



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Материалы защиты](#) • [Сведения о диссертации](#)



[Маштаков Я.В.](#)

Использование прямого
метода Ляпунова в задачах
управления ориентацией
космических аппаратов

Диссертация

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маштаков Я.В. Использование прямого метода Ляпунова в задачах управления ориентацией космических аппаратов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. М., 2019. 94 с. URL: <http://library.keldysh.ru/diss.asp?id=2019-mashtakov>

Федеральное государственное учреждение
Федеральный исследовательский центр
"Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук"

На правах рукописи

Маштаков Ярослав Владимирович

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ
УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доцент, к.ф.-м.н.
С.С. Ткачев

Москва – 2018

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ТРЕХОСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	13
1.1. Постановка задачи и уравнения движения	13
1.2. Ляпуновское управление на основе матриц направляющих косинусов	14
1.3. Ляпуновское управление на основе кватернионов	16
1.4. Реализация управления при помощи маховиков	19
1.5. Исследование точности ляпуновского управления	20
1.6. Оценка максимального отклонения	25
1.7. Выводы по главе 1	28
ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ ОДНООСНОГО УПРАВЛЕНИЯ	29
2.1. Постановка задачи	29
2.2. Стандартное одноосное управление	30
2.3. Модифицированное одноосное управление	31
2.4. Одноосное управление при наличии ограничений	33
2.4.1. Уточнение постановки задачи	33
2.4.2. Синтез закона управления	34
2.4.3. Непересекающиеся запретные области	37
2.4.4. Пересекающиеся запретные области	43
2.5. Выводы по главе 2	46
ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ	47
3.1. Постановка задачи	47
3.2. Особенности оптического сенсора	47
3.3. Системы координат	49
3.4. Синтез углового движения КА	50
3.5. Влияние ошибок на съемку траектории	52
3.6. Влияние кривизны траектории	56
3.7. Численное моделирование	57
3.8. Выводы по главе 3	62

ГЛАВА 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОЛНЕЧНОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТОВ ДЛЯ РАЗГРУЗКИ МАХОВИКОВ	63
4.1. Постановка задачи	63
4.2. Солнечный момент	64
4.3. Построение опорного движения	66
4.4. Используемые системы координат	68
4.5. Разгрузка при помощи солнечного момента	69
4.6. Разгрузка при помощи гравитационного момента	73
4.7. Численное моделирование	77
4.8. Спутник на высокой орбите	80
4.9. Выводы по главе 4	82
ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ДИССЕРТАЦИИ	83
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	84
ПРИЛОЖЕНИЕ А. РЕШЕНИЕ МИНИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ	89
A.1. Поиск решений во внутренней области	91
A.2. Поиск решений на границе допустимой области	92

Введение

В настоящее время при помощи космических аппаратов (КА) решается огромное количество задач. В их число входят как исключительно научные, например, по изучению гравитационного и магнитного полей Земли, так и прикладные: дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ), обеспечение связи, телевидение.

Если на заре освоения космического пространства для выполнения каких-либо сложных задач было необходимо запускать достаточно громоздкие аппараты весом в несколько сотен и даже тысяч килограммов, то современное развитие технологий позволяет для тех же целей использовать уже малые аппараты весом в несколько десятков килограммов, что на порядки снижает стоимость их запуска. Помимо миниатюризации, новые технологии также обеспечили и существенное снижение стоимости комплектующих для спутников, что сделало космическое пространство гораздо доступнее: теперь позволить себе запуск аппарата на орбиту могут даже университеты и небольшие команды разработчиков.

Одним из примеров успешного применения малых спутников может служить дистанционное зондирование Земли. Еще недавно для решения этой важной прикладной задачи использовались в основном большие аппараты (такие как «Ресурс-П» [1] или «WorldView» [2]). Они способны обеспечивать высокодетальную съемку земной поверхности, однако в случае, когда важной является оперативность наблюдений, их применение может быть затруднено – интервал между повторными наблюдениями региона интереса для них составляет дни и даже недели. Решением этой проблемы является, например, запуск большого количества малых аппаратов [3] на орбиту. Примеры нескольких таких спутников представлены в таблице 1 [4–6]. Их возможности, естественно, скромнее, чем у больших спутников ДЗЗ, но, с другой стороны, возможен одновременный запуск группировки малых спутников, что привносит качественно новые возможности для решения задач мониторинга. Именно этот подход был использован американской компанией Planet Labs: на данный момент их спутниковая группировка насчитывает более сотни малых аппаратов формата 3U CubeSat, которые позволяют получать изображение всей поверхности Земли с периодичностью в одни сутки и разрешением около 5 м/пиксель.

Для эффективного решения задач дистанционного зондирования при использовании малых аппаратов, на которые невозможно установить широкоугольные камеры, необходимо уметь осуществлять съемку не только подспутниковой полосы обзора, но и отслеживать заданные маршруты на поверхности Земли вдоль трассы спутника. Это позволяет существенно расширить возможности спутниковой группировки и повысить частоту получения изображений регионов интереса. Это, однако, требует новых подходов к построению опорного углового

движения. В открытых источниках, за редким исключением [7–9], не удается найти методов построения таких угловых движений.

Таблица 1. Малые спутники ДЗЗ

Название спутника	Масса, кг	Разрешение, м/пиксель	Полоса обзора, км	Высота орбиты, км	Угол зрения, градусы
AlSat-2	116	2.5	17.5	670	1.5
Dubaisat-1	190	2.5	20	686	1.7
EgyptSat-1	165	7.8	46.6	668	4
Flock/Dove	5	3-5	?	370-430	?
Hodoyoshi-1	50	6.7	28	504	3.2
KazEOSat-2	177	6.5	77	630	7
RapidEye	150	6.5	77	630	7
RASAT	95	7.5	30	685	2.5
SkySat	83	1.1	8	450	1
TabletSat Aurora	26	15	47	580-600	4.5
VNREDSAT-1	115	2.5	17.5	704	1.4

Новые подходы к построению углового движения также становятся более требовательными к точности ориентации и стабилизации, которую обеспечивает система управления. Для удовлетворения этих требований могут использоваться различные алгоритмы: например представляющее большой практический интерес ляпуновское управление [10–12], скользящее управление [13,14], и многие другие. Как правило, все они требуют знания модели движения космического аппарата для точного отслеживания требуемого движения. В то же время, реализовать все модели внешних возмущений на борту не представляется возможным, а значит, не все внешние возмущения могут быть скомпенсированы, что будет приводить к ошибкам ориентации. При этом крайне важным оказывается знание величины этих ошибок (желательно, в виде конечных соотношений), так как оно показывает, справляется ли система ориентации с требованиями полезной нагрузки.

Для реализации законов управления часто используются системы управления на основе двигателей-маховиков. Управляющий момент при этом создается за счет изменения скорости вращения маховиков. В силу физических причин эта величина является ограниченной, а значит, может наступить такой момент, когда требуемое управление не может быть реализовано – в этом случае говорят, что маховик накопил избыточный кинетический момент. Для «сброса»

избыточного кинетического момента (разгрузки маховиков) необходимо устанавливать на аппарат вспомогательные системы, например, реактивные или магнитные. Первые обладают очевидным недостатком: они требуют запаса рабочего тела, что приводит к снижению возможной массы полезной нагрузки и/или снижает продолжительность миссии. Вторые же системы могут быть использованы лишь при наличии внешнего магнитного поля, что делает невозможным их использование на высоких орбитах.

Основной причиной накопления маховиками кинетического момента являются действующие на аппарат внешние моменты сил, такие как гравитационный момент и момент сил давления солнечного излучения. Как правило, моменты внешних сил учитываются лишь при построении алгоритма управления ориентацией, и маховики должны обеспечить их парирование. Однако, при построении требуемого углового движения эти моменты не учитываются. Учет этих моментов становится особенно важным в тех случаях, когда на ориентацию аппарата не накладывается жестких ограничений и есть некоторая свобода при ее выборе, например во время подзарядки аккумуляторных батарей, когда единственным ограничением является малый угол между нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце. Эту свободу можно использовать для уменьшения скорости накопления кинетического момента, или даже для его разгрузки.

Отметим, что похожая задача уже решалась. В частности, разгрузка при помощи гравитационного момента применялась на космических станциях SkyLab [15–17] и МКС [18–20]. В статье [21] рассматривалась возможность разгрузки гиродин спутника на эллиптической орбите, который в перигее должен быть ориентирован в надир. В работе [22] был предложен алгоритм разгрузки маховиков при помощи гравитационного момента в режиме солнечной ориентации, однако представленная там методика существенно отличается от предложенной в настоящей работе. В работах [23,24] был представлен алгоритм разгрузки при помощи гравитационного момента, но он обладает существенным недостатком: одним из требований его применимости является произвольность ориентации КА. Также рассматривается возможность применения солнечного момента для разгрузки маховиков: в работе [25] используется солнечный парус для балансировки солнечного момента, создаваемого солнечной панелью. В статье [26] было продемонстрировано, что при помощи солнечного момента можно существенно снизить количество разгрузок маховиков. В работе [27] рассматривается возможность использования гравитационного и солнечного моментов для управления кинетическим моментом маховиков. Также, рассматривается возможность использования пропеллирующего эффекта [28] от двух солнечных панелей для уменьшения количества топлива, требуемого для разгрузки. Помимо этого, большое внимание уделяется

разгрузке маховиков при помощи магнитного момента, например [29–31], но этот подход, как уже упоминалось ранее, не может быть использован на аппаратах с высокими орбитами.

На практике довольно часто оказывается, что не требуется обеспечивать трехосную ориентацию аппарата. Например, такая ситуация возникает при уже упомянутой ранее подзарядке аккумуляторных батарей аппарата. Помимо этого, возможна ситуация, когда требуется реализовать заданный закон изменения положения оси аппарата в инерциальном пространстве и при этом обеспечить требуемую закрутку вокруг этой оси (спутник, стабилизированный собственным вращением). В этом случае стандартные законы трехосной стабилизации уже становятся малоприменимыми, и требуется разработка новых алгоритмов, учитывающих особенности требуемого движения [32].

Важным частным случаем одноосной стабилизации аппарата является задача переориентации. При этом на возможную ориентацию могут накладываться ограничения, связанные, например, с наличием высокочувствительных оптических сенсоров на борту: их нельзя направлять на яркие объекты небесной сферы, такие как Солнце и Луна.

Отметим, что задача переориентации при наличии запретных зон не является новой, и довольно хорошо освещена в литературе. Все применяемые для ее решения подходы можно условно разделить на две группы. К первой относятся методы, в которых осуществляется построение опорной траектории, а затем она уже реализуется стандартными методами. Для этого могут использоваться, например, геометрические построения, когда в качестве пути используются касательные к запретным областям [33]. Помимо этого, интересным является подход [34,35], когда небесная сфера дискретизируется (например, при помощи методов, описанных в [36,37]), после чего задача сводится к поиску кратчайшего пути на графе, которая решается алгоритмом A^* [38]. Также для решения поставленной задачи могут использоваться рандомизированные алгоритмы поиска пути [39,40]. Отметим здесь также методы, основанные на методах оптимизации: полуопределенного программирования [41,42], квадратичного программирования с квадратичными ограничениями [43] и метода роя частиц [44]. Эти методы, как правило, требуют довольно больших вычислительных затрат, и не всегда могут быть реализованы на борту. Ко второй группе относятся алгоритмы, в основе которых лежит метод потенциалов [45–50].

Основной **целью настоящей работы** является разработка методов построения опорных движений космических аппаратов и исследование особенностей их реализации при помощи алгоритмов на основе прямого метода Ляпунова. Для этого были поставлены и решены следующие **задачи**:

- Оценка точности работы стандартного ляпуновского управления в зависимости от величины внешних неучтенных возмущений и параметров управления.

- Разработка алгоритмов одноосной стабилизации аппарата при наличии ограничений на возможную ориентацию.
- Исследование динамики относительного углового движения при применении разработанного алгоритма одноосной стабилизации.
- Построение опорного углового движения для отслеживания заданных маршрутов на поверхности Земли.
- Оценка качества получаемых изображений (согласно введенному критерию) в зависимости от ошибок ориентации и стабилизации аппарата.
- Получение ограничений на снимаемые траектории в зависимости от величины возможных управляющих моментов.
- Построение опорного углового движения спутника в режиме солнечной ориентации, при реализации которого обеспечивается сброс избыточного кинетического момента, накопленного маховиками.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Получены конечные соотношения, связывающие точность ориентации и стабилизации при использовании стандартного ляпуновского управления с величиной внешних возмущений, не учитываемых в контуре управления.
- Разработан алгоритм одноосной переориентации аппарата при наличии ограничений на его возможную ориентацию. При этом рассмотрена проблема появления дополнительных положений равновесия (как устойчивых, так и неустойчивых) и предложена методика ее решения.
- Разработан алгоритм синтеза опорного углового движения спутника, позволяющий отслеживать произвольные достаточно гладкие траектории на поверхности Земли. Получены конечные соотношения, связывающие качество снимаемого изображения (согласно введенному критерию) с ошибками ориентации и стабилизации аппарата.
- Разработана методика подбора ориентации спутника, находящегося в режиме солнечной стабилизации, обеспечивающая разгрузку маховиков при помощи внешних моментов.

Используемые методы исследования основываются на применении методов теоретической механики, теории устойчивости, динамики космического полета и численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность полученных научных положений, результатов и выводов обеспечивается соответствием выбранных моделей движения общепринятым стандартам, адекватностью выбранных методов исследования углового движения, проведением численного

моделирования полученных аналитических результатов, а также сопоставлением с результатами, полученными другими авторами для частных случаев рассматриваемых задач.

Практическая значимость состоит в том, что полученные результаты позволяют:

- на предварительных этапах проектирования аппарата подобрать параметры системы ориентации, соответствующие требованиям полезной нагрузки;
- расширить возможности малых спутников ДЗЗ, позволяя снимать сложные маршруты на поверхности Земли за один пролет;
- увеличить время активного существования аппаратов на высоких орбитах путем использования бестопливных методов разгрузки маховиков.

Выносимые на защиту результаты и положения:

- получены оценки точности работы алгоритма управления ориентацией на основе прямого метода Ляпунова в конечном виде в зависимости от величины внешних возмущений и параметров алгоритма;
- разработана методика построения одноосного управления для переориентации спутника при наличии ограничений на возможную ориентацию в процессе движения;
- решена задача построения опорного движения при отслеживании маршрутов на поверхности Земли, а также получены выражения, позволяющие связать параметры системы ориентации и ограничения на снимаемые траектории;
- решена задача построения опорного движения КА, обеспечивающего разгрузку избыточного кинетического момента с помощью гравитационного момента и момента сил солнечного давления.

Апробация результатов работы. Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- International Astronautical Congress (г. Аделаида, Австралия, 2017 г.; г. Бремен, Германия, 2018 г.).
- IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems, (г. Москва, 2017 г.).
- IAA Symposium “Small satellites for Earth observation”, (г. Берлин, Германия, 2015 г.).
- IAA Conference on University Satellite Missions & CubeSat Workshop, (г. Рим, Италия, 2016, 2017 гг.).
- Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (г. Москва, 2016, 2017, 2018 гг.).
- Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов (г. Самара, 2014 г.).

- Ежегодная научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов, ЦУП (г. Королев, 2017 г.).

А также на научных семинарах:

- Семинар им. В.А. Егорова (МГУ, г. Москва, 2017, 2018 гг.).
- Семинар кафедры теоретической механики МАИ (г. Москва, 2018 г.).
- Семинар кафедры теоретической механики МФТИ (г. Долгопрудный, 2018 г.).
- Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению, (МГУ, г. Москва, 2018 г.).
- Семинар отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, 2018 г.)
- Объединенный семинар отделов №5 и №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, 2018 г.).

Публикации. Основные положения и результаты диссертации были опубликованы в 8 [51–58] изданиях, включенных в перечень рекомендованных ВАК РФ, из которых 5 индексируются в базах данных Scopus и/или Web of Science, 3 – препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач и результаты исследований обсуждались с соавторами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Объем диссертации составляет 94 страницы. Работа включает в себя 45 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 70 наименований.

Во введении обосновывается актуальность и практическая значимость работы, а также проводится обзор существующих подходов к решению поставленных задач.

Первая глава посвящена исследованию стандартных алгоритмов на основе прямого метода Ляпунова. Приводится вывод законов управления при помощи функций Ляпунова, использующих в качестве параметров компоненты матрицы направляющих косинусов относительной ориентации, а также использующих скалярную часть относительного кватерниона. Обсуждаются особенности этих законов, а также исследуется их точность при наличии малых неучтенных в контуре управления возмущений.

Во второй главе, также при помощи прямого метода Ляпунова, решается задача одноосной стабилизации аппарата. Полученный закон управления, совпадающий с представленным в [32], затем модифицируется, чтобы избежать долгой сходимости в случае,

когда начальные данные находятся в малой окрестности создаваемого им неустойчивого положения равновесия. В дальнейшем, предлагается методика, позволяющая адаптировать предложенные алгоритмы к задаче переориентации при наличии ограничений, накладываемых на ориентацию аппарата. В дальнейшем проводится исследование полученного алгоритма на наличие дополнительных порождаемых положений равновесия. Оказывается, что возможно порождение как неустойчивых положений равновесия (седловых точек), так и асимптотически устойчивых. Для каждого из этих случаев приводится методика, позволяющая избежать их появления.

