,$$

$$P_\infty^+ = (E - K_\infty H) P_\infty^-, \quad (1.10)$$

$$K_\infty = P_\infty^- H^T [H P_\infty^- H^T + R]^{-1};$$

2) уравнения ошибок относительно величин  $\tilde{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-, \tilde{\mathbf{x}}_k^+ = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi \tilde{\mathbf{x}}_k^+ + \boldsymbol{\omega}_k,$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+ = (E - K_\infty H) \tilde{\mathbf{x}}_k^- + K_\infty \mathbf{v}_k$$

таковы, что при  $\boldsymbol{\omega} = 0, \mathbf{v} = 0$ , выполнено

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^+, \tilde{\mathbf{x}}_k^- \rightarrow 0, k \rightarrow \infty,$$

то есть однородное уравнение ошибок

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = (E - K_\infty H) \Phi \tilde{\mathbf{x}}_k \quad (1.11)$$

асимптотически устойчиво – все собственные числа строго меньше единицы.

Таким образом, для вычисления точности оценки вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k$  после переходных процессов необходимо вычислить матрицу  $P_\infty = P_\infty^+$  из системы матричных уравнений (1.10), которую можно представить в виде квадратного матричного уравнения относительно неизвестной  $P_\infty$ :

$$P_\infty = \left[ E - (\Phi P_\infty \Phi^T + Q) H^T [H (\Phi P_\infty \Phi^T + Q) H^T + R]^{-1} H \right] \cdot (\Phi P_\infty \Phi^T + Q). \quad (1.12)$$

Заметим, что все матрицы в уравнении (1.12) предполагаются постоянными. В общем случае это уравнение аналитически решить не удастся. Учитывая, что матрица  $P_\infty$  симметричная, то рассматриваемое нелинейное матричное уравнение можно записать как систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, в качестве неизвестных рассматриваются элементы матрицы  $P_\infty$ . Эту систему нелинейных уравнений можно решить, например, методом простой итерации или методом Ньютона. Если записать вектор неизвестных как  $\xi$ , а систему уравнений как  $\mathbf{f}(\xi) = 0$ , тогда итерационный метод Ньютона имеет вид

$$\xi_{i+1} = \xi_i - S^{-1}(\xi_i)\mathbf{f}(\xi_i),$$

где  $i$  – это номер итерации,  $S = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \xi_j} \right)$  – якобиан системы,  $\xi_0$  выбирается единственным. Итерационный процесс заканчивается, когда  $|\xi_{i+1} - \xi_i| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – достаточно малая величина. Таким образом можно найти значение матрицы  $P_\infty$  после сходимости.

Заметим, что  $P_\infty$  вычисляется как предельное значение для заданных и постоянных матриц  $\Phi$ ,  $H$ ,  $Q$  и  $R$ . Однако, если рассмотреть систему, значения матрицы динамики и матрицы чувствительности которой изменяются настолько медленно, что в каждый момент времени можно считать, что оценки фильтра Калмана сошлись, то и для такой системы можно оценить точность определения вектора состояния с помощью решения уравнения (1.12), но отдельно для каждого значения  $\Phi$ ,  $H$ ,  $Q$  и  $R$ .

Оценим, с какой частотой должна производиться оценка вектора состояния, чтобы движение можно было бы считать квазистационарным. Скорость сходимости оценок фильтра определяется собственными числами уравнения ошибок (1.11). Собственное число, которое ближе по модулю к единице, определяет скорость сходимости оценок. Свяжем скорость сходимости со временем

релаксации  $\tau$  уравнения ошибок. Если переписать уравнение (1.11) ошибок для непрерывного случая, то получится следующее уравнение:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \left( \frac{(E - K_{\infty}H)\Phi - E}{\Delta t} \right) \tilde{\mathbf{x}}, \quad (1.13)$$

где  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ . Обозначим матрицу в квадратных скобках как  $A$ . Решение уравнения (1.13) – это матричная экспонента, а скорость сходимости определяют собственные числа, которые могут быть получены из характеристического уравнения

$$\det|A - \lambda E| = 0.$$

Время релаксации – время, за которое ошибка определения вектора состояния уменьшится в  $e$  раз – определяется собственным числом  $\lambda_{\min}$  с минимальной действительной частью  $u = \min_k |\operatorname{Re}(\lambda_k)|$ . Заметим, что для асимптотической устойчивости решения уравнения (1.13) и сходимости ошибок необходимо, чтобы все действительные части собственных чисел были отрицательными. Время релаксации определяется как

$$\tau = \frac{1}{u}$$

и является функцией от  $\Delta t$ :  $\tau = \tau(\Delta t)$ .

Будем считать систему квазистационарной, если десятикратный интервал между измерениями  $10 \cdot \Delta t$  больше времени релаксации уравнения ошибок  $\tau$ :

$$\tau(\Delta t) < 10 \cdot \Delta t, \quad (1.14)$$

то есть за время десяти итерации  $\Delta t$  ошибка уменьшается более, чем в  $e$  раз. Неравенство (1.14) может быть решено относительно  $\Delta t$  и получена оценка для частоты измерений, а, следовательно, и частоты оценок фильтра Калмана, при которой можно считать движение квазистационарным и применить методику оценки точности вектора состояния, описанную выше. Кроме того, за время  $10 \cdot \Delta t$  изменения матриц динамики  $\Phi$  и модели измерений  $H$  должны быть пренебрежимо малы:

$$\begin{aligned} |\Phi_{k+10} - \Phi_k| &= o(t_{k+10} - t_k), \\ |H_{k+10} - H_k| &= o(t_{k+10} - t_k). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Заметим, что условия (1.15) и (1.14) были получены эмпирически и являются достаточно грубыми.

### 1.3. Исследование влияния неучтенных возмущений на точность оценок фильтра Калмана

Построение фильтра Калмана подразумевает, что уравнения движения и модель измерений линейны или могут быть линеаризованы в окрестности текущей оценки

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{z}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (1.17)$$

Однако, на динамику системы могут действовать возмущения, которые неучтены в модели движения, используемой фильтром Калмана. Неучтенные возмущения можно обозначить вектором  $\boldsymbol{\chi}$ , который изменяется со временем также по линейному закону

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\chi}_k, \\ \boldsymbol{\chi}_{k+1} &= \Gamma_k \boldsymbol{\chi}_k + \boldsymbol{\theta}_k, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где  $\Gamma_k$  – матрица динамики неучтенных в модели движения шумов,  $\boldsymbol{\theta}_k$  – случайная составляющая возмущений с нулевым математическим ожиданием  $M[\boldsymbol{\theta}_k] = 0$  и ненулевой ковариационной матрицей  $\text{cov}[\boldsymbol{\theta}_k, \boldsymbol{\theta}_k] = M[\boldsymbol{\theta}_k \boldsymbol{\theta}_k^T] = \Theta_k$ .

Модель измерений в действительности также может отличаться от используемой в фильтре Калмана и иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \\ \mathbf{v}_{k+1} &= Y_k \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\rho}_k. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь  $\mathbf{v}_k$  – ошибка измерений,  $Y_k$  – матрица динамики ошибки измерений,  $\boldsymbol{\rho}_k$  – случайная составляющая ошибок измерений с нулевым математическим ожиданием  $M[\boldsymbol{\rho}_k] = 0$  и ковариационной матрицей  $\text{cov}[\boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\rho}_k] = M[\boldsymbol{\rho}_k \boldsymbol{\rho}_k^T] = \Xi_k$ .

Возникает задача определения точности оценок фильтра Калмана, использующего модель движения (1.16) и модель измерений (1.17) для оценивания системы, которая в действительности имеет модель движения (1.18) и модель измерений (1.19) [26]. Для решения этой задачи рассмотрим расширенный вектор состояния  $\xi = (\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\chi}^T, \mathbf{v}^T)^T$ , включающий в себя вектор состояния исходной системы  $\mathbf{x}$ , вектор возмущений  $\boldsymbol{\chi}$  и вектор ошибки измерений  $\mathbf{v}$  [26]. Для вектора состояния  $\xi$  можно составить процедуру фильтрации. На этапе прогноза интегрируются уравнения движения (1.18). Прогноз матрицы ошибки вектора  $\xi$  записывается по формуле, аналогичной (1.4),

$$P_{\xi,k}^- = \Phi_{\xi,k} P_{\xi,k-1}^+ \Phi_{\xi,k}^T + Q_{\xi,k}, \quad (1.20)$$

где

$$\Phi_{\xi,k} = \begin{pmatrix} \Phi_k & E & 0 \\ 0 & \Gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & Y_k \end{pmatrix}, \quad Q_{\xi,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_k & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_k \end{pmatrix}.$$

На этапе коррекции будем считать, что изменяется только вектор состояния  $\mathbf{x}$ , а  $\boldsymbol{\chi}$  и  $\mathbf{v}$  остаются прежними:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= (E - K_k H_k) \hat{\mathbf{x}}_k^- - K_k \boldsymbol{\chi}_k, \\ \boldsymbol{\chi}_k^+ &= \boldsymbol{\chi}_k^-, \\ \mathbf{v}_k^+ &= \mathbf{v}_k^-. \end{aligned}$$

Тогда для этапа коррекции матрицы ошибки вектора  $\xi$  можно записать:

$$P_{\xi,k}^+ = C_k P_{\xi,k}^- C_k^T. \quad (1.21)$$

Здесь

$$C_k = \begin{pmatrix} E - K_k H_k & 0 & -K_k \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вычислив матрицу ошибок  $P_{\xi,k}^+$  на какой-то момент времени, можно найти ошибку определения вектора состояния  $\mathbf{x}$ , рассмотрев в этой матрице ту часть, которая соответствует ошибке определения вектора  $\mathbf{x}$ . Эта оцен-

ка ошибки будет учитывать, что в действительности модель движения и модель измерения отличаются от тех, что используются в фильтре Калмана.

Аналогично методике, изложенной в п. 1.2, для квазистационарного движения возможно найти асимптотическое значение матрицы ошибок  $P_{\xi, \infty}$ , решив уравнение

$$P_{\xi, \infty} = C_{\xi} \left[ \Phi_{\xi} P_{\xi, \infty} \Phi_{\xi}^T + Q_{\xi} \right] C_{\xi}^T. \quad (1.22)$$

Следует отметить, что при решении уравнения (1.22) требуется использовать матрицу весов  $K_{\infty}$ , которая вычисляется из уравнения (1.10) для исходно фильтра Калмана.

В постановке задачи, когда используемые фильтром Калмана модели движения и измерения отличаются от действительности, матрица шумов системы  $Q$  и матрица ошибок измерений  $R$  становятся параметрами настройки фильтра Калмана. Цель настройки заключается в выборе таких матриц  $Q$  и  $R$ , при которых точность оценок вектора состояния  $\mathbf{x}$  из  $P_{\xi, \infty}$  будет минимальной:

$$\{Q, R\} = \arg \min(\text{tr } P_{\xi, \infty}). \quad (1.23)$$

Задача (1.23) минимизации части  $P_{\xi, \infty}$ , соответствующей вектору  $\mathbf{x}$ , может быть решена следующим образом. Чтобы сократить число параметров, предположив независимость ошибок модели системы и ошибок модели измерений, можно рассмотреть диагональные матрицы  $Q$  и  $R$ . Для минимизации ошибки определения движения по диагональным элементам матриц  $Q$  и  $R$  можно воспользоваться методом наименьших квадратов. Или с некоторым шагом по параметрам вычислить значение ошибки, чтобы составить карту точности оценок фильтра, по которой можно выбирать параметры настройки.

Таким образом, методика настройки фильтра Калмана состоит из следующих этапов:

- Проверка выполнения условия квазистационарности движения с помощью (1.14).

- Для каждого значения матриц динамики  $\Phi$  и чувствительности  $H$  рассчитываются асимптотические значения матриц ошибок  $P_\infty$  и весов  $K_\infty$ .
- Из уравнения (1.22) находится  $P_{\xi,\infty}$ , определяется ошибка определения вектора состояния  $\mathbf{x}$  при неучтенных в модели движения возмущениях.
- Выбираются такие параметры  $Q$  и  $R$ , чтобы минимизировать ошибку  $P_{\xi,\infty}$ .

#### 1.4. Заключение к главе 1

Разработанная методика оценки точности определения вектора состояния фильтра Калмана позволяет исследовать чувствительность фильтра к неучтенным в модели движения и модели измерений факторам. Однако, на практике часто сложно в точности записать модель действующих возмущений (1.18)  $\chi$  и модель цветных шумов (1.19)  $\mathbf{v}$ . Тем не менее, можно оценить неучтенные факторы сверху и рассмотреть влияние наихудшего случая на точность оценки фильтра. Таким образом, можно оценить наилучшую точность работы фильтра при наихудших "обстоятельствах", например, в случае действия максимально возможного возмущения. Эта информация позволяет разработчику системы ориентации оценить её возможности при заданном наборе датчиков с известными точностными характеристиками, и выбрать такие датчики из доступного ряда, которые будут удовлетворять требованиям, поставленным перед системой ориентации.

Разработанная методика позволяет найти такие параметры  $Q$  и  $R$  исходного фильтра, которые позволяют уменьшить ошибку определения вектора состояния при действии неучтенных в модели движения и модели измерений факторов. Так как нарушаются исходные предположения при построении фильтра, то фильтр уже не минимизирует квадрат ошибки вектора состояния. Его оценка перестает быть наилучшей, а матрицы  $Q$  и  $R$  перестают быть реальными характеристиками шумов системы и измерений и становятся параметрами.



рами, изменяя которые возможно улучшить оценку вектора состояния. Нарушение исходных предположений возникает не только вследствие неучтенных факторов, но и при линеаризации уравнений движения (1.5) и модели измерений (1.6), поэтому следует также исследовать и влияние линеаризации на точность оценки.

## **2. АНАЛИЗ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАКЕТА СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ, ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ**

В настоящей главе рассматривается алгоритм определения одноосного движения макета системы ориентации, подвешенного на струне. Для исследования алгоритма применяется методика, разработанная в 1 главе. В качестве возмущения, неучтенного в модели движения макета, рассматривается момент, вызванный упругостью струны. Производится сравнение метода настройки фильтра с результатами численных исследований. Анализируются результаты экспериментов на лабораторном стенде.

### **2.1. Постановка задачи**

Перед запуском космического аппарата необходимо провести исследование используемых на нем алгоритмов, в том числе алгоритмов определения движения относительно центра масс. После аналитических и численных исследований для отладки особенностей, возникающих при реализации алгоритмов на бортовом компьютере, разумно провести испытания алгоритмов на лабораторном прототипе системы ориентации. Лабораторные стенды, однако, не позволяют в полной мере имитировать орбитальное движение макета относительно центра масс вследствие действия ряда возмущений, отличных от орбитальных.

В настоящей главе рассматривается макет прототипа системы ориентации, имитирующий только одноосное движение космического аппарата [39]. Макет подвешен на упругой струне, причем точка крепления струны к макету находится на некотором расстоянии от центра масс, что обуславливает гравитационный восстанавливающий момент, приводящий к положению равновесия, в котором ось, соединяющая центр масс и точку крепления струны, вертикальна. Второй конец струны закреплен с помощью двухстепенного шарнира, что

приводит к возникновению упругого момента при кручении, который также воздействует на макет. Кроме того, на макет действуют силы трения о воздух, возникающие при вращении аппарата.

Макет оснащен лабораторным имитатором импульсной системы управления ориентации, который представляет собой систему из вентиляторных двигателей. Вентиляторы при включении способны обеспечить необходимый управляющий момент для совершения ориентационного маневра. Для определения ориентации используются прототип солнечного датчика и одноосный оптоволоконный датчик угловой скорости. Макет также оснащен бортовым компьютером, способным обрабатывать измерения датчиков и посылать управляющие команды на вентиляторы [40]. В состав макета также входят система электропитания, широтно-импульсные модуляторы и система связи со стационарным компьютером (рис. 2.1).

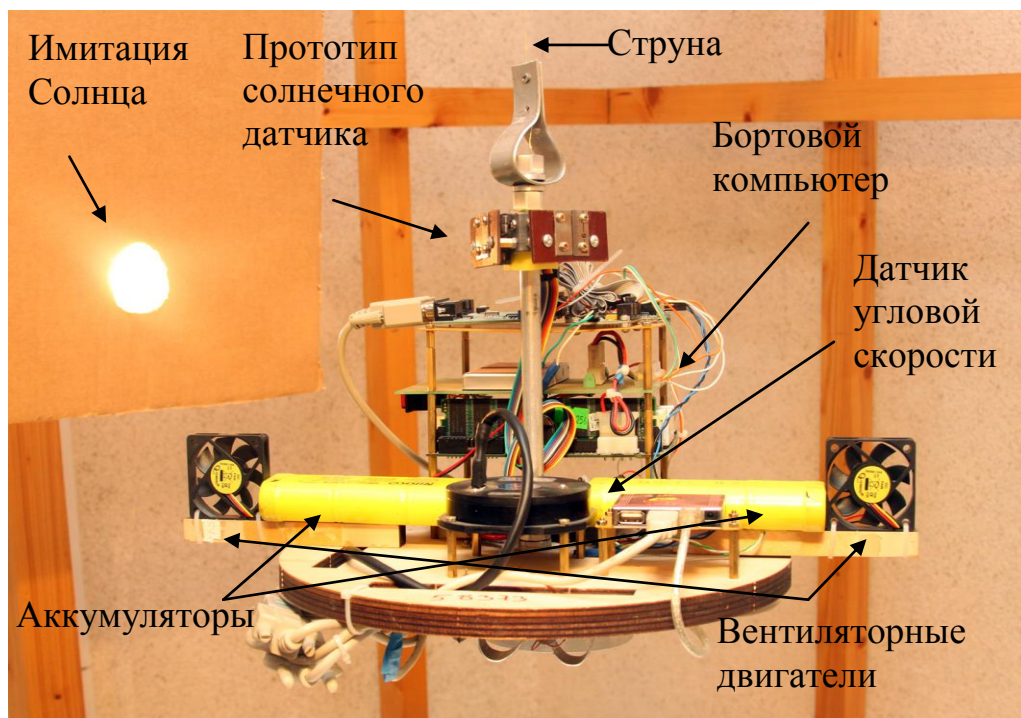


Рис. 2.1. Макет системы ориентации

Для управления ориентацией макета необходимо иметь оценку ориентации и вектора угловой скорости в режиме реального времени. Поэтому возник-

кает задача определения ориентации на основе измерений солнечного датчика и датчика угловой скорости с использованием фильтра Калмана. Однако, так как на космический аппарат в орбитальном полете не действуют возмущения, которые воздействуют на лабораторный макет, то необходимо исследовать, как эти возмущения, не учтенные в модели движения, влияют на точность определения движения. Возникает задача настройки фильтра – выбора таких параметров, при которых точность определения движения макета при действующих возмущениях будет наилучшей.

Для решения задачи исследования и настройки алгоритма определения движения макета, подвешенного на струне, будем следовать методике, изложенной в главе 1.

## 2.2. Уравнения движения макета системы ориентации

Рассмотрим сначала уравнения движения макета системы ориентации в общем случае и далее упростим их для использования в фильтре Калмана в качестве модели движения.

Рассматривается твердое тело, подвешенное на невесомом нерастяжимом, упругом на кручение стержне, которым аппроксимируется струна. Предполагается, что в точках крепления стержня  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис.2.2) установлены двухстепенные шарниры.

Введем следующие системы координат:

$O_1x_1x_2x_3$  – неподвижная система координат с началом в точке  $O_1$  (ось  $O_1x_3$  направлена вертикально вверх);

$Gz_1z_2z_3$  – связанная с телом система координат с осями вдоль его главных центральных осей инерции. Пусть  $J$  – тензор инерции в главных осях,  $A$  – матрица перехода из системы координат  $Gz_1z_2z_3$  в  $O_1x_1x_2x_3$ .

$O_1y_1y_2y_3$  – система координат, связанная со стержнем, ось  $O_1y_3$  направлена вдоль продолжения стержня. Положение  $O_1y_1y_2y_3$  относительно  $O_1x_1x_2x_3$  определим с помощью матрицы перехода  $U = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3]^T$ .

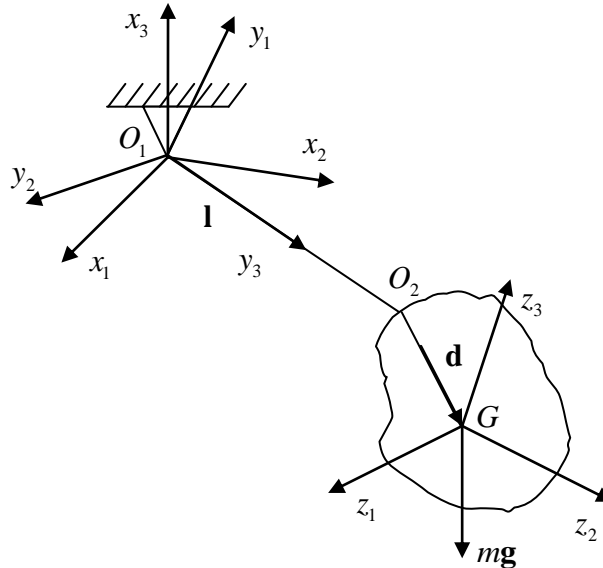


Рис. 2.2. Твердое тело на испытательном стенде

Уравнения сил и моментов, действующих на тело, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{l}} + \ddot{\mathbf{d}}) &= \mathbf{F} + \mathbf{R}, \\ \dot{\mathbf{K}}_G &= \mathbf{M} - \mathbf{d} \times \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $m$  – масса тела,  $\mathbf{l} = \overrightarrow{O_1O_2}$ ,  $\mathbf{d} = \overrightarrow{O_2G}$ ,  $\mathbf{F}$  – главный вектор внешних сил, приложенных к телу,  $\mathbf{R}$  – сила реакции стержня,  $\mathbf{K}_G$  – кинетический момент тела относительно центра масс,  $\mathbf{M}$  – управляющий механический момент. Принимая во внимание, что сила реакции направлена вдоль стержня, так как связь идеальная, можно записать  $\mathbf{R} = \lambda \mathbf{l}$ . Множитель  $\lambda$  можно найти, умножив первое уравнение скалярно на  $\mathbf{l}$ :

$$\lambda = \frac{1}{l^2} (-ml^2 + m\mathbf{l} \cdot \ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}).$$

Принимая во внимание следующие равенства

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{l}} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{l} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}), \\
\ddot{\mathbf{d}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}\omega^2, \\
\dot{\mathbf{K}}_G &= J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega},
\end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  – угловые скорости стержня и тела соответственно, можно привести уравнения (2.1) к виду [41]

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{l} &= \frac{\mathbf{l}}{l^2} \left[ -\dot{l}^2 - \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} / m + \mathbf{l}(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\omega})\omega^2 \right] + \mathbf{F} / m - \\
&\quad - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{d} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}\omega^2 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}), \\
\dot{\boldsymbol{\omega}} &= V^{-1} \left\{ \mathbf{M} - \frac{1}{l} \eta \chi \mathbf{l} - \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{d} \times A\mathbf{u}_3) [ml(\boldsymbol{\Omega}_1^2 + \boldsymbol{\Omega}_2^2) - \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{F} + \right. \\
&\quad \left. + m(A\mathbf{u}_3 \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\omega}) + m(A\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{d})\omega^2 \right\},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $V = m \left( (\mathbf{d} \times A\mathbf{u}_3)(\mathbf{d} \times A\mathbf{u}_3)^T \right) + J$ ,  $\eta$  – модуль кручения нити,  $\chi$  – угол закрутки нити. Для получения замкнутой системы уравнений движения необходимо добавить кинематические соотношения, связывающие угловые скорости и параметры, определяющие ориентацию макета и нити,

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} A, \quad \dot{U} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} U. \tag{2.3}$$

Теперь упростим уравнения движения (2.2), считая, что движение макета происходит в малой окрестности положения равновесия, в котором векторы  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{d}$  направлены вертикально вниз, вектор угловой скорости макета  $\boldsymbol{\omega}$  может быть коллинеарен вектору  $\mathbf{d}$ , вектор угловой скорости стержня  $\boldsymbol{\Omega}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{l}$ . Рассмотрим уравнение только для компоненты  $z_3$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_3 &= C^{-1} [M_3 - \eta(\varphi - \varphi_0)], \\
\dot{\varphi} &= \omega_3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Обозначим  $C^{-1}M_3 = u(t)$ ,  $\varphi_0$  – угол, при котором упругий момент отсутствует. Пусть управляющий момент задается как пропорционально-дифференциальный регулятор вида

$$u(t) = -(k_\varphi \varphi + k_\omega \omega_3),$$

где  $k_\varphi$ ,  $k_\omega$  – коэффициенты усиления управления по рассогласованию угла и угловой скорости соответственно [42].

Рассмотрим упругий момент кручения нити как возмущение и не будем его учитывать в модели движения, которая используется фильтром Калмана. Исключение момента от упругого кручения нити из уравнений движения вызвано также сложностью определения угла  $\varphi_0$ . В качестве вектора состояния макета, подвешенного на струне, будем рассматривать угол отклонения от желаемой ориентации  $\varphi$  и компоненту угловой скорости относительно вертикальной оси  $\omega_3 = \dot{\varphi}$ :

$$\mathbf{x} = (\varphi \ \dot{\varphi})^T.$$

Тогда непрерывное уравнение движения системы будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = F\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_\varphi & -k_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

В дискретном виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k = (E + F\Delta t) \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ -k_\varphi \Delta t & 1 - k_\omega \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ .

Так как с помощью солнечного датчика и датчика угловой скорости измеряются непосредственно угол и угловая скорость, то матрица чувствительности будет единичной, а модель измерений имеет вид

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

### 2.3. Исследование алгоритма определения движения макета

Возникает задача определения движения макета с использованием измерений солнечного датчика и датчика угловой скорости. Построим фильтр Калмана на основе модели движения (2.5) и модели измерений (2.6). Особенный

интерес представляет исследование точности определения движения в окрестности стабилизированного состояния, когда угол  $\varphi = 0$  и угловая скорость также  $\omega = 0$ .

Обратим внимание, что уравнения движения (2.5) не учитывают ряд весомых возмущений, таких как момент от кручения нити и момент, возникающий от трения элементов макета о воздух. Кроме того, модель измерений (2.6) не учитывает неидеальность измерений датчиков, например, смещение нуля измерений датчика угловой скорости. Также следует иметь в виду, что реальное движение макета описывается более сложными уравнениями движения (2.2), а упрощение (2.4) возможно только при строгом выполнении предположения, что векторы  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{d}$  направлены вертикально вниз. Но в реальном движении это не выполняется точно, что обуславливает малые пространственные колебания системы. Все это приводит к тому, что точность оценок вектора состояния может пострадать, поэтому необходимо выбрать такие параметры настройки фильтра, которые минимизируют ошибки определения движения.

При исследовании алгоритма воспользуемся методикой, разработанной в главе 1. Вычислим значение матрицы ошибок  $P_\infty$  в положении равновесия по формуле (1.12). Для рассматриваемой системы матрица  $P_\infty$  будет представлять собой матрицу размерности  $2 \times 2$  со следующими элементами:

$$P_\infty = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}.$$

То есть при решении уравнения (1.12) будет всего три неизвестных  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22}$ . Однако аналитическое решение уравнения (1.12) в рассматриваемом достаточно простом случае получить не удастся и оно решается численно. Примем матрицу ошибок системы  $Q$  и матрицу ошибок измерений  $R$  в следующем виде:

$$Q = \begin{pmatrix} q_\varphi^2 & 0 \\ 0 & q_\omega^2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_\varphi^2 & 0 \\ 0 & r_\omega^2 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$



Будем считать, что среднеквадратические ошибки измерения известны и равны  $r_\varphi = 0.1$  град и  $r_\omega = 0.01$  град/с. Рассмотрим как будут зависеть ошибки определения ориентации  $\sigma_\varphi = \sqrt{p_{11}}$  и ошибки определения угловой скорости  $\sigma_\omega = \sqrt{p_{22}}$  от среднеквадратичных отклонений шумов модели движения  $q_\varphi$  и  $q_\omega$ . Примем, что частота поступления измерений составляет 10 Гц, то есть  $dt = 0.1$  с. Рассмотрим сначала ошибки определения движения при отсутствии управления, то есть примем  $k_\varphi = 0$  и  $k_\omega = 0$ . На рис. 2.3 и рис. 2.4 представлены графики ошибок определения угла поворота макета и угловой скорости в зависимости от характеристик шумов в системе  $q_\varphi$  и  $q_\omega$ . Как видно из графиков, при уменьшении шумов в системе точность определения движения увеличивается.

С помощью (1.14) проверим при каких значениях шумов модели системы для частоты измерений 10 Гц будет выполняться условие квазистационарности. На рис. 2.5 представлен график зависимости времени релаксации уравнений ошибок фильтра от параметров настройки. Жирной линией обозначена граница области, где не выполняется условие  $\tau < 10\Delta t$  и, следовательно, метод исследования не может быть применен к рассматриваемой области.

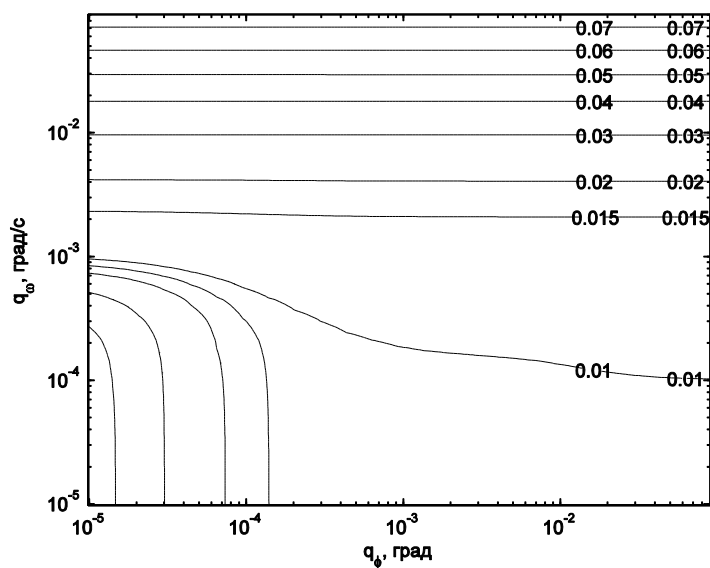


Рис. 2.3. Зависимость точности определения угла поворота (град) от параметров шумов системы

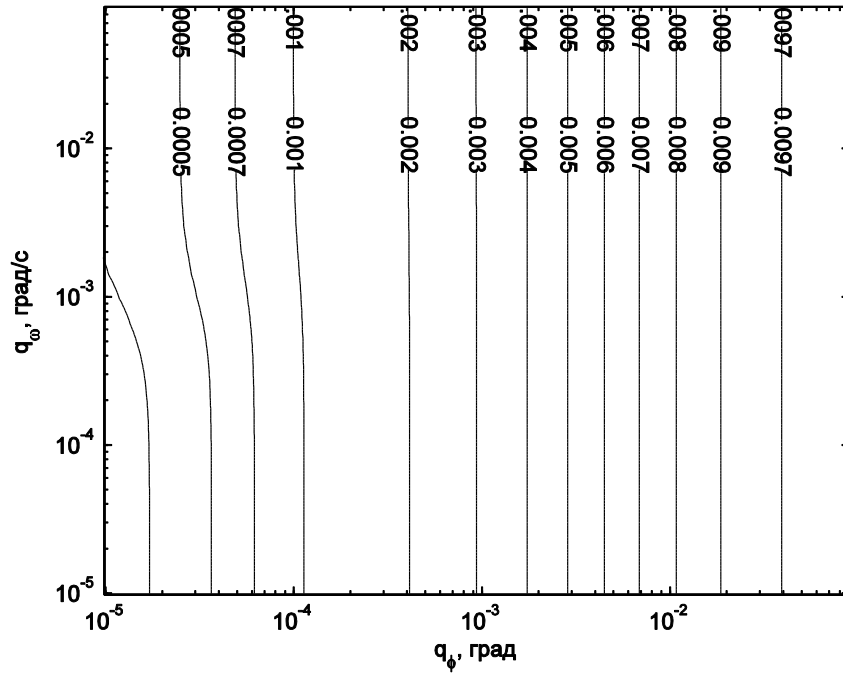


Рис. 2.4. Зависимость точности определения угловой скорости (град/с) от параметров настройки

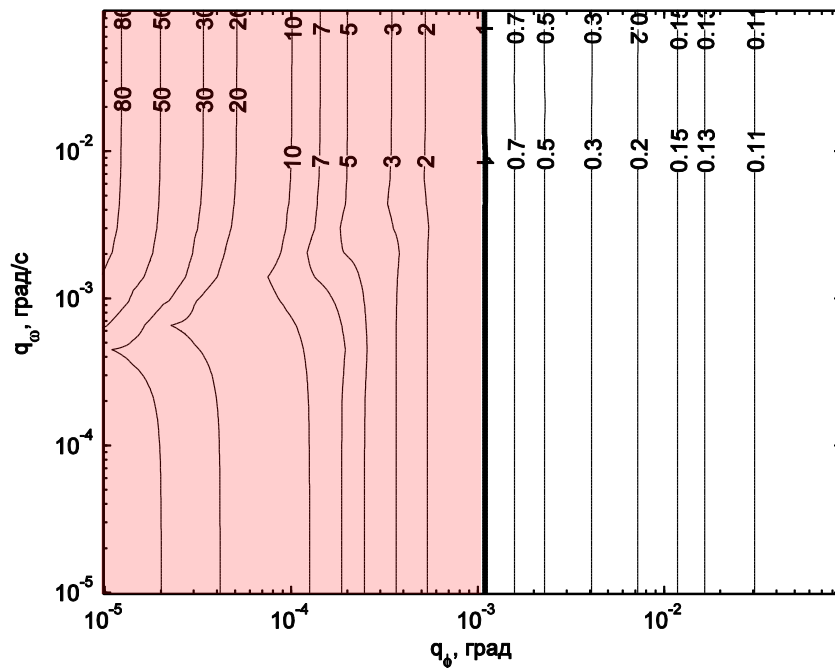


Рис. 2.5. Время релаксации уравнения ошибок, в секундах

Заметим, что точность определения движения с помощью фильтра, представленная на рис. 2.3 и 2.4, будет соответствовать действительности только в том случае, когда движение макета будет подчиняться уравнениям (2.5), а дис-

персии шумов модели системы и шумов ошибок измерений будут равны (2.7). Однако, как уже упоминалось выше, в уравнениях движения неучтены возмущения, а в модели измерения не учитывается неточное знание нуля измерений датчика угловой скорости, поэтому требуется исследование влияния этих неучтенных факторов на точность определения движения макета.

Оценим сначала влияние неучтенных возмущений. Для начала будем предполагать, что на макет действует постоянное неучтенное возмущение  $\chi$ . Уравнения реального движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \chi_k, \\ \chi_{k+1} &= E \chi_k + \theta_k, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $E$  – единичная матрица,  $\theta$  – случайная составляющая возмущения. Сам вектор  $\chi$ , предположим, имеет следующий вид:

$$\chi = \begin{pmatrix} d\Delta t^2 / 2 \\ d\Delta t \end{pmatrix}.$$

Здесь  $d$  – некоторая константа, определяющая величину возмущения. В качестве примера рассмотрим как изменится точность определения движения при конкретном значении возмущения. Пусть  $d = 10^{-2}$  град/с<sup>2</sup> (что соответствует возмущению со стороны нити при закрутке на примерно 45 град для рассматриваемого макета), а дисперсия случайной составляющей возмущения равна

$$M[\theta \theta^T] = \Theta = \begin{pmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\Theta$  выбиралась таким образом, чтобы случайная составляющая возмущения была на два порядка меньше постоянной, которая вносит основной вклад в величину возмущения. В этом случае зависимости точности определения угла поворота и угловой скорости от параметров настройки  $q_\varphi$  и  $q_\omega$  представлены на рис. 2.6 и 2.7 соответственно. Как видно из графиков, точка, в которой будет минимальной ошибка определения угла поворота и угловой скорости, имеет

значения  $q_\phi = 1.5 \cdot 10^{-2}$  град/с и  $q_\omega = 7.9 \cdot 10^{-3}$  град/с<sup>2</sup>, а значения точности определения движения соответствуют  $\sigma_\phi = 0.023$ град и  $\sigma_\omega = 0.0085$ град/с.

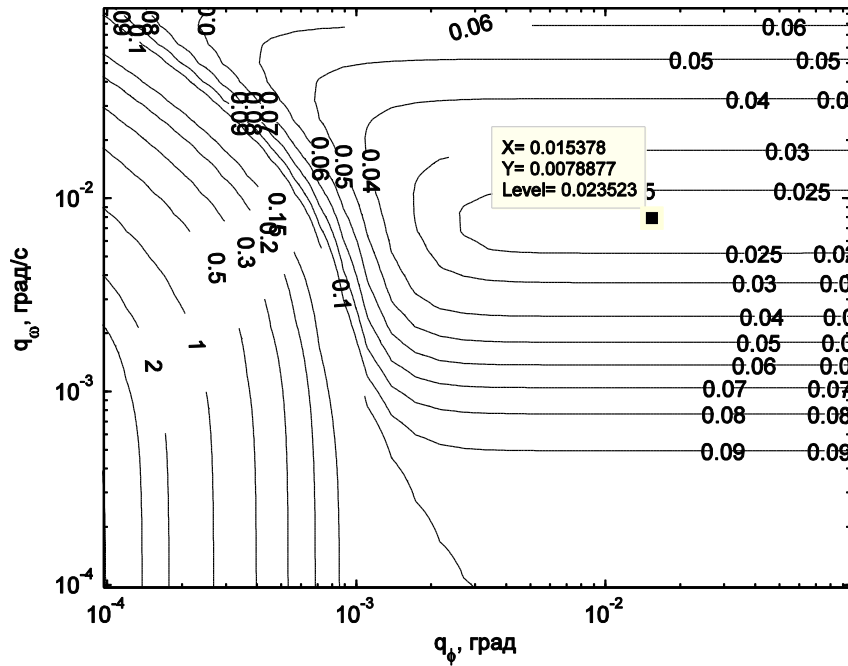


Рис. 2.6. Зависимость точности определения угла поворота (град) от параметров настройки

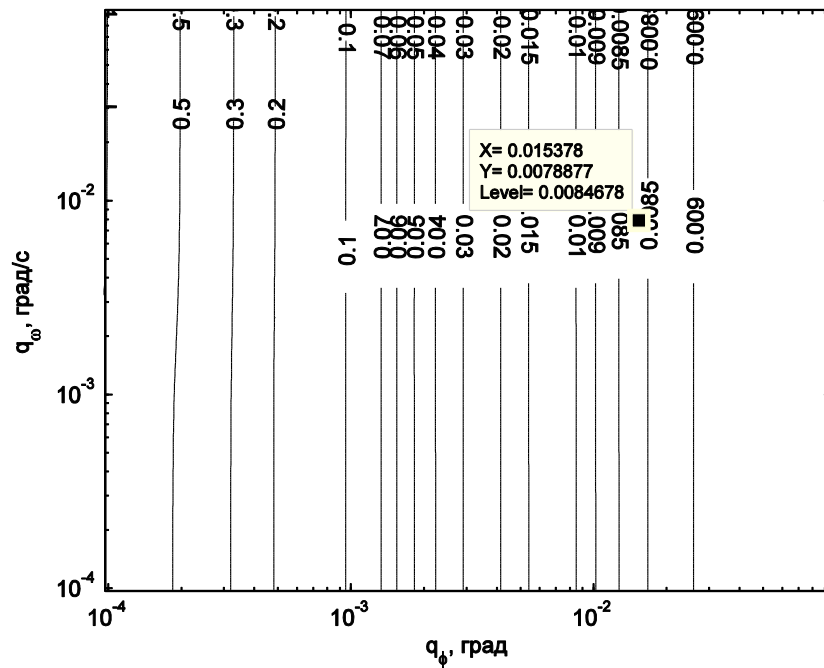


Рис. 2.7. Зависимость точности определения угловой скорости (град/с) от параметров настройки

Проверим путем моделирования работы фильтра Калмана, действительно ли, если задать найденные параметры настройки, то получим точность определения движения  $\sigma_\varphi = 0.023$ град и  $\sigma_\omega = 0.0085$ град/с. Для моделирования работы фильтра Калмана интегрировались уравнения движения (2.8) с постоянным возмущением  $d = 10^{-2}$  град/с<sup>2</sup> и для имитации измерений к реальным значениям угла поворота и угловой скорости добавлялись шумы со среднеквадратическим отклонением  $r_\varphi = 0.1$  град и  $r_\omega = 0.01$  град/с. На рис. 2.8 и 2.9 приведены графики ошибок оценки угла отклонения и угловой скорости соответственно. Расчет среднеквадратичного отклонения дает  $\sigma_\varphi = 0.024$ град и  $\sigma_\omega = 0.00846$ град/с, что очень близко к полученным с помощью методики значениям. Аналогично проверяется с помощью моделирования работы фильтра Калмана любая точка рис. 2.6 и 2.7 и результаты оказываются очень близкими. Различия обусловлены тем, что при моделировании работы фильтра используются случайные значения шумов измерений и шумов модели, что приводит к случайным оценкам вектора состояния. Но на бесконечном интервале моделирования ошибка определения движения сходится к значениям, полученным с помощью разработанной методики.

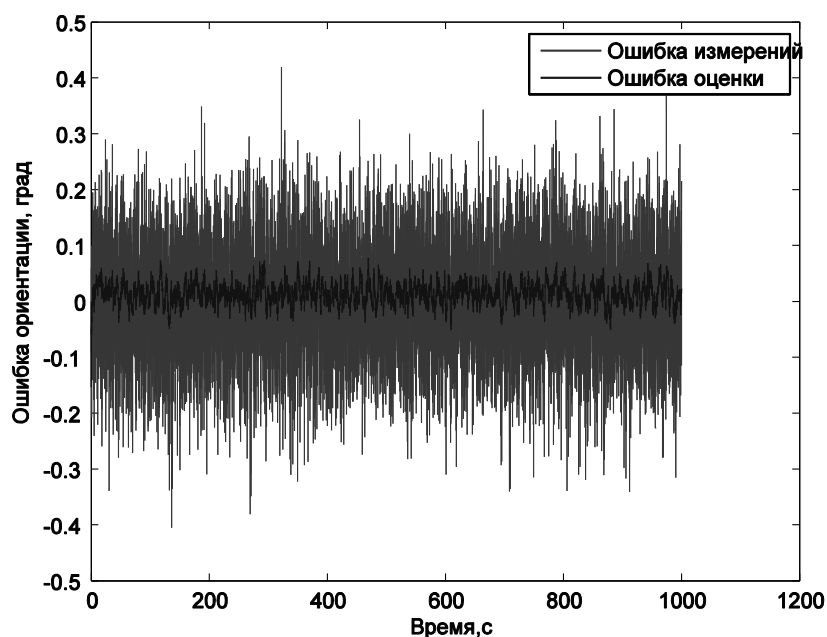


Рис.2.8. Ошибки определения угла поворота и ошибки измерений

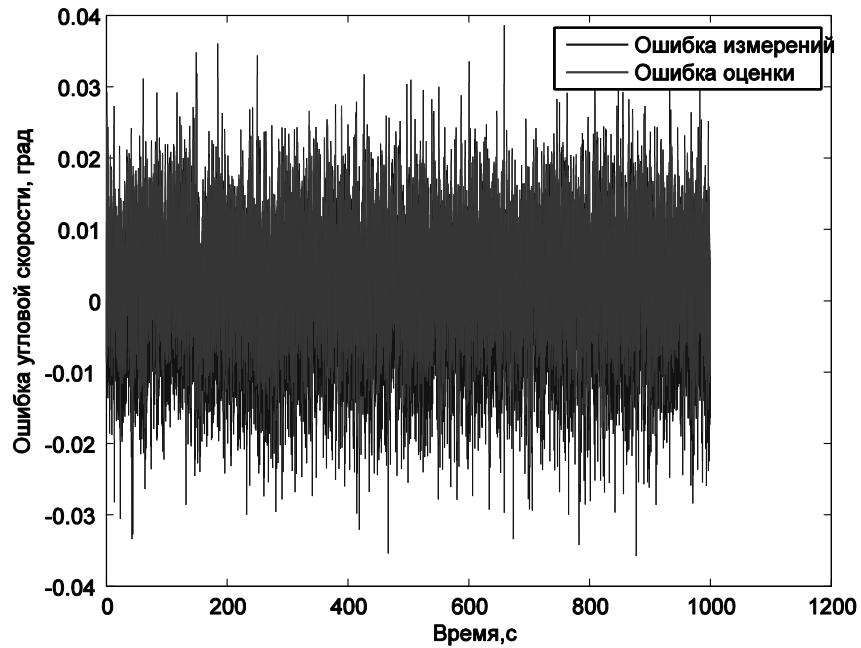


Рис.2.9. Ошибки определения угловой скорости и ошибки измерений

Рассмотрим теперь, как будет изменяться наилучшая точность определения движения макета (минимум ошибки определения ориентации и угловой скорости) при различных значениях возмущения  $d$ . Задача поиска наилучшей точности определения движения решается численно. Используется функционал

$$J = \sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\omega}^2,$$

который минимизируется по параметрам  $q_{\varphi}$  и  $q_{\omega}$ . На рис. 2.10 и 2.11 представлены графики наилучшей точности определения угла и угловой скорости соответственно в зависимости от возмущения  $d$ . Рис. 2.12 и 2.13 указывают какие необходимо взять параметры  $q_{\varphi}$  и  $q_{\omega}$  для достижения этой наилучшей точности.

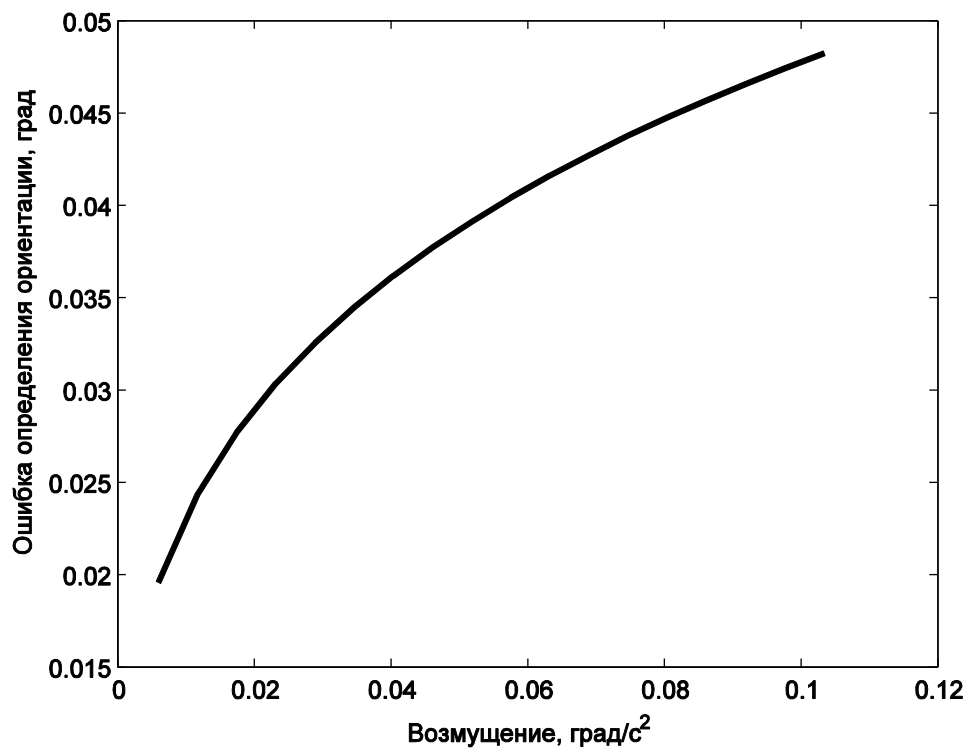


Рис. 2.10. Наилучшая ошибка определения угла отклонения макета в зависимости от уровня возмущения

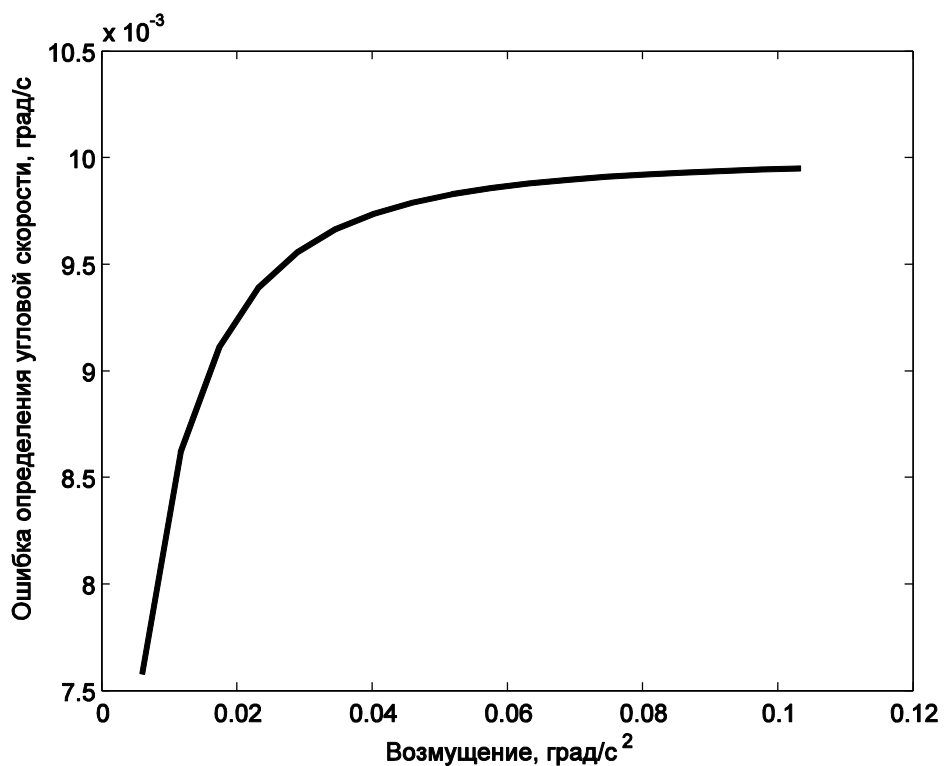


Рис. 2.11. Наилучшая ошибка определения угловой скорости макета в зависимости от уровня возмущения

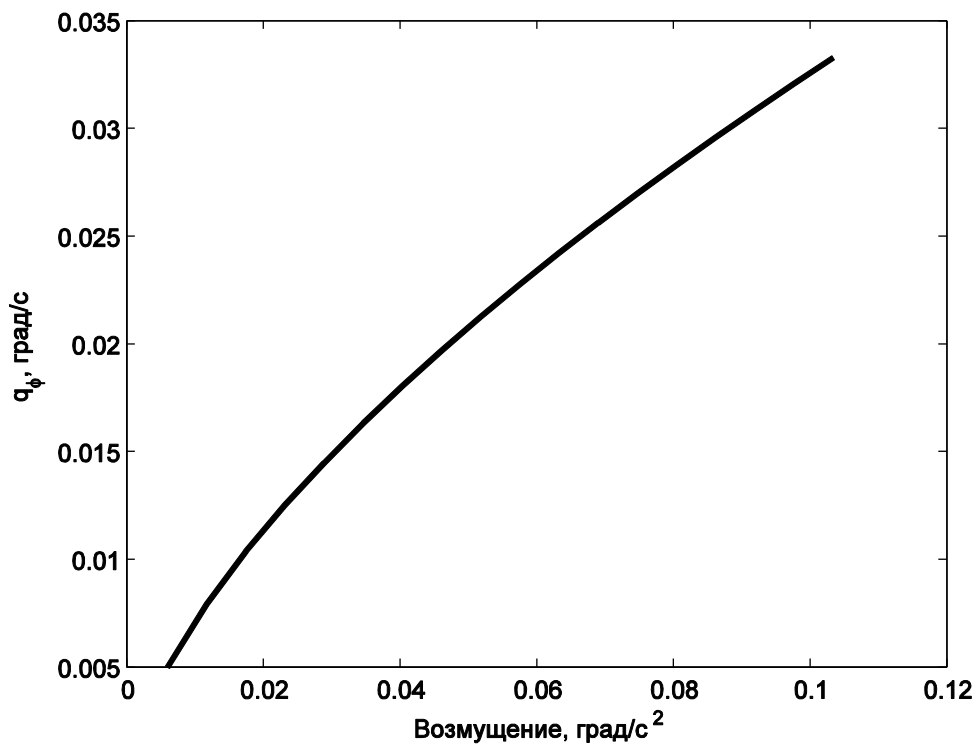


Рис. 2.12. Зависимость параметра настройки  $q_\phi$  от уровня возмущения

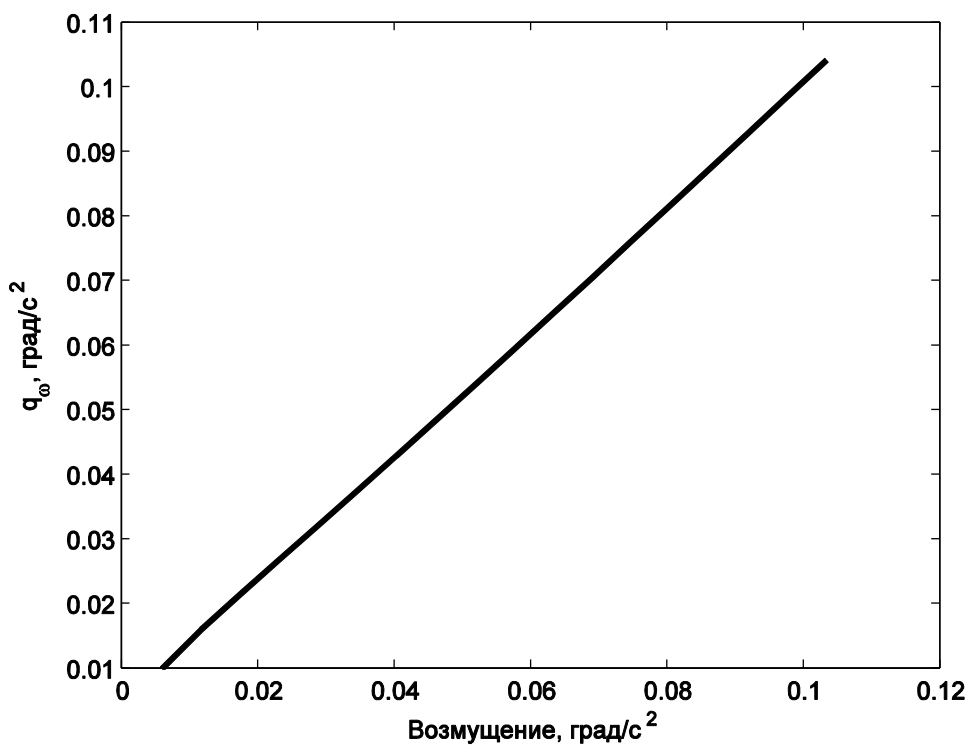


Рис. 2.13. Зависимость параметра настройки  $q_\omega$  от уровня возмущения



В рассматриваемом случае возмущения со стороны упругого кручения струны возмущение не является постоянным и зависит от угла закрутки нити. Однако, параметры настройки фильтра Калмана в нашем случае нельзя менять на наилучшие для текущего уровня возмущения. Разумно выбрать такие  $q_\varphi$  и  $q_\omega$ , которые минимизируют ошибку при максимально возможном возмущении, и исследовать какая ошибка определения движения будет у вектора состояния при меньшем возмущении. Рассмотрим в качестве примера свободные колебания макета без диссипации вокруг вертикальной оси в окрестности положения равновесия с амплитудой 45 град. Для максимального отклонения макета от положения равновесия наилучшими параметрами, как было найдено выше, являются  $q_\varphi = 1.5 \cdot 10^{-2}$  град/с и  $q_\omega = 7.9 \cdot 10^{-3}$  град/с<sup>2</sup>.

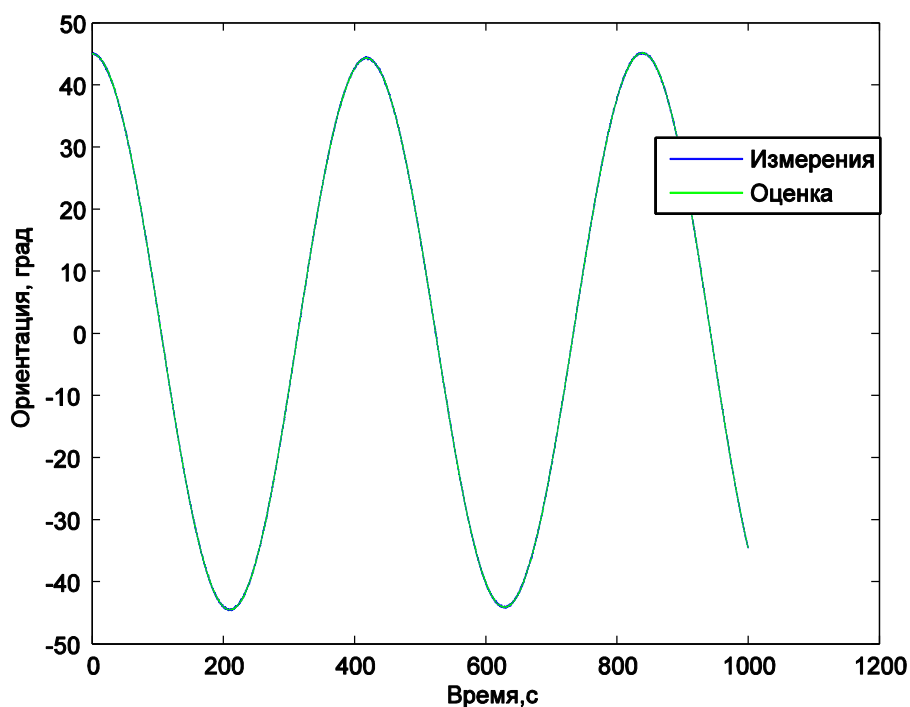


Рис. 2.14. Ориентация макета в зависимости от времени

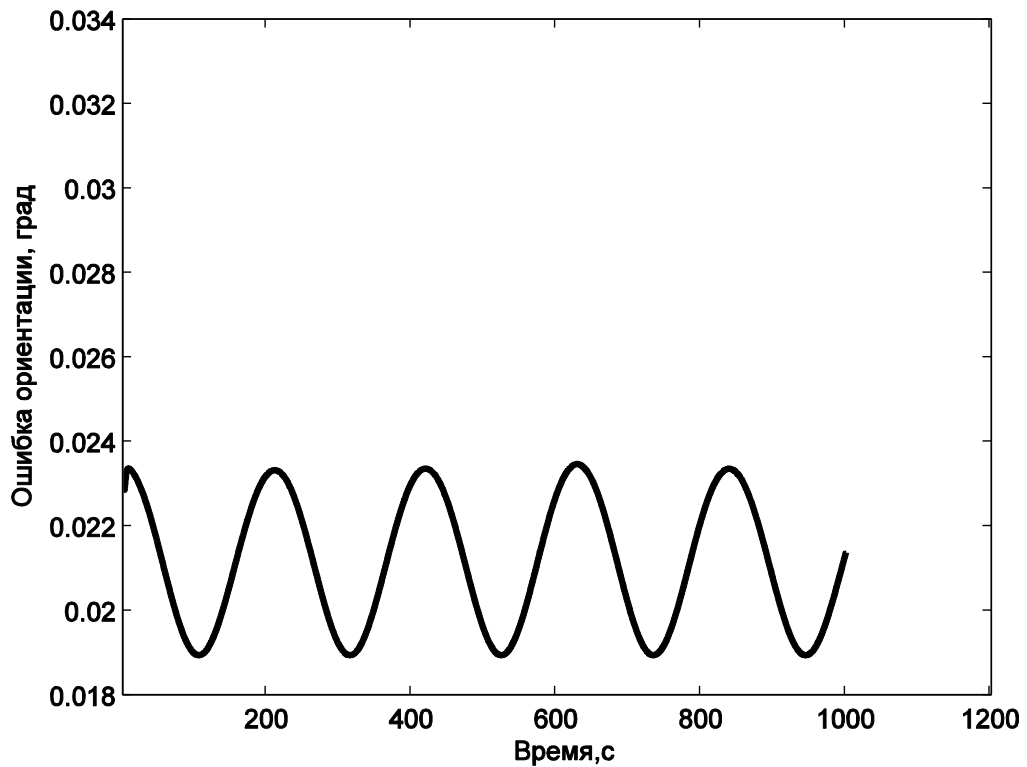


Рис. 2.15. Зависимость ошибки ориентации от времени

Теперь рассмотрим как влияет на точность определения движения макета неточное знание смещение нуля датчика угловой скорости. Пусть модель измерений в нашем случае записывается следующим образом:

$$\mathbf{z}_k = E\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = E\mathbf{v}_k + \mathbf{p}_k.$$

Здесь  $\mathbf{v}_k$  – вектор смещения измерений, который в рассматриваемом случае равен

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\omega \end{pmatrix},$$

$\Delta\omega$  – смещение нуля измерений датчика угловой скорости,  $\mathbf{p}_k$  – вектор ошибок измерений с ковариационной матрицей  $M[\mathbf{p} \mathbf{p}^T] = R$ , равной матрице, используемой фильтром Калмана.

Пусть неучтенное в фильтре Калмана смещение нуля будет порядка  $\Delta\omega = 0.01$  град/с, рассмотрим, насколько оно изменит точность определения движения при возмущении  $d = 10^{-2}$  град/с<sup>2</sup>. На рис.2.16 и 2.17 приведены графики зависимости точности от параметров настройки  $q_\varphi$  и  $q_\omega$ . Эти графики отличаются от рис. 2.6 и 2.7, точка с наименьшей точностью сместилась в  $q_\varphi = 3.2 \cdot 10^{-3}$  град/с и  $q_\omega = 1.7 \cdot 10^{-2}$  град/с<sup>2</sup>. Максимальной точности определения движения в этой точке соответствуют  $\sigma_\varphi = 0.031$ град и  $\sigma_\omega = 0.022$ град/с. Далее построим зависимость наилучшей точности определения движения в зависимости от величины неучтенного смещения нуля датчика угловой скорости. На рис. 2.18 и 2.19 приведены графики точности определения угла поворота и угловой скорости в зависимости от величины смещения нуля.

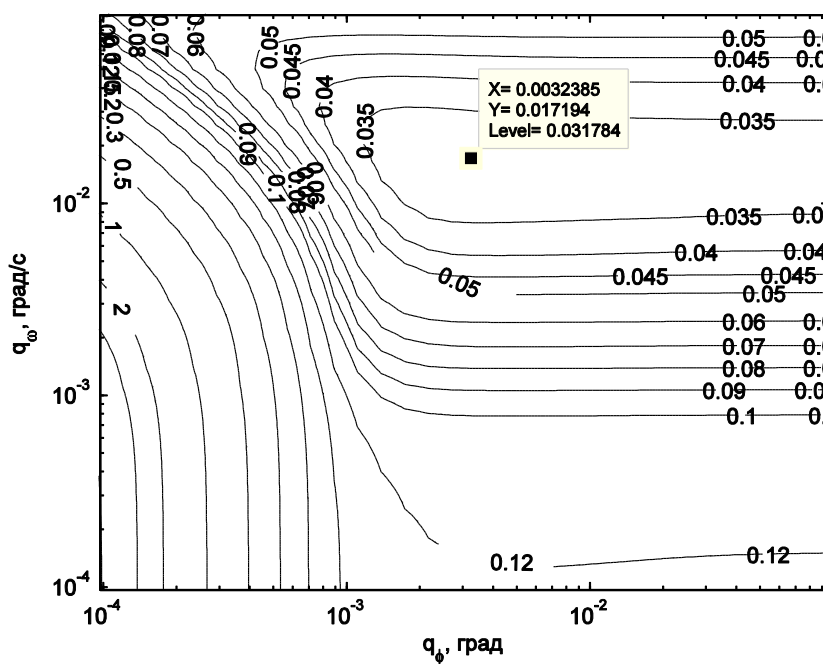


Рис. 2.16. Зависимость точности определения угла поворота от параметров настройки

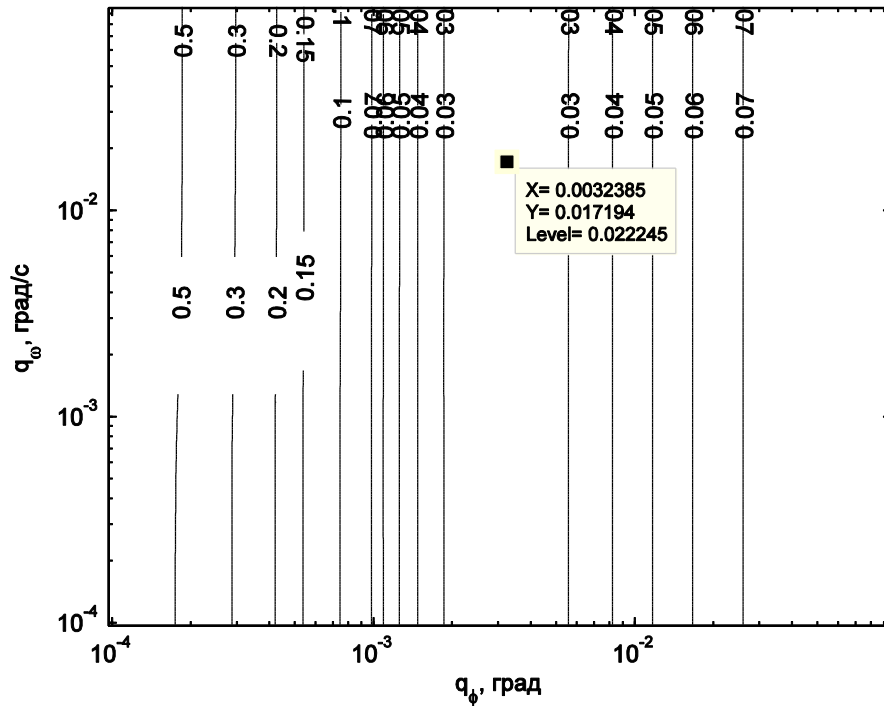


Рис. 2.17. Зависимость точности определения угловой скорости от параметров настройки

Оценить влияние ошибок исполнения управляющих импульсов можно по той же методике. Ошибки исполнения обусловлены задержкой подачи импульса, импульсом последействия, а также неточным знанием величины самого импульса (рис. 2.20). Кроме того, так как управление построено на основе пропорционально-дифференциального регулятора вида

$$u(t) = -(k_\varphi \varphi + k_\omega \omega_3),$$

а управление вентиляторами возможно только в режиме включен/выключен, то необходимое управление  $u(t)$  модулируется сигналами дискретными сигналами и может принимать значения  $\pm U$  и  $0$ . Это приводит к ошибкам, которые возникают вследствие модуляции. Модуляция производится исходя из того, что

интеграл по времени  $\int_0^T u(t) dt$  приблизительно равен сумме импульсов  $\sum_{i=1}^N U_i \Delta t_i$ ,

где  $N$  – количество импульсов за время  $T$ ,  $U_i = \pm U$ ,  $\Delta t_i$  – длительность  $i$ -го импульса, то есть

$$\int_0^T u(t)dt \approx \sum_{i=1}^N U_i \Delta t_i.$$

Такая модуляция может быть реализована следующим способом. Рассчитывается

интеграл  $\int_{T_{i-1}}^{T_i} u(t)dt$ , и в тот момент, когда его величина будет равна  $U \Delta t_{\min}$ ,

где  $\Delta t_{\min}$  – минимальное время подачи импульса, производится импульс, и после

этого снова считается интеграл  $\int_{T_{i-1}}^{T_i} u(t)dt$ . Или можно подавать импульсы с не-

которой заданной периодичностью, при этом длительность каждого импульса  $\Delta t_{\min}$  будет считаться, исходя из равенства

$$\Delta t_{\min} = \frac{\int_{T_{i-1}}^{T_i} u(t)dt}{U},$$

где  $T_i - T_{i-1} = \Delta t$  – периодичность подачи импульсов. Пример такой модуляции представлен на рис. 2.21.