В третьей главе решается задача отслеживания сложных маршрутов на поверхности Земли. В качестве чувствительного сенсора, установленного в камере аппарата, рассматривается ПЗС-линейка, что накладывает ограничения на две из трех компонент угловой скорости. Условие на третью компоненту находится из кинематических соотношений Пуассона, что, в итоге, позволяет свести задачу построения опорной траектории к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения на параметр траектории. После этого приводятся оценки качества снимаемого изображения в зависимости от ошибок ориентации и стабилизации аппарата, а также исследуется вопрос о классе траекторий, которые возможно отследить при заданных ограничениях на максимальный управляющий момент, создаваемый маховичной системой управления ориентацией.

Четвертая глава посвящена решению задачи разгрузки маховиков на высоких орбитах при помощи исключительно моментов внешних сил, а именно гравитационного и солнечного. При этом рассматривается два типа орбит: высокие эллиптические с достаточно низким перицентром, когда можно выделить два режима движения (с превалирующим солнечным или гравитационным моментом соответственно), а также просто высокие орбиты, когда единственным моментом, существенно влияющим на кинетический момент маховиков, является солнечный момент. Дополнительным ограничением также является то, что спутник на всем движении должен находиться в режиме солнечной ориентации, то есть нормаль к его солнечным панелям должна быть расположена достаточно близко к направлению на Солнце. В этой главе получено как точное значение, обеспечивающее максимальную разгрузку избыточного кинетического момента (при этом задача сводится к решению кубического уравнения), так и приближенное решение, которое отличается от нижней оценки не более, чем в $\sqrt{2}$ раз.

Диссертационная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 14.607.21.0144, уникальный идентификатор ПНИЭР – RFMEFI60716X0144).

Результаты работы использованы при выполнении грантов РФФИ (№№ 12-01-33045, 13-01-00665, 15-31-20058, 16-01-00634, 16-01-00739) и РНФ (№№ 14-11-00621, 17-71-20117).

Глава 1. Трехосное управление

В настоящей главе рассматривается подход к синтезу управляющих воздействий, основанный на прямом методе Ляпунова [11,12,59]. Такое управление гарантирует асимптотическую устойчивость требуемого движения, а значит даже в присутствии неучтенных внешних возмущений и/или неточностей модели движения способно обеспечить требуемую точность ориентации и стабилизации аппарата.

В основе этой методики лежит следующая идея. Для синтеза управления выбирается положительно-определенная функция, которая равняется нулю, только когда движение спутника совпадает с опорным (кандидат-функция Ляпунова). В дальнейшем, при помощи управления обеспечивается удовлетворение условий теоремы Барбашина-Красовского [60,61].

1.1. Постановка задачи и уравнения движения

Режим обеспечения трехосной ориентации представляет большой практический интерес, например для спутников дистанционного зондирования Земли. В этом случае ориентация и угловая скорость должны меняться по заранее заданному закону, в дальнейшем называемым опорным движением.

Используются следующие системы координат:

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Y_1$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи J2000, $O_a Y_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора;

$O x_1 x_2 x_3$ — связанная с КА система координат (ССК): начало O расположено в центре масс спутника, оси являются главными центральными осями инерции аппарата;

$O X_1 X_2 X_3$ — опорная система координат (ОСК): положение ее осей задается в виде

$$\mathbf{B}(t), \boldsymbol{\omega}_{ref}(t),$$

где $\mathbf{B}(t)$ – матрица направляющих косинусов, описывающая поворот из инерциальной СК в опорную $\mathbf{r}^{OSK} = \mathbf{B}\mathbf{r}^{ИСК}$, $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ – опорная угловая скорость, записанная в проекциях на оси ОСК.

Для перехода между системами координат будем использовать матрицы направляющих косинусов: \mathbf{D} задает переход из ИСК в ССК, \mathbf{A} задает переход из ОСК в ССК. Также будем полагать, что для опорной ориентации и угловой скорости выполнены соотношения Пуассона, описывающие кинематику углового движения:

$$\dot{\mathbf{B}} = -[\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times} \mathbf{B}. \quad (1.1)$$

Здесь введено обозначение для матрицы векторного произведения

$$[\mathbf{a}]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Простой проверкой нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}.$$

Для описания движения спутника будем использовать стандартную модель, состоящую из динамических уравнений Эйлера и кинематических соотношений Пуассона для матриц направляющих косинусов или кватернионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{ext}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{D} \quad \text{или} \quad \dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_{abs}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ – тензор инерции аппарата, $\boldsymbol{\omega}_{abs}$ – вектор абсолютной угловой скорости, $\mathbf{M}_{ctrl}, \mathbf{M}_{ext}$ – управляющий момент и момент внешних сил соответственно, \mathbf{D} – матрица направляющих косинусов, описывающая поворот из ИСК в ССК, $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_0 \ \boldsymbol{\lambda})^T$ – кватернион, описывающий тот же поворот, при этом кватернионное произведение задается в виде

$$\boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \nu_0 - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) \\ \lambda_0 \mathbf{v} + \nu_0 \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{v} \end{pmatrix}.$$

В качестве внешних моментов могут рассматриваться, например, гравитационный момент, момент аэродинамических сил, момент сил светового давления. Задачей управления, является совмещение ССК и ОСК. Также предполагается, что параметры спутника, как и его вектор состояния, известны для произвольного момента времени.

Для синтеза закона управления при помощи прямого метода Ляпунова, как правило, используют два подхода. Первый основан на представлении углового движения в виде матриц направляющих косинусов [12], второй же для параметризации ориентации использует кватернионы [11,59]. Рассмотрим каждый из них более подробно.

1.2. Ляпуновское управление на основе матриц направляющих косинусов

Прежде чем приступить к выводу закона управления, выпишем в явном виде уравнения углового движения ССК относительно ОСК.

Переход из ОСК в ССК описывается при помощи матрицы направляющих косинусов $\mathbf{A} = \mathbf{DB}^T$ (как и прежде, \mathbf{B} задает переход из ИСК в ОСК, \mathbf{D} из ИСК в ССК). Найдем ее производную по времени с учетом уравнений (1.1) и (1.2):

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{D}}\mathbf{B}^T + \mathbf{D}\dot{\mathbf{B}}^T = -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times}\mathbf{DB}^T + \mathbf{DB}^T[\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times} = -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times}\mathbf{A} + \mathbf{A}[\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times} = -[\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times}\mathbf{A}$$

Здесь было учтено несколько свойств матрицы векторного произведения, а именно то, что она является кососимметрической, то есть $[\mathbf{a}]_{\times}^T = -[\mathbf{a}]_{\times}$, а также то, что для любой ортогональной матрицы \mathbf{A}

$$[\mathbf{A}\mathbf{a}]_{\times} = \mathbf{A}[\mathbf{a}]_{\times}\mathbf{A}^T.$$

Таким образом, вводя новую переменную $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}$, можно записать соотношения Пуассона для относительной угловой скорости и матрицы относительной ориентации движения в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times}\mathbf{A}. \quad (1.3)$$

Будем искать кандидат-функцию Ляпунова в виде [12,62]

$$V_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_a(3 - \text{Tr}(\mathbf{A})), \quad k_a = \text{const} > 0. \quad (1.4)$$

Здесь $\text{Tr}(\mathbf{A})$ – след матрицы перехода из ОСК в ССК. Функция V_a , очевидно, является положительно определенной, и в случае, когда ОСК и ССК совмещены, равняется нулю. Найдем ее производную в силу уравнений движения (1.2) и (1.3):

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) - k_a \frac{d\text{Tr}(\mathbf{A})}{dt} = \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) + k_a (\omega_1^{rel} (A_{23} - A_{32}) + \omega_2^{rel} (A_{31} - A_{13}) + \omega_3^{rel} (A_{12} - A_{21})) = \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) + k_a (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{S}) = \\ &= (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_a \mathbf{S}). \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\mathbf{S} = (A_{23} - A_{32}, A_{31} - A_{13}, A_{12} - A_{21})^T$. Для того, чтобы кандидат-функция Ляпунова удовлетворяла теореме Барбашина-Красовского, необходимо, чтобы ее производная в силу уравнений движения была неположительной. Для этого потребуем, чтобы

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad k_{\omega} = \text{const} > 0.$$

Учтем, что

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \mathbf{J} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}) = -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{M}_{ext} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}) - \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}.$$

Это позволяет получить выражение для управляющего момента в виде

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_a\mathbf{S}. \quad (1.5)$$

Таким образом, удовлетворены необходимые условия теоремы Барбашина-Красовского. Для того чтобы построенный закон управления обеспечивал глобальную асимптотическую устойчивость, должны быть выполнены достаточные условия теоремы Барбашина-Красовского. Иными словами, необходимо доказать, что ни одна целая траектория системы (кроме положения равновесия, которому соответствует $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{E}_3$, \mathbf{E}_3 – единичная матрица размера 3×3) не лежит во множестве, на котором производная кандидат-функции Ляпунова обращается в нуль, то есть при $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}$. Для проверки этого факта выпишем уравнения относительного движения:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} + k_a\mathbf{S} = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times}\mathbf{A}.$$

Легко видеть, что при $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}$ уравнения переходят в

$$\mathbf{S} = \mathbf{0}.$$

Для дальнейшего анализа распишем компоненты вектора \mathbf{S} через компоненты кватерниона относительной ориентации $\mathbf{Q} = (q_0, \mathbf{q})^T$, который соответствует матрице \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{E}_3 - 2q_0[\mathbf{q}]_{\times} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T.$$

Учитывая, что вектор $\mathbf{S} = (A_{23} - A_{32}, A_{31} - A_{13}, A_{12} - A_{21})^T$, явное выражение для него принимает вид

$$\mathbf{S} = 2q_0 \begin{pmatrix} q_1 + q_1 \\ q_2 + q_2 \\ q_3 + q_3 \end{pmatrix} = 4q_0\mathbf{q}.$$

Таким образом, закон управления (1.5) порождает дополнительные положения равновесия, в которых ориентация аппарата отличается от заданной на π (соответствует случаю $q_0 = 0$). Эти положения равновесия являются неустойчивыми (что может быть показано путем анализа линеаризованных уравнений движения вблизи неустойчивого положения равновесия), а значит в случае, когда начальные данные не совпадают точно с положением равновесия, управление обеспечит сходимость к требуемому движению.

1.3. Ляпуновское управление на основе кватернионов

Помимо управления на основе функции Ляпунова (1.4) на практике также часто применяется его модификация, когда позиционное слагаемое описывается при помощи

кватерниона относительной ориентации, то есть кандидат-функция Ляпунова ищется в виде [11,59]

$$V_q = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_q(1 - q_0), \quad k_q > 0.$$

Здесь, как и в предыдущем пункте, $\mathbf{Q} = (q_0, \mathbf{q})^T$ – кватернион относительной ориентации, соответствующий матрице \mathbf{A} . Аналогично предыдущему пункту показывается, что для него верны кинематические уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}_{rel} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}_{rel}) \\ q_0 \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}_{rel} \end{pmatrix}.$$

Производная кандидат-функции Ляпунова в силу уравнений движения:

$$\dot{V}_q = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) + k_q(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{q}) = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_q \mathbf{q}).$$

Также потребуем неположительности этой производной, то есть

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_q \mathbf{q} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad k_\omega > 0$$

В итоге, закон управления записывается в виде

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_q \mathbf{q}. \quad (1.6)$$

Сравнивая его с полученным ранее выражением (1.5), легко видеть, что единственное отличие между ними заключается в последнем слагаемом.

Проверим выполнение условий теоремы Барбашина-Красовского. Уравнения относительного движения записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} + k_q \mathbf{q} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{2}\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}_{rel}. \end{aligned}$$

Множество, на котором $\dot{V}_q = 0$ также описывается уравнением $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}$. Из уравнений относительного движения, на этом множестве

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, единственная целая траектория, которая лежит в этом множестве, является положением равновесия $\boldsymbol{\omega}_{rel} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{q} \equiv \mathbf{0}$. Это значит, что закон управления (1.6) обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость опорного движения, и, в отличие от (1.5), не порождает дополнительных положений равновесия. Однако, это управление имеет следующую особенность, связанную с геометрическими свойствами кватернионов, а именно с тем, что \mathbf{Q} и $-\mathbf{Q}$ задают одну и ту же ориентацию. Это становится особенно важным в случае,

когда кватернион ориентации близок к $(-1, 0, 0, 0)^T$: под действием управления спутник совершит разворот не на угол, близкий к нулю, а на угол, близкий к 2π . Избежать этого можно, например, каждый раз выбирая в качестве \mathbf{Q} кватернион с положительной скалярной частью, либо путем модификации последнего слагаемого в законе управления:

$$k_q \mathbf{q} \rightarrow k_q \text{sign}(q_0) \mathbf{q}.$$

Заметим, что такая модификация приводит к разрывности закона управления в точках $q_0 = 0$ и появлению в них дополнительных неустойчивых положений равновесия.

Отметим также еще одно важное отличие законов управления на основе матриц направляющих косинусов и на основе кватернионов. А именно, рассмотрим случай, когда начальное отклонение по угловой скорости равно нулю, а ошибка по ориентации близка к π , то есть $\boldsymbol{\omega}_{rel}(0) = \mathbf{0}$, $|\mathbf{q}(0)| \approx 1$, $q_0 \approx 0$. В этом случае, под действием управления (1.5) угловая скорость будет меняться очень медленно, что приведет к большому времени сходимости. В случае же (1.6) изменение угловой скорости сразу будет достаточно большим, а значит и время сходимости будет меньше.

Для иллюстрации рассмотрим частный случай плоского движения, когда

$$\mathbf{q}(0) = \left(\sin \frac{\alpha_0}{2}, 0, 0 \right)^T, \boldsymbol{\omega}_{rel}(0) = (\omega_0, 0, 0)^T.$$

Уравнения относительного движения тогда упрощаются, а именно, переходят в одно уравнение второго порядка (приведем уравнения относительного движения сразу для двух случаев):

$$A\ddot{\alpha} + k_\omega \dot{\alpha} + 2k_a \sin \alpha = 0,$$

$$A\ddot{\alpha} + k_\omega \dot{\alpha} + k_q \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

где A – момент инерции относительно первой оси ССК. Легко видеть, что уравнения движения совпадают с уравнениями движения математического маятника с трением. Учитывая, что $\alpha \in [0; \pi]$, в первом случае этот маятник может начинать свое движение сколь угодно близко к неустойчивому положению равновесия, а значит и время прихода в окрестность опорного движения $\alpha = 0$ у него теоретически ничем не ограничено. Во втором же случае начальное отклонение маятника не превышает $\pi/2$, а значит и в окрестность опорного движения он придет за конечное время.

1.4. Реализация управления при помощи маховиков

Для управления ориентацией на космических аппаратах, как правило, используется несколько разновидностей систем: магнитные, реактивные и гироскопические. В работе рассматривается система управления на основе нескольких двигателей маховиков, которая относится к последнему типу. Такие системы являются довольно распространенными, и способны выдавать управляющее воздействие с высокой точностью. Маховик представляет собой твердое тело с осесимметричным тензором инерции. Через его центр масс параллельно оси симметрии проходит ось вращения, которая закреплена в ССК. Управление угловым движением происходит путем изменения угловой скорости относительного вращения маховика.

Система уравнений, описывающих угловое движение спутника, оснащенного маховиками, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ext} - \dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n h_i \Omega_i \mathbf{l}_i$ – суммарный относительный кинетический момент маховиков, h_i – момент инерции i -го маховика относительно оси вращения, Ω_i – относительная угловая скорость, \mathbf{l}_i – единичный вектор вдоль оси вращения. Сравнивая с (1.2), легко видеть, что

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}. \quad (1.8)$$

Управление происходит за счет изменения угловой скорости вращения маховиков, то есть путем выбора $\dot{\mathbf{H}}$. В случае, когда система управления состоит из трех маховиков, оси которых не являются компланарными, изменение скорости вращения каждого из маховиков может быть получено однозначно. Когда же маховиков больше трех, возникает задача оптимального распределения кинетического момента по каждому из них, но здесь мы ее рассматривать не будем и остановимся на общем случае (1.8).

Таким образом, уравнения движения в случае, когда реализуется закон управления, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ext} - \dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= -\mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Как и у любой механической системы, у маховиков существуют ограничения, в частности на максимальное изменение скорости вращения и на максимальный кинетический

момент, то есть $|\dot{\mathbf{H}}| < M_0, |\mathbf{H}| < \mathbf{H}_{max}$. Следовательно, возможны случаи, когда $|\mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}| > M_0$, и требуемое управление не может быть реализовано.

Рассмотрим реализацию ляпуновского управления (1.6) при помощи системы маховиков:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M}_{ext} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{ref}) - \mathbf{J} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} + k_q \mathbf{q} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}.$$

Учтем, что $\boldsymbol{\omega}_{abs} = \boldsymbol{\omega}_{rel} + \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{ref}$. Тогда правую часть этого уравнения можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{ext} - (\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{ref}) \times (\mathbf{J} \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{ref}) - \mathbf{J} \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \\ & + \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{ref}) - \boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - (\mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{ref}) \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{rel} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} + k_q \mathbf{q} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

Здесь нужно обратить внимание на два аспекта. Во-первых, управление содержит слагаемые, которые зависят только от опорного движения (в первой строке): это значит, что не всякое опорное движение может быть реализовано. Во-вторых, управление пропорционально k_q, k_{ω} , следовательно, не всякие их значения являются допустимыми при ограниченном управлении: чем они больше, тем **большой** требуется управляющий момент при фиксированных отклонениях.