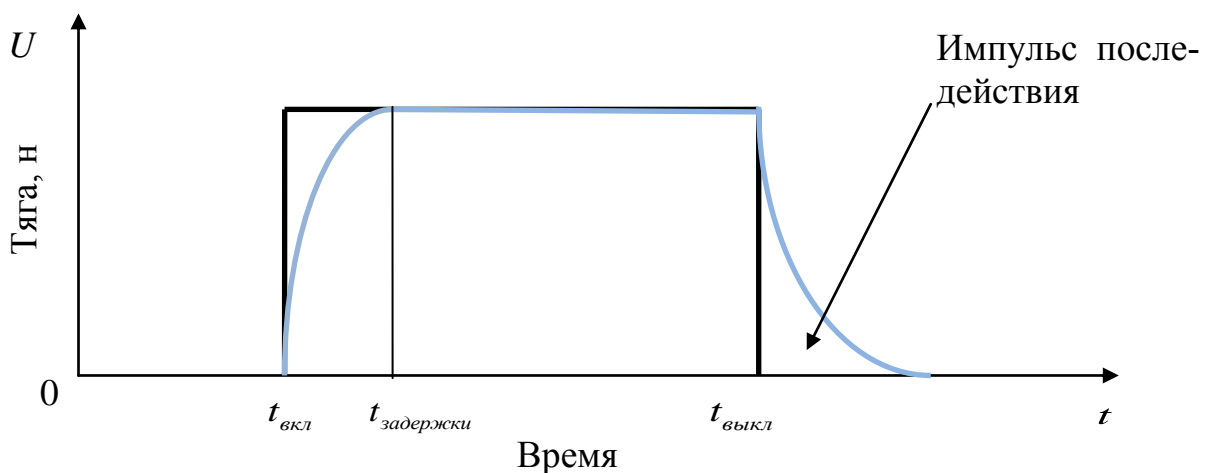


Рис. 2.20. График одиночного импульса

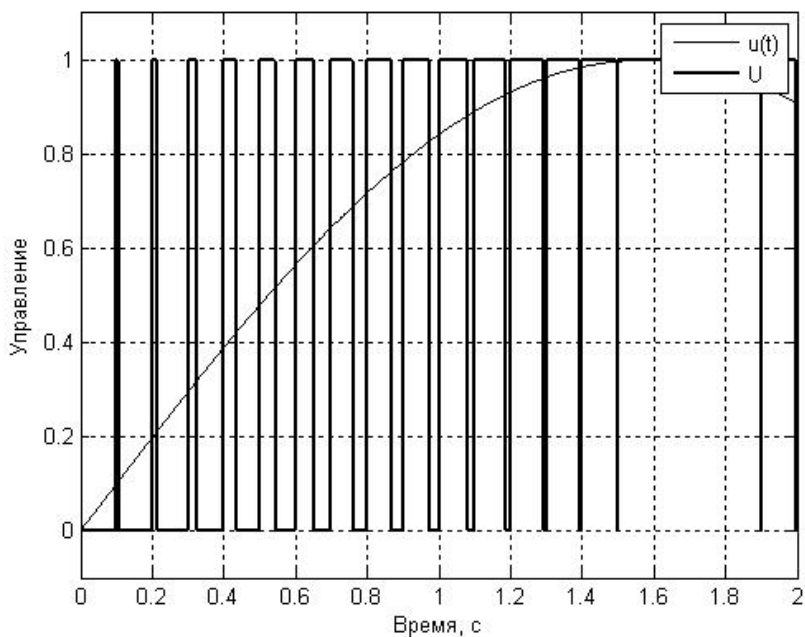


Рис. 2.21. Модуляция сигнала  $u(t)$  с помощью импульсов  $U$

Оценить влияние ошибок исполнения на точность определения движения можно, например, по графикам на рис. 2.10 и 2.11. При заданном уровне ошибки исполнения  $d$  наилучшая ошибка будет соответствовать значению на рис. 2.10 и 2.11.

#### 2.4. Лабораторные испытания алгоритма определения движения макета

Рассмотрим схему макета системы ориентации на лопастных двигателях, созданного на кафедре теоретической механики в МФТИ [43]. Макет представляет собой автономный прибор, включающий в себя систему электропитания, систему определения ориентации, систему управления ориентацией и систему связи [44]. Схема макета изображена на рис.2.22, внешний вид макета – на рис.2.23. Подробнее о стенде можно узнать из Приложения №1.

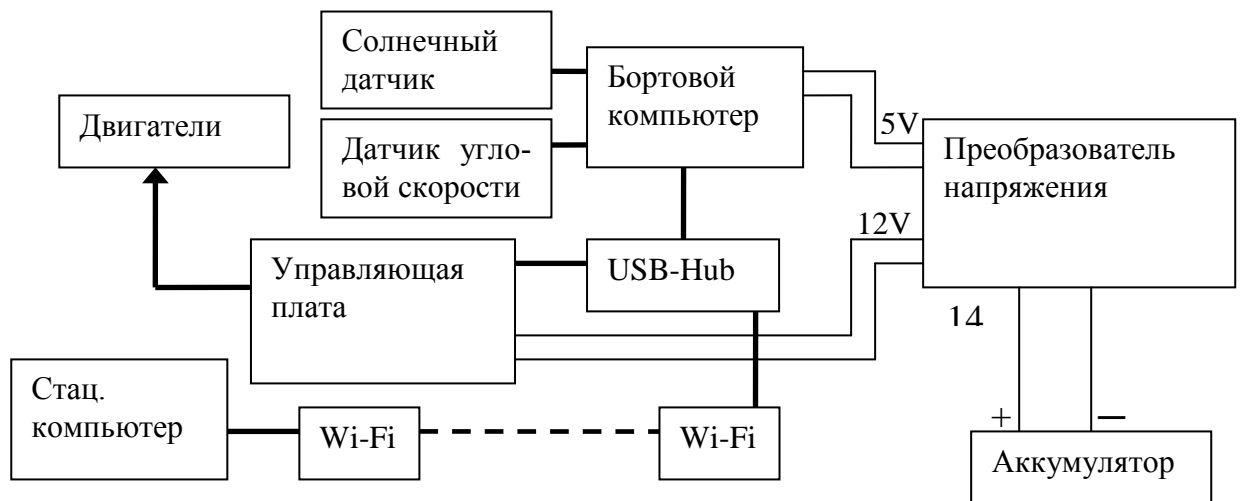


Рис. 2.22. Схема макета

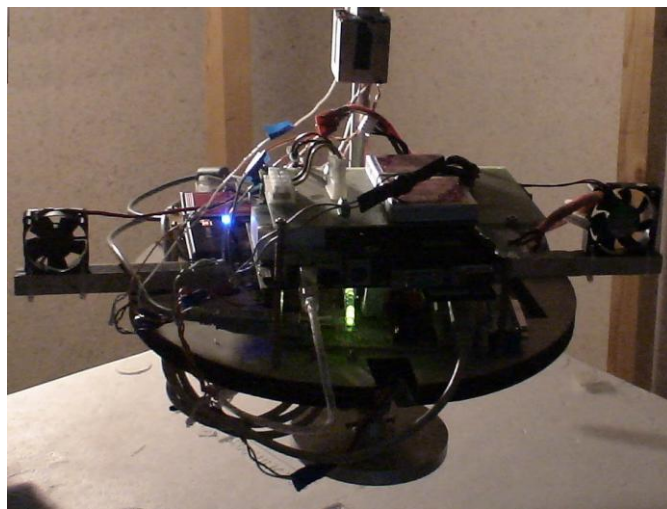


Рис. 2.23. Внешний вид макета

Для проведения исследования алгоритма определения движения макета сначала с помощью метода наименьших квадратов были найдены параметры модели движения макета вокруг вертикальной оси [45]:

$$J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\varphi = \pm \frac{1}{2}RS\rho(V_e^2 - V_0^2), \quad \dot{\varphi} = \omega. \quad (2.9)$$

Здесь  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения;  $\delta$  – коэффициент вязкого трения тела о воздух;  $\sigma$  – коэффициент упругости струны; точкой обозначена операция дифференцирования по времени  $t$ ,  $V_0$  – скорость воздуха до входа в вентилятор,  $V_e$  – скорость воздуха после выхода из вентилятора,  $\rho$  – плотность воздуха,  $R$  – расстояние от оси вращения тела вокруг вертикали до

вентилятора. Знак “+” или “-” выбирается в зависимости от того, положительный или отрицательный момент создается двигателем.

Перейдем к безразмерным угловой скорости  $\Omega$  и времени  $\tau$  по формулам  $\omega = \frac{V_e}{R} \Omega$ ,  $t = \frac{R}{V_e} \tau$  и введем безразмерные параметры [46]

$$k = \pm \frac{1}{2} \frac{\rho S R^3}{J}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\delta R}{J V_e}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma R^2}{J V_e^2}. \quad (2.10)$$

Тогда уравнение (2.9) принимает вид

$$\Omega' + \varepsilon_1 \Omega + k \Omega^2 + \varepsilon_2 \varphi = k \quad (2.11)$$

Перейдем к решению уравнения (2.11) в частных случаях. Будем считать, что

$$|k| \gg \varepsilon_1, |k| \gg \varepsilon_2 \quad (2.12)$$

т. е. в присутствии управления пренебрегаем моментом вязкого трения тела о воздух и моментом от скручивания струны. В этом случае уравнение (2.11) принимает вид [47]

$$\Omega' = k - k \Omega^2$$

Его решение записывается следующим образом:

$$\Omega = \frac{D \exp(2k\tau) - 1}{D \exp(2k\tau) + 1}.$$

Переходя обратно к размерным величинам и переменным, имеем

$$\omega = A \frac{D \exp(2Bt) - 1}{D \exp(2Bt) + 1} \quad (2.13)$$

где  $A = \frac{V_e}{R}$ ,  $B = k \frac{V_e}{R}$ ,  $D = \frac{V_e + \omega_0 R}{V_e - \omega_0 R}$ .

После проведения экспериментов, с помощью метода наименьших квадратов, получены параметры моделей движения  $A$  и  $B$ , сведенные в табл. 4.1.

Здесь  $\Phi(A, B) = \sum_k (\omega_k - \tilde{\omega}_k)^2$  – значение суммы разности квадратов измерений



датчика угловой скорости  $\tilde{\omega}$  и значений  $\omega$ , полученных с помощью модели (2.13).

Табл. 2.1 Параметры моделей лопастных двигателей

Параметр	1-й двигатель	2-й двигатель
$A$	3.75	-3.67
$B$	0.016	0.015
$\Phi(A, B)$	$0.50 \text{ (рад/с)}^2$	$0.71 \text{ (рад/с)}^2$

На рис.2.24 и 2.25 представлены графики измерений угловой скорости и угловой скорости, полученной по модели движения с параметрами из табл. 2.1, для 1-го и 2-го вентиляторов, соответственно.

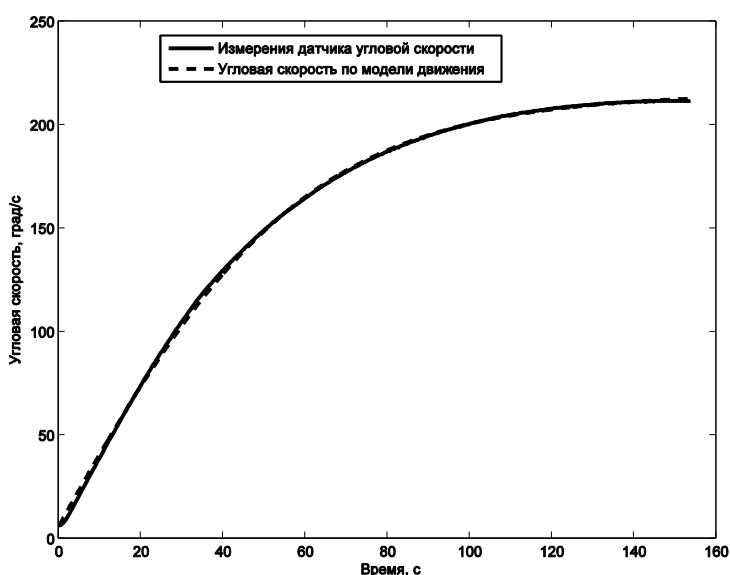


Рис. 2.24. Графики измерений угловой скорости и угловой скорости, полученной по моделям движения для 1-го вентилятора

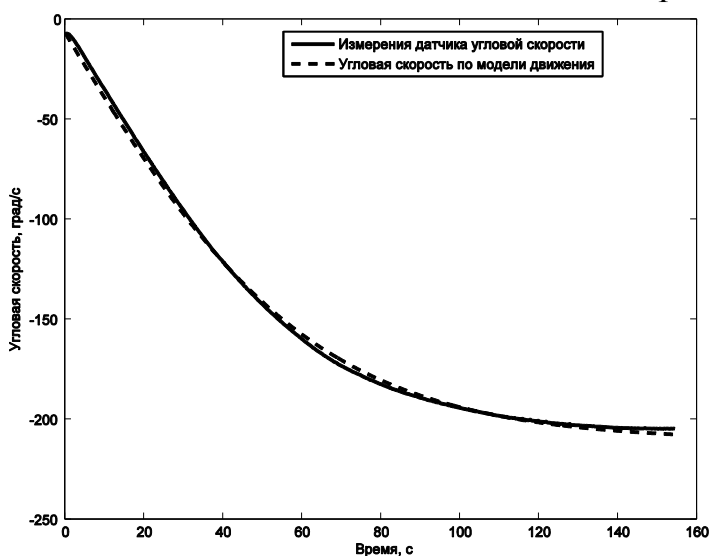


Рис. 2.25. Графики измерений угловой скорости и угловой скорости, полученной по модели движения для 2-го вентилятора

По полученным измерениям угловой скорости с помощью метода наименьших квадратов были получены параметры свободного движения [48]

$$\tilde{\varepsilon}_1 = 0.0022, \tilde{\varepsilon}_2 = 0.0002,$$

где  $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \frac{V_e}{R}, \tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \frac{V_e^2}{R^2}.$

Далее, используя соотношения (2.10) и величины параметров из табл. 4.1 можно проверить правильность предположений (2.12):

$$|k| \gg \varepsilon_1, |k| \gg \varepsilon_2.$$

Таким образом, например, для модели на основе закона Бернулли для 1-го вентилятора:

$$k = B / A = 4,2 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1 / A = 5,8 \cdot 10^{-4}, \varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_2 / A = 5,3 \cdot 10^{-5},$$

то есть предположения (2.12) выполнены, отличие модуля  $k$  на порядок от  $\varepsilon_1$  и на два порядка от  $\varepsilon_2$ .

На рис.2.26 представлен график измерений угловой скорости во время свободного движения и угловая скорость, полученная по модели свободного движения. Модельные значения несколько отличаются от измеренных, так как на тело, подвешенное на струне, действуют некоторые возмущения, неучтенные в модели движения. Но, в целом, по характеру кривой видно, что в системе наблюдаются затухающие колебания, что позволяет с помощью метода наименьших квадратов оценить параметры свободного движения.

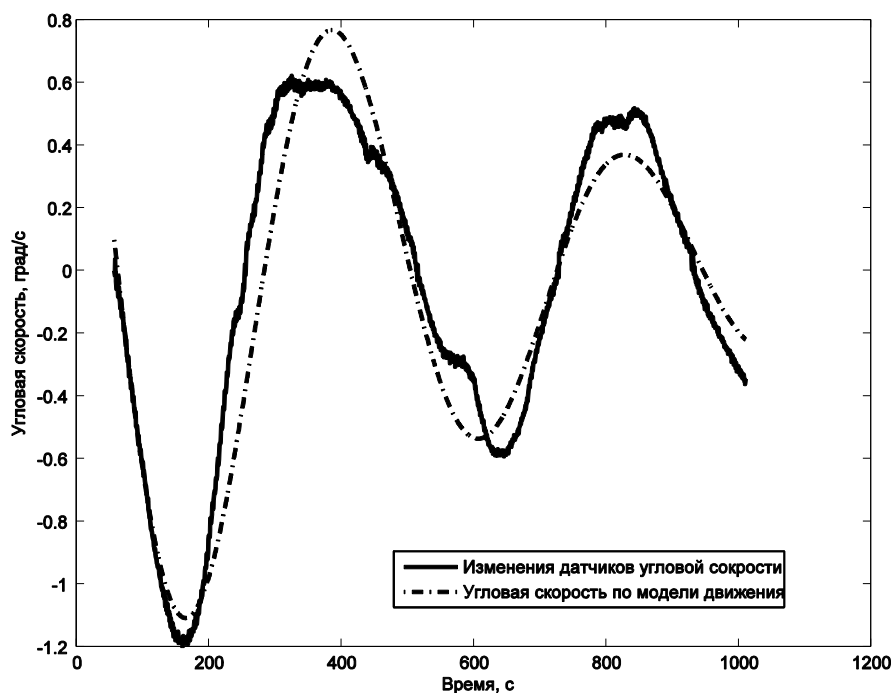


Рис. 2.26. График измерений угловой скорости и угловая скорость, полученная по модели свободного движения

Проведем сначала эксперимент со свободным движением макета. На рис. 2.27 приведен график угла макета в зависимости от времени, а на рис. 2.28 — график угловой скорости макета от времени.

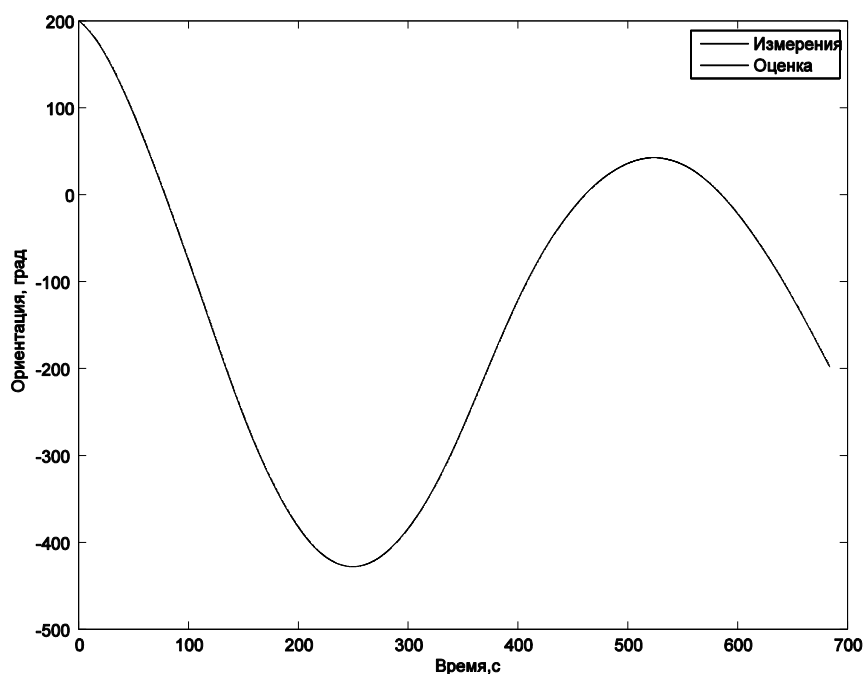


Рис. 2.27. Зависимость ориентации макета от времени

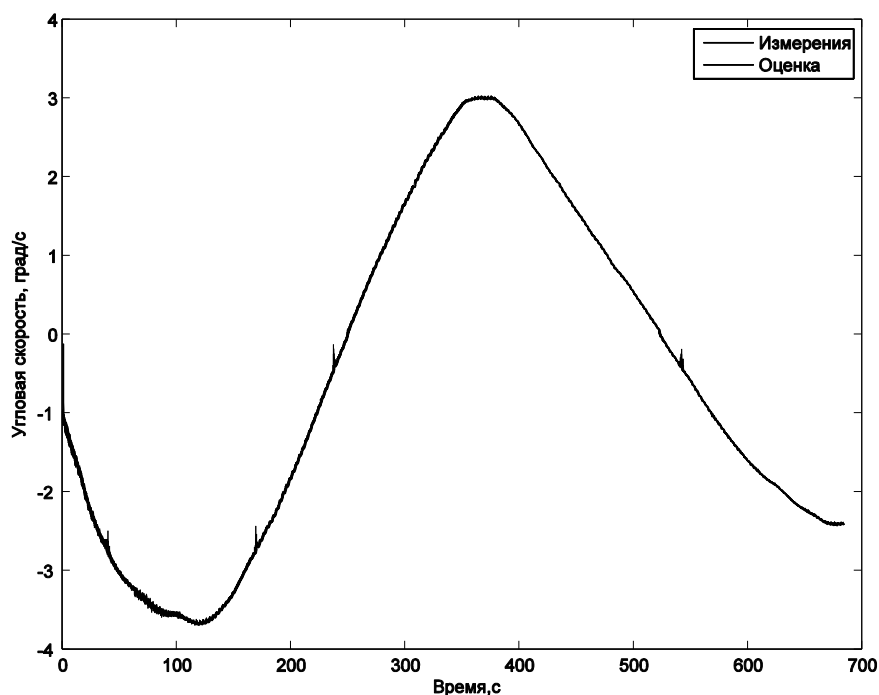


Рис. 2.28. Зависимость угловой скорости макета от времени

На рис. 2.29 и 2.30 представлены графики разности измерений ориентации и угловой скорости и их оценок, с помощью которых можно судить о точности оценок фильтра Калмана. Как видно из графиков ошибка максимальна при максимальном отклонении макета. При отклонении на угол 200 град, что соответствует уровню возмущений  $d = 0.04$  град/с<sup>2</sup>, ошибка определения угла равна  $\sigma_\varphi = 0.035$ град и  $\sigma_\omega = 0.009$ град/с. В рассматриваемом эксперименте смещение нуля датчика не превышало значения  $\Delta\omega = 0.005$  град/с. Если сравнить эти значения со значениями, которые получаются из рис. 2.10 и 2.11, можно убедиться в хорошем соответствии эксперимента со значением, полученным теоретически.

Заметим, что во время проведения эксперимента наблюдались малые колебания макета относительно горизонтальной оси, что сказывалось на измерениях датчика угловой скорости (рис. 2.31). Однако, так как величина этих возмущений была мала по сравнению с возмущением со стороны кручения нити, то они не сильно повлияли на точность определения движения.

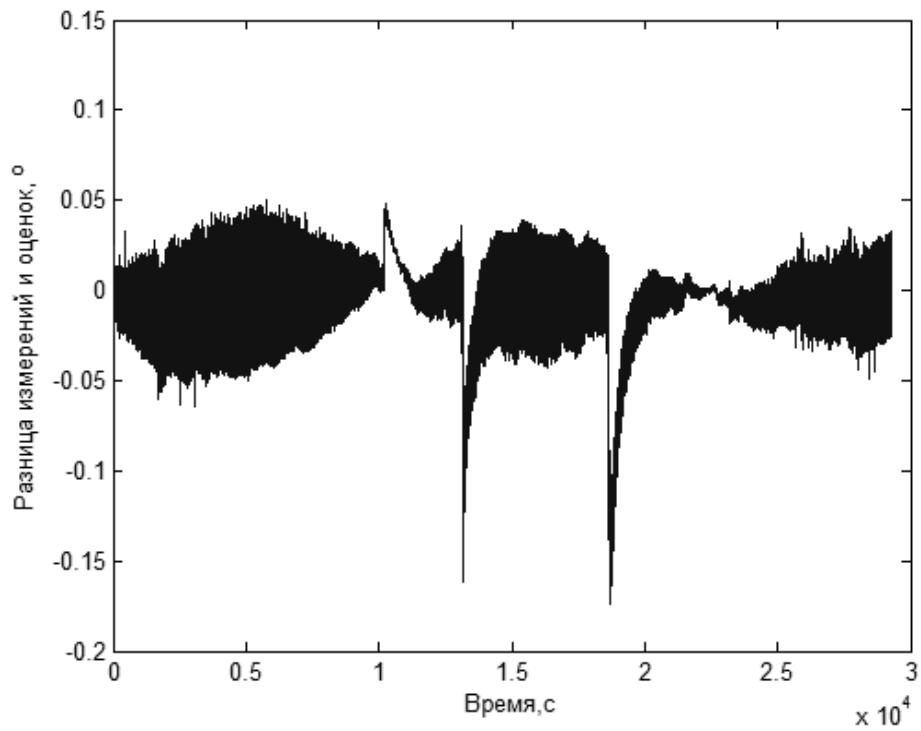


Рис.2.29. Разница измерений солнечного датчика и оценок вектора состояния

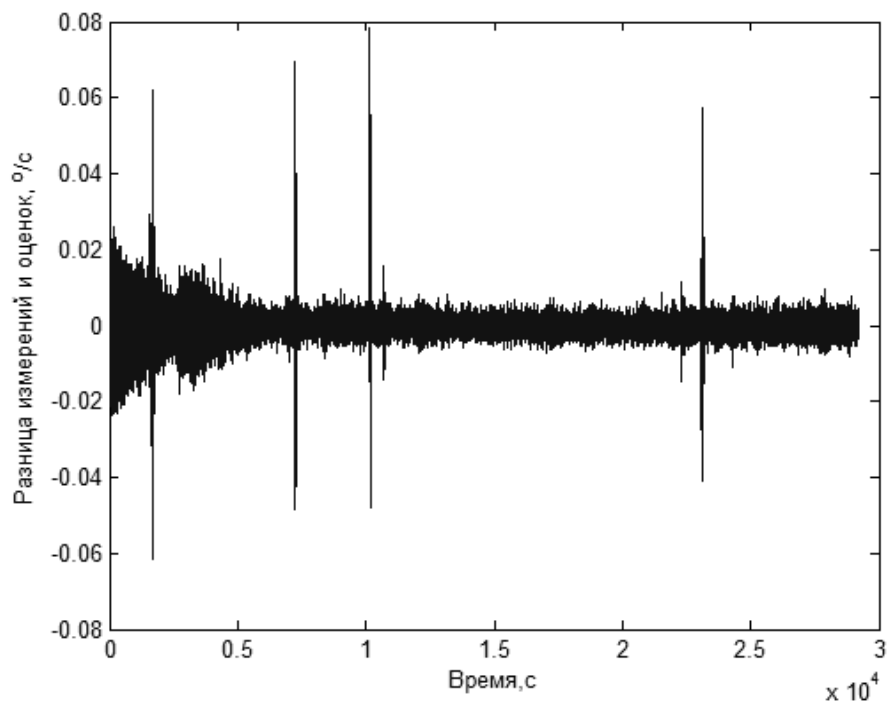


Рис. 2.30. Разница измерений датчика угловой скорости и оценок

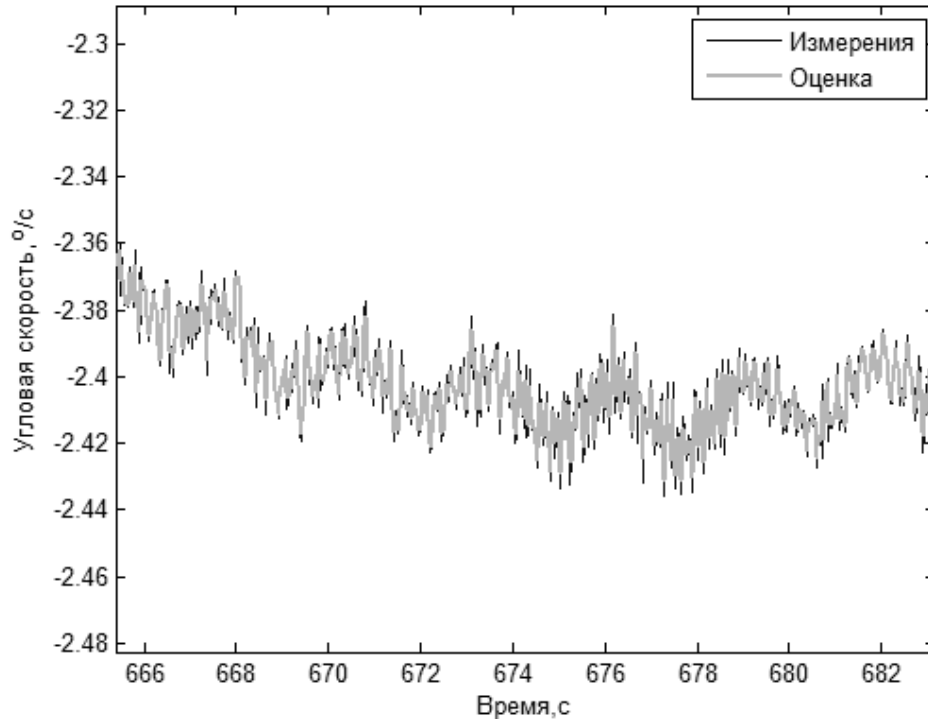


Рис. 2.31. Пример влияния возмущений на движение макета

Теперь рассмотрим пример работы алгоритма определения движения во время управления макетом. Ошибка знания величины импульса, который вычисляется по формуле из уравнения движения (2.9), оценивается из точности определения параметров лопастных двигателей  $A$  и  $B$ , представленных в табл. 2.1, и составляет  $d = 0.01$  град/с. Однако вследствие инерционности лопастей вентиляторные двигатели имеют достаточно большой импульс последствия, который можно аппроксимировать возмущением постоянной величины  $d = 0.02$  град/с на протяжении 1 с.

При задании коэффициентов пропорционально-дифференциального регулятора, обеспечивающих максимальную степень устойчивости  $k_\varphi = 0.01\text{с}^{-2}$ ,  $k_\omega = 0.2\text{с}^{-1}$ , траектория движения близка к экспоненциальной, приходит в заданную точку на фазовой плоскости (см. рис. 2.32) за время приблизительно 50 с. График управления представлен на рис. 2.33. Точность поддержания составляет 1 град по положению и 0.2 град/с по угловой скорости. Одна-

ко достаточно сложно оценить точность определения движения. Среднеквадратичную ошибку оценки фильтра можно оценить по величине разброса оценок, а смещение оценки по её соответствию измерениям. Например, на рис. 2.34 представлен график измерений угловой скорости и её оценок с помощью фильтра Калмана, а на рис. 2.35 – график их разности. Из рис. 2.35 можно грубо определить, что точность оценок фильтра близка к  $\sigma_{\omega} = 0.01$ град/с. Аналогично, можно найти точность определения ориентации, которая составляет порядка  $\sigma_{\varphi} = 0.1$ град. Если учесть, что возмущения были порядка  $d = 0.02$  град/с, то точность определения угловой скорости согласуется с рис. 2.11. Несоответствие точности определения ориентации с рис. 2.10 на примерно 0.05 град можно объяснить достаточно грубым способом определения точности оценок и наличием дополнительно смещения нуля датчика угловой скорости  $\Delta\omega = 0.01$  град/с.