1.5. Исследование точности ляпуновского управления

При расчете закона управления необходимо точное знание внешних моментов и параметров аппарата. Как правило, мощности бортовой вычислительной машины оказывается недостаточно для имплементации точных (а значит и сложных) моделей движения, а параметры могут быть известны лишь с некоторой точностью. Все это приводит к тому, что закон управления будет реализовываться с некоторой ошибкой. Формально это можно описать, добавив в правую часть уравнений движения возмущающий момент:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ext} - \dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H} + \mathbf{M}_{dist}, \\ \dot{\mathbf{H}} &= -\mathbf{M}_{ctrl} - \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

С практической точки зрения важным является точность алгоритма управления, которую он может обеспечить при наличии внешних неучтенных возмущений. Уравнения относительного движения для закона управления на основе матриц направляющих косинусов (1.5) записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} + 4k_a q_0 \mathbf{q} &= \mathbf{M}_{dist}, \\ \dot{\mathbf{A}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Аналогично и для закона управления на основе кватернионов:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} + k_q\mathbf{q} = \mathbf{M}_{dist},$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2}\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\omega}_{rel}.$$

Здесь \mathbf{M}_{dist} – возмущающие моменты, которые могут быть связаны как с неточностью модели движения аппарата, так и с ошибками в выдаче управляющего воздействия. Также предполагается, что величины максимального управляющего воздействия M_0 хватает для реализации закона управления.

Будем полагать возмущения достаточно малыми. Это позволит сделать предположение о том, что ориентация спутника приходит в малую окрестность опорного движения, и уравнения относительного движения, с точностью до величин второго порядка малости, становятся практически идентичными:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} + 4k_a\mathbf{q} = \mathbf{M}_{dist},$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} + k_q\mathbf{q} = \mathbf{M}_{dist}.$$

Это следует напрямую из того факта, что $q_0 = \cos(\theta/2)$, то есть в малой окрестности положения нуля $q_0 \approx 1 - \theta^2/8$. Таким образом, достаточно будет ограничиться исследованием лишь одного из законов управления, например, основанном на матрицах направляющих косинусов. Полученные для него оценки точности затем легко могут быть распространены на случай использования закона управления на основе кватернионов. В качестве примера возмущающего момента можно рассмотреть, например, гравитационный момент,

$$\mathbf{M}_{dist} = 3\frac{\mu_E}{r^5}\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r},$$

действующий на малый аппарат и не учитываемый в контуре управления, который для малого спутника на низкой орбите составляет порядка $10^{-5} - 10^{-6}$ Н·м·с. Здесь \mathbf{r} – радиус вектор из центра Земли в центр масс аппарата.

Для дальнейшего исследования линеаризуем уравнения движения вблизи положения равновесия. Для задания матрицы \mathbf{A} используем последовательность поворотов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ вокруг второй, третьей и первой осей соответственно. В этом случае матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3, & a_{12} &= \sin \alpha_3, \\ a_{21} &= -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \sin \alpha_1, & a_{22} &= \cos \alpha_3 \cos \alpha_1, \\ a_{31} &= \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1, & a_{23} &= \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1, \\
a_{32} &= -\cos \alpha_3 \sin \alpha_1, \\
a_{33} &= -\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_1.
\end{aligned}$$

Линеаризация вблизи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ позволяет найти выражения для \mathbf{A} и вектора $\mathbf{S} = 4q_0\mathbf{q}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{S} &= 2(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)^T = 2\boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}$$

Угловые скорость и ускорение при этом

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \boldsymbol{\omega}_{rel} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Таким образом, в окрестности положения равновесия уравнения относительного движения переходят в систему уравнений второго порядка по времени:

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + k_\omega \dot{\boldsymbol{\alpha}} + 2k_a \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_{dist}.$$

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого сделаем замену времени:

$$\tau = t \sqrt{\frac{M_0}{J_0}}.$$

Здесь M_0 – максимальный управляющий момент, который может обеспечить система управления, J_0 – максимальный главный момент инерции. Переходя к производной по τ , перепишем уравнения движения в виде

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}'' + k_\omega \boldsymbol{\alpha}' + 2k_a \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_{dist}.$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерному времени τ . Разделим это уравнение на M_0 , а также введем новые переменные

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{J}}{J_0}, \quad K_a = \frac{k_a}{M_0}, \quad K_\omega = \frac{k_\omega}{\sqrt{J_0 M_0}}.$$

В итоге, относительное движение описывается следующим образом:

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}'' + K_\omega \boldsymbol{\alpha}' + 2K_a \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{M}_{dist}}{M_0}.$$

Будем полагать, что $|\mathbf{M}_{dist}| \leq M_{max} \ll M_0$. Тогда уравнения приводятся к виду

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}'' + K_\omega \boldsymbol{\alpha}' + 2K_a \boldsymbol{\alpha} = \varepsilon \mathbf{M}, \quad \varepsilon = \frac{M_{max}}{M_0} \ll 1, \quad |\mathbf{M}| \leq 1.$$

В силу малости ε , представляется возможным искать решение в виде разложения в ряд по степеням малого параметра [63,64]

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^0 + \varepsilon \boldsymbol{\alpha}^1 + \varepsilon^2 \boldsymbol{\alpha}^2 + \dots$$

Итоговая система уравнений тогда записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}^0)'' + K_\omega (\boldsymbol{\alpha}^0)' + 2K_a \boldsymbol{\alpha}^0 &= 0, \\ \mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}^1)'' + K_\omega (\boldsymbol{\alpha}^1)' + 2K_a \boldsymbol{\alpha}^1 &= \mathbf{M}(q, \boldsymbol{\alpha}^0), \\ &\dots \end{aligned}$$

Учитывая диагональный вид \mathbf{I} , эту систему можно переписать в виде (здесь и далее не рассматриваются возмущения второго и большего порядков)

$$\begin{aligned} I_{ii} (\alpha_i^0)'' + K_\omega (\alpha_i^0)' + 2K_a \alpha_i^0 &= 0, \\ I_{ii} (\alpha_i^1)'' + K_\omega (\alpha_i^1)' + 2K_a \alpha_i^1 &= M(q, \alpha^0), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Вводя обозначения $2\gamma_i = \frac{K_\omega}{I_{ii}}$, $\omega_i^2 = \frac{2K_a}{I_{ii}}$, $f_i = \frac{M(\tau, \boldsymbol{\alpha}_0)}{I_{ii}}$, уравнения перепишем в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_i^0)'' + 2\gamma_i (\alpha_i^0)' + \omega_i^2 \alpha_i^0 &= 0, \\ (\alpha_i^1)'' + 2\gamma_i (\alpha_i^1)' + \omega_i^2 \alpha_i^1 &= f_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решения и первой, и второй группы уравнений зависят от соотношений между γ_i и ω_i . Учитывая, что управление обеспечивает асимптотическую устойчивость $\boldsymbol{\alpha} \equiv 0$ невозмущенной задачи, будем полагать, что решение нулевого приближения уже сошлось к нулю, то есть $\boldsymbol{\alpha}_0 \equiv 0$. Таким образом, остается лишь получить решение для первого приближения, в котором $f_i(\tau, \boldsymbol{\alpha}_0) \rightarrow f_i(\tau, \mathbf{0}) = f_i(\tau)$.

1. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 > 0$.

В этом случае решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^1 = A \exp((- \gamma_i + \varphi_i) \tau) + B \exp((- \gamma_i - \varphi_i) \tau), \quad \varphi_i = \sqrt{\gamma_i^2 - \omega_i^2}.$$

Для решения неоднородного уравнения используется метод вариации постоянных.

Система дифференциальных уравнений для A, B представляется в виде

$$\begin{aligned} A' \exp((- \gamma_i + \varphi_i) \tau) + B' \exp((- \gamma_i - \varphi_i) \tau) &= 0, \\ (- \gamma_i + \varphi_i) A' \exp((- \gamma_i + \varphi_i) \tau) + \\ + (- \gamma_i - \varphi_i) B' \exp((- \gamma_i - \varphi_i) \tau) &= f_i(\tau). \end{aligned}$$

Разрешим ее относительно производных:

$$A' = \frac{f_i(\tau) \exp((- \gamma_i - \varphi_i) \tau)}{2\varphi_i},$$

$$B' = -\frac{f_i(\tau) \exp((- \gamma_i + \varphi_i) \tau)}{2\varphi_i}.$$

Таким образом, решение для первого приближения принимает вид

$$\alpha_i^1 = \frac{1}{\varphi_i} \int_0^\tau f_i(p) \exp(-\gamma_i(\tau - p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(\tau - p)) dp.$$

2. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 < 0$.

Решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^1 = A \exp(-\gamma_i \tau) \cos(\psi_i \tau) + B \exp(-\gamma_i \tau) \sin(\psi_i \tau), \quad \psi_i = \sqrt{\omega_i^2 - \gamma_i^2}.$$

Аналогично предыдущему случаю, система для A, B представляется в виде

$$\begin{aligned} A' \exp(-\gamma_i \tau) \cos(\psi_i \tau) + B' \exp(-\gamma_i \tau) \sin(\psi_i \tau) &= 0, \\ -\psi_i A' \exp(-\gamma_i \tau) \sin(\psi_i \tau) + \psi_i B' \exp(-\gamma_i \tau) \cos(\psi_i \tau) &= f_i(\tau). \end{aligned}$$

Итоговые выражения для A', B' принимают вид

$$A' = -\frac{f_i(\tau) \exp(\gamma_i \tau)}{\psi_i} \sin(\psi_i \tau),$$

$$B' = \frac{f_i(\tau) \exp(\gamma_i \tau)}{\psi_i} \cos(\psi_i \tau),$$

а решение неоднородного уравнения –

$$\alpha_i^1 = \frac{1}{\psi_i} \int_0^\tau f_i(p) \exp(\gamma_i(p - \tau)) \sin(\psi_i(\tau - p)) dp.$$

3. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 = 0$

Решение однородного уравнения представляется в виде

$$\alpha_i^1 = A \exp(-\gamma_i \tau) + B \tau \exp(-\gamma_i \tau).$$

Система для метода вариации постоянных записывается как

$$\begin{aligned} A' \exp(-\gamma_i \tau) + B' \tau \exp(-\gamma_i \tau) &= 0, \\ -\gamma_i A' \exp(-\gamma_i \tau) + (1 - \gamma_i \tau) B' \exp(-\gamma_i \tau) &= f_i(\tau), \end{aligned}$$

а ее решения в виде

$$B' = f_i(\tau) \exp(\gamma_i \tau),$$

$$A' = -\tau f_i(\tau) \exp(\gamma_i \tau).$$

Решение неоднородного уравнения в этом случае

$$\alpha_i^1 = \int_0^q f_i(p) \exp(-\gamma_i(\tau - p))(\tau - p) dp.$$

Отметим, что наиболее критичными являются оценки максимального отклонения ориентации и угловой скорости от требуемых.

1.6. Оценка максимального отклонения

Для оценки максимального отклонения ориентации и точности стабилизации КА используются уже полученные выражения для α_i^0, α_i^1 . Как и прежде, полагаем $\alpha_i^0 \equiv 0$.

1. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 > 0$

В этом случае, как было показано в предыдущем пункте, решение принимает вид (с точностью до величин порядка ε^2)

$$\alpha_i(\tau) = \varepsilon \int_0^\tau \frac{f_i(p)}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(\tau - p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(\tau - p)) dp.$$

Угловая скорость КА (в безразмерных переменных) при этом может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} \Omega_i = (\alpha_i)' &= -\varepsilon \int_0^\tau \frac{\gamma_i}{\varphi_i} f_i(p) \exp(-\gamma_i(\tau - p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(\tau - p)) dp + \\ &+ \varepsilon \int_0^\tau f_i(p) \exp(-\gamma_i(\tau - p)) \operatorname{ch}(\varphi_i(\tau - p)) dp. \end{aligned}$$

Таким образом, вводя обозначение $f_{\max} = \varepsilon \max_\tau (|f_i(\tau)|)$, можно получить оценки точности ориентации и стабилизации КА:

$$\begin{aligned} |\alpha_i(\tau)| &\leq f_{\max} \left| \int_0^\tau \frac{1}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i(\tau - p)) \operatorname{sh}(\varphi_i(\tau - p)) dp \right| \leq \\ &\leq f_{\max} \left| \int_0^\infty \frac{1}{\varphi_i} \exp(-\gamma_i x) \operatorname{sh}(\varphi_i x) dx \right| = f_{\max} \frac{1}{\gamma_i^2 - \varphi_i^2} \\ |\Omega_i| &\leq \frac{f_{\max}}{\varphi_i} \int_0^\infty |-\gamma_i \exp(-\gamma_i x) \operatorname{sh}(\varphi_i x) + \varphi_i \exp(-\gamma_i x) \operatorname{ch}(\varphi_i x)| dx = \\ &= 2 f_{\max} \left(\frac{\gamma_i + \varphi_i}{\gamma_i - \varphi_i} \right)^{\frac{\gamma_i}{2\varphi_i}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_i^2 - \varphi_i^2}} \end{aligned}$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям и размерным переменным, выражения для точности ориентации и стабилизации КА запишем в виде

$$|\alpha_i(t)| \leq \frac{M_{max}}{2k_a},$$

$$|\omega_i(t)| \leq \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \left(\frac{k_\omega + \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}{k_\omega - \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}} \right)^{\frac{-k_\omega}{2\sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}},$$

где $M_{max} = f_{max} M_0 J_{ii}$ – значение максимального возмущающего момента.

2. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 < 0$

Выражения для углов ориентации и угловой скорости КА принимают вид

$$\alpha_i(\tau) = \frac{\varepsilon}{\psi_i} \int_0^\tau f_i(p) \exp(\gamma_i(p-\tau)) \sin(\psi_i(\tau-p)) dp,$$

$$\Omega_i(\tau) = -\varepsilon \frac{\gamma_i}{\psi_i} \int_0^\tau f_i(p) \exp(\gamma_i(p-\tau)) \sin(\psi_i(\tau-p)) dp +$$

$$+ \varepsilon \int_0^\tau f_i(p) \exp(\gamma_i(p-\tau)) \cos(\psi_i(\tau-p)) dp.$$

Для получения оценки используется вспомогательное соотношение

$$\int_0^\infty \exp(-ax) |\sin(x)| dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \exp(-ax) \sin(x) dx =$$

$$= \int_0^\pi \exp(-ax) \sin(x) dx \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-a\pi k) = \operatorname{cth}\left(\frac{a\pi}{2}\right) \frac{1}{a^2 + 1}.$$

Значения максимальных ошибок ориентации и стабилизации записываются в виде

$$|\alpha_i(\tau)| \leq \frac{f_{max}}{\psi_i} \int_0^\tau \exp(\gamma_i(p-\tau)) |\sin(\psi_i(\tau-p))| dp \leq$$

$$\leq \frac{f_{max}}{\psi_i^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma_i}{\psi_i} x\right) |\sin(x)| dx = \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_i \pi}{2\psi_i}\right) \frac{f_{max}}{\gamma_i^2 + \psi_i^2},$$

$$|\Omega_i(q)| = \left| -\varepsilon \frac{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}{\psi_i} \int_0^\tau f(p) \exp(\gamma_i(p-\tau)) \sin(\psi_i(\tau-p) - \theta) \right| \leq$$

$$\leq f_{max} \frac{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}{\psi_i^2} \exp\left(-\frac{\gamma_i \theta}{\psi_i}\right) \left(\int_{-\theta}^\infty \exp\left(-\frac{\gamma_i x}{\psi_i}\right) |\sin(x)| dx \right) \leq$$

$$\leq \frac{f_{max}}{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_i \theta}{\psi_i}\right) \left(1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\gamma_i \pi}{2\psi_i}\right)\right),$$

где

$$\theta = \arccos\left(\frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_i^2 + \psi_i^2}}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Переходя к исходным обозначениям и переменным, эти выражения переписываются в виде

$$|\alpha_i(t)| \leq M_{max} \operatorname{cth} \left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \right) \frac{1}{2k_a},$$

$$|\omega_i(t)| \leq \frac{M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \exp \left(\frac{-k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \arccos \left(\frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii}}} \right) \right) \left(1 + \operatorname{cth} \left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \right) \right).$$

3. Случай $\gamma_i^2 - \omega_i^2 = 0$

Выражения для углов ориентации и угловой скорости КА в этом случае принимают вид

$$\alpha_i = \varepsilon \int_0^\tau f_i(p) \exp(-\gamma_i(\tau - p)) (\tau - p) dp,$$

$$\Omega_i = \varepsilon \int_0^\tau f_i(p) \exp(-\gamma_i(\tau - p)) (1 - \gamma_i(\tau - p)) dp.$$

Оценка сверху для этих параметров записывается в виде

$$|\alpha_i| \leq f_{max} \int_0^\infty \exp(-\gamma_i x) x dx = \frac{f_{max}}{\gamma_i^2},$$

$$|\Omega_i| \leq f_{max} \int_0^\infty \exp(-\gamma_i x) (1 - \gamma_i x) dx = 2 \frac{f_{max}}{e\gamma_i}.$$

В исходных обозначениях эти соотношения записываются так:

$$|\alpha_i| \leq \frac{M_{max}}{2k_a}, \quad |\omega_i| \leq 4 \frac{M_{max}}{ek_\omega}.$$

В итоге, для произвольных коэффициентов управления получаемые оценки точности представляются в виде

$$|\delta\alpha_i| \leq \begin{cases} \frac{1}{2k_a} M_{max}, & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} \geq 0 \\ \frac{1}{2k_a} M_{max} \operatorname{cth} \left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \right), & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} < 0 \end{cases}$$

$$|\delta\omega_i| \leq \begin{cases} \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \left(\frac{k_\omega + \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}{k_\omega - \sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}} \right)^{-\frac{k_\omega}{2\sqrt{k_\omega^2 - 8k_a J_{ii}}}}, & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} \geq 0 \\ \frac{2M_{max}}{\sqrt{2J_{ii}k_a}} \exp \left(-\frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \arccos \left(\frac{k_\omega}{\sqrt{8k_a J_{ii}}} \right) \right) \times \\ \times \left(1 + \operatorname{cth} \left(\frac{\pi k_\omega}{2\sqrt{8k_a J_{ii} - k_\omega^2}} \right) \right). & k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} < 0 \end{cases}$$

Отметим также, что полученные оценки неулучшаемы и достижимы, а также являются непрерывными в точке $k_\omega^2 - 8k_a J_{ii} = 0$.