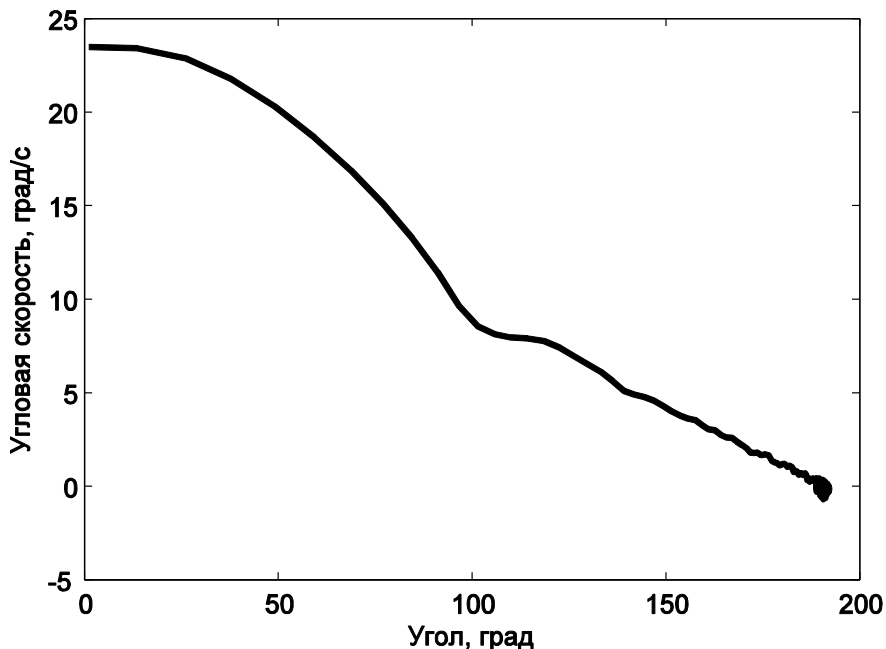


Рис.2.32. Траектория на фазовой плоскости при работе ПД-регулятора с коэффициентами, обеспечивающими максимальную степень устойчивости

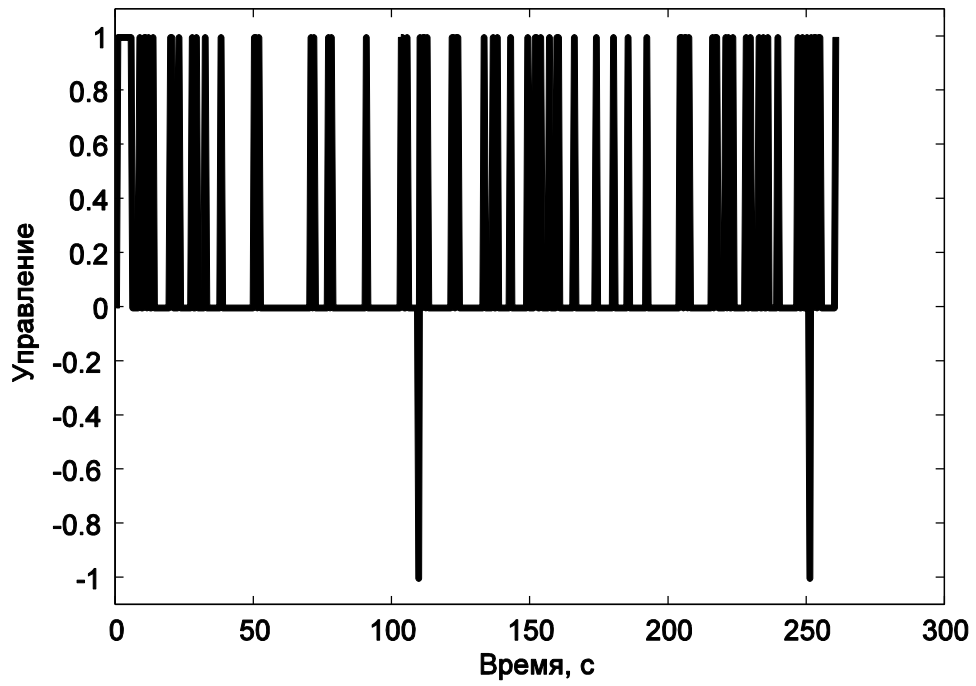


Рис.2.33. Управление в зависимости от времени при работе ПД-регулятора

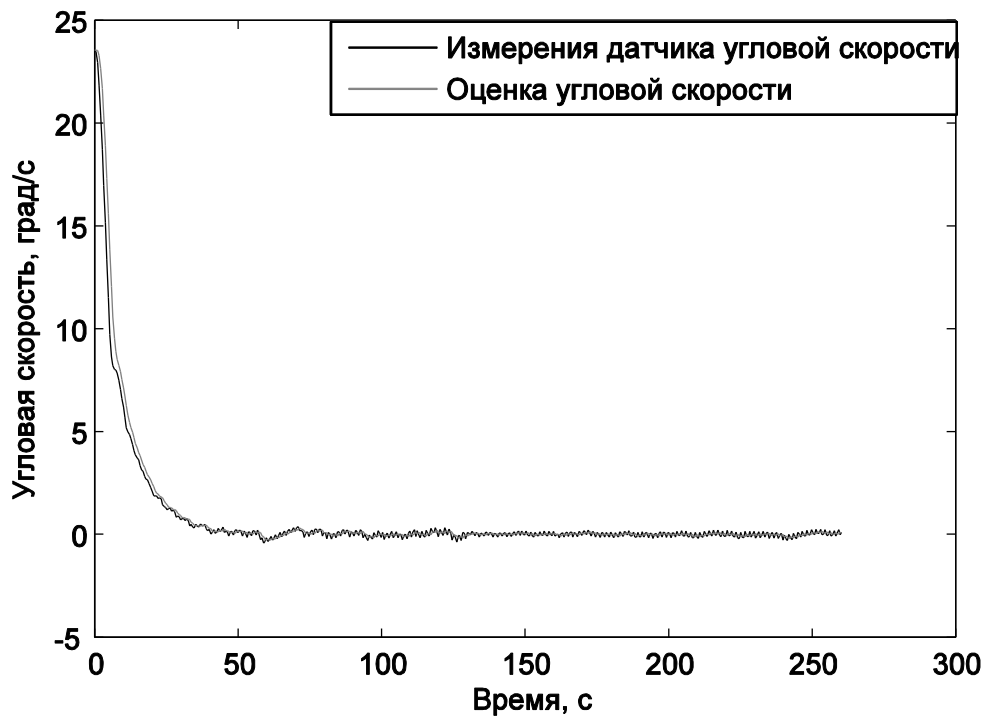


Рис. 2.34. Измерения угловой скорости и её оценка во время стабилизации



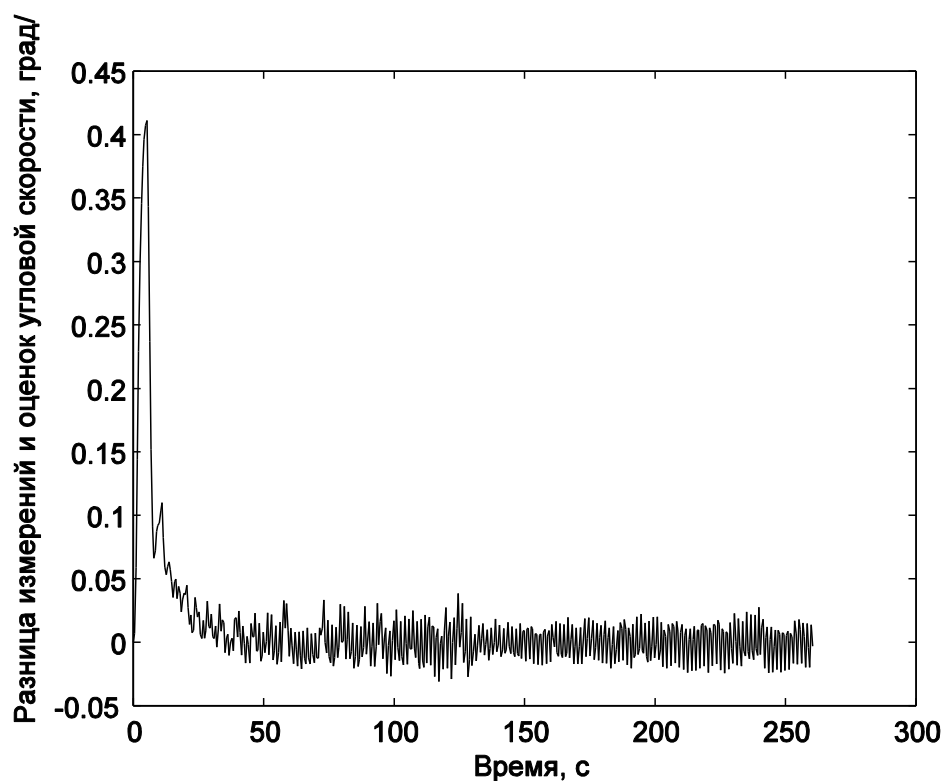


Рис. 2.35. Разница измерения угловой скорости и её оценок

## 2.5. Заключение к главе 2

В главе 2 продемонстрировано применение методики, разработанной в главе 1, для исследования и настройки алгоритма определения движения макета системы ориентации, подвешенного на струне. Было показано, что численные и экспериментальные данные хорошо согласуются с точностью, которая определена с помощью разработанной методики. Исследования показали, что точность оценок вектора состояния макета сильно зависит от параметров настройки, которые можно выбрать таким образом, чтобы минимизировать эту ошибку при заданных неучтенных факторах, таких как возмущение от упругого кручения струны, ошибок исполнения управления и неучтенном смещении нуля измерения датчика угловой скорости.

Проверка методики на задаче настройки алгоритма для определения движения макета системы ориентации позволяет надеяться на успешное применение этой методики для алгоритмов, использующихся на микроспутниках.

### **3. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОСПУТНИКА "ЧИБИС-М"**

В настоящей главе рассматривается алгоритм определения движения микроспутника "Чибис-М", основанный на измерениях солнечного датчика и магнитометра. Для исследования точности определения движения микроспутника и настройки алгоритма применяется методика, разработанная в главе 1. Рассматривается влияние неучтенных в модели движения моментов и неточности знания модели измерений на точность и время сходимости оценок фильтра Калмана. Также исследуется зависимость точности определения движения от угла между направлением на Солнце и вектором геомагнитного поля.

#### **3.1. Микроспутник "Чибис-М". Постановка задачи**

Микроспутник "Чибис-М" (разработка Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН)) был выведен на орбиту 25 января 2012 г. Спутник предназначен для исследования явлений, происходящих во время грозовых разрядов в атмосфере.

Система ориентации реализована специалистами Инженерно-технологического центра "СканЭкс". Разработка и исследование алгоритмов ориентации проводились специалистами ИПМ им. М.В.Келдыша РАН.

Исходя из задач, решаемых спутником, она должна обеспечивать следующие режимы его работы:

- демпфирование угловой скорости вращения вокруг центра масс после его отделения от носителя, а также в случае нештатной ситуации;
- захват/восстановление ориентации, то есть перевод микроспутника из неориентированного положения к ориентации в орбитальной системе координат (ОСК) после завершения режима демпфирования его угловой скорости;

- рабочий режим: трехосная ориентация микроспутника в ОСК таким образом, что оси связанной с микроспутником системы координат (связанная система координат) совпадают с одноименными осями ОСК.

Режим ориентации в заданном направлении в инерциальной системе координат (ИСК), используется в частности, для ориентации нормалей к поверхностям солнечных батарей на Солнце.

Для демпфирования начальной угловой закрутки используется определение угловой скорости на основе измерений магнитометра. В режиме захвата/восстановления ориентации определение ориентации осуществляется с помощью локального алгоритма TRIAD (Three Axis Attitude Determination Algorithm) по измерениям солнечного датчика и магнитометра. В рабочем режиме требуется поддержание ориентации микроспутника в орбитальной системе координат с точностью 0.1 град, поэтому в этом режиме требуется определение движения с максимально возможной точностью, а в качестве алгоритма определения движения был выбран фильтр Калмана. Исследованию точности и времени сходимости оценок этого алгоритма посвящена настоящая глава.

Определим указанные системы координат. С аппаратом жестко связана ССК  $Oxyz$ , её оси совпадают с главными центральными осями инерции микроспутника. Орбитальная система координат строится следующим образом: начало находится в центре масс аппарата  $O$ , ось  $X_3$  направлена от центра Земли, ось  $X_2$  – по нормали к орбите аппарата, ось  $X_1$  дополняет тройку до правой ортогональной. Центр ИСК находится в центре масс Земли, ось  $\tilde{X}_1$  совпадает с направлением на точку весеннего равноденствия, ось  $\tilde{X}_3$  совпадает с осью вращения Земли, ось  $\tilde{X}_2$  дополняет тройку до правой ортогональной.

Рассмотрим состав системы ориентации микроспутника "Чибис-М". Она состоит из датчиков определения ориентации, исполнительных органов и блока управления. Расположение элементов системы ориентации в теле спутника

"Чибис-М" показано на рис.3.1. Внешний вид микроспутника "Чибис-М" приведен на рис.3.2.

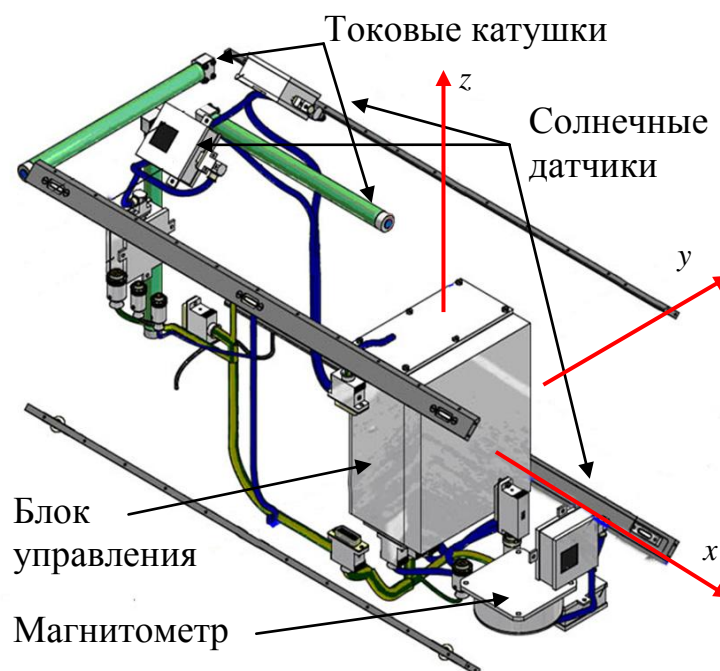


Рис. 3.1. Расположение элементов системы ориентации и стабилизации в теле микроспутника «Чибис-М»



Рис. 3.2. Микроспутник «Чибис-М». Фото сделано в Специальном конструкторском бюро космического приборостроения Института космических исследований РАН

В качестве датчиков определения ориентации в составе микроспутника используются один трехкомпонентный магнитометр HMR 2300R, пять солнечных датчиков DSS3 и три одноосных датчика угловой скорости ADIS 16130. Основные характеристики датчиков приведены в табл.3.1.

Табл. 3.1 Характеристики датчиков

Характеристика	Магнитометр	Солнечный датчик	Датчик угловой скорости
Диапазон измерения	$\pm 200\ 000$ нТ	$\pm 45$ град	$\pm 250$ град/с
Случайное отклонение ( $\sigma$ )	50 нТ	0.1 град	0.01 град/с

В качестве исполнительных элементов системы управления ориентацией в составе микроспутника используются три токовые катушки и шесть управляющих двигателей-маховиков.

Токовые катушки индуцируют управляемый дипольный магнитный момент, который при взаимодействии с внешним магнитным полем создаёт управляющий механический момент. Токовые катушки представляют собой соленоиды с обмоткой из медной проволоки и пермалловым сердечником. Максимальный дипольный момент каждой катушки составляет  $3.2\ \text{А}\cdot\text{м}^2$ .

Двигатели-маховики выполнены на основе бесконтактного двигателя постоянного тока с управляемым моментом и предназначены для использования в качестве исполнительного органа в системах ориентации и стабилизации микроспутников. Электродвигатель обеспечивает вращение ротора-маховика, его торможение. Величина создаваемого им вращающего (управляющего) момента может плавно меняться в заданном диапазоне в соответствии с сигналом управления, подаваемым на вход двигателя-маховика. Механический момент от управляющих двигателей - маховиков создаётся при изменении скорости их вращения и находится в диапазоне  $-0,4\dots+0,4\ \text{мН}\cdot\text{м}$  в лабораторных условиях.

Скорость вращения маховиков при этом изменяется в диапазоне  $-20\,000\dots+20\,000$  об/мин.

Блок управления системой ориентации и стабилизации (рис.3.3) является связующим звеном между датчиками и органами управления, а также между системой ориентации и стабилизации и внешними устройствами управления. Основные функции блока – сбор и обработка показаний датчиков системы с использованием алгоритмов определения ориентации, выработка с помощью алгоритмов управления команд для элементов системы стабилизации, приём команд от внешнего бортового контроллера управления микроспутника, передача данных в каналы телеметрии спутника. Основной составной частью является бортовой компьютер, который основан на плате LPCN2294, содержащей процессор, внешнюю ОЗУ размером 1 МБ, энергонезависимую флэш-память емкостью 4 МБ.



Рис. 3.3. Внешний вид блока управления системой ориентации

### **3.2. Модель движения микроспутника**

Для того чтобы использовать фильтр Калмана, необходимо иметь математическую модель движения микроспутника [49]. Однако предполагается, что фильтр Калмана будет работать на бортовом компьютере космического аппарата, обладающего весьма ограниченными вычислительными ресурсами. Поэтому

имеет смысл построить достаточно грубую модель движения аппарата, учитывающую только основные моменты, действующие на тело. По этой причине учтем только влияние гравитационного момента и управляющего момента.

В качестве исполнительных органов на микроспутнике "Чибиc-M" используются маховики и магнитные катушки. Однако в режиме ориентации микроспутника в орбитальных осях используются только маховики. Закон управления маховиками основан на пропорционально-дифференциальном регуляторе.

На микроспутнике установлены набор солнечных датчиков, магнитометр и три одноосных микро электронно-механических датчика (МЭМС) угловой скорости. Однако, так как в стабильности датчиков МЭМС в орбитальном полете не было уверенности, было принято решение не использовать измерения датчиков угловой скорости на освещенном участке орбиты, а построить алгоритм определения ориентации на основе только солнечных датчиков и магнитометра [50]. Однако, эта пара датчиков позволяет определить ориентацию только, если аппарат находится на солнечной стороне орбиты и когда вектор направления на Солнце не коллинеарен вектору магнитного поля Земли.

Для задания движения микроспутника будем использовать вектор состояния, состоящий из кватерниона поворота ССК относительно ОСК и вектор угловой скорости ССК относительно ИСК. Для получения вектора угловой скорости вращения аппарата относительно ОСК требуется вычесть из неё орбитальную угловую скорость.

В векторном виде динамическое уравнение движения КА можно записать в следующем виде:

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{N}_{ctrl} + \mathbf{N}_{gg} - \boldsymbol{\omega} \times (J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}). \quad (3.1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости ССК относительно ИСК,  $J$  – тензор моментов инерции относительно главных осей (они совпадают с осями ССК),  $\mathbf{N}_{ctrl}$  – управляющий момент,  $\mathbf{N}_{gg}$  – гравитационный момент,  $\mathbf{h}$  – кинетический момент маховиков.

Управляющий момент обусловлен изменением кинетического момента маховиков  $\mathbf{h}$ :

$$\mathbf{N}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{h}}.$$

Управляющий момент вычисляется таким образом, чтобы стабилизировать микроспутник в ОСК и компенсировать гироскопический момент:

$$\dot{\mathbf{h}} = k_\alpha \boldsymbol{\lambda} + k_\omega \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}), \quad (3.2)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}$  – векторная часть кватерниона перехода из ОСК в ССК  $\Lambda = [\boldsymbol{\lambda} \quad \lambda_4]$ ,  $\lambda_4$  – скалярная часть кватерниона,  $k_\alpha$ ,  $k_\omega$  – параметры пропорционально-дифференциального регулятора управления маховиками.

Гравитационный момент определяется выражением

$$\mathbf{N}_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} (\boldsymbol{\eta} \times J\boldsymbol{\eta})$$

где  $\mu = GM_s$  – гравитационная константа для Земли,  $R$  – расстояние от КА до центра Земли,  $\boldsymbol{\eta}$  – единичный вектор направления от центра Земли, записанный в связанной СК.

Таким образом, динамическое уравнение (3.1) выглядит следующим образом:

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -k_\alpha \boldsymbol{\lambda} - k_\omega \boldsymbol{\omega} + \frac{3\mu}{R^3} (\boldsymbol{\eta} \times J\boldsymbol{\eta}). \quad (3.3)$$

Кинематические уравнения имеют вид

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Omega \Lambda, \quad (3.4)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_z & -\tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_x \\ -\tilde{\omega}_z & 0 & \tilde{\omega}_x & \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_x & 0 & \tilde{\omega}_z \\ -\tilde{\omega}_x & -\tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_z & 0 \end{pmatrix},$$



$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\tilde{\omega}_x \ \tilde{\omega}_y \ \tilde{\omega}_z]^T$  – вектор угловой скорости ССК относительно ОСК, который вычисляется по формуле

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2,$$

$\omega_0$  – орбитальная скорость,  $\mathbf{e}_2$  – орт нормали к плоскости орбиты, записанный в ССК.

Для фильтра, основанного на измерениях солнечного датчика и магнитометра, в качестве вектора оцениваемых величин возьмём векторную часть кватерниона  $\boldsymbol{\lambda}$  и угловую скорость связанной СК относительно инерциальной СК  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\lambda} \ \boldsymbol{\omega}]^T$ . Теперь линеаризуем динамическое и кинематическое уравнения движения в окрестности текущего состояния. Запишем уравнения (3.3) и (3.4) в виде

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = F(t) \delta \mathbf{x}(t),$$

где  $\delta \mathbf{x}(t)$  – малое приращение вектора состояния, а  $F(t)$  – линеаризованная матрица уравнения движения в окрестности состояния  $\mathbf{x}(t)$ .

Линеаризация, по определению, это малое отклонение от точки, в окрестности которой мы рассматриваем уравнения. Вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  можно записать как сумму оцениваемого значения вектора  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и отклонения  $\delta \mathbf{x}(t)$ . Таким образом, вектор состояния равен:

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \delta \mathbf{x}(t). \quad (3.5)$$

Линеаризуем кинематические уравнения (3.4). Однако в уравнении (3.5) сложение кватернионов подразумевает собой сложение вращений, а сложение вращений, выраженных кватернионами, есть произведение кватернионов

$$\Lambda = \delta \Lambda \hat{\Lambda}. \quad (3.6)$$

Из уравнения (3.6) выразим приращение кватерниона

$$\delta \Lambda = \Lambda \hat{\Lambda}^{-1}. \quad (3.7)$$

Кинематическое уравнение (3.4) можно переписать в виде

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} Z \Lambda, \quad (3.8)$$

где  $Z = [\tilde{\omega}_x \ \tilde{\omega}_y \ \tilde{\omega}_z \ 0]$  – кватернион. Тогда запишем цепочку равенств, используя выражения (3.7) и (3.8),

$$\frac{d}{dt} \delta \Lambda = \dot{\Lambda} \hat{\Lambda}^{-1} + \Lambda \dot{\hat{\Lambda}}^{-1} = \frac{1}{2} Z \Lambda \hat{\Lambda}^{-1} + \frac{1}{2} \Lambda (\hat{Z} \hat{\Lambda})^{-1}$$

Учитывая, что кватернион  $Z$  имеет нулевую скалярную часть, то используем тот факт, что  $Z^{-1} = -Z$ ,  $Z = \hat{Z} + \delta Z$ . Тогда можно записать

$$\frac{d}{dt} \delta \Lambda = \frac{1}{2} \hat{Z} \delta \Lambda + \frac{1}{2} \delta Z \delta \Lambda - \frac{1}{2} \delta \Lambda \hat{Z}.$$

Это выражение можно переписать в векторно-матричном виде

$$2\delta\dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\tilde{W} & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta\Lambda + \begin{pmatrix} -\delta\tilde{W} & \delta\hat{\omega} \\ -\delta\hat{\omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta\Lambda - \begin{pmatrix} \tilde{W} & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta\Lambda$$

или

$$2\delta\dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2\tilde{W} - \delta\tilde{W} & \delta\hat{\omega} \\ -\delta\hat{\omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta\Lambda,$$

где  $\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_z & -\tilde{\omega}_y \\ -\tilde{\omega}_z & 0 & \tilde{\omega}_x \\ \tilde{\omega}_y & -\tilde{\omega}_x & 0 \end{pmatrix}$  – кососимметрическая матрица. Пренебрегая членами второго порядка, и считая, что скалярная часть кватерниона  $\delta\Lambda = [\delta\lambda \ 1]$  равна единице, получаем линеаризованные кинематические уравнения

$$\frac{d}{dt} \delta\lambda = -\tilde{W} \delta\lambda + \frac{1}{2} \delta\hat{\omega}, \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt} \delta\lambda_4 = 0.$$

Однако угловая скорость должна быть записана в ССК относительно ИСК. Используем выражение

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega_0,$$

где  $\boldsymbol{\omega}_0$  – орбитальная угловая скорость, записанная в ССК. Подставляем его в (3.9)

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\lambda} = -W\delta\boldsymbol{\lambda} + W_0\delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}_0. \quad (3.10)$$

Используем следующие выражения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= A(\boldsymbol{\lambda})\hat{\boldsymbol{\omega}}_0, \\ \delta\boldsymbol{\omega}_0 &= A(\delta\boldsymbol{\lambda})A(\hat{\boldsymbol{\lambda}})\hat{\boldsymbol{\omega}}_0 = A(\delta\boldsymbol{\lambda})\hat{\boldsymbol{\omega}}_0, \\ \delta\hat{\boldsymbol{\omega}}_0 &= (E - 2W_{\delta\boldsymbol{\lambda}})\hat{\boldsymbol{\omega}}_0 = E\hat{\boldsymbol{\omega}}_0 + 2\hat{W}_0\delta\boldsymbol{\lambda}, \end{aligned}$$

где  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_0$  – вектор орбитальной угловой скорости, записанный в ОСК,  $A(\boldsymbol{\lambda})$  – матрица перехода из ОСК в ССК, которая может быть записана через кватернион. Принимая во внимание, что  $\boldsymbol{\omega}_0$  – фактически константа на орбитах, близких к круговым, выражение (3.10) упрощается до следующего:

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\lambda} = -\hat{W}\delta\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}. \quad (3.11)$$

Подчеркнем, что в качестве оцениваемых параметров разумно брать только векторную часть кватерниона, так как скалярная часть вычисляется по формуле

$$\lambda_4 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2}.$$

Теперь проведем линеаризацию динамического уравнения (3.3). Запишем его в виде

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}} = J^{-1}(-k_\alpha\delta\boldsymbol{\lambda} - k_\omega\delta\boldsymbol{\omega} + \delta N_{gg}). \quad (3.12)$$

Запишем уравнение для гравитационного момента в виде

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3}(A(\boldsymbol{\lambda})\hat{\boldsymbol{\eta}} \times JA(\boldsymbol{\lambda})\hat{\boldsymbol{\eta}})$$

где  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  – единичный вектор направления от центра Земли, записанный в ОСК. Согласно (3.6) матрицу перехода можно расписать так:

$$A(\boldsymbol{\Lambda}) = A(\delta\boldsymbol{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}).$$

Или, что то же самое,

$$A(\Lambda) = A(\delta\Lambda)A(\hat{\Lambda}).$$

Тогда перепишем уравнение для гравитационного момента

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} \left( A(\delta\Lambda)A(\hat{\Lambda})\hat{\boldsymbol{\eta}} \times JA(\delta\Lambda)A(\hat{\Lambda})\hat{\boldsymbol{\eta}} \right)$$

или

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} \left( A(\delta\Lambda)\boldsymbol{\eta} \times IA(\delta\Lambda)\boldsymbol{\eta} \right). \quad (3.13)$$

Согласно определению кватерниона в тригонометрическом представлении и так как  $\delta\mathbf{q}$  мал, то справедлива цепочка соотношений

$$\delta\Lambda = \begin{bmatrix} e_1 \sin(\delta\Phi / 2) \\ e_2 \sin(\delta\Phi / 2) \\ e_3 \sin(\delta\Phi / 2) \\ \cos(\delta\Phi / 2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \delta\lambda_1 \\ \delta\lambda_2 \\ \delta\lambda_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

где  $\Phi$  – некоторый угол поворота относительно вектора  $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]$ . Так как матрица перехода может быть записана через компоненты кватерниона в виде

$$A(\Lambda) = (\lambda_4^2 - \|\Lambda\|^2)E + 2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T - 2\lambda_4 W_{\boldsymbol{\lambda}},$$

где

$$W_{\boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

то запишем  $A(\delta\Lambda)$  с учетом (3.14) следующим образом:

$$A(\delta\Lambda) = E - 2W_{\delta\boldsymbol{\lambda}}. \quad (3.15)$$

Подставим это значение в (3.13)

$$N_{gg} = \frac{3\mu}{R^3} \left[ (E - 2W_{\delta\boldsymbol{\lambda}})\boldsymbol{\eta} \times J(E - 2W_{\delta\boldsymbol{\lambda}})\boldsymbol{\eta} \right].$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим линеаризованный гравитационный момент

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} [-\boldsymbol{\eta} \times JW_{\delta\lambda} \boldsymbol{\eta} - W_{\delta\lambda} \boldsymbol{\eta} \times J\boldsymbol{\eta}].$$

Далее, используя равенство

$$W_{\lambda} \boldsymbol{\eta} = -W_{\eta} \boldsymbol{\lambda},$$

запишем

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} (W_{\eta} JW_{\eta} - W_{J\eta} W_{\eta}) \delta \boldsymbol{\lambda}.$$

Таким образом, линеаризованный гравитационный момент имеет вид

$$\delta N_{gg} = \frac{6\mu}{R^3} F_g \delta \boldsymbol{\lambda},$$

где

$$F_g = \begin{pmatrix} (\eta_2^2 - \eta_3^2)(I_2 - I_3) & -\eta_1 \eta_2 (I_2 - I_3) & \eta_3 \eta_1 (I_2 - I_3) \\ \eta_1 \eta_2 (I_3 - I_1) & (\eta_3^2 - \eta_1^2)(I_3 - I_1) & -\eta_3 \eta_2 (I_3 - I_1) \\ -\eta_1 \eta_3 (I_1 - I_2) & -\eta_2 \eta_3 (I_1 - I_2) & (\eta_1^2 - \eta_2^2)(I_1 - I_2) \end{pmatrix},$$

$$J = \text{diag}(I_1, I_2, I_3).$$

Таким образом, собирая воедино уравнения (3.11) и (3.12), получаем динамическую матрицу

$$F = \begin{pmatrix} -W_{\dot{\omega}} & \frac{1}{2} E \\ J^{-1} \left( \frac{6\mu}{R^3} F_g - k_{\alpha} E \right) & -J^{-1} k_{\omega} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

### 3.3. Модель измерений

Условное уравнение вектора измерений в общем случае имеет вид

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^-, t_k) + \mathbf{v}_k.$$

Для микроспутника "Чибиc-M" вектор измерений состоит из вектора магнитного поля  $\mathbf{b}$  и вектора направления на Солнце  $\mathbf{s}$ , записанных в ССК,

$$\mathbf{z}_k = [\mathbf{b}_k \quad \mathbf{s}_k]^T.$$

Вектор  $\mathbf{h}$  можно записать в виде

$$\mathbf{h} = [A(\Lambda_k)\mathbf{b}_o \quad A(\Lambda_k)\mathbf{s}_o]^T,$$

где  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$  – векторы магнитного поля и направления на Солнце, записанные в ОСК.