1.7. Выводы по главе 1

В настоящей главе было исследовано относительное угловое движение аппарата под действием ляпуновского управления. В предположении действующих на аппарат внешних возмущений, которые не учитываются в контуре управления, были получены конечные соотношения, позволяющие связать точности ориентации и стабилизации аппарата, параметры законы управления и величину внешних возмущений. Результаты исследований были опубликованы в работах [52,54].

Глава 2. Алгоритмы одноосного управления

Как уже упоминалось во введении, важной практической задачей является одноосная стабилизация аппарата, когда требуется отследить изменение лишь одной заданной оси и обеспечить заданное вращение вокруг нее. Для решения этой задачи может быть также использован прямой метод Ляпунова. К его недостаткам можно отнести то, что при его построении не учитываются возможные ограничения, накладываемые на ориентацию аппарата. В настоящей главе предложен алгоритм синтеза закона управления при наличии ограничений, задаваемых в виде запретных конусов, в которые не должна попадать заданная ось.

2.1. Постановка задачи

В настоящей главе используются инерциальная и связанная системы координат, аналогичные таковым в первой главе. Переход из ИСК в ССК осуществляется при помощи матрицы направляющих косинусов \mathbf{D} , так что $\mathbf{r}^{СК} = \mathbf{D}\mathbf{r}^{ИСК}$.

В связанной системе координат выделяется некоторый единичный вектор \mathbf{n} (например, это может быть нормаль к солнечным панелям), проекции которого на оси ССК остаются неизменными. При этом полагается, что в инерциальном пространстве он должен меняться по заданному закону $\mathbf{n}_{ref}(t)$. Это накладывает ограничения на опорную угловую скорость аппарата, а именно

$$\boldsymbol{\omega}_{ref} = \mathbf{n}_{ref} \times \dot{\mathbf{n}}_{ref} + \Omega \mathbf{n}_{ref},$$

где Ω является произвольной скалярной функцией. Это ограничение получается из-за того, что для вектора \mathbf{n}_{ref} должно быть выполнено соотношение Пуассона

$$\dot{\mathbf{n}}_{ref} = \boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{n}_{ref}.$$

В прикладных задачах опорная угловая скорость обычно равняется либо нулю (например, при одноосной инерциальной стабилизации), либо некоторой константе (при стабилизации собственным вращением), однако мы будем рассматривать более общий случай, когда $\Omega(t)$ является заданной достаточно гладкой функцией. Задачей управления является совмещение векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}_{ref} . Как и в первой главе, будем полагать известными модель движения аппарата

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} &= \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{ext}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{D}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

а также его вектор состояния для произвольного момента времени.

2.2. Стандартное одноосное управление

Как и в случае трехосного закона управления, введем новую переменную, которая описывает относительную угловую скорость. Заметим, что опорное движение $\mathbf{n}_{ref}(t), \boldsymbol{\omega}_{ref}(t)$ задано в ИСК, в то время как $\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}_{abs}$ – в ССК. Следовательно, чтобы корректно проводить операции между этими векторами, их нужно привести в одну систему координат. С учетом этого, относительная угловая скорость записывается в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}. \quad (2.2)$$

Здесь \mathbf{D} , как и прежде, описывает переход из ИСК в ССК.

В качестве кандидат-функции Ляпунова рассмотрим

$$V_c = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_c [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref})], \quad (2.3)$$

где \mathbf{J} – тензор инерции спутника. Эта функция является положительно определенной и равняется нулю только на опорном движении, то есть когда \mathbf{n} и \mathbf{n}_{ref} совпадают, а относительная угловая скорость равна нулю. Найдем ее производную в силу уравнений движения:

$$\dot{V}_c = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) - k_c (\mathbf{n}, \mathbf{D}\dot{\mathbf{n}}_{ref} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{n}}_{ref}) = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) - k_c (\mathbf{n}, -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref} + \mathbf{D}[\boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{n}_{ref}]).$$

Заметим, что

$$-\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref} + \mathbf{D}[\boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{n}_{ref}] = (-\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}) \times \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref} = -\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}.$$

Тогда производная кандидат-функции Ляпунова переписывается в виде

$$\dot{V}_c = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_c (\mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}) \times \mathbf{n}).$$

Потребуем неположительности этой функции. Для этого достаточно, чтобы

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_c (\mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}) \times \mathbf{n} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad k_\omega > 0$$

Учитывая (2.2) и уравнения движения (2.1), получаем выражение для управления:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_c (\mathbf{D}\mathbf{n}_{ref}) \times \mathbf{n}.$$

Сравнивая его с полученными ранее выражениями для трехосного управления (1.6) и (1.5), можно заметить схожесть их структуры: они отличаются лишь последним слагаемым.

Остается показать, что множество, на котором $\dot{V}_c = 0$, не содержит целых траекторий кроме нулевого положения равновесия. Для этого рассмотрим набор переменных,

характеризующих относительное движение: относительную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ и скаляр $e_0 = (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})$. Их производные, согласно уравнениям движения,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} + k_c(\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}) &= 0, \\ \dot{e}_0 &= -(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что множество, на котором $\dot{V}_c = 0$, содержит два положения равновесия: $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}, e_0 = 1$ и $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \mathbf{0}, e_0 = -1$. Первое по построению является асимптотически устойчивым и совпадает с опорным движением, второе же является неустойчивым и отличается от нужного на π . Таким образом, как и для трехосного управления на основе матриц направляющих косинусов, одноосное управление на основе функции Ляпунова (2.3) порождает дополнительное неустойчивое положение равновесия. Отметим также, что полученный закон управления схож с предложенным в книге [32].

2.3. Модифицированное одноосное управление

Предложенный в предыдущем пункте закон одноосной стабилизации, как и трехосное управление на основе матриц направляющих косинусов, обладает недостатком: при начальных данных, близких к неустойчивому положению равновесия, время сходимости может существенно возрастать. В настоящем пункте мы синтезируем закон управления, который, как и трехосное управление на основе кватернионов, уже не будет обладать этим недостатком.

Рассмотрим структуру функций Ляпунова, которые использовались в первой главе для построения управления:

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_a(3 - \text{Tr}(\mathbf{A})), \\ V_q &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_q(1 - q_0). \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением, связывающим матрицы направляющих косинусов и кватернионы:

$$\mathbf{A} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{E}_3 - 2q_0[\mathbf{q}]_{\times} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T,$$

а также учтем, что

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{e} \sin \frac{\theta}{2},$$

где θ соответствует относительному углу поворота, \mathbf{e} – единичный вектор вдоль оси относительного поворота. Тогда функции Ляпунова можно переписать в виде

$$V_a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_a(1 - \cos \theta),$$

$$V_q = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_q \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right).$$

Заметим, что функция Ляпунова для одноосного управления записывается в виде

$$V_c = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_c(1 - \cos \varphi),$$

где $\cos \varphi = (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})$, а φ также является относительным углом поворота. По аналогии с трехосным управлением, проведем модификацию кандидат-функции Ляпунова:

$$V_m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_m \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right).$$

Ориентация не может отличаться от требуемой более чем на π , а значит $\cos(\varphi/2) > 0$. Тогда

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}{2}}.$$

Таким образом, кандидат-функция Ляпунова записывается в виде

$$V_m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_m \left(1 - \sqrt{\frac{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}{2}}\right).$$

Ее производная, в силу уравнений движения, равняется

$$\dot{V}_m = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}) + \frac{k_m}{2\sqrt{2}} \frac{(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n})}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}} = \left(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + \frac{k_m}{2\sqrt{2}} \frac{(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n}}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}} \right).$$

Как и ранее, потребуем неположительности \dot{V}_m :

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + \frac{k_m}{2\sqrt{2}} \frac{(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n}}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad k_\omega > 0.$$

Закон управления тогда принимает вид

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - \frac{k_m}{2\sqrt{2}} \frac{(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n}}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}}. \quad (2.4)$$

Отличие от полученных ранее законов управления заключается только в последнем слагаемом. Оно имеет особенность при $(\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref}) \rightarrow -1$, то есть когда ориентация отличается от заданной на π . Рассмотрим

$$\frac{|(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n}|}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi}} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Таким образом, модуль этого выражения при стремлении к π имеет предел, равный $\sqrt{2}$. Однако в самой точке $\varphi = \pi$ эта величина является неопределенной. Для решения этой проблемы в малой окрестности особенности управление может быть переопределено, например, следующим образом:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{J} \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} - k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} - \frac{k_m}{2\sqrt{2}} \mathbf{M}_{pos},$$

$$\mathbf{M}_{pos} = \begin{cases} \frac{(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n}}{\sqrt{1 + (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})}}, & (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref}) > -1 + \xi, \\ \sqrt{2} \frac{\boldsymbol{\omega}_{rel}}{|\boldsymbol{\omega}_{rel}|}, & (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref}) < -1 + \xi, |\boldsymbol{\omega}_{rel}| > \zeta, \\ \sqrt{2} \mathbf{j}, & (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref}) < -1 + \xi, |\boldsymbol{\omega}_{rel}| < \zeta, \end{cases}$$

Здесь ξ, ζ – малые величины, \mathbf{j} – орт, неподвижный в ССК и ортогональный \mathbf{n} . Такая замена позволит избежать неопределенностей и ошибок численного счета вблизи особенности.

2.4. Одноосное управление при наличии ограничений

При выполнении миссии на ориентацию аппарата могут накладываться ограничения. Они могут быть связаны, например, с наличием на борту чувствительных оптических сенсоров, устанавливаемых в звездные датчики и камеры: в их область зрения не должны попадать яркие источники света, такие как Луна и Солнце. Эти ограничения должны быть учтены при синтезе законов управления ориентацией.

2.4.1. Уточнение постановки задачи

Будем рассматривать частный случай одноосного управления, когда требуемая ориентация соответствует инерциальной стабилизации, то есть

$$\mathbf{n}_{ref} = \text{const}, \quad \boldsymbol{\omega}_{ref} \equiv \mathbf{0}.$$

Начальную угловую скорость также положим равной нулю. Иными словами, рассматривается задача переориентации аппарата. Ограничения полагаются заданными в виде неподвижных в инерциальном пространстве конусов, у каждого из которых известен угол полураствора α_i и

ось \mathbf{h}_i (рис. 2.1). Ось \mathbf{n} не должна попадать внутрь этих конусов, то есть на всем движении должно быть выполнено условие

$$(\mathbf{Dh}_i, \mathbf{n}) < \cos \alpha_i.$$

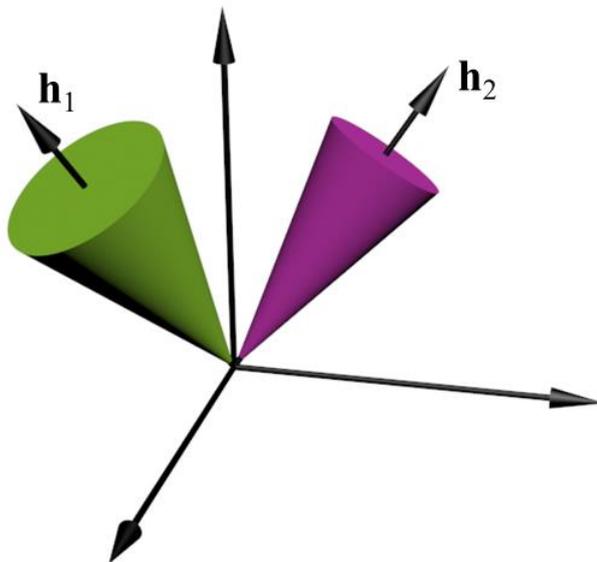


Рис. 2.1. Запретные зоны

Также полагается, что начальные и конечные условия являются допустимыми, то есть они лежат вне запретных областей.

2.4.2. Синтез закона управления

Для построения закона управления используется следующая идея. Управление на основе прямого метода Ляпунова обеспечивает невозрастание функции Ляпунова. Следовательно, если внутри запретной зоны или на ее границе функция Ляпунова будет больше, чем в начальный момент времени, то запретная зона будет недостижима по построению.

Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова в виде

$$V_r = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_r [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})] (1 + F), \quad k_r > 0. \quad (2.5)$$

Здесь F – некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Как правило, в качестве F рассматриваются функции, принимающие бесконечное значение на границе запретной зоны (логарифмические [48] или функции вида x^{-1} [49]). В случае наличия N запретных зон, F представляется в виде суммы, например

$$F = \sum_{i=1}^N -A_i \ln(\cos \alpha_i - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)).$$

Здесь, как и ранее, α_i – угол полураствора запретного конуса, \mathbf{h}_i – его высота, $A_i > 0$ – некоторые положительные константы. Заметим, что такой подход приводит к усложнению анализа относительной динамики, а именно затрудняет поиск новых положений равновесия (возможно, асимптотически устойчивых), которые порождает построенный таким образом закон управления.

В настоящей работе предлагается использовать функции, которые «локально» изменяют закон одноосной стабилизации. Для этого они должны удовлетворять нескольким требованиям: во-первых, они должны быть равны нулю «вдали» от запретной зоны; во-вторых, внутри запретной зоны они должны принимать достаточно большие значения, чтобы исключить возможность попадания туда оси \mathbf{n} ; в-третьих, они должны быть, по крайней мере, один раз непрерывно дифференцируемы – это необходимо для непрерывности закона управления. В качестве примера таких функций могут быть рассмотрены полиномы, аргументом которых является «расстояние» между текущим положением \mathbf{n} и осью конуса \mathbf{h}_i . При этом в качестве расстояния на сфере рассматривается угол между этими осями, то есть $\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)$. Учитывая требования по гладкости функций, минимальной степенью подходящего полинома является кубическая:

$$f_i(\lambda_i) = \begin{cases} H_i, & \lambda_i < 0 \\ H_i(-3\lambda_i^2 + 2\lambda_i^3 + 1), & 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ 0, & 1 > \lambda_i \end{cases}$$

$$\lambda_i = \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i) - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}.$$

Здесь $H_i > 0$ – некоторая константа, достаточно большая, чтобы обеспечить невозможность попадания \mathbf{n} в запретную зону, $\beta_i > \alpha_i$ – характерное расстояние, на котором i -ое ограничение оказывает влияние на относительное движение. Функция F при этом записывается в виде

$$F = \sum_{i=1}^N f_i.$$

Найдем производную кандидат-функции Ляпунова в силу уравнений движения (2.1):

$$\dot{V}_r = (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_r(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n}(1+F)) + k_r(1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \frac{dF}{dt}.$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{df_i}{dt}, \quad \frac{df_i}{dt} = \frac{df_i}{d\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dt} = f_i' \frac{1}{\beta_i - \alpha_i} \frac{-(\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{Dh}_i)}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} = \frac{f_i'}{\beta_i - \alpha_i} \frac{(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i)}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}},$$

где

$$f_i' = \begin{cases} H_i(6\lambda_i^2 - 6\lambda_i), & 0 \leq \lambda_i \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Необходимо отметить, что, несмотря на наличие в знаменателе члена $1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2$, особенности данная функция не порождает, так как на всем движении $(\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i) \leq \cos \alpha_i < 1$. Случай же $(\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i) = -1$ может быть исключен правильным выбором β_i – учитывая, что угол полураствора запретного конуса $\alpha_i < \pi$ (иначе вся сфера будет входить в запретную зону), всегда можно выбрать $\beta_i < \pi$. Помимо этого,

$$\left| \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} \right| = \frac{|\sin \varphi|}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = 1,$$

где φ – угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{h} , а значит, в окрестности $(\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i) = -1$ функция также является непрерывной.

Согласно постановке задачи, $\boldsymbol{\omega}_{ref} \equiv 0$, а значит $\boldsymbol{\omega}_{rel} \equiv \boldsymbol{\omega}_{abs}$. Таким образом, производная кандидат-функции Ляпунова принимает вид

$$\dot{V}_r = \left(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + k_r (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} (1 + F) + k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^N \frac{f_i'}{\beta_i - \alpha_i} \frac{(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i)}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} \right).$$

Потребуем ее неположительности, откуда получается выражение для управляющего момента

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl} = & -\mathbf{M}_{ext} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - k_r (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} - \\ & - k_r F (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} - k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^N \frac{f_i'}{\beta_i - \alpha_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Получившийся закон управления можно условно разделить на две части: слагаемые из первой строки совпадают со стандартным законом одноосного управления, слагаемые же из второй строки отвечают за обход запретных зон.