Линеаризованная модель измерений записывается следующим образом:

$$\delta\mathbf{z}(t) = H(t)\delta\mathbf{x}(t).$$

Здесь  $\delta\mathbf{z}(t)$  – малое приращение измерений при малом изменении вектора состояния  $\delta\mathbf{x}(t)$  в момент времени  $t$ . Матрица чувствительности  $H$  в нашем случае имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} H_1\mathbf{b}_o & H_2\mathbf{b}_o & H_3\mathbf{b}_o & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ H_1\mathbf{s}_o & H_2\mathbf{s}_o & H_3\mathbf{s}_o & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где  $H_i$  определяется из уравнения

$$H_i = \left( \frac{\partial A(\lambda_k)}{\partial \lambda_{k,i}} \right), \quad i = \overline{1,3}.$$

Таким образом,

$$H_1 = 2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = 2 \begin{pmatrix} -\lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_3 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = 2 \begin{pmatrix} -\lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_1 \\ -\lambda_4 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

### 3.4. Исследование алгоритма определения движения микроспутника

Получив матрицы динамики (3.16) и чувствительности (3.17), воспользуемся методикой, полученной в главе 1 для исследования точности определения движения. Особенный интерес представляет исследование точности определения движения в стабилизированном положении спутника, когда оси ССК совпадают с осями ОСК. Рассчитаем асимптотическое значение матрицы ошибок вектора состояния  $P_\infty$ , используя уравнение (1.12) в зависимости от шумов системы. Рассмотрим матрицу шумов системы вида

$$Q = \text{diag}(q_\lambda^2, q_\lambda^2, q_\lambda^2, q_\omega^2, q_\omega^2, q_\omega^2),$$

то есть будем предполагать, что шумы уравнения движения не коррелируют между собой и одинаковы для всех компонент векторной части кватерниона, среднеквадратическая ошибка которых равна  $q_\lambda$ , и для компонент вектора угловой скорости со среднеквадратичной ошибкой  $q_\omega$ . Для вычисления оценки точности определения ориентации по элементам матрицы  $P_\infty$  будем рассматривать диагональные члены, соответствующие ошибке определения кватернионов. Среднеквадратическую ошибку определения компонент кватерниона оценим как наихудшую  $\sigma_\lambda = \sqrt{\max(p_{11}, p_{22}, p_{33})}$ , где  $p_{ii}$  – диагональные элементы матрицы  $P_\infty$ . Аналогично среднеквадратическую ошибку определения угловой скорости оценим как  $\sigma_\omega = \sqrt{\max(p_{44}, p_{55}, p_{66})}$ . Рассмотрим матрицу шумов измерений вида

$$R = \text{diag}(r_b^2, r_b^2, r_b^2, r_s^2, r_s^2, r_s^2),$$

где  $r_b$  и  $r_s$  – среднеквадратические ошибки измерений. Для микроспутника "Чибиc-М" характеристики измерений датчиков приведены в табл.3.1. Ошибку измерений магнитометра будем записывать в терминах ошибки определения направления магнитного поля. Заметим, что используемая на бортовом компьютере аналитическая модель геомагнитного поля IGRF (International Geomagnetic Reference Field) отличается от реального геомагнитного поля вследствие воздействия Солнца в среднем на величину около 200 нТ на орбите Международной космической станции, как показано в работе [51]. Тогда, чтобы учесть эту ошибку модели, будем считать, что магнитометр измеряет с ошибкой 250 нТ, равной сумме среднеквадратических ошибок измерений самого магнитометра и ошибок модели IGRF. Учитывая, что модуль напряженности геомагнитного поля на орбите высотой 500км примерно равен 40 000 нТ, можно оценить среднеквадратическую ошибку определения направления геомагнитного поля  $r_b = 0.35$  град. Ошибка определения направления на Солнце равна  $r_s = 0.1$  град. Частота измерений составляет 5 Гц. Коэффициенты пропорцио-

нально-дифференциального регулятора равны  $k_q = 0.00053 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и  $k_\omega = 0.07 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

На рис. 3.4 и 3.5 представлены графики точности определения ориентации и угловой скорости в зависимости от действующих в системе шумов со среднеквадратическим отклонением  $q_\lambda$  и  $q_\omega$ . Из этих рисунков видно, что точность определения движения увеличивается с уменьшением шумов в системе, что представляется весьма естественным.

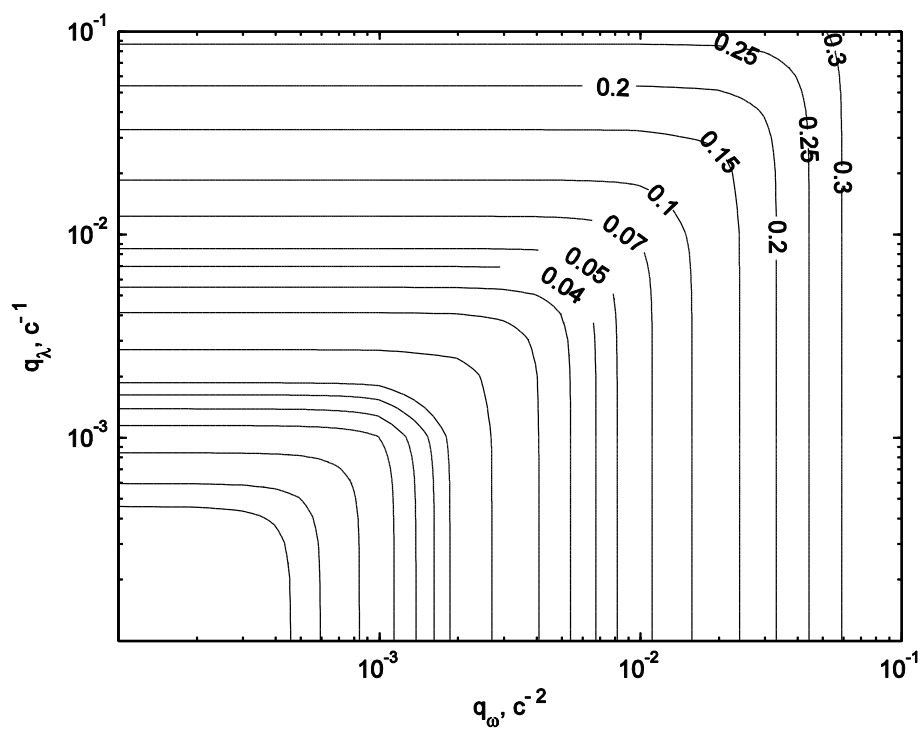


Рис. 3.4. Зависимость точности определения ориентации (град) от параметров шумов системы



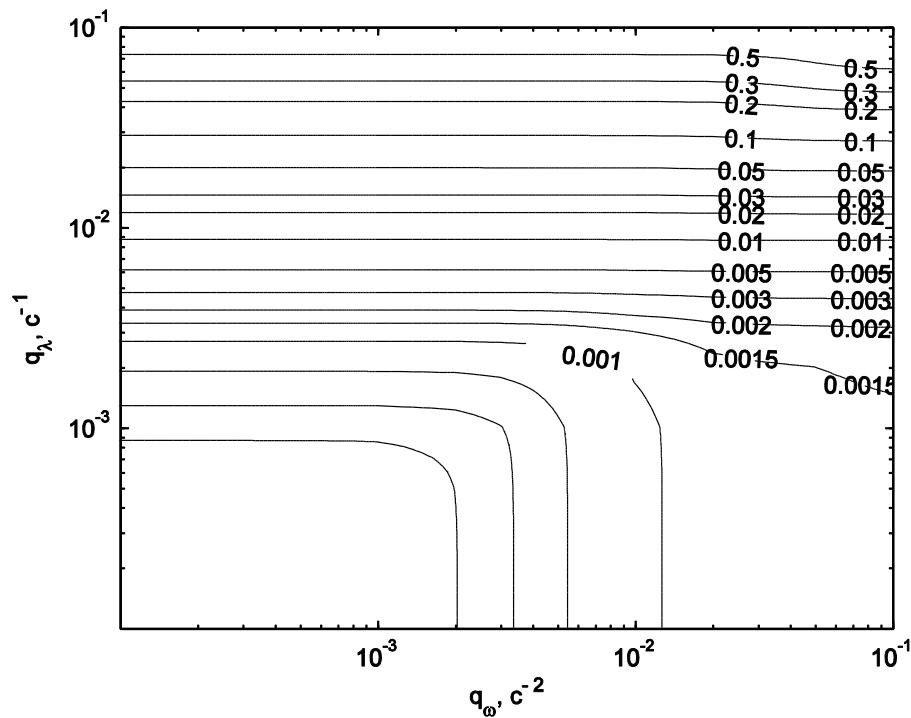


Рис. 3.5. Зависимость точности определения угловой скорости (град/с) от параметров шумов системы

Теперь рассмотрим, как зависит точность определения движения от возмущений, действующих на микроспутник и неучтенных в модели движения, используемой фильтром Калмана. Возмущения на микроспутник действуют преимущественно со стороны магнитного момента, создаваемого приборами на борту, который взаимодействуя с магнитным полем Земли, порождает механический момент. Также возмущения возникают за счет ошибок исполнения управляющих команд, вызванных дискретизацией, неточностью знания управляющего момента, а также ошибок управления, вызванных ошибкой знания вектора состояния. Также как в главе 2, будем рассматривать уравнение движения в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \Phi_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\chi}_k, \\ \boldsymbol{\chi}_{k+1} &= E \boldsymbol{\chi}_k + \boldsymbol{\theta}_k, \end{aligned}$$

где  $E$  – единичная матрица,  $\boldsymbol{\theta}$  – случайная составляющая возмущения. Пусть вектор  $\boldsymbol{\chi}$  имеет следующий вид:

$$\chi = \left[ d\Delta t^2 / 2 \quad d\Delta t^2 / 2 \quad d\Delta t^2 / 2 \quad d\Delta t \quad d\Delta t \quad d\Delta t \right]^T,$$

Здесь  $d$  – константа, определяющая величину возмущения. В качестве примера, рассмотрим, как изменится точность определения движения при конкретном значении возмущения. Пусть  $d = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$  (что соответствует возмущающему моменту  $8 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}$  для микроспутника "Чибис-М"), а дисперсия случайной составляющей возмущения равна

$$M[\theta \theta^T] = \Theta = \text{diag}(10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}, 10^{-14}).$$

Рассмотрим случай, когда вектор магнитного поля перпендикулярен направлению на Солнце  $\mathbf{b}_o \perp \mathbf{s}_o$ . На рис. 3.6 и 3.7 изображены графики точности определения ориентации и угловой скорости в зависимости от параметров  $q_\lambda$  и  $q_\omega$ , которые уже не являются характеристиками шумов уравнения движения. Ниже черной линии находится область параметров, при которой движение можно считать квазистационарным, то есть выполнено условие (1.14). Максимум точности определения движения достигается на границе области квазистационарности при параметрах  $q_\lambda = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  и  $q_\omega = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-2}$ , точность определения ориентации при этом составляет  $\sigma_\varphi = 0.09$  град, точность определения угловой скорости  $\sigma_\omega = 0.007$  град/с. На рис. 3.8 и 3.9 приведены графики зависимости наилучшей точности определения движения в зависимости от возмущающего ускорения при  $\mathbf{b}_o \perp \mathbf{s}_o$ .

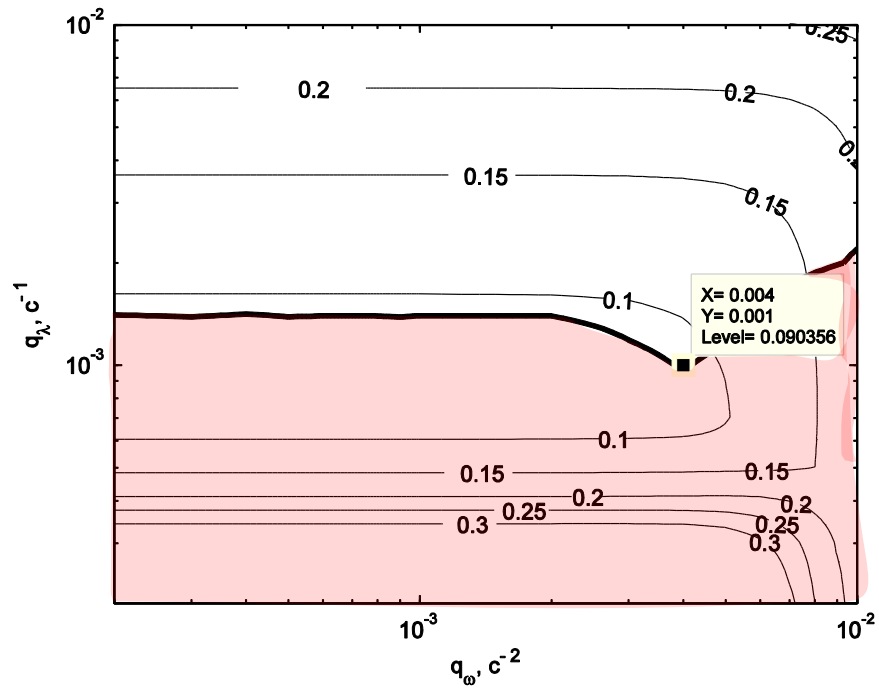


Рис. 3.6. Зависимость точности определения ориентации (град) от параметров  $q_\lambda$  и  $q_\omega$  при возмущаем моменте  $8 \cdot 10^{-7}$  Н·м

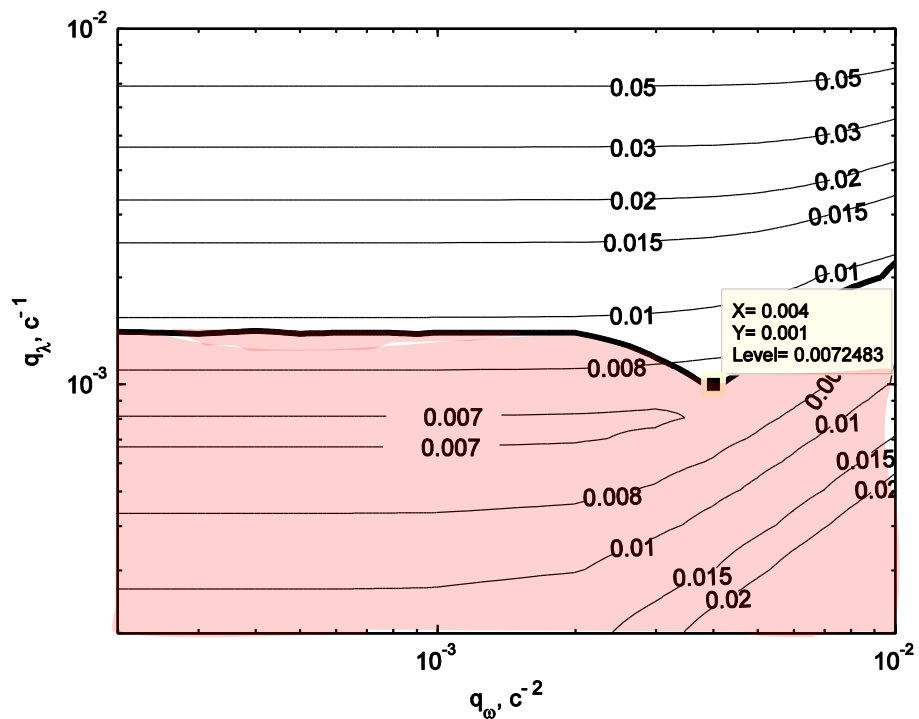


Рис. 3.7. Зависимость точности определения угловой скорости (град/с) от параметров  $q_\lambda$  и  $q_\omega$  при возмущаем моменте  $8 \cdot 10^{-7}$  Н·м

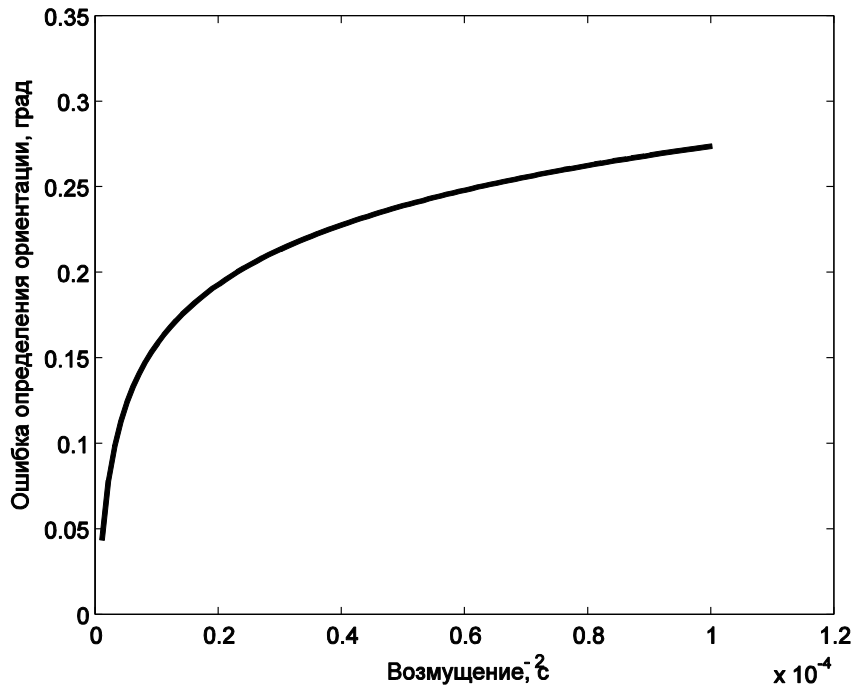


Рис. 3.8. Зависимость наилучшей точности определения ориентации в зависимости от возмущающего ускорения при  $\mathbf{b}_o \perp \mathbf{s}_o$

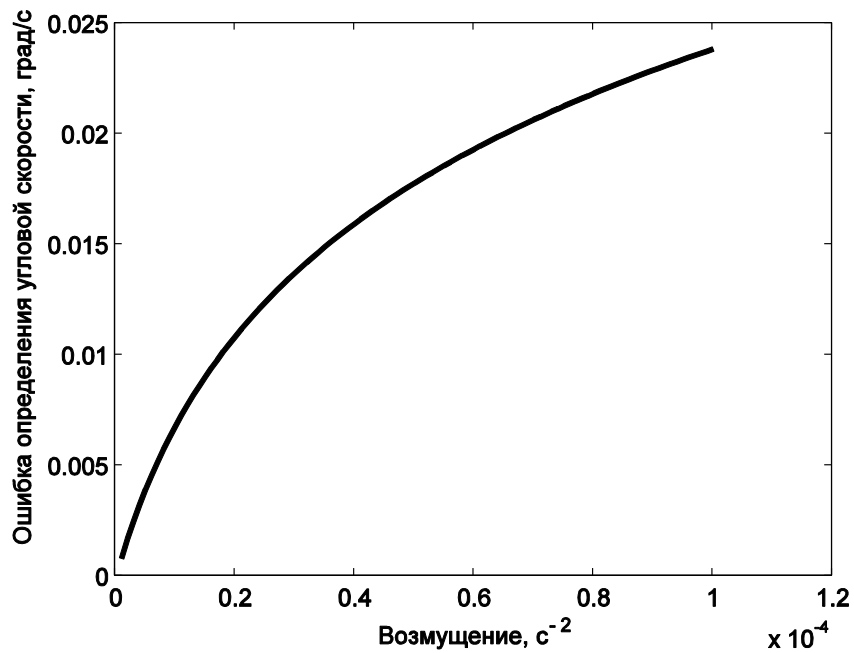


Рис. 3.9. Зависимость наилучшей точности определения угловой скорости в зависимости от возмущающего ускорения при  $\mathbf{b}_o \perp \mathbf{s}_o$

Обратим особое внимание, что прежде рассматривалась точность определения движения в случае, когда вектор направления геомагнитного поля и

вектор направления на Солнце перпендикулярны  $\mathbf{b}_o \perp \mathbf{s}_o$ . Однако, эта точность сильно зависит от угла между этими векторами и падает по мере того как векторы  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$  становятся параллельными друг другу. В предельном случае, когда эти векторы коллинеарны, матрица чувствительности вырождается, пропадает наблюдаемость, а ошибка определения движения стремится к бесконечности. Это все следствие того факта, что по измерению одного направления в пространстве невозможно определить трехосную ориентацию космического аппарата.

Таким образом, возникает задача оценки точности определения движения в зависимости от угла между  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$ . Она решается следующим образом. Варьируется величина угла между  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$  и при заданном уровне возмущения вычисляется ошибка определения движения по методике, изложенной в главе 1. Рассмотрим в качестве примера зависимость определения движения от угла при возмущении  $d = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$  и при параметрах настройки  $q_\lambda = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  и  $q_\omega = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-2}$ , которые обеспечивают наилучшую точность при этом возмущении, как показано выше. На рис. 3.10 и 3.11 приведены графики зависимости определения ориентации и угловой скорости от угла между  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$ . Из графиков видно, что при углах меньше 10 град и больше 170 град, точность определения движения резко ухудшается. В диапазонах этих углов лучше не использовать оценки вектора состояния, получаемые с помощью фильтра Калмана, а переключаться, например, в режим одноосной ориентации солнечными батареями на Солнце, в котором используются измерения только солнечных датчиков.

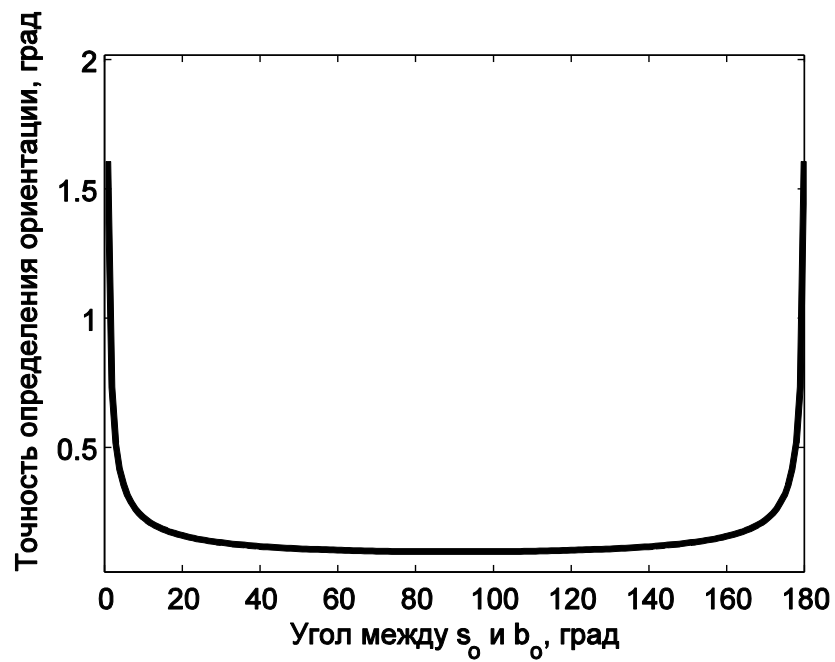


Рис. 3.10. Зависимость точности определения ориентации от угла между  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$  при  $d = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$

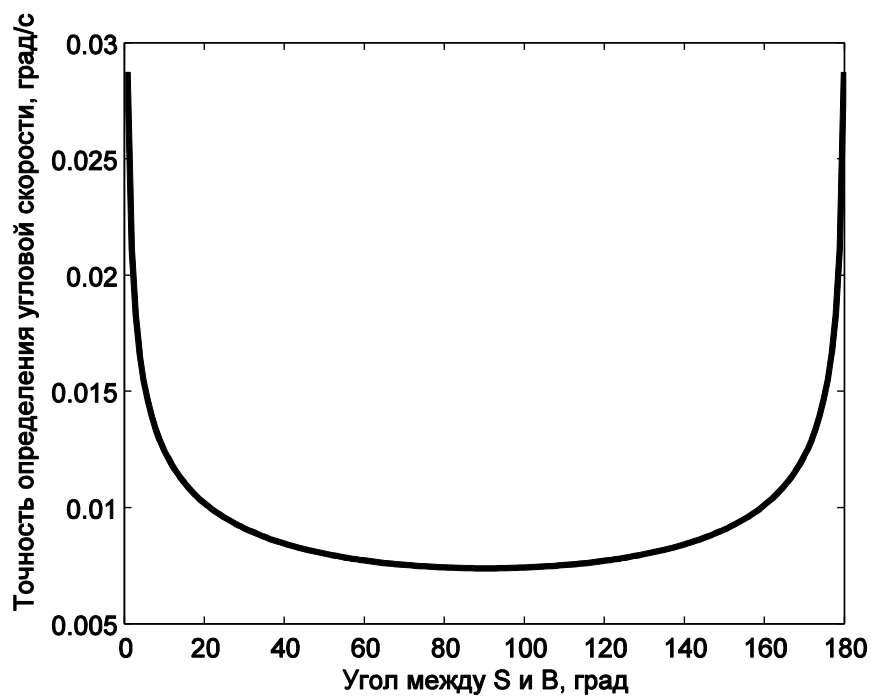


Рис. 3.11. Зависимость точности определения угловой скорости от угла между  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$  при  $d = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$

Рассмотрим теперь влияние смещения нуля измерений магнитометра на точность определения движения микроспутника. Смещение нуля измерений может возникать от токов в системе питания микроспутника, от включения или

выключения того или иного научного прибора. Постоянная часть смещения нуля, вызванная, например, магнитными свойствами материалов, из которых сделан космический аппарат, может быть найдена с помощью метода наименьших квадратов при наземной калибровке посадочного места датчика или по полетным данным и учтена программно на борту при обработке измерений магнитометра. Переменная же часть смещения нуля, которая зависит от токов в системах микроспутника, учтена в модели измерений быть не может по причине ее неопределенности. Поэтому возникает задача определения зависимости точности фильтра Калмана от ошибок измерений магнитометра.

Пусть модель измерений в нашем случае записывается в виде

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k,$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = E\mathbf{v}_k + \boldsymbol{\rho}_k,$$

где  $\mathbf{v}_k$  – вектор смещения измерений, который в рассматриваемом случае равен

$$\mathbf{v} = [\Delta b \ \Delta b \ \Delta b \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$\Delta b$  – смещение нуля измерений магнитометра,  $\boldsymbol{\rho}_k$  – вектор ошибок измерений с ковариационной матрицей  $M[\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\rho}^T] = R$ , равной матрице, используемой фильтром Калмана. Пусть смещение нуля равно 500 нТ. При пересчете это смещение нуля даст ошибку определения направления вектора магнитного поля  $\Delta b = 0.75$  град. На рис. 3.12 и 3.13 представлены графики точности определения движения в зависимости от параметров настройки  $q_\lambda$  и  $q_\omega$ . Точность определения ориентации ухудшилась примерно на 0.05 град, точность определения угловой скорости практически не изменилась. Зависимость точности определения от величины смещения нуля магнитометра представлена на рис. 3.14.

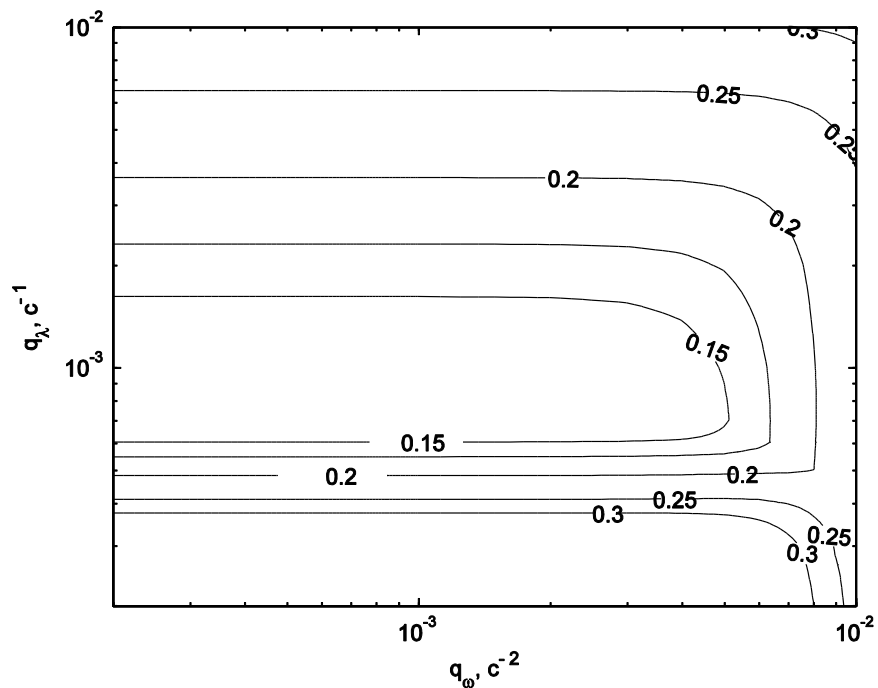


Рис. 3.12. Зависимость точности определения ориентации (град) от параметров  $q_\lambda$  и  $q_\omega$  при возмущающем моменте  $8 \cdot 10^{-7}$  Н·м и смещении нуля  $\Delta b = 0.75$  град

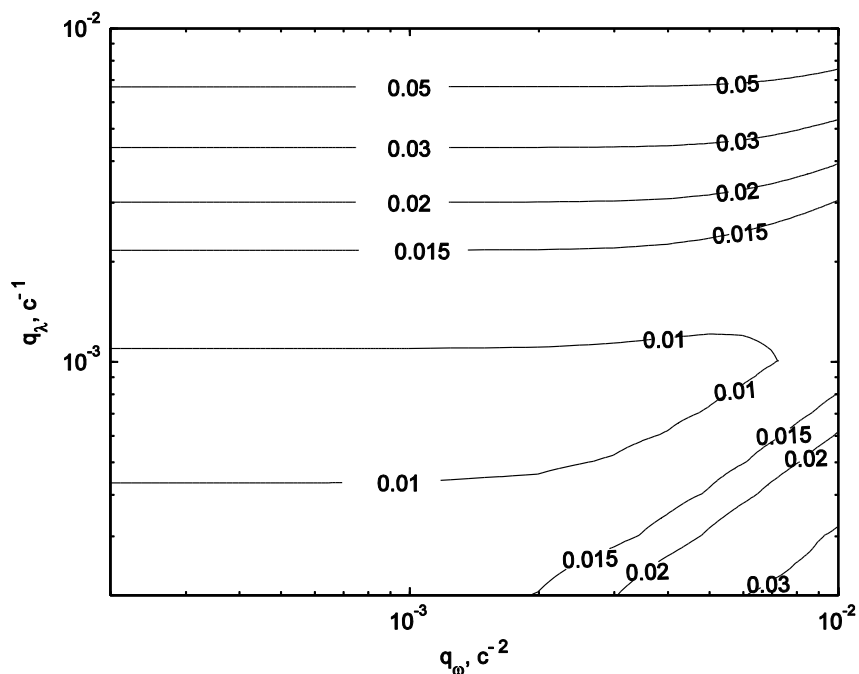


Рис. 3.13. Зависимость точности определения угловой скорости (град/с) от параметров  $q_\lambda$  и  $q_\omega$  при возмущающем моменте  $8 \cdot 10^{-7}$  Н·м и смещении нуля  $\Delta b = 0.75$  град



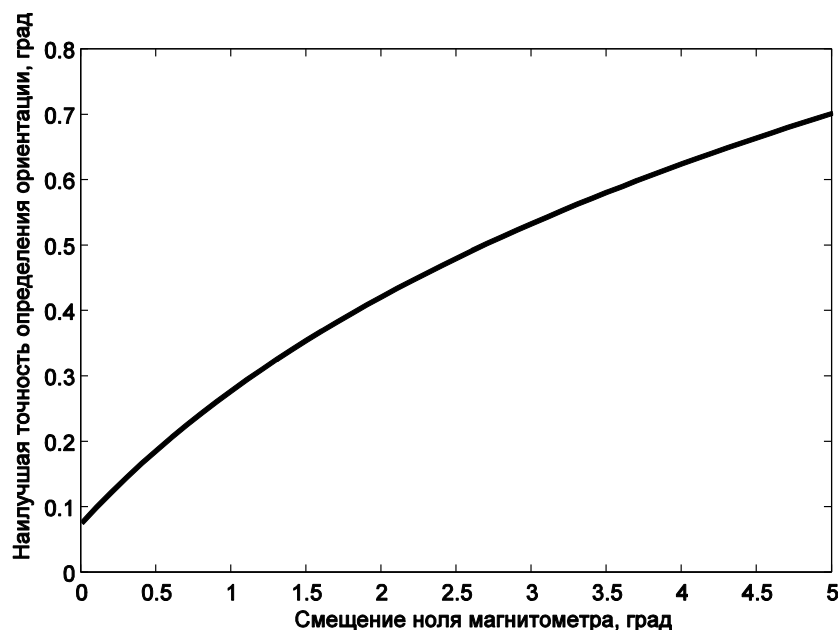


Рис. 3.14. Зависимость точности определения ориентации от смещения нуля направления геомагнитного поля

### 3.5. Заключение к главе 3

Построен алгоритм определения движения микроспутника "Чибис-М", основанный на измерениях солнечного датчика и магнитометра. Этот алгоритм исследовался с помощью методики, разработанной в главе 1, что позволило вычислить зависимость точности определения движения от параметров настройки фильтра, выбрать те параметры, которые при заданном уровне возмущения обуславливают наилучшую точность. Кроме того, была исследована зависимость точности определения движения от угла между направлением геомагнитного поля и направлением на Солнце, которая показала, что при углах меньше 10 град и больше 170 град, оценки фильтра Калмана лучше не использовать по причине резкого ухудшения. Оценка влияния смещения нуля измерений магнитометра на точность определения движения показала, что при смещении порядка 500 нТ, точность пострадает на 0.05 град.

Проведенные в этой главе исследования легли в основу лабораторных и летных испытаний алгоритма определения движения микроспутника "Чибис-М". Этому посвящена глава 4 настоящей работы.

## **4. ЛАБОРАТОРНЫЕ И ЛЕТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МИКРОСПУТНИКА "ЧИБИС-М"**

Система ориентации микроспутника "Чибис-М" прошла несколько этапов верификации. На этапе разработки системы в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН были проведены аналитические и численные исследования алгоритмов определения ориентации и алгоритмов управления ориентацией. Эти исследования позволили определить основные параметры и общий технический облик системы ориентации [52], [53]. На основе выработанных рекомендаций в ИТЦ "СканЭкс" были выбраны актюаторы и датчики определения ориентации, калибровочные испытания которых были затем проведены в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН [54], [55]. В ИТЦ "СканЭкс" был создан лабораторный стенд, на котором прошли испытания алгоритмы определения и алгоритмы управления ориентацией микроспутника "Чибис-М", также системы ориентации "в целом" [42].

В настоящей главе приведены результаты лабораторных и летных испытаний системы ориентации микроспутника "Чибис-М", проведен их анализ а также сравнение точностных характеристик с величинами, полученными в главе 3.

### **4.1. Испытания алгоритма на лабораторном стенде**

Практически любой проект по созданию малого спутника требует минимизации расходов на его проектирование и эксплуатацию [56]. Существенная экономия этих расходов имеет место при правильном выборе проектных характеристик спутника, а также оптимизации его систем на начальной стадии проектирования. При этом очень важно суметь правильно оценить состав и характеристики системы определения ориентации и стабилизации, а это, в свою очередь, трудно сделать без моделирования. Большую роль играет математическое

и компьютерное моделирование, но очень важно на первых же этапах проверить их работу, реализуемость и эффективность на практике для конкретного аппаратного состава. Для этого требуется наземный испытательный стенд. Его целесообразно использовать, в частности, для функциональной отработки бортовой системы управления ориентацией на ранних стадиях проектирования.

Стенды для отработки систем управления ориентацией спутников появились в 60-х годах прошлого века. Использовались они как на промышленных предприятиях, так и в университетах. Как правило, они решали задачи отработки систем определения ориентации твердого тела, имеющего три степени свободы, т.е. способного вращаться вокруг закрепленной точки. На теле (макете) устанавливались датчики определения ориентации, исполнительные элементы и система, отвечающая за логику управления. Повороты вокруг точки обеспечивались в подавляющем большинстве случаев, так называемым, воздушным или аэродинамическим подвесом. Воздушный подвес представляет собой сферический подшипник, в котором вместо смазки используется струя газа, подающаяся под давлением. Такие стенды используются в Исследовательском центре Лэндли, США (Langley Research Center) [57], в Космическом центре им. Годдарда, США (Goddard Space Flight Center) [58], в Научно-исследовательской лаборатории Высшей военно-морской школы США (Naval Postgraduate School (USNA), Optical Relay Spacecraft Laboratory) [59], в Университете Federico II в Неаполе, Италия (SMAFIS-Space Magnetic Field Simulator) [19], в Delft University of Technology в Нидерландах [20]. Лабораторный стенд для имитации движения группы спутников был создан в Центре прикладных космических технологий и микрогравитации в Бремене, Германия [60], [61], [62], [63].

В настоящем разделе представлены результаты лабораторных испытаний алгоритмов управления ориентации и алгоритмов определения ориентации микроспутника "Чибис-М" на стенде [21], [49; 64], разработанном в ИГЦ "СканЭкс" (рис.4.1). При создании стенда использовался опыт, приобретенный в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН при исследовании динамики лабораторного

прототипа системы ориентации [22]. В состав стенда входит макет системы ориентации, датчики и исполнительные органы которого идентичны тем, что используются на спутнике "Чибис-М", имитатор магнитного поля, имитатор солнечного излучения и аэродинамический подвес, обеспечивающий движению макета три степени свободы. В Приложении 1 приведено описание стенда.



Рис. 4.1. Стенд для полунатурных испытаний системы ориентации

Перед проведением лабораторных испытаний алгоритма определения ориентации необходимо соотнести возмущения, действующие на лабораторный макет на аэродинамическом подвесе. В Приложении 2 проведен детальный анализ возмущений. В табл. 4.1 сведены оценки всех возмущающих моментов, действующих на макет. Следует отметить, что оценка возмущающих моментов производилась сверху, то есть рассматривался худший случай: из возможных значений параметров макета (угловая скорость, отражающие свойства поверхности макета, нежелательный магнитный момент и т.д.) выбирались те, которые дадут наибольшее значение возмущающего момента. Из табл. 4.1 видно, что основным возмущающим моментом, действующим на макет системы ориентации, является момент, вызванный ошибками балансировки, которая приводит к небольшому отклонению положения центра масс от точки подвеса. Возму-

щающий момент  $4 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$  имеет тот же порядок, что и управляющий момент маховиков, поэтому возникает вопрос об управляемости макета. Однако, если центр масс макета поместить немного ниже почки подвеса, то будет возникать восстанавливающий гравитационный момент, приводящий к колебаниям макета относительно горизонтальной оси. Относительно вертикально оси на макет действуют малые возмущения и вращение относительно вертикали можно считать свободным.

Табл. 4.1. Сводная таблица возмущающих моментов

Источник возмущающего момента	Максимальное значение момента, Н·м
Вязкость при движении подшипника	$3 \cdot 10^{-7}$
Неидеальность поверхностей чаши и подшипника	$3 \cdot 10^{-5}$
Лобовое сопротивление элементов макета о воздух	$2 \cdot 10^{-6}$
Возмущающий магнитный момент на макете	$2 \cdot 10^{-5}$
Давление потока света от имитатора Солнца	$2 \cdot 10^{-8}$
Влияние вращения Земли (гироскопический момент)	$6 \cdot 10^{-6}$
Несбалансированность макета	$4 \cdot 10^{-4}$
Нагрев элементов макета, вызывающий разбалансировку	$4 \cdot 10^{-4}$

Анализ источников погрешностей измерений также приведен в Приложении 2. Когда все приборы на макете работают непрерывно (именно при включении и выключении они могут создавать возмущения магнитного поля) и нет магнитных бурь, то вектор магнитного поля определяется с точностью до 0.1-0.2 град. А при стабилизации макета, когда солнечный датчик практически не

перемещается по конусу луча имитатора Солнца, точность определения доходит до 0.1 град.

Для исследования точностных характеристик работы фильтра Калмана, а также времени его сходимости были проведены лабораторные испытания алгоритма определения ориентации в стационарном положении, то есть в положении, когда макет системы ориентации микроспутника находился в фиксированном состоянии относительно неподвижной системы координат. Кроме того, вектор магнитного поля и вектор направления на имитатор Солнца оставались неподвижными относительно лабораторной системы координат во время экспериментов. При такой постановке испытаний достаточно легко отследить процесс сходимости и фильтра и оценить точность его работы. Однако, так как в стационарном положении на макет не действуют возмущения, то точность определения вектора состояния очень высока и не соответствует точности определения при движении макета. В качестве примера на рис.4.2 и 4.3 представлены графики зависимости векторных компонент кватерниона от времени и компонент вектора угловой скорости от времени. В течение первых 125 с работал локальный алгоритм TRIAD [65] [6; 14; 19; 66; 67], который характеризуется невысокой точностью определения ориентации. Начиная с 125с, был включен алгоритм, основанный на фильтре Калмана и использующий измерения магнитометра и солнечного датчика. Из графиков можно увидеть, что точность определения вектора состояния значительно увеличилась по сравнению с точностью локального алгоритма. Точность работы фильтра после сходимости определяется как среднеквадратичное отклонение вектора состояния от истинного (в рассматриваемом случае это нулевая угловая скорость и известный кватернион поворота). Так как на макет не действует возмущений, точность определения ориентации составляет  $\sigma_\varphi = 0.03$  град,  $\sigma_\omega = 0.0005$  град/с при параметрах настройки  $q_\lambda = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$  и  $q_\omega = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-2}$ . Как можно судить из рис. 3.4 и 3.5 точность оценок фильтра соответствует точности, полученной теоретически в главе 3.

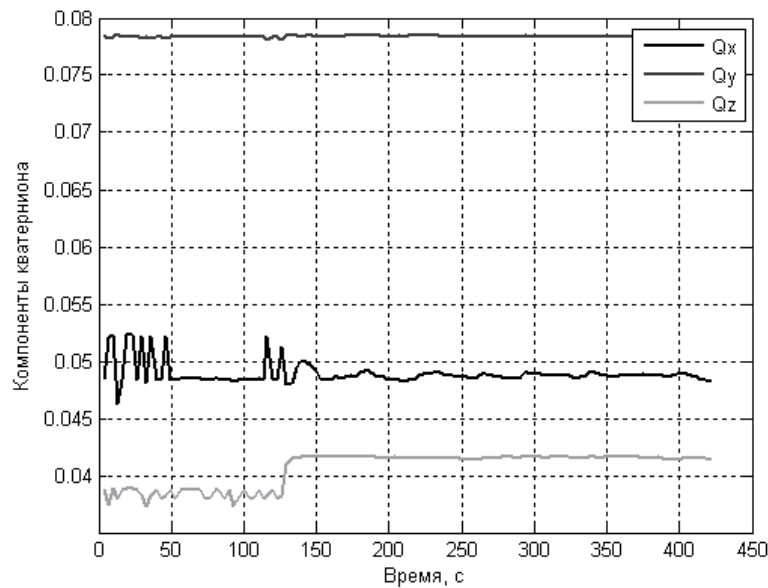


Рис. 4.2. Компоненты кватерниона поворота во время экспериментов

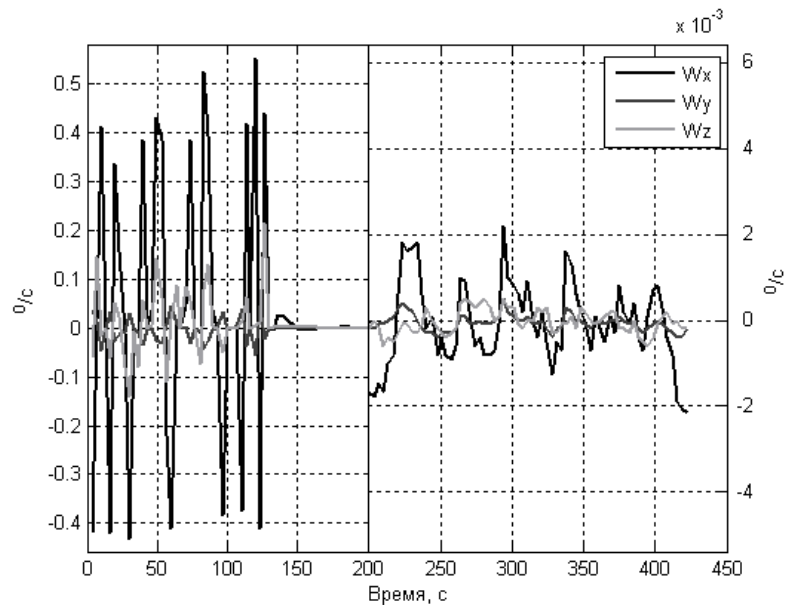


Рис. 4.3. Угловая скорость во время эксперимента

Теперь определим, какой будет точность определения движения макета в динамическом случае. Математическая модель движения макета системы ориентации микроспутника, используемая в фильтре Калмана, учитывает только управляющее воздействия от маховиков. Однако, вследствие неточностей балансировки макета на аэродинамическом подвесе, на него также действует малый гравитационный момент, как было показано выше. Это приводит к малым колебательным движениям макета по двум осям в отсутствие управления в слу-

чае, когда центр масс макета находится ниже точки подвеса. Колебательные движения не учтены в математической модели движения макета, так как требуют задания частоты колебаний, зависящей от величины смещения центра масс макета от точки подвеса, которая неизвестна и может меняться во время эксперимента.

На рис. 4.4 и 4.5 в качестве примера приведены графики оценки ориентации макета и оценки угловой скорости во время стабилизации в неподвижной системе координат. Угол между направлением магнитного поля и направлением на имитатор Солнца был равен 90 градусов. В стабилизированном положении макет несколько накренен, что связано с неточностью балансировки. Точность определения движения макета в этом положении составляет величину порядка  $\sigma_\varphi = 0.2$  град и угловой скорости  $\sigma_\omega = 0.02$  град/с. Такое ухудшение точности связано с постоянно действующими на макет возмущениями со стороны гравитационного момента, который приблизительно имел порядок  $5 \cdot 10^{-5}$  Н·м. Кроме того, точность определения ориентации ухудшает неучтенное смещение нуля магнитометра, которое может иметь порядок 200 нТ. Если сравнить полученную точность с вычисленной на рис. 3.8, 3.9 и 3.14, можно увидеть хорошее соответствие теоретического результата с экспериментальным.

Отметим, что при проведении экспериментов на лабораторном стенде и в орбитальном полете достаточно сложно определить точность оценок фильтра, так как истинное движение неизвестно. Поэтому приходится определять точность оценок движения косвенно по самим измерениям и по среднеквадратичному отклонению оценок от некоторого среднего значения. Такой способ определения является достаточно грубым, так как фильтр может определять вектор состояния с некоторой постоянной ошибкой, которую невозможно найти. Тем не менее, так как настройка фильтра производилась с учетом возможного наличия смещения нуля измерений и неучтенных возмущений, то можно надеяться,



что оценки фильтра Калмана не являются смещенными, а вычисление средне-квадратического отклонения дает удовлетворительную оценку точности.

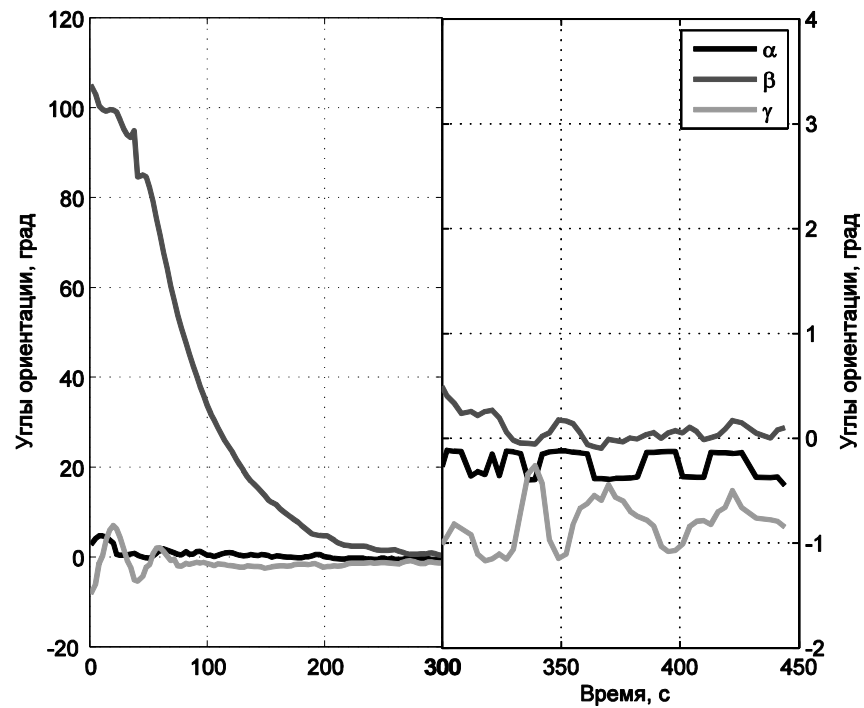


Рис. 4.4. Оценка углов ориентации макета во время стабилизации

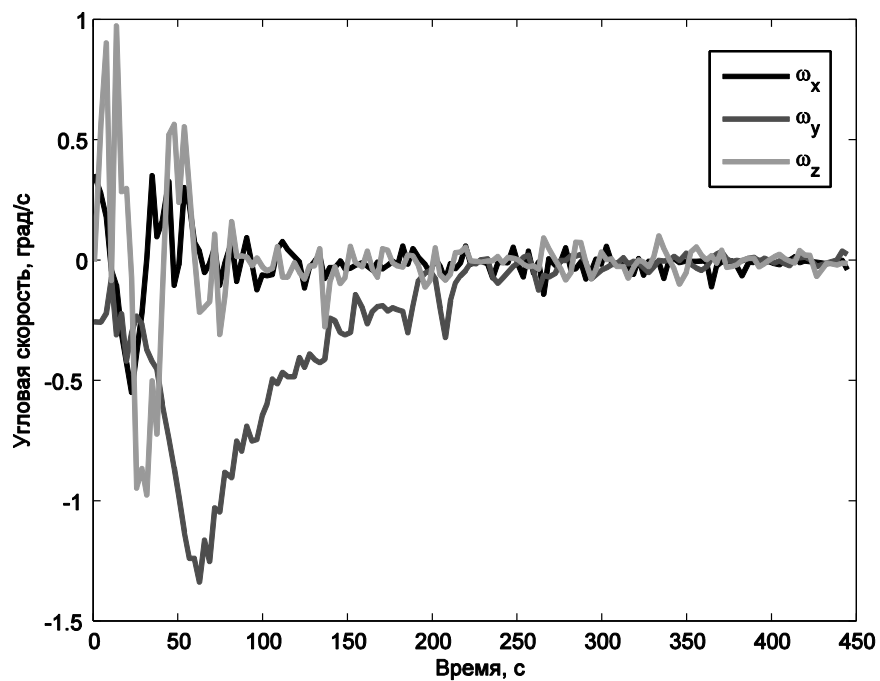


Рис. 4.5. Оценка угловой скорости макета во время стабилизации

## 4.2. Летные испытания алгоритма стабилизации

25 января 2012 года микроспутник "Чибис-М" был выведен на орбиту борта грузового корабля "Прогресс-13М". На рис. 4.6 изображен "Прогресс-13М" с микроспутником "Чибис-М" в стыковочном отсеке [68]. На рис. 4.7 приведен кадр из видео отделения микроспутника.

Летные испытания системы ориентации и стабилизации микроспутника проходили в несколько этапов [69]. Начальные этапы испытаний включали в себя последовательные проверки на работоспособность датчиков определения ориентации, исполнительных органов, далее была произведена оценка их калибровочных характеристик, сравнение их с номинальными, полученными при наземной калибровке, из чего был сделан вывод о корректности работы приборов. На следующих этапах проверялась работоспособность алгоритмов определения ориентации и алгоритмов управления ориентацией [70].



Рис. 4.6. Микроспутник "Чибис-М" в стыковочном отсеке грузового корабля "Прогресс-13М" во время отстыковки от МКС



Рис. 4.7. Кадр из видеофильма отделения "Чибис-М" от грузового корабля "Прогресс-13М"

В настоящем разделе представлены результаты летных испытаний системы ориентации микроспутника "Чибис-М", анализируется точность определения ориентации в режиме стабилизации микроспутника относительно ОСК. Для сравнения точность определения движения микроспутника с помощью фильтра Калмана сравнивается с точностью определения движения с помощью локального алгоритма, также использующего измерения магнитометра и солнечного датчика.

Перед проведением испытаний алгоритмов определения движения были откалиброваны датчики определения движения и в частности, магнитометр. На рис. 4.8 представлен пример измерений магнитометра, полученных во время свободного движения микроспутника. Контроль точности полученных данных можно провести при помощи информации о положении центра масс спутника, что для каждой точки измерений магнитного поля на борту позволяет вычислить вектор напряженности магнитного поля при помощи модели IGRF [71]. В таблице 4.2 представлены двухстрочные элементы спутника «Чибис-М», соответствующие времени сбора рассматриваемых телеметрических данных.

Таблица 4.2. Двухстрочные элементы спутника «Чибис-М»  
CHIBIS-M

1 38051U 11062C 12058.91450162 .00007227 00000-0 32146-3 0 1024  
2 38051 51.6521 324.5583 0011559 6.4829 88.0894 15.22465494 5160

Поскольку для оценки точности измерения компонент магнитного поля необходимо знать трехосную ориентацию спутника, калибровка может быть осуществлена только по величине измеряемого вектора. На 4.9 представлена разница между измеренной и вычисленной величиной модуля вектора геомагнитного поля.

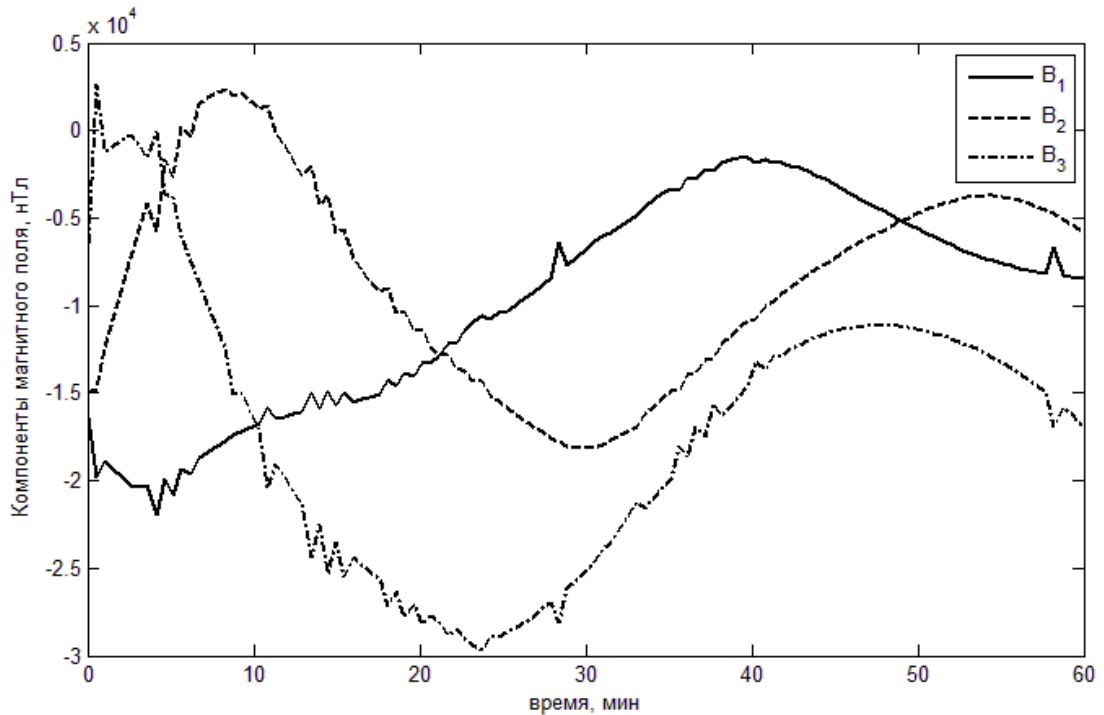


Рис. 4.8. Измерения магнитометра во время полета микроспутника

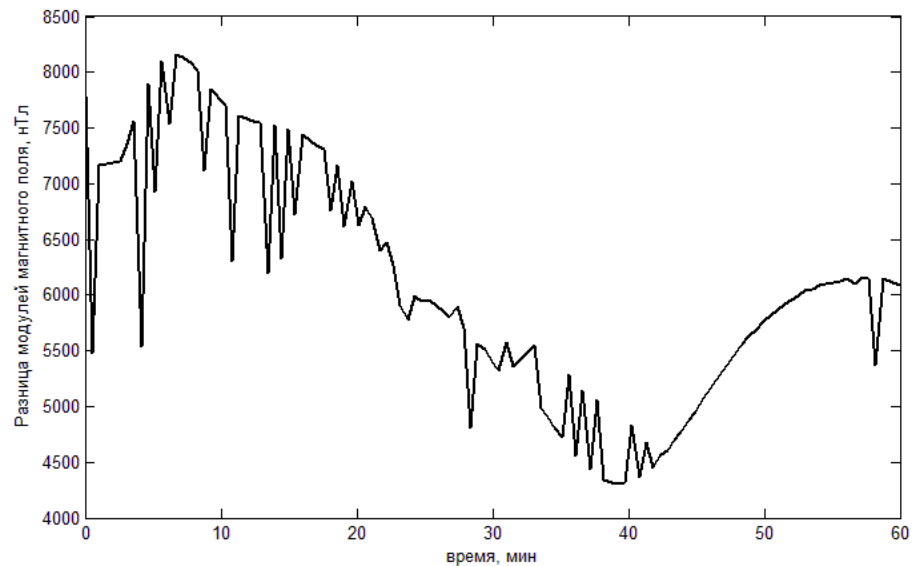


Рис. 4.9. Разница модуля вектора геомагнитной индукции, измеренного при помощи магнитометра, и вычисленного с использованием модели IGRF

Можно видеть, что в показаниях магнитометра присутствует смещение нуля. Оно было найдено с помощью метода наименьших квадратов. Величина смещения нуля магнитометра составила  $\Delta b = 6300 \text{ нТл}$ . Результат корректировки показаний магнитометра с учетом постоянного смещения нуля по каждому каналу приведен на рис. 4.10.

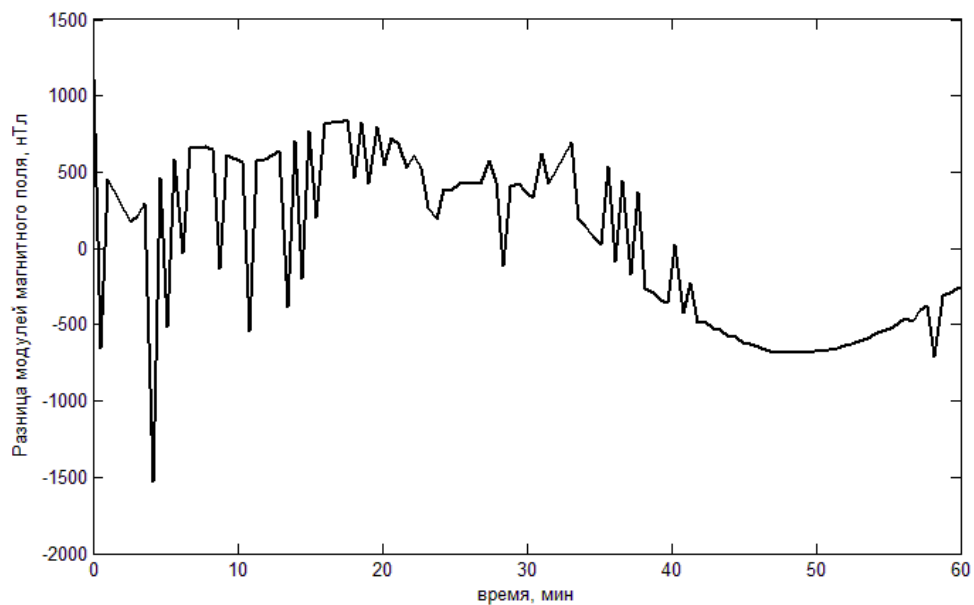


Рис. 4.10. Разница модулей вектор магнитной индукции после определения смещении нуля по методу наименьших квадратов

Из рис. 4.10 видно, что магнитометр имеет ошибку около 1500 нТ, причем в основном она не превышает 700 нТ. Как уже было упомянуто выше, отличие модели IGRF от реального магнитного поля составляет примерно 200 нТ. Это отличие было учтено при исследовании точности фильтра Калмана как случайная ошибка измерений. Это значит, что переменную часть смещения нуля, вызванную токами на борту микроспутника и полем включаемых и выключаемых приборов, можно оценить величиной 500 нТ. Как было показано в главе 3, это смещение нуля приводит к ухудшению определения точности на величину 0.05 град.

Зная величину постоянного магнитного поля, измеряемого магнитометром, можно грубо оценить величину механического момента, возникающего от взаимодействия неучтенного магнитного момента микроспутника с магнитным полем Земли. Будем считать, что магнит, которым аппроксимируем поле спутника, расположен в центре масс спутника. С учетом местоположения магнитометра в теле спутника (см. рис. 3.1), а также размеров самого спутника можно рассчитать магнитный момент по формуле [72]

$$m = \frac{4\pi}{\mu_0} \left( R^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{3/2} B,$$

где  $R$  – расстояние от центра магнита,  $L$  – длина магнита в виде электромагнитной катушки,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $B$  – модуль магнитного поля. Примем  $R = 0.15$  м,  $L = 0.1$  м и поле, определенное выше с помощью метода наименьших квадратов  $B = 6300$  нТ. Тогда  $m = 0.2$  А/м. Теперь оценим механический момент, действующий со стороны магнитного момента микроспутника. Механический момент рассчитывается по формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

В худшем случае  $M = 5 \cdot 10^{-6}$  Н·м. Эту оценку следует рассматривать, как оценку сверху.

Несколько сложнее оценить величину возмущения со стороны ошибок исполнения управляющих моментов маховиками. При коэффициентах пропорционально-дифференциального регулятора  $k_q = 0.00053 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и  $k_\omega = 0.07 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$  и ошибке определения движения порядка  $\sigma_\varphi = 0.1 - 0.2$  град и  $\sigma_\omega = 0.01$  град/с из закона управления (3.2) следует, что возмущение от ошибок исполнения будет составлять  $M = 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Однако, вследствие нормального распределения вероятности ошибок полученная оценка возмущающего момента будет представлять собой также нормально распределенную величину. Так как маховики обладают инерционностью при исполнении управляющей команды, то возмущающий момент усредняется и его результирующая величина стремится к нулю. Но на практике за время управляющего такта 0.2 с маховики успевают отреагировать на команду и это приводит к тому, что до нуля возмущение не усредняется, а уменьшается примерно на порядок. Оценим сверху величину возмущения со стороны ошибок исполнения как  $10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

После того как модуль угловой скорости вращения спутника падает до порогового значения, в случае работы автоматического режима стабилизации включается алгоритм грубого определения трехосной ориентации TRIAD. Для его работы требуются измерения вектора направления на Солнце и вектора магнитного поля Земли, а также модели, с помощью которых вычисляются векторы направления на Солнце и магнитного поля в ОСК.

На рис. 4.11 приведен график углов ориентации во время стабилизации с помощью TRIAD а на рис. 4.12 – график оценки угловой скорости с помощью этого алгоритма. Микроспутник стабилизировался за 15 мин. При этом точность стабилизации с помощью грубого алгоритма составляет порядка 1 град ( $\sigma$ ). Точность же определения угловой скорости составляет 0.5 град/с. Во время стабилизации из-за ошибок измерений возможны аномальные значения при определении угловой скорости и ориентации, вследствие чего микроспутник может начать двигаться неадекватно. Такое аномальное значение было получено,

например, в 8 часов 55 минут, как можно судить из рис. 4.12. На графике измерений датчиков угловой скорости (рис. 4.13), конечно, такой большой угловой скорости не наблюдается. Во время поддержания ориентации из-за ошибок измерений микроспутник покачивается с амплитудой порядка 1 град и амплитудой угловой скорости порядка 0.5 град.

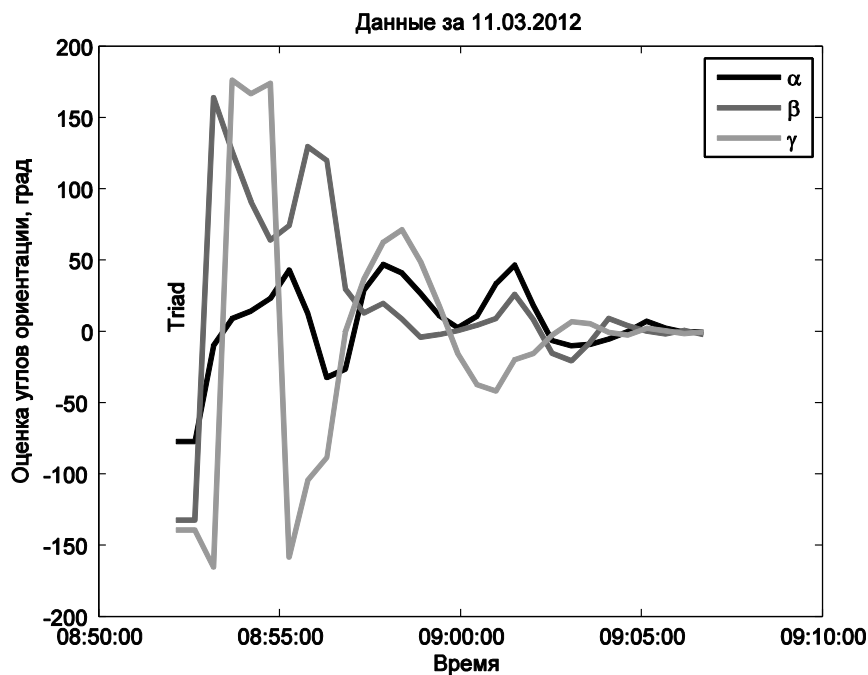


Рис. 4.11. Оценки углов ориентации во время стабилизации аппарата

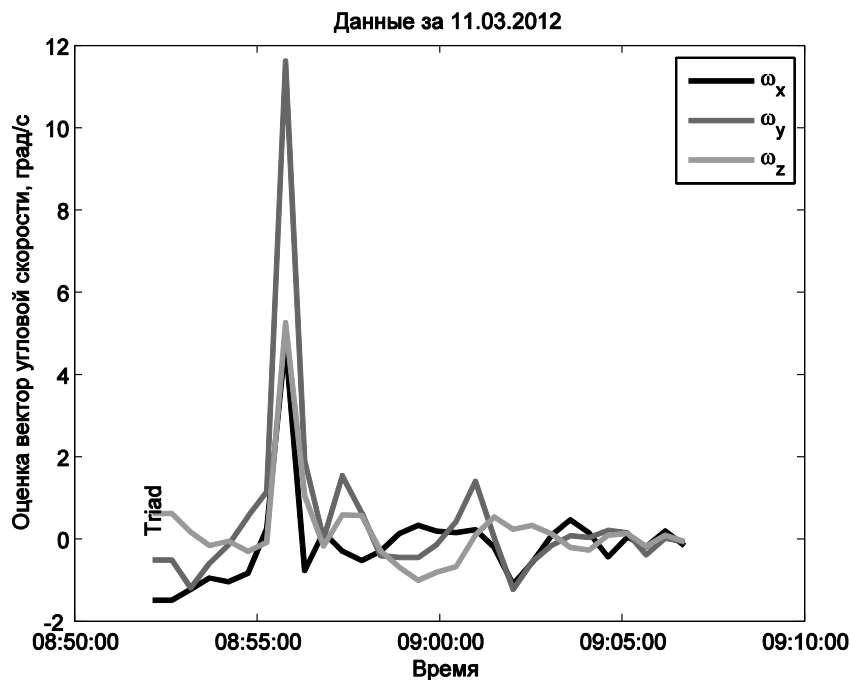


Рис. 4.12. Оценки угловой скорости во время стабилизации аппарата



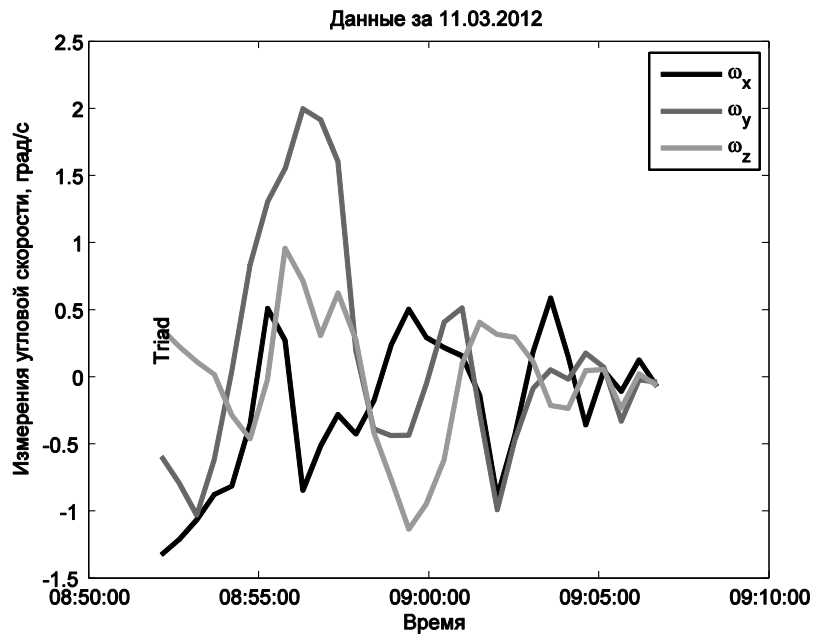


Рис. 4.13. Измерения угловой скорости во время стабилизации

После того, как система ориентации с помощью алгоритма TRIAD приводит спутник в некоторую окрестность орбитальной ориентации, включается рекурсивный алгоритм определения ориентации на основе фильтра Калмана. На солнечной стороне орбиты работает фильтр Калмана, который использует измерения солнечных датчиков и магнитометра. После включения алгоритма на основе фильтра Калмана фильтр начинает сходиться – ковариационная матрица ошибок уменьшается, оценки вектора состояния приближаются к истинным значениям. Оценки фильтра Калмана поступают на вход алгоритма управления маховиками, и система стабилизации приводит микроспутник в орбитальную ориентацию. На рис. 4.14 представлен график ориентации во время стабилизации, из которого следует, что алгоритм стабилизирует спутник примерно за 10 минут. Точность ориентации после стабилизации составляет примерно  $\sigma_\varphi = 0.1 - 0.2$  град. На рис. 4.15 представлен график угловой скорости во время стабилизации. Точность определения угловой скорости составляет  $\sigma_\omega = 0.01$  град/с. Если сравнить полученные точности с теоретическими значениями, представленными на рис. 3.8, 3.9 и 3.14 при уровне возмущений порядка

$M = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$  и смещении нуля магнитометра  $\Delta b = 500 \text{ нТ}$ , можно увидеть хорошее соответствие.