Уравнения относительного движения под действием управления принимают вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} + k_\omega \boldsymbol{\omega}_{abs} + k_r (F + 1) (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} + k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^N \frac{f_i'}{\beta_i - \alpha_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} = 0.$$

Рассмотрим область $\dot{V}_r = 0$, то есть $\boldsymbol{\omega}_{abs} \equiv 0$. Вне областей влияния ограничений (то есть когда $\forall i (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i) < \cos \beta_i$, а значит и $f_i = 0, f_i' = 0$), получаем

$$k_r (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

что совпадает со случаем стандартного одноосного управления: порождается дополнительное неустойчивое положение равновесия. Поиск дополнительных положений равновесия, порождаемых наличием запретных зон, существенно зависит от наличия пересечений областей влияния ограничений.

2.4.3. Непересекающиеся запретные области

Будем полагать, что области влияния ограничений не пересекаются. Тогда задача поиска целых траекторий разбивается на N независимых:

$$k_r (f_i + 1) (\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} + k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \frac{f'_i}{\beta_i - \alpha_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

Каждое такое уравнение представляет собой необходимое условие экстремума поверхности, высота которой задается в виде

$$g(\mathbf{n}) = k_r [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})] (1 + f_i). \quad (2.8)$$

Переменной величиной здесь является вектор \mathbf{n} , который может быть задан, например, при помощи двух углов (сферических координат).

Для решения этого уравнения перейдем в систему координат, в которой

$$\mathbf{n}_{ref} = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{h}_i = (\sin \gamma_i, 0, \cos \gamma_i)^T, \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z). \quad (2.9)$$

Учтем также, что $k_r > 0$, то есть его можно сократить. Тогда покоординатная запись (2.7) принимает вид

$$(f_i + 1) \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - n_z) \frac{f'_i}{\beta_i - \alpha_i} \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} \begin{pmatrix} n_y \cos \gamma_i \\ n_z \sin \gamma_i - n_x \cos \gamma_i \\ -n_y \sin \gamma_i \end{pmatrix} = 0.$$

Задача разбивается на два случая: $\sin \gamma_i = 0$ или $n_y = 0$. В первом случае ось запретного конуса либо сонаправлена с требуемым положением (то есть требуемое положение является недопустимым, что противоречит постановке задачи), либо противоположно ему направлена. Это не порождает дополнительных положений равновесия.

Рассмотрим случай $n_y = 0$, то есть $\mathbf{n} = (\sin \psi, 0, \cos \psi)$ – иными словами, положение равновесия может находиться лишь на меридиане, который содержит ось запретного конуса (требуемое положение при этом, согласно (2.9), находится на «северном полюсе»). Тогда система (2.7) сводится к одному уравнению:

$$(f_i + 1)\sin\psi + (1 - \cos\psi) \frac{f_i'}{\beta_i - \alpha_i} \frac{1}{|\sin(\psi - \gamma_i)|} \sin(\gamma_i - \psi) = 0. \quad (2.10)$$

Функция f_i является полиномом, зависящим от $\lambda_i = (\psi - \gamma_i - \alpha_i)/(\beta_i - \alpha_i)$, то есть получившееся уравнение является трансцендентным, и найти его аналитическое решение не представляется возможным.

Простой проверкой нетрудно убедиться, что полученное уравнение (2.10) является необходимым условием экстремума функции

$$g(\psi) = (f_i + 1)(1 - \cos\psi), \quad f_i = f_i(\lambda_i(\psi)), \quad \lambda_i = \frac{|\psi - \gamma_i| - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}.$$

Рассмотрим поведение этой функции на $\psi \in (0, 2\pi)$. Оно существенно зависит от того, находится ли $\psi = \pi$ внутри запретной области. Иллюстрация этих случаев представлена на рис. 2.2.

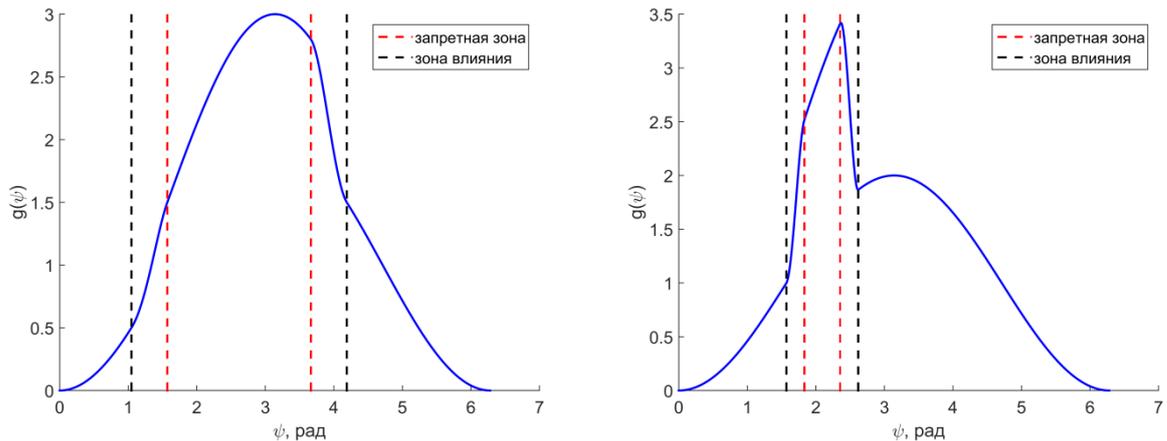


Рис. 2.2. Функция $g(\psi)$ в зависимости от положения запретной зоны

В первом случае, то есть когда $\psi = \pi$ принадлежит запретной области, $g(\psi)$ возрастает на $(0, \pi)$ и убывает на $(\pi, 2\pi)$. Это следует из того факта, что

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_i + 1)' \geq 0, \quad \psi \in (0, \pi) \\ (f_i + 1)' \leq 0, \quad \psi \in (\pi, 2\pi) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - \cos\psi)' \geq 0, \quad \psi \in (0, \pi) \\ (1 - \cos\psi)' \leq 0, \quad \psi \in (\pi, 2\pi) \end{array} \right\}, \quad (f_i + 1) > 0, \quad (1 - \cos\psi) \geq 0.$$

Таким образом, $g(\psi)$ на множестве $\psi \in (0, 2\pi)$ имеет только один экстремум в точке $\psi = \pi$, то есть единственным возможным положением равновесия является требуемое движение $\psi = 0$.

Пусть $\psi = \pi$ лежит вне запретной области. Тогда подходящим выбором β_i можно обеспечить непопадание $\psi = \pi$ и в область влияния, то есть область влияния будет

принадлежать либо $(0, \pi)$, либо $(\pi, 2\pi)$. Не ограничивая общности, будем полагать что она лежит на $(0, \pi)$. Аналогично предыдущему случаю, на интервалах $(0, \gamma_i + \alpha_i)$ и $(\gamma_i + \beta_i, \pi)$ $g(\psi)$ возрастает, поэтому необходимо проверить наличие экстремумов только на отрезке $[\gamma_i + \alpha_i, \gamma_i + \beta_i]$.

По условию, внутри запретной зоны функция Ляпунова больше, чем вне ее окрестности, а значит $g(\gamma_i + \alpha_i) > g(\gamma_i + \beta_i)$. Учитывая, что $g'(\gamma_i + \beta_i) > 0$ и $g'(\gamma_i + \alpha_i) > 0$, на $[\gamma_i + \alpha_i, \gamma_i + \beta_i]$ найдется такой отрезок, что $g'(\psi) < 0$. То есть на этом отрезке будет по крайней мере два экстремума: максимум и минимум. Первый соответствует неустойчивому положению равновесия (причем в этой точке $g(\psi)$ больше, чем внутри запретной зоны, а значит эта точка является недостижимой), в минимуме же будет находиться седловая точка, устойчивое многообразие которой соответствует движению вдоль меридиана, содержащего ось запретного конуса \mathbf{h}_i . Покажем неустойчивость вдоль многообразия, ортогонального этой прямой (то есть вдоль «широты», см. рис. 2.3). Для этого снова вернемся к уравнению поверхности (2.8): движение вдоль широты никак не меняет множителя $[1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})]$, в то время как расстояние до запретной области имеет локальный минимум в положении равновесия, то есть $(1 + f_i)$ имеет в нем локальный максимум, а значит направление вдоль «широты» является неустойчивым.

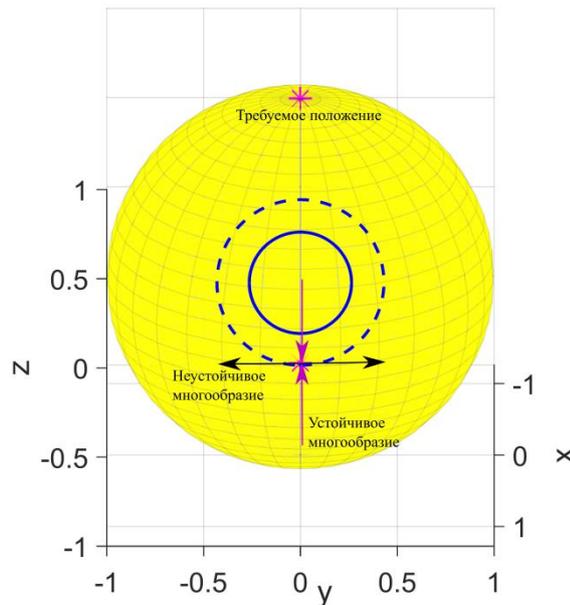


Рис. 2.3. Седловая точка

Таким образом, каждый конус порождает по крайней мере одно дополнительное положение равновесия, которое может быть достижимо. Несмотря на то, что формально оно является неустойчивым, попадание в его окрестность может существенно ухудшать скорость сходимости к асимптотически устойчивому положению равновесия. Для решения этой проблемы можно использовать следующий подход: в окрестности неустойчивого положения равновесия к управляющему моменту добавляется искусственное возмущение \mathbf{M}_{add} , которое увеличивает компоненту угловой скорости, соответствующую движению вдоль неустойчивого многообразия:

$$\mathbf{M}_{add} = \text{sign}(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})) \mathbf{J} \frac{\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})}{\|\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})\|} g,$$

$$g = \begin{cases} G(2\mu^3 - 3\mu^2 + 1), & \mu \leq 1, \\ 0, & \mu > 1, \end{cases}$$

$$\mu = \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{s})}{d} \geq 0.$$

Здесь \mathbf{s} – единичный вектор, соответствующий седловой точке, а функция g аналогична функции f_i : она является непрерывно дифференцируемой, вдали от седловой точки $g = 0$, а в самой седловой точке принимает максимальное значение $g = G$. В случае, когда $\text{sign}(\boldsymbol{\omega}_{abs}, \mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})) = 0$, будем полагать, что

$$\mathbf{M}_{add} = \mathbf{J} \frac{\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})}{\|\mathbf{n}_{ref} - \mathbf{s}(\mathbf{n}_{ref}, \mathbf{s})\|} g.$$

Для демонстрации работы предложенного алгоритма проводилось моделирование следующей задачи:

- Тензор инерции аппарата $\mathbf{J} = \text{diag}(2, 3, 4)$ кг · м².
- Коэффициенты управления $k_r = 0.002$, $k_\omega = 0.2$.
- Положение оси в связанной СК $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$.
- Ось запретного конуса в ИСК $\mathbf{h} = (1, 0, 0)^T$.
- Угол полураствора конуса равен 15°, зона влияния ограничена 25°.
- Высота запретного зоны подбирается таким образом, чтобы минимальное значение функции $[1 - (\mathbf{n}, \mathbf{D}\mathbf{n}_{ref})](1 + f_i)$ в запретной области было равно единице: это гарантирует, что при движении ось \mathbf{n} не попадет в запретную зону.

- Максимальная величина искусственного возмущения $5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Начальное положение оси \mathbf{n} в ИСК задается при помощи двух углов сферической системы координат $\mathbf{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)^T$. На рис. 2.4 представлены результаты, соответствующие $\varphi = 0, \theta = 162^\circ$ (этот случай соответствует движению вдоль устойчивого многообразия), при этом полагается, что дополнительное искусственное возмущение не создается.

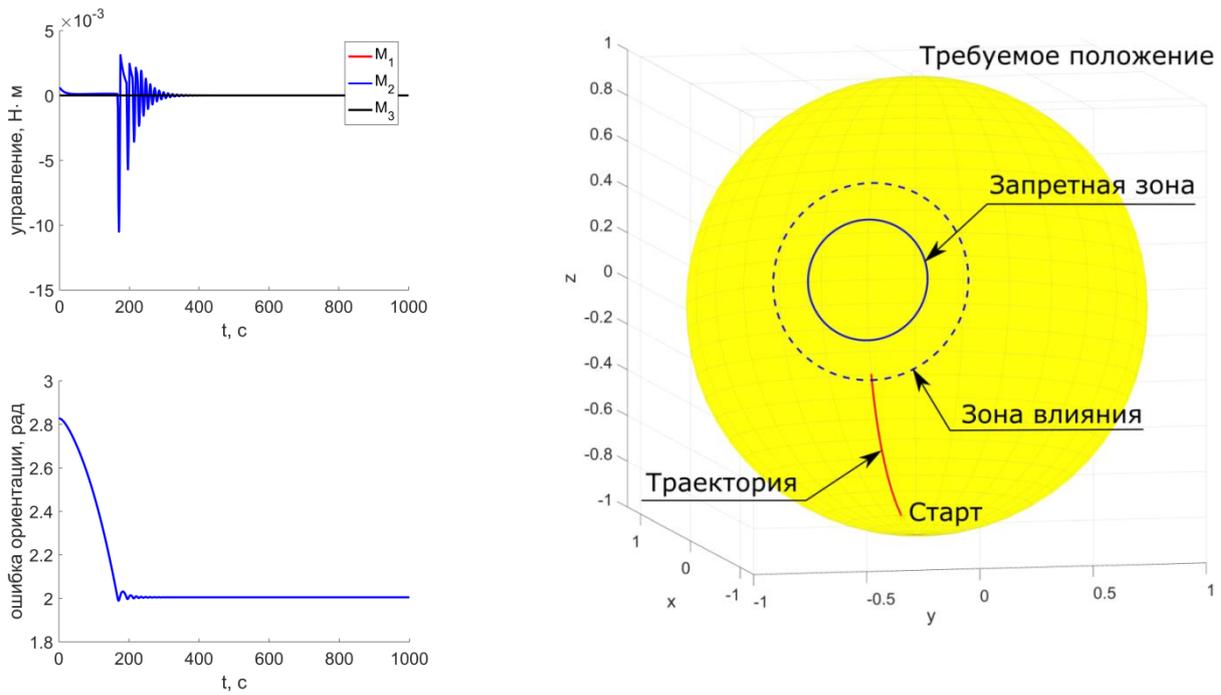


Рис. 2.4. Движение по устойчивому многообразию

Из результатов моделирования видно, что под действием управления ориентация спутника приходит в неустойчивое положение равновесия по устойчивому многообразию и остается в нем. Отметим, что связано это с тем, что фазовый вектор имеет нулевую проекцию на неустойчивое многообразие. При наличии же ненулевой проекции, движение спутника существенно меняется: на рис. 2.5 представлены результаты для случая, когда начальные данные $\varphi = 1^\circ, \theta = 162^\circ$. В этом случае, однако, спутник может достаточно продолжительное время находиться вблизи седловой точки. На рис. 2.6 представлены результаты моделирования, в котором учитывается наличие искусственного возмущения \mathbf{M}_{add} .

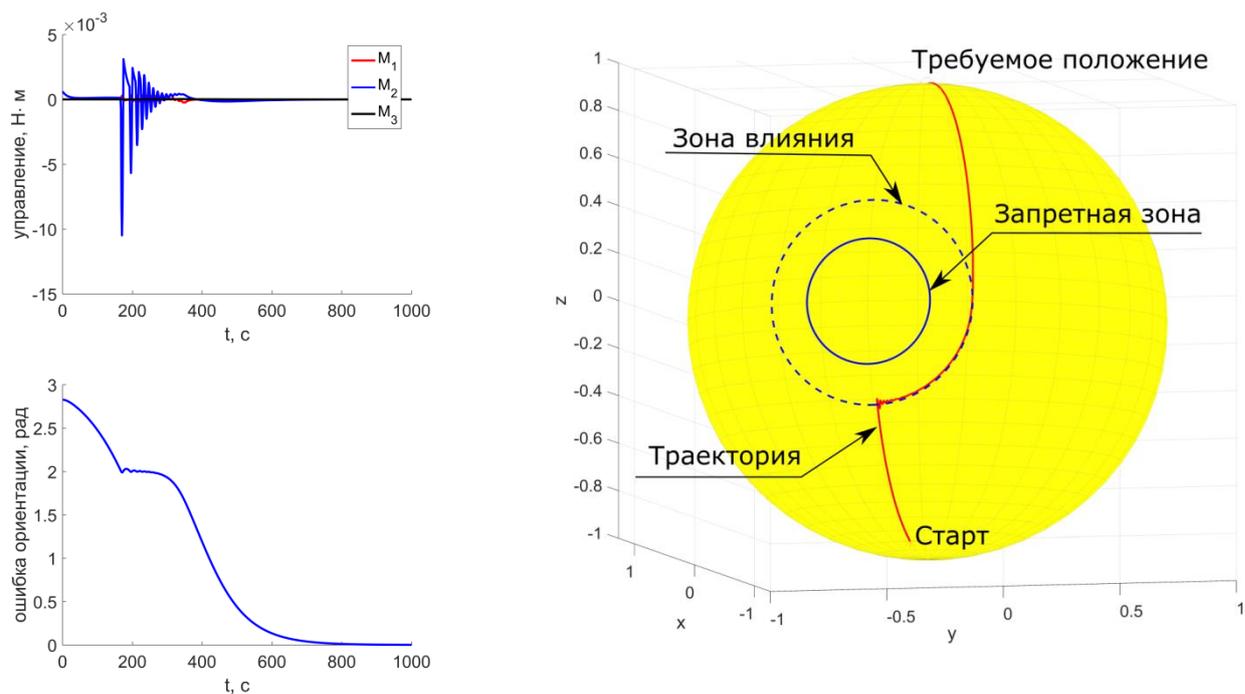


Рис. 2.5. Движение вблизи неустойчивого многообразия

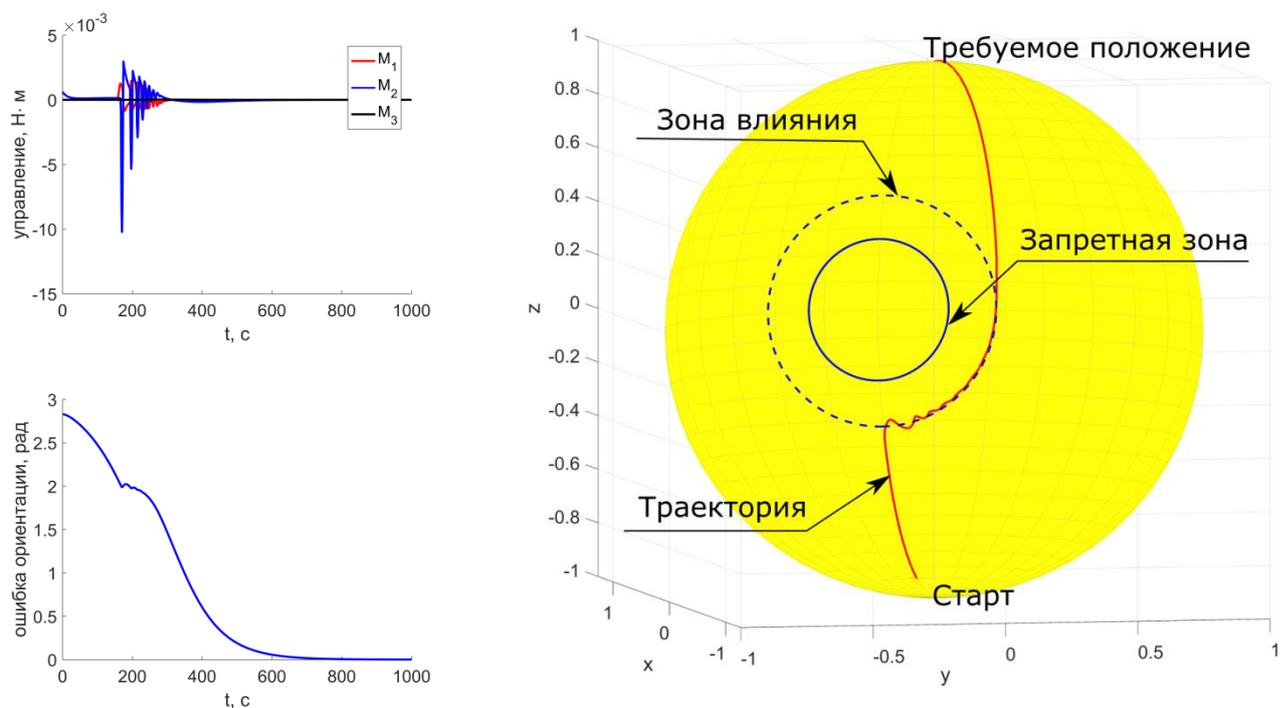


Рис. 2.6. Движение вблизи неустойчивого многообразия с учетом алгоритма обхода

Как видно из результатов моделирования, даже при начальных данных, соответствующих движению по устойчивому многообразию, удастся обойти запретную зону.

2.4.4. Пересекающиеся запретные области

Пусть два запретных конуса имеют ненулевое пересечение. Условие равновесия (2.7) тогда переходит в

$$(f_1 + f_2 + 1)(\mathbf{Dn}_{ref}) \times \mathbf{n} + (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^2 \frac{f_i'}{\beta_i - \alpha_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} = 0.$$

Будем задавать \mathbf{n} в ИСК при помощи двух углов (сферических координат), то есть $\mathbf{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, \cos \theta)^T$. Полученное уравнение, как и в предыдущем случае, является трансцендентным и не имеет аналитического решения.

Простой проверкой можно убедиться, что полученное уравнение является условием экстремума функции $g(\varphi, \theta) = [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{n}_{ref})](1 + f_1 + f_2)$, то есть позиционная часть функции Ляпунова ведет себя как потенциальная энергия. Рассмотрим поверхность, которая задается в виде $(\varphi, \theta, g(\varphi, \theta))$ (Рис. 2.7). При этом будем полагать, что требуемое положение оси $\mathbf{n}_{ref} = (0, 0, 1)^T$, углы полураствора конусов одинаковы и равны α , а оси лежат в горизонтальной плоскости и имеют координаты $\mathbf{h}_1 = (\cos \gamma, -\sin \gamma, 0)^T$, $\mathbf{h}_2 = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)^T$.

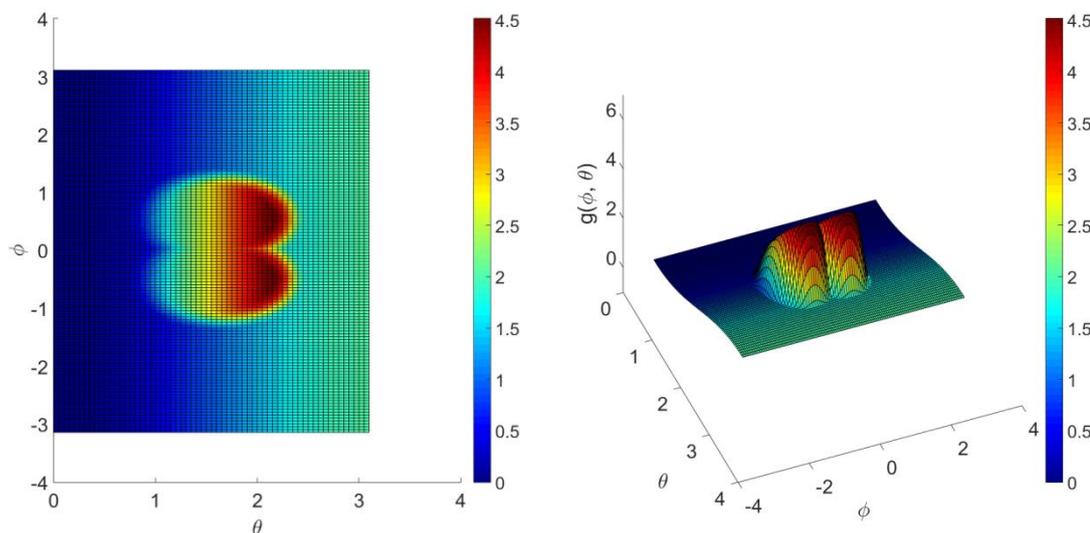


Рис. 2.7. Позиционная часть функции Ляпунова

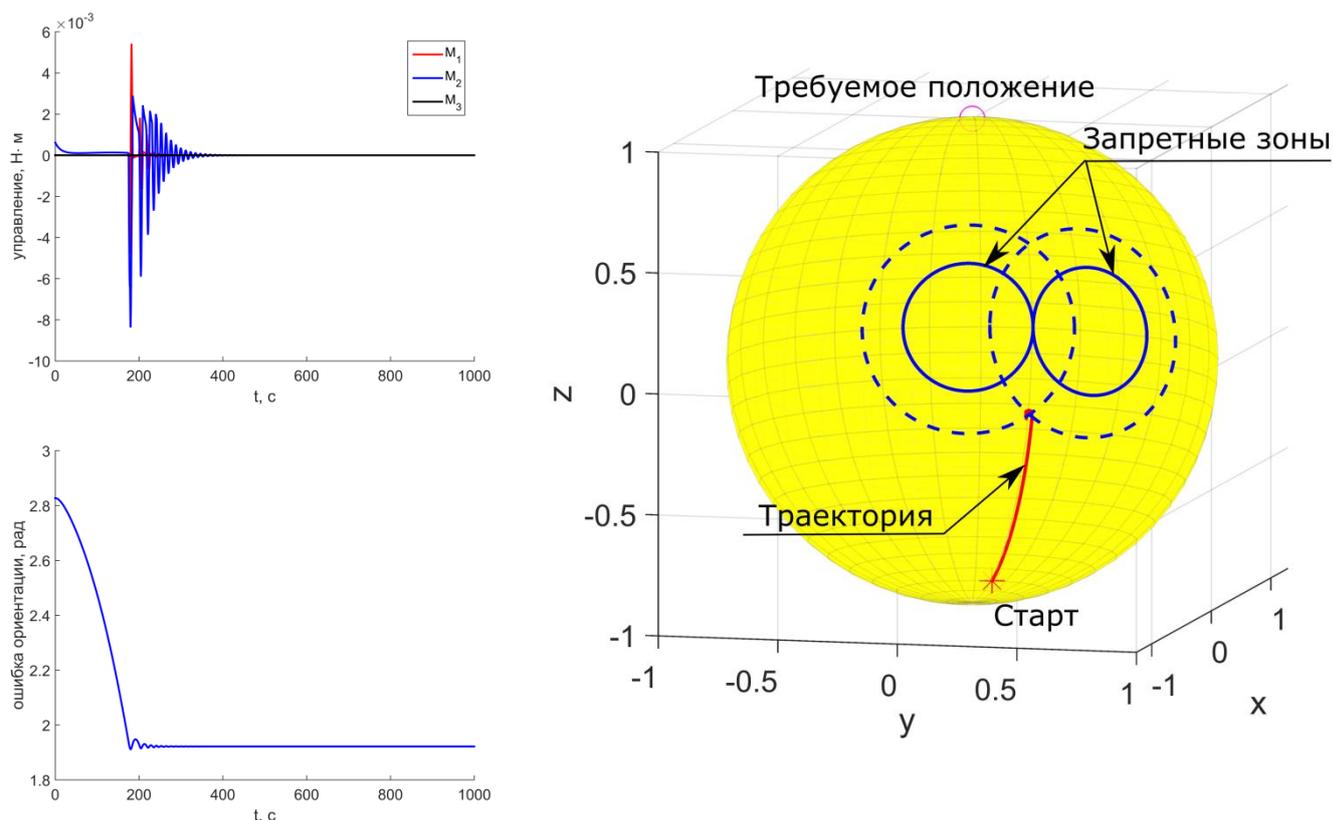


Рис. 2.8. Движение при наличии асимптотически устойчивого положения равновесия

Эта поверхность имеет локальный минимум, который находится на прямой $\varphi=0$, то есть порождается дополнительное асимптотически устойчивое положение равновесия. На рис. 2.8 приведены результаты моделирования, когда ориентация спутника приходит в это положение равновесия. Таким образом, нельзя гарантировать работоспособность алгоритма в случае пересекающихся запретных областей. Эту проблему можно решить, например, заменяя две пересекающихся области одной выпуклой, которая содержит их внутри себя. Этой новой областью может быть как новый запретный конус, так и некоторые другие фигуры. В настоящей работе предлагается использовать в качестве новой запретной области «эллипс», заданный на сфере. По аналогии с эллипсом на плоскости, он задается как множество точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов одинакова. В качестве расстояния при этом выбирается расстояние на сфере: расстояние между двумя точками есть длина дуги большого круга, проходящего через них. Учитывая, что рассматривается единичная сфера, это расстояние равно углу между радиус-векторами, проведенными из центра сферы к каждой из точек. Таким образом, сферический эллипс задается в виде

$$\mathbf{P} = \{ \mathbf{x} : \arccos(\mathbf{x}, \mathbf{F}_1) + \arccos(\mathbf{x}, \mathbf{F}_2) = L \}.$$

Здесь \mathbf{F}_i – фокусы, $L > \arccos(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ – число, характеризующее размер эллипса.

Кандидат-функцию Ляпунова в случае использования сферических эллипсов будем задавать в виде

$$V_r = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{rel}) + k_r [1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dn}_{ref})] (1 + S), \quad k_r > 0,$$

$$S = \sum_{i=1}^M s_i, \quad s_i = \begin{cases} H_i, & v_i < 0 \\ H_i (-3v_i^2 + 2v_i^3 + 1), & 0 \leq v_i \leq 1 \\ 0, & 1 > v_i \end{cases}$$

$$v_i = \frac{\arccos(\mathbf{n}, \mathbf{DF}_1^i) + \arccos(\mathbf{n}, \mathbf{DF}_2^i) - A_i}{B_i - A_i}.$$

По своей структуре она схожа с функцией, которая использовалась в случае использования конусов, с точностью до замены функции расстояния до запретной области. Находя производную этой функции в силу уравнений движения и требуя ее неположительности, получаем закон управления в следующем виде:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -M_{ext} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - k_r [\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}] +$$

$$+ k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \sum_{i=1}^M \frac{s'_i}{B_i - A_i} \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{DF}_1^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_1^i)^2}} + \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{DF}_2^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_2^i)^2}} \right) - k_r [\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}] S.$$

Полученный закон управления также может порождать неустойчивые положения равновесия. Их поиск аналогичен случаю использования конусов, и также сводится к трансцендентному уравнению. Для быстрого ухода из окрестности неустойчивого положения также применяется дополнительное искусственное возмущение.

В общем случае, когда задано несколько запретных как конусов, так и сферических эллипсов, закон управления записывается в виде

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -M_{ext} - k_\omega \boldsymbol{\omega}_{abs} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - k_r [\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}] +$$

$$+ k_r (1 - (\mathbf{Dn}_{ref}, \mathbf{n})) \left[\sum_{i=1}^M \frac{s'_i}{B_i - A_i} \left(\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{DF}_1^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_1^i)^2}} + \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{DF}_2^i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{F}_2^i)^2}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{f'_i}{\beta_i - \alpha_i} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{Dh}_i}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}, \mathbf{Dh}_i)^2}} \right] -$$

$$- k_r [\mathbf{Dn}_{ref} \times \mathbf{n}] (S + F) + \mathbf{M}_{add}.$$

Демонстрация его работы приведена на рис. 2.9. Параметры спутника соответствуют таковым из пункта 2.4.3.

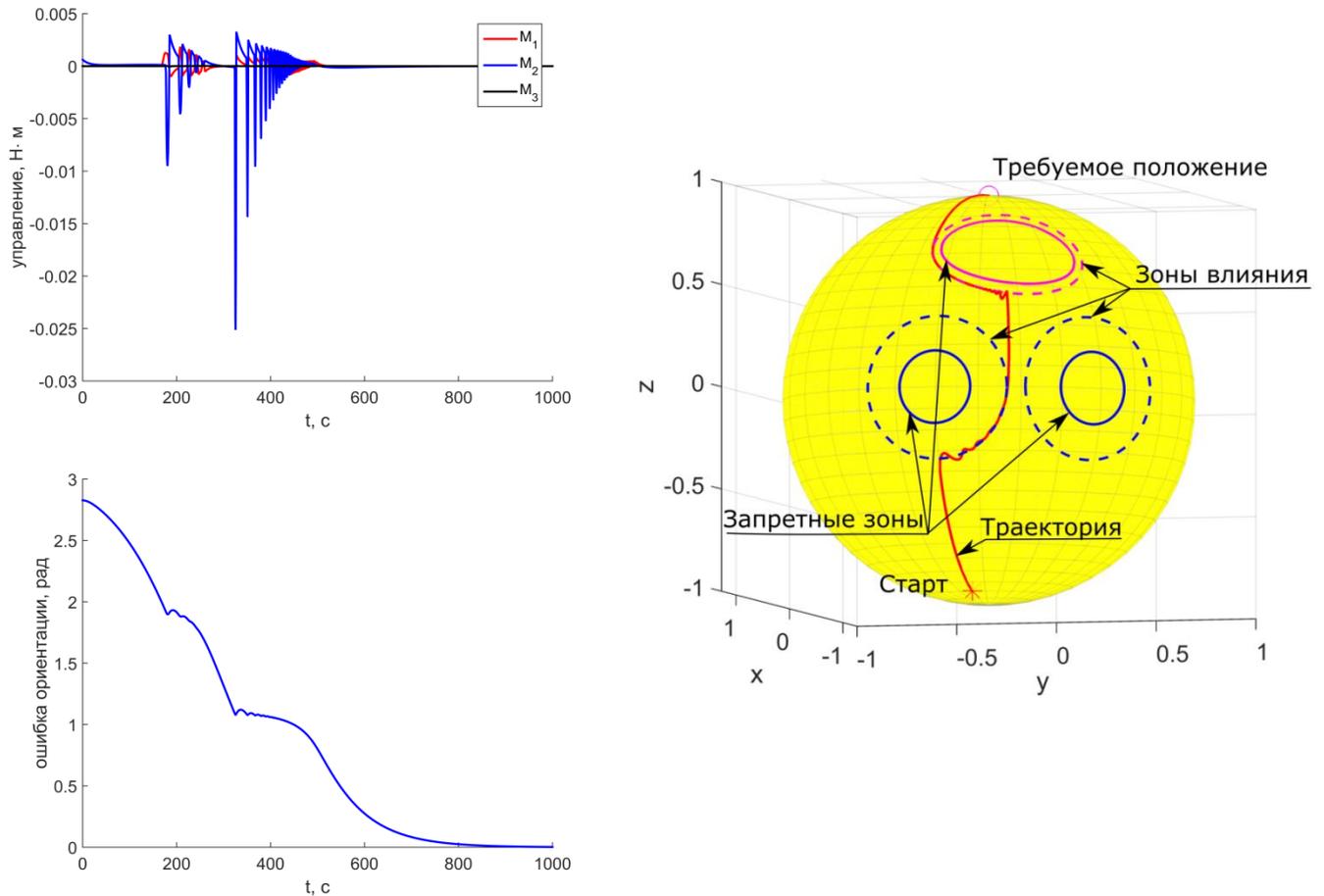


Рис. 2.9. Общий случай движения с запретными зонами

Как видно из приведенных графиков, управление справляется с приведением спутника к заданному положению и при этом не нарушает ограничений на возможную ориентацию. Отметим также, что предложенная модификация функции Ляпунова без изменений может использоваться и с модифицированным законом одноосной стабилизации (2.4).