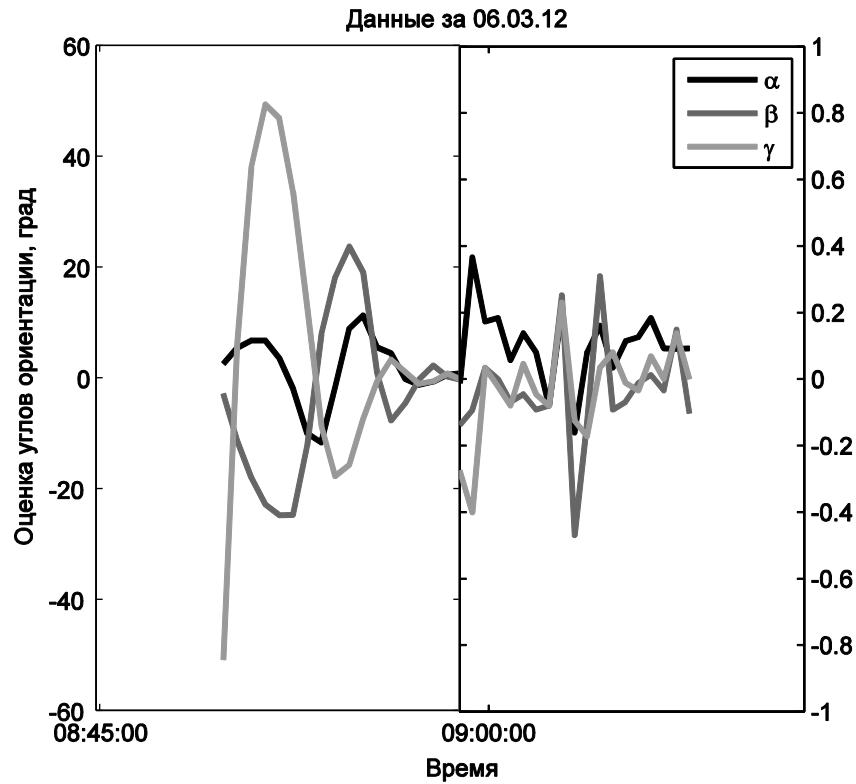


Рис. 4.14. Оценка углов ориентации во время стабилизации аппарата

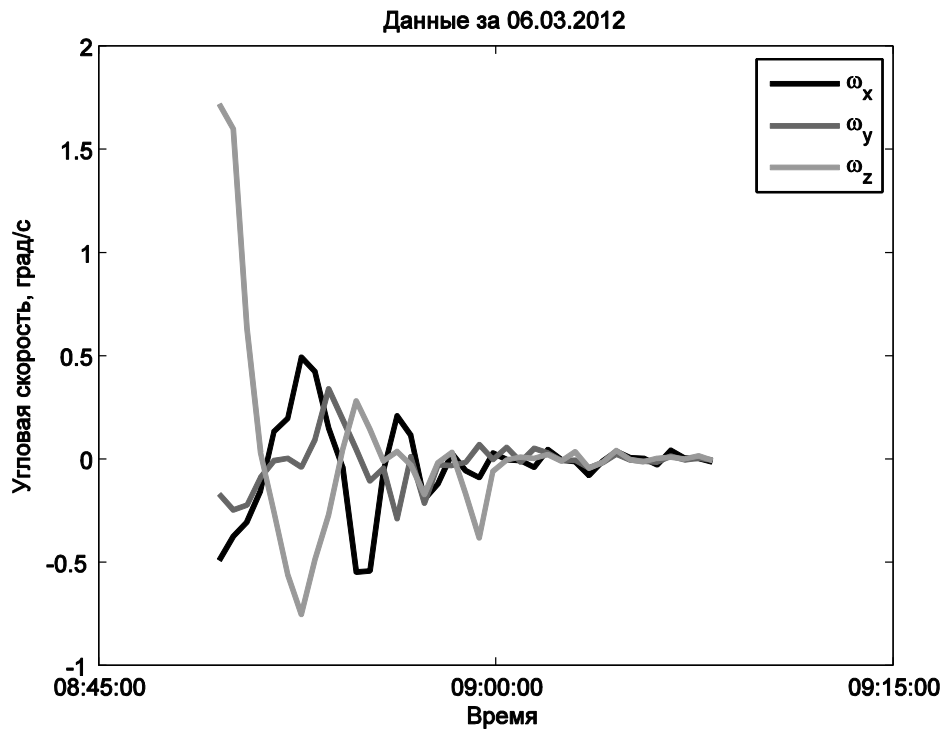


Рис. 4.15. Оценка угловой скорости во время стабилизации аппарата

В рассмотренном выше примере угол между направлением геомагнитного поля и направлением на Солнце составляет примерно 80 град. Рассмотрим, что происходит с точность определения движения при значениях угла между  $\mathbf{b}_o$  и  $\mathbf{s}_o$ , когда векторы близки коллинеарным. На рис. 4.16 представлен пример ухудшения точности определения ориентации, когда угол между  $\mathbf{s}_o$  и  $\mathbf{b}_o$  стал приближаться к 10 градусам. Точность определения ориентации, как видно из графика стала близка к  $\sigma_\phi = 1$ град, что несколько больше значения, которое можно получить из рис. 3.10. Однако теоретические оценки являются оценкой снизу и строятся из предположения квазистационарности, то есть медленного изменения матрицы динамики системы и матрицы измерений. Но когда эти векторы коллинеарны, время релаксации уравнения ошибок увеличивается, а значит, требуется большее время для сходимости. По всей видимости, в рассмотренном примере, оценки фильтра не успели сойтись в точке с плохой точностью, угол между  $\mathbf{s}_o$  и  $\mathbf{b}_o$  увеличился и оценки сошлись при этом угле достаточно быстро.

На рис. 4.17 представлен пример случая, когда угол между  $\mathbf{s}_o$  и  $\mathbf{b}_o$  стал равен почти 180 град и оценки фильтра Калмана разошлись. В рассматриваемом примере проходила испытания автоматическая система переключения между алгоритмами управления, которая не учитывает случаи, когда требуется при коллинеарности векторов  $\mathbf{s}_o$  и  $\mathbf{b}_o$  переключиться в другой режим. Обычно моменты, когда фильтр имеет плохую точность, вычисляются заранее в центре управления и с учетом этого на борт закладывается программа переключения режимов управления и определения ориентации.

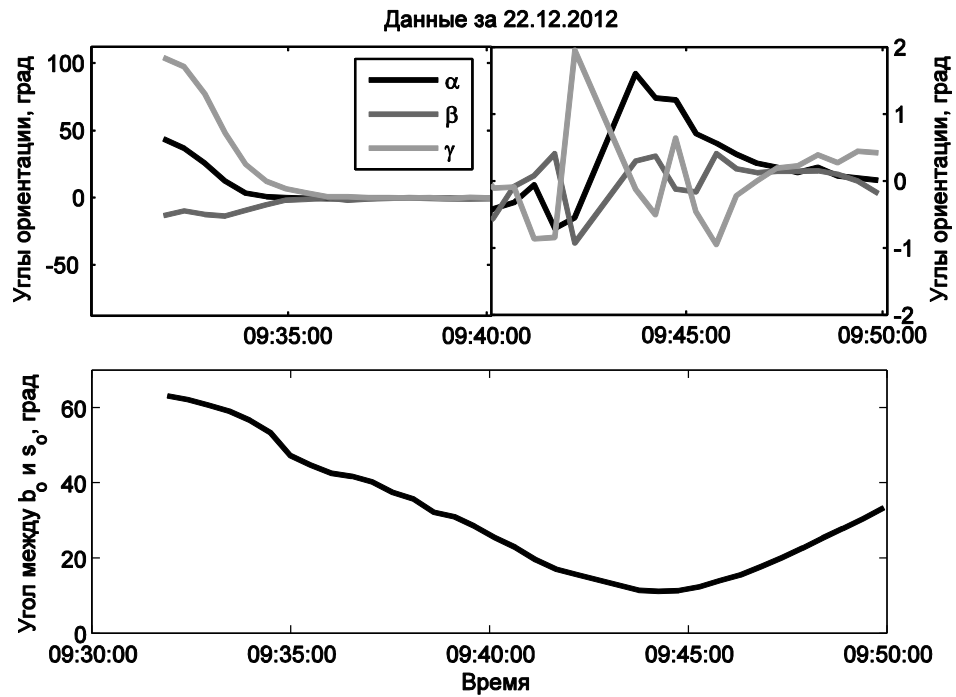


Рис. 4.16. Ухудшение точности оценок ориентации микроспутника "Чибиc-M" в случае, когда  $s_0$  и  $b_0$  были близки к коллинеарным

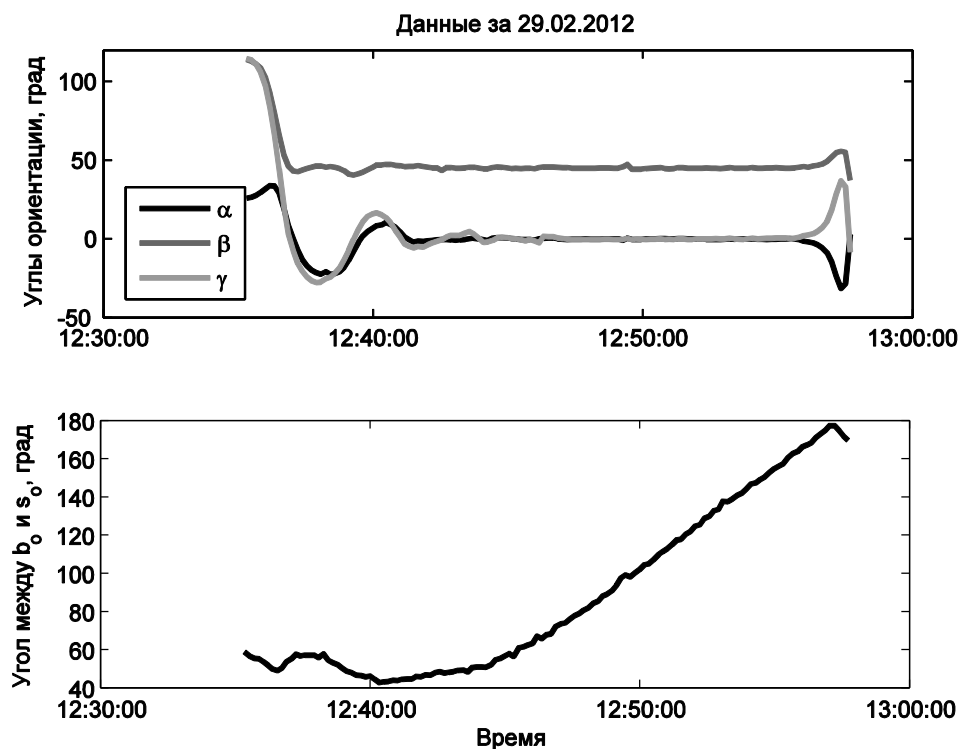


Рис. 4.17 Расхождение оценок ориентации микроспутника "Чибиc-M" в случае, когда  $s_0$  и  $b_0$  становятся коллинеарными

### **4.3. Заключение к главе 4**

Проведены настройка и летные испытания системы ориентации и стабилизации. Выяснено, что система ориентации микроспутника "Чибис-М" выполняет поставленные перед ней задачи и удовлетворяет поставленным требованиям: поддерживается орбитальная ориентация аппарата с заданной точностью на солнечном участке орбиты. На солнечной части орбиты микроспутник стабилизируется за время порядка от 10 до 30 минут, точность поддержания орбитальной ориентации оценивается примерно в 0.1-0.2 град, при этом погрешность оценки угловой скорости составляет примерно 0.01 град/с. Показано, что экспериментальные данные хорошо совпадают с теоретическими значениями, полученными в главе 3.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках диссертационной работы на примере определения углового движения микроспутника в лабораторных условиях и в орбитальном полете разработана и апробирована методика исследования и настройки рекурсивных алгоритмов на основе фильтра Калмана для бортовых компьютеров с ограниченными ресурсами, которые не позволяют учесть в модели движения ряд возмущений, таких как ошибки исполнения управляющих команд и возмущающий момент от магнитного поля микроспутника.

Разработанная методика применена к задаче определения движения макета системы ориентации, подвешенного на струне, на основе измерений солнечного датчика и датчика угловой скорости. Установлена зависимость точности определения движения от возмущений, действующих на систему, но неучтенных в модели движения.

Разработаны и реализованы алгоритмы определения трехосной ориентации микроспутника «Чибис-М» на основе измерений солнечных датчиков, магнитометра и датчика угловой скорости с учетом ограничений бортового компьютера. Определена зависимость точности и времени сходимости оценок вектора состояния от параметров алгоритма. Исследовано влияние величины скалярного произведения векторов направления на Солнце и индукции геомагнитного поля на точность определения фазового состояния спутника. Результаты исследования подтверждены в ходе лабораторных и летных испытаний микроспутника «Чибис-М», среднеквадратичная точность определения ориентации составила 0.1 град, определения угловой скорости 0.01 град/с.

Таким образом, полученные в диссертации результаты применены к системам определения ориентации лабораторных макетов и микроспутников, использующих измерения магнитометра, солнечных датчиков и датчиков угловой скорости. Разработанный метод позволяет уменьшить влияние неучтенных в модели движения микроспутника возмущений на точность определения движения до допустимых значений.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. М.Ю. Овчинникову и проф. А.К. Платонову за плодотворные обсуждения идей диссертации. Автор благодарен коллегам С.С. Ткачеву и Д.С. Ролдугину за консультации и помощь при подготовке текста диссертации, а также коллегам С.О. Карпенко и Н.А. Ивлеву из ООО "Спутникс" за формулировку задачи и инженерную помощь при реализации алгоритмов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering. 1960. V. 82. P. 35–45.
2. Kalman R.E., Bucy R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering. 1961. V. 83. P. 95–108.
3. Leitmann M. et.al. Attitude And Position Determination Using A Star Mapper On The Small Satellite Platform POSAT-1 // 3rd Conference on smll satellite technolody and application, Orlando, FL, April 14-15, 1993. P. 224–230.
4. Gai E. et.al. Star-Sensor-Based Satellite Attitude / Attitude Rate Estimator // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1985. V. 8. № 5. P. 560–565.
5. Xiong K., Liang T., Yongjun L. Multiple model Kalman filter for attitude determination of precision pointing spacecraft // Acta Astronautica. 2011. V. 68. № 7-8. P. 843–852.
6. Wiegand M., Matthews O. Using Magnetometer And Sun-Sensor to Determine Three-Axis Attitude For The ABRIXAS Missions // AAS-97. 1997. 15. p.
7. Yefimenko N.V. Magnetic Attitude Control and Stabilizing System of Egyptsat-1 Spacecraft // Journal of Automation and Information Science. 2010. V. 42. № 11. P. 64–70.

8. Searcy J.D., Pernicka H.J. Magnetometer-Only Attitude Determination Using Novel Two-Step Kalman Filter Approach // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. V. 35. № 6. P. 1693–1701.
9. Psiaki M.L., Martel F., Pal P.K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1990. V. 13. № 3. P. 506–514.
10. Шустер М.Д. Использование фильтров Калмана для оценивания пространственной ориентации КЛА // *AIAA Guidance, Navigation and Control*. 1983. Т. 82. С. 135–150.
11. Springmann J.C. et.al. The attitude determination system of the RAX satellite // *Acta Astronautica*. 2012. V. 75. P. 120–135.
12. Lefferts E.J., Markley F.L., Shuster M.D. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1982. V. 5. № 5. P. 417–429.
13. Pittelkau M.E. Kalman Filtering for Spacecraft System Alignment Calibration Introduction // 2001. V. 24. № 6. P. 1187–1195.
14. Бессонов Р.В. и др. Разработка и исследование характеристик трехосного блока определения угловых скоростей на основе технологии МЭМС // *Авиакосмическое приборостроение*. 2008. № 9. С. 16.
15. Пивоваров М.Л. Определение ориентации ИСЗ с использованием измерений угловых скоростей // *Космические исследования*. 1985. Т. 23. № 3. С. 331–334.
16. Bar-Itzhack Y. et.al. Recursive Attitude Determination from Vector Observations: Euler Angle Estimation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1987. V. 10. № 2. P. 152–157.
17. Bar-Itzhack I.Y., Oshman Y. Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation // *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*. 1985. V. 21. № 1. P. 128–135.



18. Shuster M.D. A Survey of Attitude Representations // *Journal of the Astronautical Sciences*. 1993. V. 41. № 4. P. 439–517.
19. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. М.: Наука, 1973.
20. Gelb A. *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
21. Maybeck P. *Stochastic Models, Estimation, and Control*. N.Y.: Acad. Press. Inc, 1979.
22. Maybeck P.S. Performance Analysis of a Particularly Simple Kalman Filter // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1978. V. 1. № 6. P. 391–396.
23. Powell T.D. Automated Tuning of an Extended Kalman Filter Using the Downhill Simplex Algorithm Introduction // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2002. V. 25. № 5. P. 901–908.
24. Tortora P., Oshman Y., Santono F. Spacecraft Angular Rate Estimation from Magnetometer Data Only Using an Analytic Predictor // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2004. V. 27. № 3. P. 365–373.
25. Oshman Y., Shaviv I. Optimal Tuning of a Kalman Filter Using Genetic Algorithms // *AIAA Paper 2000-4558*. 2000. 20 p.
26. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 2008.
27. Balakrishnan A.V. *Kalman filtering theory*. N.Y.: Optimization Software, Inc., 1987.
28. R.L. Farrenkopf. Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1978. V. 1. № 4. P. 282–284.
29. Markley F.L. Analytic Steady-State Accuracy of a Spacecraft Attitude Estimator // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2000. V. 23. № 6. P. 23–25.

30. Колос М.В., Колос И.В. Методы линейной оптимальной фильтрации. М.: Изд-во Московского университета, 2000.
31. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Изд-во "Наука", 1971.
32. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / под ред. К.Т. Леондеса. М.: "Наука", 1980.
33. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.
34. Алберт А.А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
35. Зотов Л.В. Теория фильтрации и обработка временных рядов. Курс лекций. М.: Физический факультет МГУ, 2010.
36. Козовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение, 1982.
37. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.
38. Wertz J.R. Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht/Boston, London: Acad. press, 1990.
39. Иванов Д.С., Овчинников М.. Использование одноосного гироскопа для определения ориентации макета в лабораторных условиях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 11. 32 с.  
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-11>
40. Иванов Д.С. и др. Управление полезной нагрузкой воздушного шара // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 15. 28 с.  
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-15>
41. Прилепский И.В. Задачи оптимизации и полунатурной отработки систем ориентации спутников // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. 2011. 18 с.

42. Иванов Д.С. и др. Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибис-М” на лабораторном стенде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 1. С. 118–137.

43. Иванов Д.С., Нуждин Д.О., Егоров К.В. Лабораторное моделирование алгоритмов определения и управления ориентацией микроспутников // Механика, управление и информатика. 2011. № 2. С. 239–247.

44. Иванов Д.С. и др. Система дистанционного управления стендом для проведения лабораторных работ по изучению движения тела, подвешенного на струне // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2012. № 59. 32 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-59>

45. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне, с использованием вентиляторных двигателей // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. Т. 50. № 1. С. 107–119.

46. Ivanov D.S. et.al. Balloon’s payload attitude control system with propeller thruster use // Proceedings of Taiwan-Russian Bilateral Symposium on Problems in Advanced Mechanics, Moscow, MSU Publ. 2010. P. 85–92.

47. Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. Laboratory Tutorial Practice with Facility for Attitude Control Simulation // Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Application. 2010. V. 2. № 1. P. 27–31.

48. Ivanov D.S., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Ballon payload attitude control system // Proceedings of the 1st IAA Conference on University Satellites Missions and CubeSat Winter Workshop, 24-29th January, 2011, Roma, Italy, IAA-CU-11-04-02. P. 84.

49. Ovchinnikov M.Y. et.al. Simulation and laboratory testing of microsatellite “Chibis-M” attitude control system // Proceedings of the 1st IAA Conference on University Satellites Missions and CubeSat Winter Workshop, 24-29th January, 2011, Roma, Italy, paper IAA-CU-11-04-06. P. 88.

50. Иванов Д.С., Карпенко С.О. Исследование алгоритма определения ориентации малого космического аппарата на основе фильтра Калмана // Гироскопия и навигация. 2010. Т. 69. № 2. С. 73.

51. Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В. Оценка точности показаний магнитометра, установленного на Служебном модуле Международной космической станции // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. № 54. 33 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-54>

52. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2009. № 48. 32 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-48>

53. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Исследование алгоритма трехосной маховичной системы управления ориентацией // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2010. № 25. 32 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-25>

54. Иванов Д.С. и др. Калибровка датчиков для определения ориентации малого космического аппарата // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 28. 32 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-28>

55. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Лабораторные испытания токовых катушек с сердечником // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 29. 26 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-29>

56. Иванов Д.С. и др. Аналитическое, численное и полунатурное исследование алгоритмов управление ориентацией микроспутников // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(2). С. 152–154.

57. James J., Howell W.E. Simulator study of a satellite attitude control system using inertia wheels and a magnet. N.Y.: Langley Research Center, Langley Station, Humpton, Va. NASA Technical Note 63-21893, Oct. 1963 (<http://ntrs.nasa.gov>).

58. Research and test facilities for development of technologies and experiments with commercial applications. Goddard Space Flight Center. NASA Technical Report TM-101789 N90-10909, 1990 (<http://ntrs.nasa.gov>).

59. Agrawal B.N., Rasmussen R.E. Air Bearing Based Satellite Attitude Dynamics Simulator for Control Software Research and Development // Proceedings of the SPIE Conference on Technologies for Synthetic Environments: Hardware-in-the-Loop Testing VI, (Orlando, Florida), April 16–18, 2001. P. 204–214.

60. Ovchinnikov M.Y. et.al. Development and Laboratory Verification of Control Algorithms for Formation Flying Configuration with a Single-input Control // Acta Astronautica. 2010. V. 67. P. 1158–1163.

61. Биндель Д. и др. Лабораторный стенд для верификации алгоритмов управления группировкой спутников // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. Т. 48. № 5. С. 109–117.

62. Иванов Д.С. и др. Система определения положения и ориентации макета спутника на основе блока инерциальных датчиков и звездного датчика // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2011. № 24. 30 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-24>

63. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Трофимов С.П. Применение фотограмметрического метода в задаче автономного определения относительного движения группы макетов // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 5. 22 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-5>

64. Ovchinnikov M.Y. et.al. Complex Investigation, Laboratory and Flight Testing of the Magneto-Gyroscopic ACS for the Microsatellite // 63th International Astronautical Congress, Naples, Italy. Paper IAC-12-C1.9. 15 p.

65. Lerner M.G. Three-Axis Attitude Determination. Spacecraft Attitude Determination and Control / под ред. J.R. Wertz. Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1978.

66. Бабич О.А. Обработка информации в навигационных комплексах. М.: Машиностроение, 1991.

67. Белоусов Л.Ю. Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.

68. Иванов Д.С. и др. Определение относительного движения спутников при их разделении по результатам обработки видеоизображения // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. № 57. 24 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-57>

69. Иванов Д.С. и др. Летные испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибис-М” // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012. № 58. 32 с.

<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-58>

70. Иванов Д.С. и др. Лабораторные и летные испытания системы ориентации микроспутника “Чибис-М” // Материалы XXXVII Академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королева, январь 2013 г. Москва. С. 563.

71. Белецкий В.В., Хентов А.. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985.

72. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Лабораторное исследование магнитных свойств гистерезисных стержней для системы ориентации малогабаритных спутников // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 1. С. 152–171.

## Приложение 1. Стенд для испытаний системы ориентации микроспутника "Чибис-М"

Исследование работы алгоритмов определения ориентации на основе фильтра Калмана проводилось на лабораторном стенде, разработанном в ООО «Спутникс». Общий вид стенда изображен на рис. I.1. В состав стенда входят:

- макет системы ориентации космического аппарата (МКА);
- имитатор магнитного поля;
- имитатор Солнца;
- аэродинамический подвес.

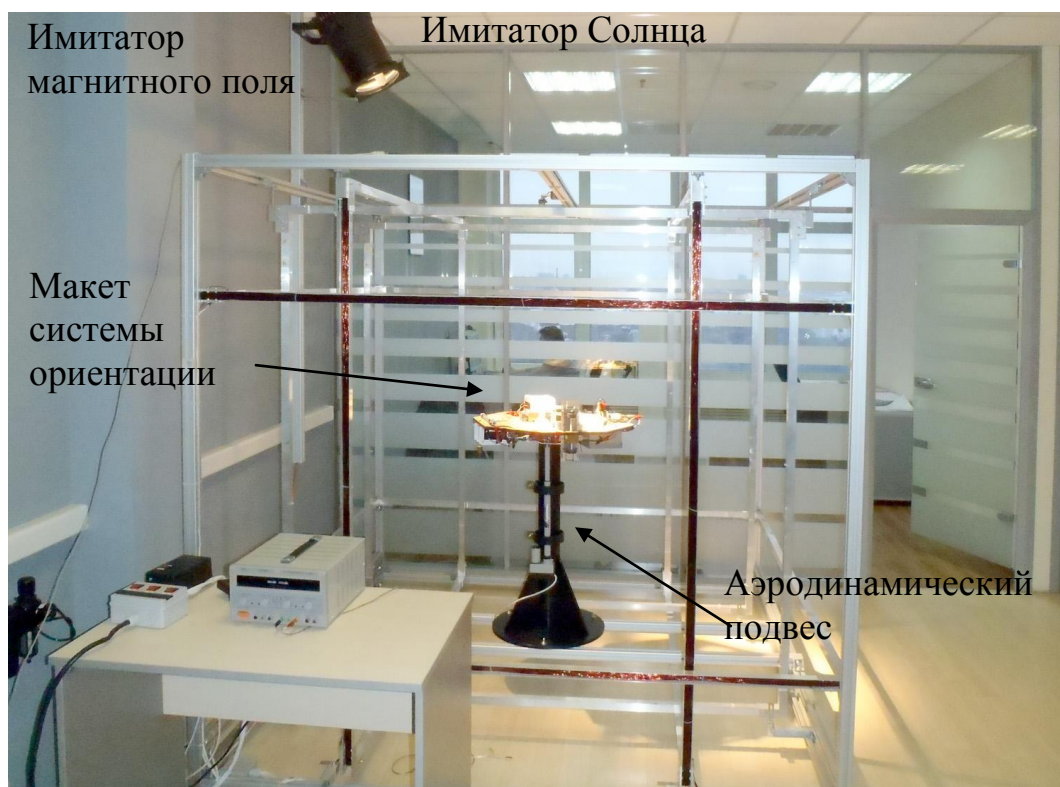


Рис. I.1. Внешний вид стенда

Макет системы ориентации МКА состоит из системы ориентации и стабилизации, одноплатного компьютера с беспроводным каналом связи, аккумуляторов, системы балансировки платформы, на которой установлены все системы (рис. I.2).

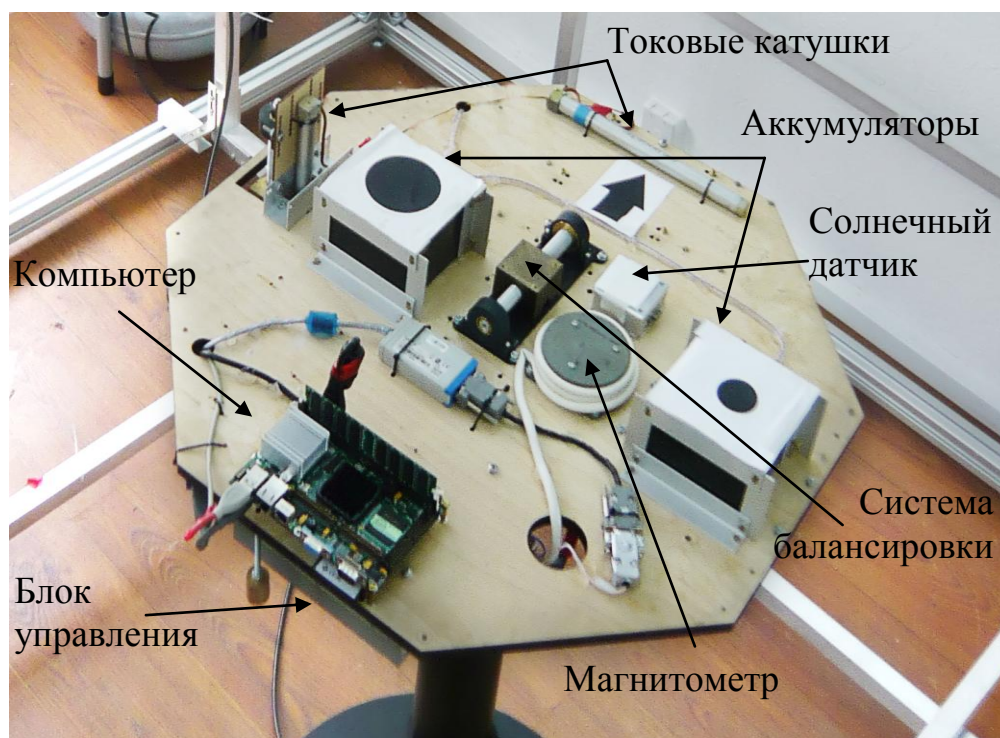


Рис. I.2. Макет системы ориентации в базовой конфигурации

Система ориентации и стабилизации состоит из датчиков определения ориентации, исполнительных органов и блока управления системой ориентации.

В качестве датчиков определения ориентации в составе макета используются магнитометр HMR 2300R (рис. I.3), солнечный датчик DSS3 (рис. I.4) и датчики угловой скорости ADIS 16130 (рис. I.5). Основные характеристики датчиков приведены в табл. I.1.