2.5. Выводы по главе 2

В настоящей главе была рассмотрена задача одноосной стабилизации аппарата. Были предложены два алгоритма одноосной стабилизации в общем случае, когда требуется отследить заданный закон изменения положения одной из осей аппарата и скорость закрутки вокруг этой оси. Помимо этого, была рассмотрена задача переориентации аппарата при наличии ограничений на его возможную ориентацию. Полученный алгоритм аналогичен методу потенциалов, и «локально» изменяет закон одноосной стабилизации. Показано, что такой подход может порождать дополнительные положения равновесия, в том числе асимптотически устойчивые, при этом предложена методика их устранения.

Глава 3. Построение углового движения спутника дистанционного зондирования Земли

В первых двух главах диссертации рассматривались подходы к синтезу управляющих воздействий, которые реализуют заданное опорное угловое движение. В настоящей главе исследуется задача построения такого опорного движения на примере миссии по отслеживанию заданных маршрутов на поверхности Земли.

3.1. Постановка задачи

В настоящей главе рассматривается задача обеспечения съемки заданного маршрута на поверхности Земли. При этом предполагаются известными:

- 1) орбитальное движение спутника, то есть его скорость и местоположение в пространстве в каждый момент времени;
- 2) тензор инерции КА;
- 3) параметры камеры, установленной на КА: ее фокальное расстояние и требуемая скорость бега изображения;
- 4) параметры системы управления ориентацией КА: максимальное и минимальное управляющее воздействие маховиков, а также максимальный запас кинетического момента маховиков;
- 5) траектория на поверхности Земли, представляющая собой трижды непрерывно дифференцируемую параметризованную кривую.

Исходя из этих данных, требуется построить угловое движение КА и алгоритм его реализации с помощью гироскопической системы управления ориентацией, обеспечивающий требуемое качество съемки при наличии внешних возмущений (гравитационного, магнитного и аэродинамических моментов).

3.2. Особенности оптического сенсора

В качестве оптического сенсора, установленного на КА для осуществления съемки, для определенности рассматривается ПЗС-линейка. Это накладывает определенные условия на, так называемую, скорость бега изображения – скорость изображения снимаемой поверхности в фокальной плоскости камеры, где установлен чувствительный оптический элемент (рис. 3.1). Она должна быть постоянной по величине и направлена перпендикулярно ПЗС-линейке.

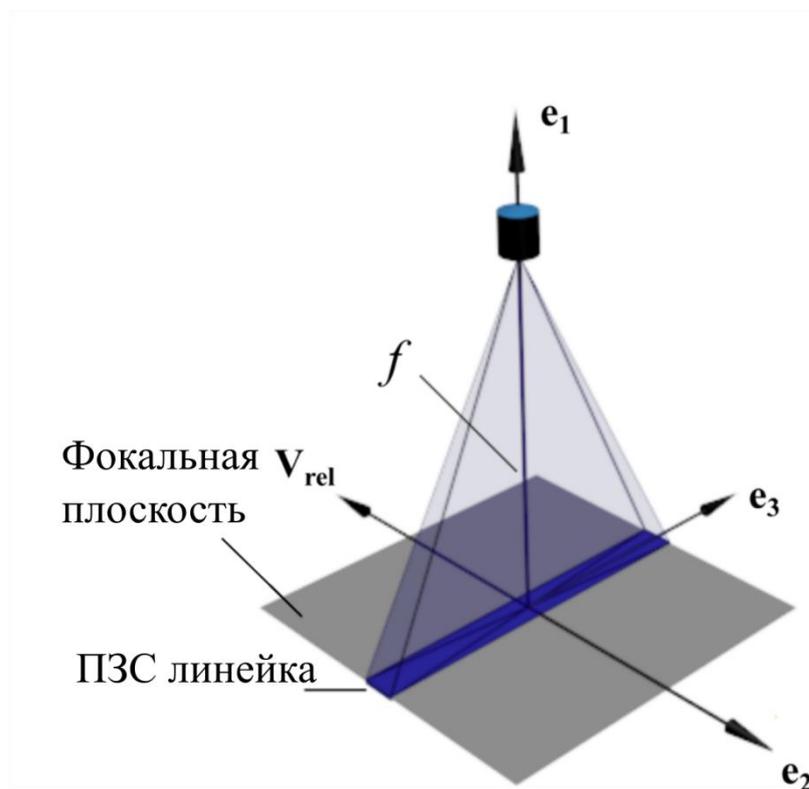


Рис. 3.1. Схема камеры

Сделать так, чтобы изображения всех точек снимаемой поверхности двигались с одинаковой относительно ПЗС-линейки скоростью, невозможно в силу слишком большого количества условий, накладываемых на угловую скорость аппарата (даже для двух точек в общем случае возникает четыре уравнения для трех компонент угловой скорости). Выражение для разности скоростей бега изображения центральной точки (точки визирования) и точки края полосы обзора может быть записано в виде

$$\Delta V \leq \|(\boldsymbol{\Omega}_E - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}\| \frac{f}{\rho}.$$

Здесь \mathbf{r} – вектор, соединяющий точку визирования и точку границы полосы обзора, $\boldsymbol{\Omega}_E$, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютные угловые скорости Земли и спутника соответственно, f – фокальное расстояние камеры, ρ – расстояние от центра чувствительного элемента до точки визирования. В частности, полагая ширину полосы обзора равной 20 км, $\rho = 600$ км, $f = 6$ м, $|\boldsymbol{\omega}| = 10^{-3}$ рад/с, легко получить, что разница скоростей составит всего лишь 10^{-4} м/с. Для сравнения, требуемая скорость бега изображения для камеры, установленной на спутнике ТаблетСат-Аврора разработки ООО «СПУТНИКС» [65] составляет $5 \cdot 10^{-2}$ м/с. Таким образом, условие на скорость бега каждой точки изображения может быть заменено лишь одним условием на скорость бега центральной точки изображения.

3.3. Системы координат

В данной главе используются следующие правые ортонормированные системы координат (рис. 3.2):

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ — инерциальная система координат (ИСК): совпадает с введенной в первой главе ИСК;

$O x_1 x_2 x_3$ — связанная с КА система координат (ССК): совпадает с введенной в первой главе ССК;

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$ — связанная с Землей гринвичская система координат (ГСК): начало O_a расположено в центре масс Земли, $O_a Z_1$ лежит в плоскости экватора и направлена на нулевой меридиан, $O_a Z_3$ направлена перпендикулярно плоскости экватора на северный полюс;

$C y_1 y_2 y_3$ — визирная система координат (ВСК): начало C расположено в центре чувствительного элемента, ось $C y_1$ параллельна оптической оси прибора, $C y_2$ антипараллельна требуемой скорости бега изображения;

$C X_1 X_2 X_3$ — опорная система координат (ОСК): начало C расположено в центре чувствительного элемента, а оси меняются таким образом, чтобы одновременно происходила съемка заданного маршрута и выполнялись условия, накладываемые камерой на скорость бега изображения (явные выражения для ее осей представлены в пункте 3.4); в случае идеального управления ВСК должна быть совмещена с ОСК.

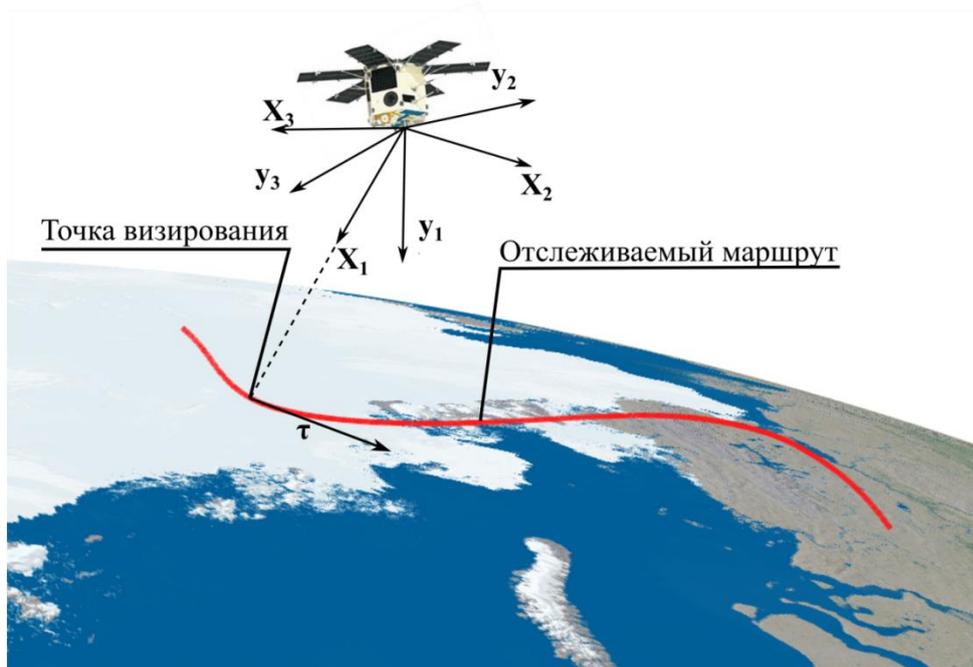


Рис. 3.2. Визирная и опорная СК

Переходы между этими системами координат осуществляются с помощью матриц направляющих косинусов: матрица \mathbf{F} отвечает за переход из ОСК в ВСК, \mathbf{B} — из ИСК в ОСК, \mathbf{N} — из ГСК в ИСК, \mathbf{D} — из ИСК в ССК, \mathbf{G} из ВСК в ССК (при этом \mathbf{G} является постоянной).

3.4. Синтез углового движения КА

Как и прежде, угловое движение ОСК строится с помощью уравнений Пуассона для матриц направляющих косинусов

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= -[\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1^T \\ \dot{\mathbf{e}}_2^T \\ \dot{\mathbf{e}}_3^T \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость КА, заданная в ОСК, \mathbf{e}_i — орты ОСК в проекции на оси ИСК.

Как указано в пункте 3.1, траектория на поверхности Земли представляет собой трижды непрерывно дифференцируемую параметризованную кривую $\mathbf{r}_p(p)$. Естественным является задание такой кривой в ГСК, поэтому в ИСК эта траектория примет вид

$$\tilde{\mathbf{r}}_p = \mathbf{N} \mathbf{r}_p,$$

где \mathbf{N} , как уже указывалось ранее, является матрицей перехода из ГСК в ИСК.

Требования на скорость бега изображения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_3) \frac{f}{\rho} &= 0, \\ (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_2) \frac{f}{\rho} &= -V, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}_{rel} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s),$$

где $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_s$ — скорости наблюдаемой точки и КА относительно ИСК соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость КА, \mathbf{r}_s — положение центра масс КА, $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\| = \|\mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|$ — расстояние от спутника до точки наблюдения. Исходя из этих требований, можно получить выражения для компонент угловой скорости аппарата

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Выражение для ω_1 может быть получено с помощью уравнений (3.1). Базисные векторы ОСК определяются следующим образом (рассматривается случай идеального управления, когда ВСК совмещена с ОСК):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}_p}{dp}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь, в силу малых размеров спутника по сравнению с радиусом орбиты, пренебрегаем разницей между положением центра масс КА и центра чувствительного элемента. Производные базисных векторов в этом случае:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s - (\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\rho}, \\ \dot{\mathbf{e}}_3 &= \frac{\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}) - \mathbf{e}_3 (\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N} \partial\boldsymbol{\tau}/\partial p), \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|}, \\ \dot{\mathbf{e}}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{e}}_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя эти соотношения в (3.1), получаем следующие выражения для компонент угловой скорости КА:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3), \\ \omega_2 &= -(\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_3) = -\frac{(\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= (\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{(\dot{\mathbf{N}}\mathbf{r}_p + \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p} - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho}. \end{aligned}$$

Сравнивая с выражениями (3.3), а также учитывая $\dot{\mathbf{N}} = [\boldsymbol{\Omega}_E]_{\times} \mathbf{N}$, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p}, \mathbf{e}_3)}{\rho} &= \frac{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}\dot{p}, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{\rho |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} \equiv 0, \\ \dot{p} \frac{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_2)}{\rho} &= \frac{V}{f}. \end{aligned}$$

Из второго выражения легко получить дифференциальное уравнение на параметр траектории p

$$\dot{p} = \frac{\rho(t, p)V}{f} \frac{1}{(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}(t, p), \mathbf{e}_2(t, p))},$$

решение которого в совокупности с соотношениями (3.4) и (3.5) полностью определяет требуемое угловое движение аппарата, а точнее ориентацию и угловую скорость ОСК.

3.5. Влияние ошибок на съемку траектории

Как уже говорилось выше, из-за действующих на КА возмущающих моментов невозможно абсолютно точно совместить ВСК и ОСК. Кроме того, как правило, движение центра масс КА тоже известно с некоторой ошибкой. Все это может негативно сказаться на качестве снимаемого изображения: из-за ошибок ориентации и неточности знания положения центра масс КА происходит съемка не самого маршрута, а некоторой лежащей рядом с ним области, а ошибки стабилизации и неточность знания скорости движения аппарата могут привести к ошибкам в скорости бега изображения, что, в свою очередь, может привести к смазу отснятого изображения.

В случае достаточно малых отклонений ВСК от ОСК матрица перехода из ИСК в ВСК может быть записана в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{FB} \approx \left(\mathbf{E}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 0 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \right) \mathbf{B},$$

где α, β, γ – углы Крылова (последовательность поворотов 2-3-1). Выражение для базисных векторов ВСК могут быть записаны через эти углы и базисные векторы ОСК с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{K}^T (1 \ 0 \ 0)^T = \mathbf{e}_1^0 + \beta \mathbf{e}_2^0 - \alpha \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_1^0 + \delta \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{K}^T (0 \ 1 \ 0)^T = \mathbf{e}_2^0 - \beta \mathbf{e}_1^0 + \gamma \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{e}_2^0 + \delta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{K}^T (0 \ 0 \ 1)^T = \mathbf{e}_3^0 + \alpha \mathbf{e}_1^0 - \gamma \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_3^0 + \delta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь и далее верхним индексом 0 обозначены величины, которые использовались при построении ОСК.

Для определения текущей точки визирования \mathbf{r}_p , а следовательно и ее отклонения от заданного положения $\delta \mathbf{r}_p$, необходимо найти пересечение линии визирования и Земли. В частности, используя представление Земли в виде эллипсоида вращения, для этого требуется решить квадратное уравнение

$$\frac{(r_1 + e_1 l)^2}{a^2} + \frac{(r_2 + e_2 l)^2}{a^2} + \frac{(r_3 + e_3 l)^2}{a^2 (1 - \sigma)^2} = 1, \quad (3.7)$$

где r_i, e_i – компоненты векторов \mathbf{r}_s и \mathbf{e}_1 в ИСК соответственно, l – искомая величина, a – большая полуось эллипсоида вращения, $\sigma \approx 1/300$ – коэффициент полярного сжатия. Всего могут быть реализованы три случая:

- 1) Уравнение не имеет корней, что означает что камера КА ориентирована не на Землю.
- 2) Уравнение имеет один корень, что означает что ведется съемка горизонта.
- 3) Уравнение имеет два корня. В этом случае выбирается наименьший по модулю корень, так как именно он соответствует точке визирования.

Принимая во внимание малость σ , уравнение (3.7) переписывается в виде

$$l^2(1+2\sigma)+2l((\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)+2\sigma r_3 e_3)+|\mathbf{r}_s|^2-a^2+2\sigma r_3^2=0,$$

а его решения принимают вид

$$l_{1,2} = -(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) \pm \sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - |\mathbf{r}_s|^2 + a^2} + \sigma \left(-2r_3 e_3 + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) \mp \frac{r_3^2 - |\mathbf{r}_s|^2 + a^2 + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - 2r_3 e_3 (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - |\mathbf{r}_s|^2 + a^2}} \right). \quad (3.8)$$

Здесь были отброшены величины второго порядка малости по σ . Для дальнейшего учета влияния ошибок ориентации $\delta \mathbf{e}_i$ и неточности знания положения центра масс $\delta \mathbf{r}_s$ КА, в (3.8) удобно отбросить слагаемое, пропорциональное σ , так как его вклад в отклонение точки визирования на два порядка меньше, чем от первых двух слагаемых.