Рис. I.3. Магнитометр HMR 2300R



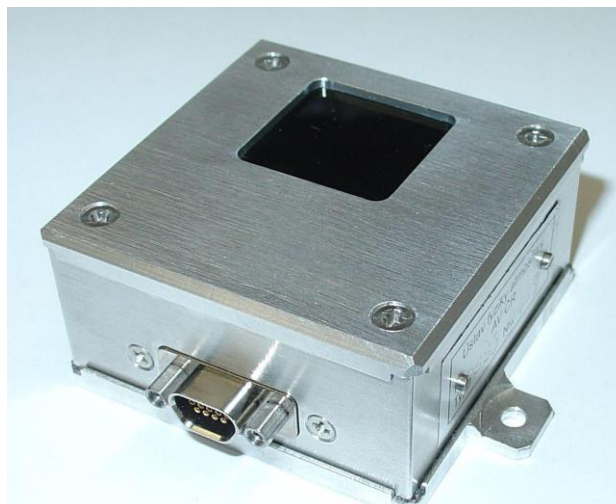


Рис. I.4. Солнечный датчик DSS3



Рис. I.5. Датчик угловой скорости ADIS 16130

Табл. I.1. Характеристики датчиков

Характеристика \ датчик	Магнитометр	Солнечный датчик	Датчик угловой скорости
Диапазон измерения	$\pm 200\ 000$ нТл	$\pm 45$ град	$\pm 250$ град/с
Случайное отклонение (шум)	50 нТл	0.1 град	0.01 град/с

В качестве исполнительных элементов системы управления ориентацией на макете используются электромагнитные катушки (рис. I.6) и управляющие двигатели-маховики (рис. I.7).



Рис. I.6. Токсовая катушка

Токсовые катушки индуцируют управляемый магнитный момент, который при взаимодействии с внешним магнитным полем создаёт управляющий механический момент. Катушки представляют собой соленоид с обмоткой из медной проволоки и пермалловым сердечником. Максимальный магнитный момент катушек составляет  $3.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

Двигатели-маховики выполнены на основе бесконтактного двигателя постоянного тока с управляемым моментом (рис. I.7) и предназначены для использования в качестве исполнительного органа в системах ориентации и стабилизации малых космических аппаратов. Электродвигатель обеспечивает вращение ротора-маховика, его торможение. Величина создаваемого им вращающего (управляющего) момента может плавно меняться в заданном диапазоне в соответствии с сигналом управления, подаваемым на вход двигателя-маховика. Механический момент от управляющих двигателей маховиков создаётся при изменении скорости их вращения и изменяется в диапазоне  $[-0.030, +0.030] \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$  в лабораторных условиях. Скорость вращения маховиков при этом изменяется в диапазоне  $[-20000, 20000] \text{ об/мин}$  в лабораторных условиях



Рис. I.7. Управляющие двигатели-маховики

Блок управления системой ориентации и стабилизации является связующим элементом между датчиками и органами управления, а также между системой ориентации и стабилизации и внешними устройствами управления. Основными функциями блока являются сбор и обработка показаний датчиков системы с помощью алгоритмов определения ориентации, выработка с помощью алгоритмов управления команд для элементов системы стабилизации, приём команд от внешнего бортового контроллера управления микроспутника, передача данных в каналы телеметрии спутника. Основной составной частью является бортовой компьютер, который основан на плате LPC1114, содержащей процессор, внешнюю ОЗУ размером 1 Мб, энергонезависимую флэш-память емкостью 4 Мб.

Для имитации магнитного поля в составе стенда используется система из трёх пар квадратных катушек установленных взаимно перпендикулярно (клетка Гельмгольца). Стороны квадратов катушек – 2м, 1.9м, 1.8м (рис. I.8). Данная система способна создавать практически однородное магнитное поле в заданной области.

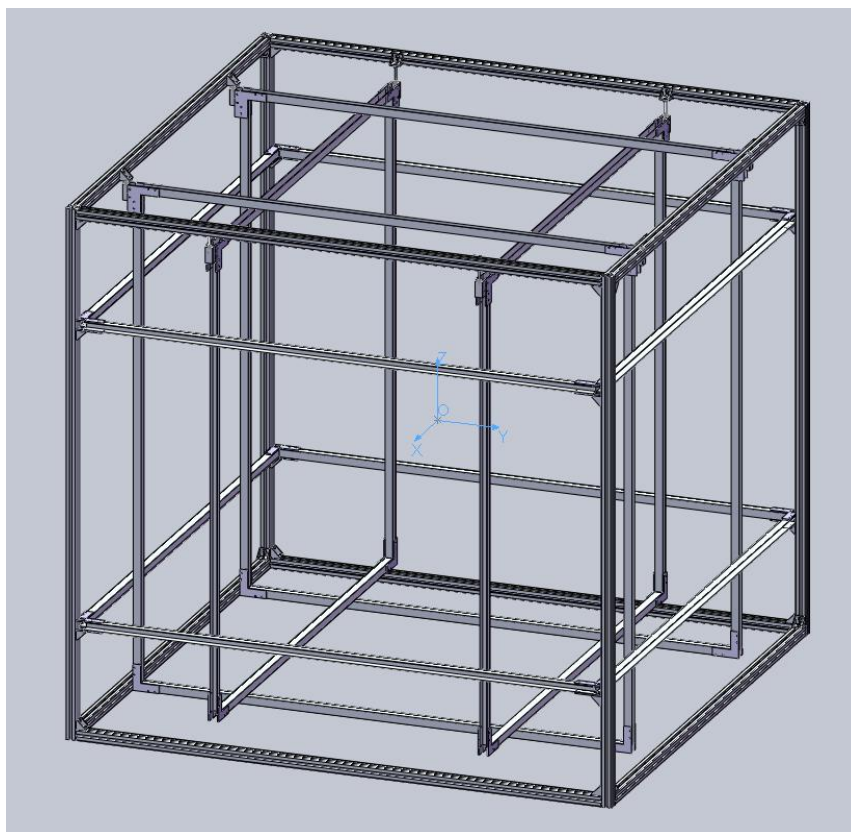


Рис. I.8. Имитатор геомагнитного поля

Имитатор солнца создает постоянный параллельный световой поток на расстоянии до 1.5 м, мощностью не менее 80000 лк. В качестве имитатора Солнца был выбран прожектор PAR-64 с лампой Philips 1000W230V PAR64 CP61 EXD NSP (рис. I.9).



Рис. I.9. Имитатор Солнца

Аэродинамический подвес обеспечивает движению макета 3 степени свободы, а именно вращение вокруг трёх осей с минимальным трением. По одной оси (вертикальной) существует возможность поворота на 360 град, по двум горизонтальным – на  $\pm 30$  град. Максимальная грузоподъемность подвеса – 25 кг.

Аэродинамический подвес состоит из пьедестала (рис. I.10) и подшипника в виде полусферы (рис. I.11). Подшипник крепится к макету МКА.



Рис. I.10. Аэродинамический подвес



Рис. I.11. Подшипник

## **Приложение II. Анализ возмущений, действующих на макет, и оценки источники ошибок измерений**

### **II.1. Источники погрешностей измерений и их оценки**

Перед проведением экспериментов для правильной интерпретации их результатов необходимо выявить источники погрешностей, влияющих на измерения, и оценить их величину. Исходя из этих данных можно сделать заключения о наблюдаемости движения и оценить результирующую точность определения состояния объекта. Проведем поиск источников погрешностей, влияющих на движение функционального макета спутника, описанного выше.

Погрешности, вносимые в результаты измерений, можно условно разделить на геометрические, погрешности имитаторов и моделей, и шум измерений

датчиков. Рассмотрим для каждого из измерительных средств источники погрешностей.

### II.1.1. Источники погрешностей измерения магнитного поля

Рассмотрим основные источники погрешностей измерения магнитного поля.

Прежде всего подчеркнем, что имитатор геомагнитного поля создает в некоторой области, близкой к сфере диаметром 650 мм, однородное поле лишь с некоторой точностью – 1600 нТ. При длительной работе имитатора (6 часов и более) максимальное отклонение поля от заданного может составлять  $\pm 150$  нТ.

Кроме того, на измеряемое значение магнитного поля влияет магнитное поле Земли, которое может изменяться в пределах до 100 нТ в спокойное время (суточные и лунные колебания) и до 1000 нТ во время магнитных бурь.

На макете используются некоторые магнитные материалы (например, сердечники магнитных катушек) и электронное оборудование (например, бортовой компьютер), которое располагается в непосредственной близости от магнитометра (менее 0.5м), поэтому имеются магнитные возмущения с их стороны, которые могут достигать 5000 нТ.

Далее рассмотрим источники погрешностей, связанные с использованием магнитометра.

Магнитометр состоит из трех чувствительных элементов, которые расположены по конструкционным осям с небольшой ошибкой по углу (по документации эта ошибка составляет около 1 град). Конструкционные оси параллельны ребрам корпуса магнитометра. Ось каждого из чувствительных элементов в системе координат, связанной с магнитометром, можно задать направляющими косинусами:

$$\mathbf{p}_1 = (\cos \alpha_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1)^T = (\sqrt{1 - p_{12}^2 - p_{13}^2} \ p_{12} \ p_{13})^T,$$

$$\mathbf{p}_2 = (\cos \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \gamma_2)^T = (p_{21} \ \sqrt{1 - p_{21}^2 - p_{23}^2} \ p_{23})^T,$$

$$\mathbf{p}_3 = (\cos \alpha_3 \cos \beta_3 \cos \gamma_3)^T = (p_{31} \ p_{32} \ \sqrt{1 - p_{31}^2 - p_{32}^2})^T.$$

Модель измерений магнитометра может быть записана в виде:

$$\mathbf{M}_i = KP\mathbf{V}_i + \mathbf{m}.$$

Здесь  $\mathbf{M}_i$  – измерение магнитометра;  $\mathbf{V}_i$  – внешнее поле в связанной системе координат;  $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$  – диагональная матрица, состоящая из коэффициентов усиления каждого датчика;  $P$  – матрица, строками которой являются векторы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ ;  $\mathbf{m}$  – смещение нуля.

В случае постоянного внешнего поля, но изменяющейся ориентации магнитометра формулу можно переписать в виде:

$$\mathbf{M}_i = KPA_i\mathbf{V}_0 + \mathbf{m},$$

где  $\mathbf{V}_0$  – внешнее поле в некоторой инерциальной системе координат,  $A_i$  – матрица поворота из инерциальной системы координат в связанную с магнитометром систему координат.

В работе [2] калибровочные характеристики были найдены (они приведены в табл. II.1). То есть в отсутствие калибровки неточность измерений может достигать до 1000 нТ.

Табл. II.1. Калибровочные характеристики магнитометра

$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{21}$	$p_{23}$	$p_{31}$	$p_{32}$	$m_1, \text{нТ}$	$m_2, \text{нТ}$	$m_3, \text{нТ}$	$\tilde{k}_2$	$\tilde{k}_3$
0.029	0.002	-0.025	0.011	-0.016	0.024	-610.0	-61.1	17.9	1.013	0.098

Здесь  $\tilde{k}_2 = k_2 / k_1$ ,  $\tilde{k}_3 = k_3 / k_1$ .

Корпус магнитометра установлен на крепёжную плиту макета с некоторой точностью, которая не должна превышать 1 град, что влечет к постоянной ошибке измерения поля  $\mathbf{V}$  порядка  $\mathbf{V} \cdot \cos(1 \text{ град}) = \mathbf{V} \cdot 1.5 \cdot 10^{-4}$ .

Также магнитометр обладает шумом измерений, который составляет порядка  $\pm 50$  нТ.

Таким образом, в табл. № I.2 приведена сводная таблица источников погрешностей при измерении магнитного поля. Суммарная максимальная погрешность измерения магнитного поля может составлять до  $\pm 5000$  нТл. При

внешнем магнитном поле порядка  $\mathbf{B} = 100000$  нТл, ошибка определения направления вектора магнитного поля будет составлять до

$$\arctan\left(\frac{5000}{100000}\right) \approx 3 \text{ град.}$$

Табл. П.2. Сводная таблица источников погрешностей

<b>Источник погрешности</b>	<b>Влияние на точность измерений, нТ</b>
Погрешность однородности магнитного поля	1600 нТ
Стабильность магнитного поля	$\pm 150$ нТ
Флуктуации фонового магнитного поля Земли	до $\pm 1000$ нТ
Влияние элементов конструкции макета	до $\pm 2000$ нТ
Отсутствие (или неточность) калибровки магнитометра	до $\pm 1000$ нТ
Неточность установки магнитометра на макете	$\mathbf{B} \cdot 1.5 \cdot 10^{-4}$ нТ (максимально при $\mathbf{B} = 200\ 000$ нТ – 30 нТ)
Шум измерений	$\pm 50$ нТ

### **П.1.2. Источники погрешностей измерения направления на Солнце**

Рассмотрим основные источники погрешностей измерения направления на имитатор Солнца.

Имитатор Солнца представляет собой прожектор PAR-64 с лампой Philips, которая имеет спектр излучения, схожий со спектром Солнца. Имитатор имеет угол раскрытия луча 12 град (угловой размер источника света), в отличие от Солнца (угловой размер Солнца равен 32') (рис.П.1). Но, так как солнечный датчик находится на расстоянии  $\sim 10$  см от центра масс макета, который совпадает с центром светимости луча имитатора Солнца, то при вращении вокруг



вертикали ошибка определения направления на источник света будет составлять примерно  $\pm 2.5$  град ( $\arctan\left(\frac{10\text{см}}{2\text{м}}\right)$ ).



Рис. II.1. Расходимость луча имитатора Солнца

Дополнительное освещение офисными лампами (освещение лаборатории) не дает возмущений, так как имеет малую интенсивность, и поэтому не пропускается светофильтром солнечного датчика.

Рассмотрим следующую модель измерений датчика Солнца. Выходными значениями датчика являются  $p_{i\alpha}$  и  $p_{i\beta}$ :

$$p_{i\alpha} = p_{0\alpha} + k_{\alpha} \tan(\alpha - \alpha_{off}),$$

$$p_{i\beta} = p_{0\beta} + k_{\beta} \tan(\beta - \beta_{off}).$$

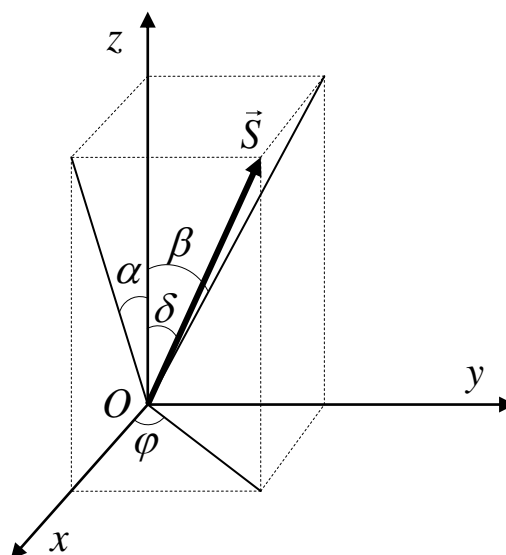


Рис. II.2. Связанная с датчиком система координат

Здесь  $p_{i\alpha}$ ,  $p_{i\beta}$  – номера пикселя, находящегося в центре освещенного Солнцем пятна на ПЗС-линейках,  $p_{0\alpha}$ ,  $p_{0\beta}$  – номера пикселей, которые находятся в центре освещенного пятна при условии перпендикулярности соответствующей оси датчика направлению на Солнце ( $\alpha = \alpha_{off}$ ,  $\beta = \beta_{off}$ ),  $k_\alpha$ ,  $k_\beta$  – коэффициенты усиления,  $\alpha_{off}$ ,  $\beta_{off}$  – углы поворота ПЗС-линеек относительно корпуса датчика,  $\alpha$ ,  $\beta$  – углы направления на Солнце в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$  соответственно (рис. II.2). В работе [54] была проведена калибровка датчика солнца, при этом точность калибровки составляла порядка  $\pm 0.1$  град ( $\sigma$ ) (рис. II.3).

Так как датчик определяет направление на Солнце по самому засвеченному пикселю, то точность за счет дискретизации составляет до  $\pm 0.12$  град:

$$\arctan\left(\frac{\Delta p}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{470}\right) = 0.12^\circ.$$

В табл. II.3 приведены все источники погрешностей при измерении направления на Солнце.

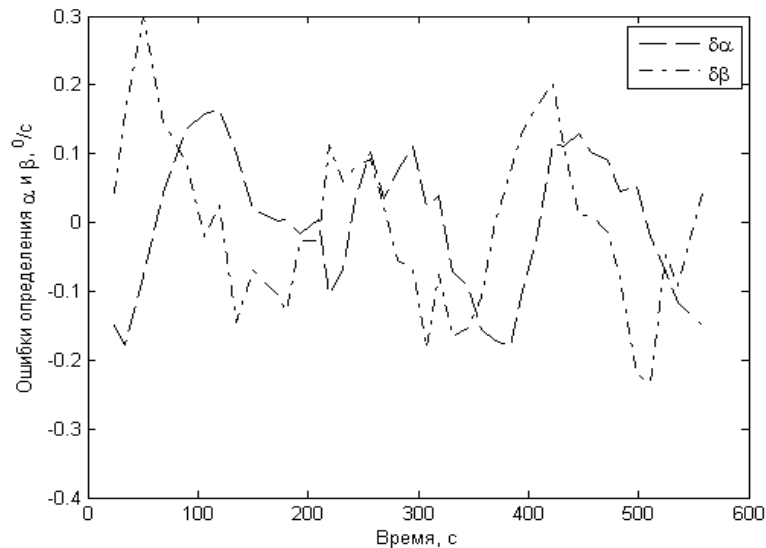


Рис. П.3. Остаточные невязки

Табл. П.3. Источники погрешностей при измерении направления на Солнце

Источник погрешности	Влияние на точность измерений, град
Угол раскрытия луча имитатора	$\pm 2.5$
Точность калибровки	$\pm 0.1$
Точность измерений	$\pm 0.1$

## П.2. Оценка возмущений, действующих на макет

Рассмотрим источники возмущающих моментов, действующих на макет и оценим их величину.

### П.2.1. Момент от силы вязкости, действующий на подшипник

Рассмотрим подшипник в виде полусферы, а ответную часть (чашу) – в виде вогнутой полусферы несколько большего диаметра. Воздух подается в небольшие отверстия в чаше, и далее поток воздуха истекает по тонкой прослойке между подшипником и чашей (рис. П.4).

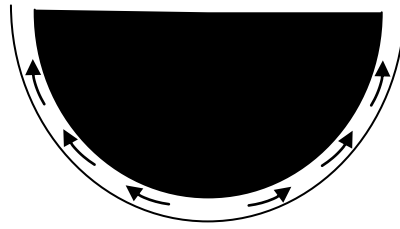


Рис. П.4. Обтекание чаши воздушным потоком

Основной закон вязкого течения можно записать следующим образом:

$$F = \eta \frac{|\nu_1 - \nu_2|}{|z_1 - z_2|} S, \quad (\text{П.1})$$

где  $F$  – тангенциальная (касательная) сила, вызывающая сдвиг слоёв жидкости (газа) относительно друг друга;  $S$  – площадь слоя, по которому происходит сдвиг;  $|\nu_1 - \nu_2| / |z_1 - z_2|$  – градиент скорости течения (быстрота изменения её от слоя к слою), иначе – скорость сдвига. Коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется коэффициентом динамической вязкости. Он количественно характеризует сопротивление газа смещению её слоёв.

Коэффициент динамической вязкости воздуха может быть аппроксимирован следующей формулой в зависимости от температуры  $T$  ( $^{\circ}C$ ) и давления  $p$  (атм):

$$\eta = ((324 - 1,5T)10^{-9} p + 16,81 + 0,0484T)10^{-6}.$$

При температуре  $T = 20^{\circ}C$  и давлении  $p = 7$  атм. (давление, создаваемое компрессором) динамическая вязкость равна  $\eta = 19,77 \cdot 10^{-6}$  Па · с.

Оценим момент, действующий на подшипник за счет сил вязкости воздуха в тонкой прослойке между подшипником и чашей. Пусть макет вращается относительно вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Разделим поверхность чаши на тонкие кольца толщиной  $Rd\varphi$ , и радиусом  $R \sin \varphi$ , где  $R$  – радиус полусферы,  $\varphi$  – угол, который отсчитывается так, как показано на рис. П.5.

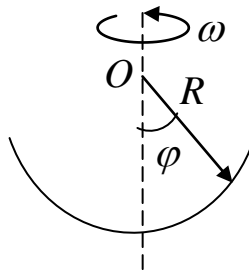


Рис. П.5. Схема для расчета момента вязкого трения

Скорость относительного движения кольца на подшипнике относительно неподвижной чаши можно рассчитать следующим образом:

$$v = \omega R \sin \varphi,$$

а площадь кольца равна:

$$dS = 2\pi R \sin \varphi \cdot R d\varphi.$$

Тогда по формуле (П.1) сила вязкости, действующая на кольцо, равна

$$dF = \frac{\eta 2\pi \omega R^3}{h} \sin^2(\varphi) d\varphi,$$

где  $h$  – толщина воздушной прослойки. А момент, соответственно, равен:

$$dM = dF \cdot R \sin \varphi = \frac{\eta 2\pi \omega R^4}{h} \sin^3(\varphi) d\varphi.$$

Тогда суммарный момент, действующий на подшипник, после интегрирования равен

$$M = \frac{\eta 2\pi \omega R^4}{h} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cos(\varphi_{\max}) - \frac{1}{3} \sin^2(\varphi_{\max}) \cos(\varphi_{\max}) \right),$$

где  $\varphi_{\max}$  – угол направления на край чаши.

Для рассматриваемого воздушного подвеса  $R = 6$  см,  $\varphi_{\max} = 55$  град,  $h \approx 0.1$  мм,  $\omega = 20$  град / с, а значит  $M = 3 \cdot 10^{-7}$  Н·м.

### П.2.2. Неидеальность поверхностей чаши и подшипника

Моменты, возникающие из-за завихрений воздуха в прослойке между подшипником и чашей, обусловленные неидеальностью поверхностей, сложно оценить аналитически, поэтому был проведен эксперимент. Он заключается в

том, что подшипник был помещен в чашу при работающем компрессоре, начальная скорость вращения подшипника была равна нулю. Далее подшипник начинал двигаться в чаше под действием возмущающего момента  $M$ . Было измерено время, за которое подшипник совершает один полный оборот.

Закон изменения кинетического момента равен

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(C\omega)}{dt} = M, \quad (\text{II.2})$$

где  $C$  – момент инерции подшипника-полусферы относительно вертикальной оси, равный

$$C = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}0.675 \text{ кг} \cdot (0.03 \text{ м})^2 = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Проинтегрировав два раза уравнение (II.2), учитывая, что в начальный момент времени подшипник покоился, получим выражение для момента:

$$M = \frac{2C\varphi}{t^2}.$$

Таким образом, момент равен  $M = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

### II.2.3. Взаимодействие макета с окружающим воздухом

Взаимодействие макета с окружающим воздухом может происходить следующими способами. Во-первых, во время вращения макета на него действует момент, обусловленный вязкостью воздуха и зависящий от скорости вращения макета. Во-вторых, под воздействием внешних воздушных потоков на макет может действовать некоторый момент. Оценим значения этих моментов.

Рассмотрим движение макета вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью  $\omega$ . Если предположить, что макет представляет собой диск с радиусом  $R = 25 \text{ см}$ , то силу сопротивления воздуха кольца радиуса  $r$  и толщины  $dr$  можно рассчитать по формуле (II.1) следующим образом:

$$dF = \eta \frac{v}{h} S = \eta \frac{\omega r}{h} 2\pi r dr,$$

где  $h$  – это толщина слоя воздуха, увлекаемая макетом. Тогда момент со стороны воздуха рассчитывается как:

$$M = \int_0^R r \cdot dF = \frac{2\pi\eta\omega}{h} \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi\eta\omega R^4}{4h}.$$

При угловой скорости порядка  $\omega = 20$  град / с,  $h \approx 5$  см,  $\eta = 17 \cdot 10^{-6}$  Па · с с учетом того, что трение действует на обе стороны диска, момент равен  $M = 1.3 \cdot 10^{-6}$  Н · м.

При обтекании тела в ламинарном потоке тела, прямоугольного тела, имеющего площадь сечения  $S$  (рис. 2.5), возникает сила сопротивления, равная

$$F = C_x \cdot S \frac{\rho v^2}{2}, \quad (\text{II.3})$$

где  $C_x$  – коэффициент лобового сопротивления тела данной формы,  $\rho$  – плотность воздуха,  $v$  – скорость потока газа. Для прямоугольников (тел без обтекаемости), расположенных перпендикулярно к набегающему потоку  $C_x = 1.1$ , плотность воздуха при нормальных условиях составляет  $\rho = 1.2$  кг / м<sup>3</sup>. Для аккумулятора, имеющего форму прямоугольника с площадью порядка  $S = 0.01$  м<sup>2</sup>, и расположенного на расстоянии  $R = 0.15$  м от центра макета в случае вращения макета со скоростью  $\omega = 20$  град / с возмущающий момент будет равен  $M = 2 \cdot 10^{-6}$  Н · м. Однако на макете установлено 3 таких аккумулятора и один блок управления ориентацией, который по размерам сравним с ними, но они установлены ближе к центру вращения.

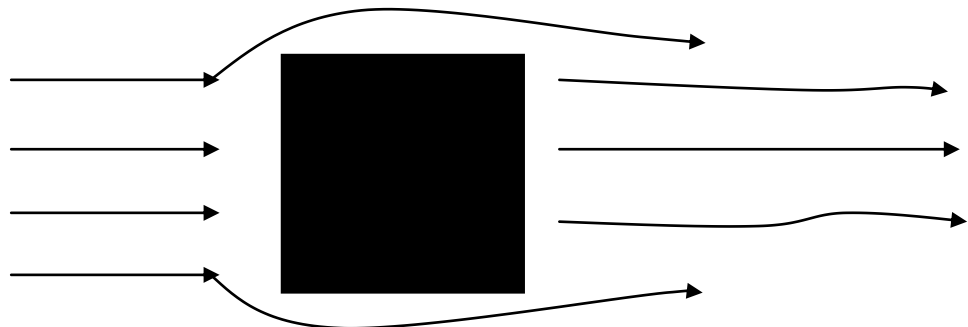


Рис. II.6. Обтекание воздухом аккумулятора

В случае, когда на макет воздействует внешний поток воздуха можно также воспользоваться формулой (II.3) для оценки возмущающего момента.

Самый худший случай с точки зрения величины момента возникает когда поток перпендикулярен плоскости опоры макета, то есть восходящий или нисходящий потоки. Тогда, принимая площадь макета за  $S = 0.19\text{ м}^2$ , плечо действия силы за  $R = 0.1\text{ м}^2$  и скорость потока за  $\nu = 0.1\text{ м/с}$  получим момент, равный  $M = 1 \cdot 10^{-4}\text{ Н} \cdot \text{м}$ .

#### **II.2.4. Возмущения от магнитного поля**

В случае, когда на макете присутствуют возмущающие (нежелательные) магнитные моменты, обусловленные, например, наличием в системе нестационарных электрических токов (при включении приборов), макет подвергается воздействию момента, возникающего при взаимодействии магнитных моментов с внешним магнитным полем. Формула для момента взаимодействия магнитного момента  $\mathbf{m}$  с внешним магнитным полем  $\mathbf{B}$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Если принять, что магнитный возмущающий момент  $\mathbf{m} = 1\text{ А} \cdot \text{м}^2$ , а внешнее поле будет максимально возможным  $\mathbf{B}_{\text{max}} = 200000\text{ нТ}$ , то механический момент в худшем случае, когда вектора  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны, будет равен  $M = 2 \cdot 10^{-4}\text{ Н} \cdot \text{м}$ . Однако следует заметить, что такие возмущающие моменты очень кратковременны (они могут возникать лишь при включении и выключении аппаратуры на макете), при стабильной работе макета этот возмущающий момент отсутствует.

#### **II.2.5. Влияние давления света**

В состав стенда входит имитатор солнца, который представляет собой прожектор с лампой, имеющей силу света  $I = 2.9 \cdot 10^5\text{ кд}$  и освещенность  $J = 1.2 \cdot 10^5\text{ лк}$  на расстоянии 1.5 от источника.

Давление света, мощностью  $U$ , при падении перпендикулярно на поверхность с коэффициентом отражения  $R$  равно



$$P = \frac{U}{c}(1 + R).$$

На макете есть приборы, которые имеют достаточно гладкую и отражающую поверхность. Для оценки примем, что коэффициент отражения этих приборов равен  $R=1$  (то есть они полностью отражают весь падающий на них свет), их площадь равна  $S=0.01 \text{ м}^2$ . Считая, что  $U=1.2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$ , отражающая поверхность находится на расстоянии  $r=15 \text{ см}$  от центра масс макета и она расположена перпендикулярно падающему световому потоку, то момент, действующий на макет будет равен  $M=1.2 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

### II.2.6. Влияние вращения Земли

При вращении макета на него действует гироскопический момент, связанный с вращением Земли. Этот момент обусловлен сопротивлением сил инерции повороту мгновенной оси вращения макета и представляет собой момент, поддерживающий нутационное движение волчка макета.

Представим себе Землю в виде однородной сферы, которая вращается с угловой скоростью  $\omega_3 = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$ . Макет при этом находится на широте Москвы  $\varphi \approx 55 \text{ град}$  и вращается со скоростью  $\omega = 20 \text{ град/с}$  (рис. II.7).

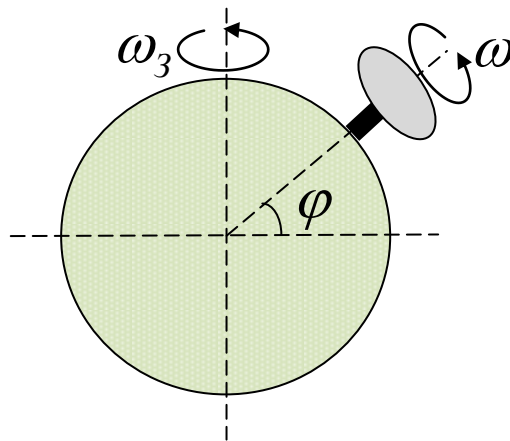


Рис. II.7. Схема расположения макета на Земле

Момент гироскопических сил при этом равен

$$M = C\omega \times \omega_3.$$

Считая момент инерции макета относительно вертикали равным  $C = 0.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , получим действующий момент  $M = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

### II.2.7. Моменты со стороны макета

Основным моментом со стороны макета является момент, обусловленный несбалансированностью макета. Несбалансированность вызвана тем, что центр масс макета  $t. C$  не совпадает с точкой подвеса макета  $t. O$  (рис. II.8).

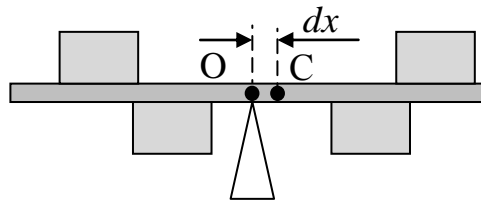


Рис. II.8. Схема макета и положение точек подвеса и центра масс

Таким образом, момент, возникающий от несбалансированности макета равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{dr} \times m\mathbf{g}, \quad (\text{II.4})$$

где  $\mathbf{dr}$  – радиус вектор, направленный из точки подвеса макета в его центр масс,  $m$  – центр масс макета. Получается, что, чтобы обеспечить управляемость макета с помощью маховиков, максимальный момент которых равен  $M = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$ , необходимо обеспечить точность положения центра масс в точке подвеса с точностью более  $dr = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ .

В случае, если  $t. C$  находится над  $t. O$ , с точностью, хуже  $dr = 3 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ , макет будет неуправляемо наклоняться, так как это положение будет неустойчивым. В случае, если  $t. C$  находится под  $t. O$ , то такое положение будет устойчивым, но при отклонении от этого положения будет возникать возвращающий момент, равный (II.4). Угол наклона платформы будет зависеть от положения  $t. C$  относительно  $t. O$ .

Предположим, что в начальный момент времени макет был сбалансирован с точностью лучше  $dr = 3 \cdot 10^{-3}$  мм. Рассмотрим причины, которые могут вызывать смещение точки центра масс макета во время экспериментов.

Так как в составе стенда есть имитатор солнца, который во время своей работы нагревает некоторые элементы конструкции стенда до  $50 - 60^\circ\text{C}$ , то за счет расширения массивных предметов происходит смещение их центра масс, а, значит, и смещение центра масс макета.

Линейное удлинение тела длиной  $L$ , нагретого на температуру  $\Delta T$ , равно  $\Delta L = \alpha L \Delta T$ ,

где  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения.

На макете установлены магнитные стержни, состоящие из пермаллоя ( $\alpha \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). Длина стержней составляет  $L = 0.2$  м. Тогда при нагреве на  $\Delta T = 30^\circ\text{C}$  удлинение стержня составит  $\Delta L = 0.5$  мм. В случае, если стержень удлинится не в обе стороны, а один из концов будет закреплен, то центр масс стержня сместится на значение  $\Delta L / 2 = 0.25$  мм. Это даст вклад в смещение центра масс макета, которое можно рассчитать следующим образом:

$$\Delta x = \frac{m \Delta L / 2}{M},$$

где  $m = 0.185$  кг – масса катушки,  $M = 14$  кг – масса макета. Таким образом,  $\Delta x = 3 \cdot 10^{-6}$  м, что соответствует моменту по формуле (П.4)  $M \approx 4 \cdot 10^{-4}$  Н·м, что соответствует максимальному моменту со стороны маховиков. На макете установлена 3 таких магнитных катушки и ещё несколько металлических конструкций, способных также сильно расширяться при нагревании.

Соответственно, смещение каких-либо элементов стенда приводит к смещению центра масс макета и возникновению гравитационного момента, либо, в случае, если центр масс ниже точки подвеса, приводит к наклонению макета, которое маховики не в силах преодолеть.