Учитывая неточность знания положения центра масс КА $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s^0 + \delta \mathbf{r}_s$, и ошибку в ориентации аппарата, а также отбрасывая величины второго порядка малости, это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} l &= -(\mathbf{r}_s^0 + \delta \mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0 + \delta \mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0 + \delta \mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0 + \delta \mathbf{e}_1)^2 - \left((\mathbf{r}_s^0 + \delta \mathbf{r}_s)^2 - a^2 \right)} = \\ &= -(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) - (\delta \mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) - (\mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{e}_1) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - \left((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2 \right)} \times \\ &\times \left(1 + 2 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) \left((\delta \mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) + (\mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{e}_1) \right) - (\mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{r}_s)}{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - \left((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2 \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx l^0 + \delta l, \\ \delta l &= -(\delta \mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) - (\mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{e}_1) - \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) \left((\delta \mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1^0) + (\mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{e}_1) \right) - (\mathbf{r}_s^0, \delta \mathbf{r}_s)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - \left((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2 \right)}}, \\ l^0 &= -(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) - \sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - \left((\mathbf{r}_s^0)^2 - a^2 \right)}. \end{aligned}$$

Выражение для точки визирования записывается в виде

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_s + \mathbf{e}_1 l = \mathbf{r}_s^0 + \delta \mathbf{r}_s + \mathbf{e}_1^0 l^0 + \delta \mathbf{e}_1 l^0 + \mathbf{e}_1^0 \delta l = \mathbf{r}_p^0 + \delta \mathbf{r}_p + \delta \mathbf{e}_1 l^0 + \mathbf{e}_1^0 \delta l.$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= (\delta \alpha, \delta \beta, \delta \gamma, \delta \omega_1, \delta \omega_2, \delta \omega_3, \delta r_s^1, \delta r_s^2, \delta r_s^3, \delta V_s^1, \delta V_s^2, \delta V_s^3)^T = \\ &= (\delta \boldsymbol{\Psi}^T, \delta \boldsymbol{\omega}^T, \delta \mathbf{r}_s^T, \delta \mathbf{V}_s^T)^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{1-3,1}, \mathbf{M}_{1-3,2}, \mathbf{M}_{1-3,3-6}, \mathbf{M}_{1-3,7-9}, \mathbf{M}_{1-3,10-12}]$$

$$\mathbf{M}_{1-3,1} = \mathbf{e}_1^0 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_3^0)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}} + \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_3^0) - \mathbf{e}_3^0 l^0,$$

$$\mathbf{M}_{1-3,2} = \mathbf{e}_2^0 l^0 - \mathbf{e}_1^0 \frac{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_2^0)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}} - \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_2^0),$$

$$\mathbf{M}_{1-3,3-6} = \mathbf{0}_{3 \times 4},$$

$$\mathbf{M}_{1-3,7-9} = \mathbf{E}_{3 \times 3} - \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{e}_1^0)^T + \frac{\mathbf{e}_1^0 (\mathbf{r}_s^0)^T - (\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0) \mathbf{e}_1^0 (\mathbf{e}_1^0)^T}{\sqrt{(\mathbf{r}_s^0, \mathbf{e}_1^0)^2 - ((\mathbf{r}_s^0)^2 - R^2)}},$$

$$\mathbf{M}_{1-3,10-12} = \mathbf{0}_{3 \times 3},$$

выражение для точки визирования перепишем в более компактном виде

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p^0 + \delta \mathbf{r}_p, \quad \delta \mathbf{r}_p = \mathbf{M} \delta \mathbf{x}.$$

Для получения оценок влияния ошибок на скорость бега изображения используется цепочка выражений для скорости точки визирования относительно КА

$$\mathbf{V}_{отн} = \mathbf{V}_p - \mathbf{V}_s - (\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - (\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s).$$

Наличие множителя $\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{G}^T$ перед угловой скоростью необходимо здесь для учета того, что угловая скорость задается в ССК, а все остальные величины – в ИСК. Матрица \mathbf{F} , как и при расчете отклонения точки визирования, имеет вид

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{E}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 0 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_3 + \delta \mathbf{F},$$

а угловая скорость записывается в виде $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 + \delta \boldsymbol{\omega}$. Таким образом, выражение для относительной скорости точки визирования запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{rel} &= \mathbf{V}_{rel}^0 + \delta\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_{rel}^0 = \boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_p^0 - \mathbf{V}_s^0 - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \times (\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0), \\ \delta\mathbf{V} &= \left[\boldsymbol{\Omega}_E - \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \right]_{\times} \delta\mathbf{r}_p - \delta\mathbf{V}_s + \left[\mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 \right]_{\times} \delta\mathbf{r}_s + \\ &+ \left[\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0 \right]_{\times} \left(\mathbf{B}^T \delta\mathbf{F}^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\omega}^0 + \mathbf{B}^T \mathbf{G}^T \delta\boldsymbol{\omega} \right).\end{aligned}$$

Выражения для скорости бега изображения записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_3) &= \frac{f}{\rho} \left((\delta\mathbf{V}, \mathbf{e}_3^0) + (\mathbf{V}_{rel}^0, \delta\mathbf{e}_3) \right), \\ \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_2) &= -\frac{V\rho^0}{\rho} + \frac{f}{\rho} \left((\delta\mathbf{V}, \mathbf{e}_2^0) + (\mathbf{V}_{rel}^0, \delta\mathbf{e}_2) \right), \\ \rho^0 &= \|\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0\|, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|} \approx \frac{1}{\rho^0} \left(1 - \frac{(\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_p - \delta\mathbf{r}_s)}{(\rho^0)^2} \right).\end{aligned}$$

Здесь учтены условия на скорость бега изображения, которые выполняются при точном совмещении ВСК и ОСК (3.2)

$$\begin{aligned}(\mathbf{V}_{rel}^0, \mathbf{e}_3^0) &= 0, \\ (\mathbf{V}_{rel}^0, \mathbf{e}_2^0) &= -\frac{V\rho^0}{f}.\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.6) и обозначения

$$\begin{aligned}\frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_i) &= V_i^0 + \delta V_i, \quad i = 2, 3, \\ V_2^0 &= -V, \quad V_3^0 = 0,\end{aligned}$$

выражения для ошибок в скорости бега изображения принимают вид

$$\begin{aligned}\delta V_3 &= \frac{f}{\rho^0} \left((\delta\mathbf{V}, \mathbf{e}_3^0) + \alpha (\mathbf{V}_{rel}^0, \mathbf{e}_1^0) + \gamma \frac{V\rho^0}{f} \right), \\ \delta V_2 &= \frac{f}{\rho^0} \left((\delta\mathbf{V}, \mathbf{e}_2^0) - \beta (\mathbf{V}_{rel}^0, \mathbf{e}_1^0) \right) + V \frac{(\mathbf{r}_p^0 - \mathbf{r}_s^0, \delta\mathbf{r}_p - \delta\mathbf{r}_s)}{(\rho^0)^2}.\end{aligned}$$

Полученные выражения достаточно сложны и громоздки для анализа. Для их упрощения, во-первых, можно отбросить ошибку знания положения и скорости центра масс КА, так как эта ошибка никак не зависит от работы системы управления ориентацией. Во-вторых, как правило, съемка ведется достаточно близко к надиру, т.е.

$$\frac{r_s |\sin \varphi|}{\sqrt{a^2 - r_s^2 \sin^2 \varphi}} \ll 1$$

где φ – угол между местной вертикалью и радиус-вектором, соединяющим спутник и точку визирования. Принимая во внимание эти соображения, выражение для ошибок скорости бега изображения и сдвига точки визирования могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{r}_p| &\approx \rho^0 |\delta \psi|, \\ |\delta V_3| &\approx f |\delta \psi| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta \boldsymbol{\omega}| + V |\delta \psi|, \\ |\delta V_2| &\approx f |\delta \psi| (|\boldsymbol{\omega}^0| + |\boldsymbol{\Omega}_E|) + f |\delta \boldsymbol{\omega}|. \end{aligned}$$

Полученные выражения могут быть использованы для построения простой связи между параметрами системы ориентации КА и качеством снимаемого изображения.

3.6. Влияние кривизны траектории

Для съемки траекторий с малым радиусом кривизны как правило требуется обеспечивать довольно большую угловую скорость КА. Однако, в силу ограниченных возможностей системы управления ориентацией, реализовать такой режим движения не всегда удастся. Для получения оценок минимального радиуса кривизны траектории, при котором не происходит выхода за ограничения системы управления ориентацией, используется выражение для управляющего момента

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}.$$

При этом предполагается, что аппарат стабилизирован, то есть относительная угловая скорость равна нулю и ВСК совмещена с ОСК. Учитывая малость величины внешних моментов и производной опорного движения по сравнению с величиной векторного произведения $\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs}$, получается следующая оценка для максимальной угловой скорости КА

$$|\omega_{max}| \approx \sqrt{\frac{M_0}{\max_{i,j} |J_{ii} - J_{jj}|}},$$

где M_0 – максимальный управляющий момент.

Ограничения, накладываемые на кривизну траектории, находятся из соотношений для угловой скорости

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_2), \\ \omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho}, \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N} \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f}. \end{aligned}$$

Используя явный вид выражений для базисных векторов, первое уравнение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{(\dot{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_1 \times (\dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\tau} + \dot{p}\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p), \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} = \\ &= \omega_2 \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} - \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|} - \dot{p} \frac{(\mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau})}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|^2}.\end{aligned}$$

Вводя дополнительную переменную ζ – угол между \mathbf{e}_1 и $\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}$, а также учитывая выражение для кривизны траектории

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{N}\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{N}\partial\boldsymbol{\tau}/\partial p}{|\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}|^3},$$

итоговое выражение для ω_1 запишем в виде

$$\omega_1 = \omega_2 \operatorname{ctg}(\zeta) - (\boldsymbol{\Omega}_E, \mathbf{e}_1) + (\boldsymbol{\Omega}_E, \mathbf{e}_2) \operatorname{ctg}(\zeta) - \rho \frac{V(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\kappa})}{f \sin^3 \zeta}.$$

Малым значениям $\sin \zeta$ соответствует съемка близко к горизонту, что на практике, как правило, не реализуется из-за больших геометрических искажений получаемых изображений. Например, ограничивая минимальное значение $\sin \zeta \geq \sqrt{3}/2$ (оно эквивалентно съемке не далее, чем в 30° от надира), можно получить условие, при выполнении которого точная съемка траектории является реализуемой:

$$\kappa \leq f 3\sqrt{3} \frac{(\omega_{max} - 2\Omega_E)}{8\rho V}. \quad (3.9)$$

Эта, достаточно грубая, оценка позволяет определить некоторый класс траекторий, которые заведомо могут быть сняты с использованием установленного на КА оборудования.

3.7. Численное моделирование

Для демонстрации работы алгоритма проводилось численное моделирование съемки маршрута на поверхности Земли. Параметры КА соответствуют аппарату ТаблетСат-Аврора компании ООО «СПУТНИКС»:

1. Тензор инерции КА $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.002 & 0.005 \\ 0.002 & 0.579 & 0.009 \\ 0.005 & 0.009 & 0.5 \end{pmatrix}$.

2. Требуемая скорость бега изображения $V = 50 \text{ мм/с}$.

3. Фокусное расстояние линзы, установленной на КА – 6 м.

4. Спутник движется по круговой полярной орбите. Ее радиус составляет 7000 км.
5. Максимальный управляющий момент, реализуемый системой управления ориентацией КА, составляет $10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$, а минимальный – $10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Исходя из выбранных характеристик системы ориентации КА, можно получить оценку для минимальной кривизны снимаемой траектории, при которой съемка осуществима (3.9)

$$\kappa \leq 10^{-6} \text{ м}^{-1}.$$

Для построения маршрута на поверхности Земли в настоящей работе при компьютерном моделировании использовался эллипсоид Красовского. Точка на поверхности Земли задается своими координатами (широтой φ и долготой λ) с помощью формул

$$\mathbf{r}_p(p) = h(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$h(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}}.$$

Матрица перехода \mathbf{N} из ГСК в ИСК задается выражением

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_0 + \Omega_E t) & -\sin(\lambda_0 + \Omega_E t) & 0 \\ \sin(\lambda_0 + \Omega_E t) & \cos(\lambda_0 + \Omega_E t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, задавая широту и долготу как дважды непрерывно дифференцируемые функции, можно описать любой маршрут на поверхности Земли в связанной с ней СК. В общем случае для описания таких функций могут быть использованы сплайны, кривые Безье или В-сплайны [66], которые позволяют провести кривую нужной степени гладкости через заданный набор узловых точек. В настоящей работе эти функции являются явно заданными:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - kp, \quad \lambda = \alpha \frac{\sin(lp)}{\sin(kp)}, \quad (3.10)$$

где α, l, k – некоторые константы, p – параметр траектории. С помощью этих функций при $\alpha = 0.05$, $l = 1000$, $k = 100$ описывается маршрут, показанный на рис. 3.3.



Рис. 3.3. Маршрут съемки и подспутниковая траектория

При моделировании учитывалось воздействие аэродинамического и гравитационного возмущающих моментов. При этом предполагалось, что в начальный момент времени спутник правильно ориентирован и стабилизирован. Также предполагалось, что ВСК и ССК совмещены, т.е. $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$. Результаты моделирования представлены ниже.

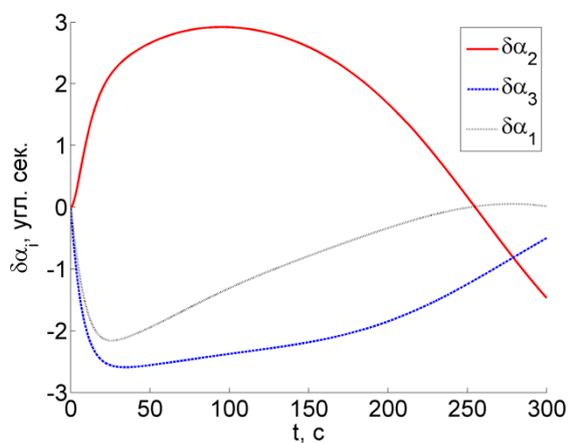


Рис. 3.4. Ошибка ориентации

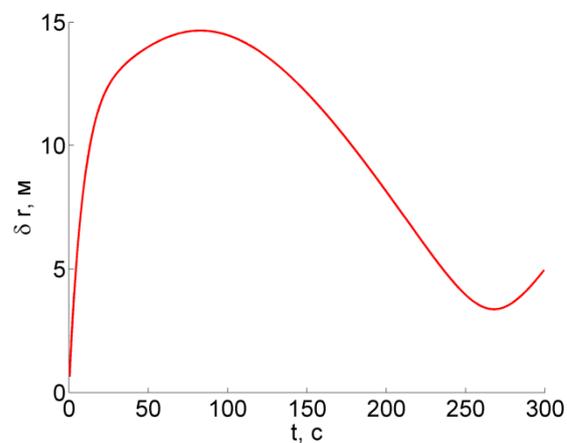


Рис. 3.5. Отклонение точки визирования

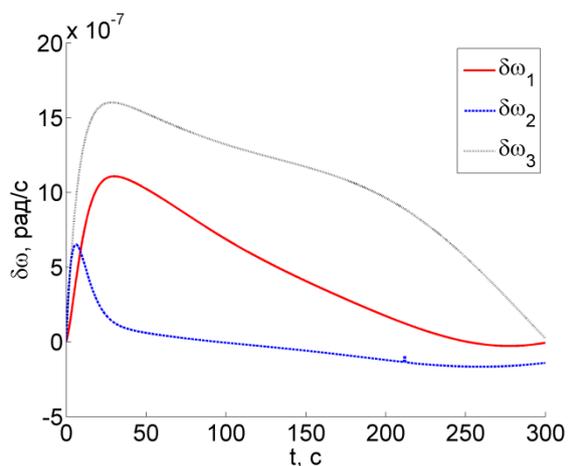


Рис. 3.6. Относительная угловая скорость

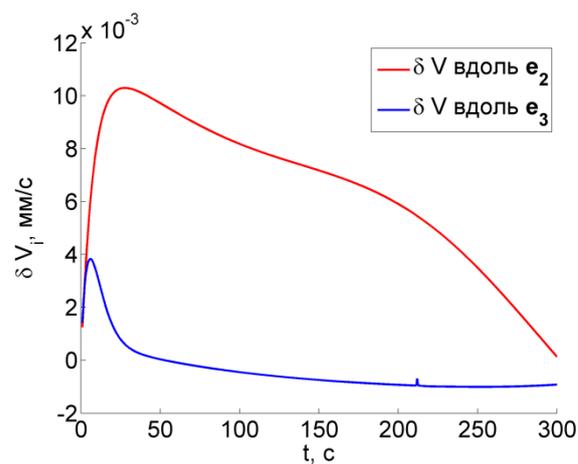


Рис. 3.7. Ошибка скорости бега изображения

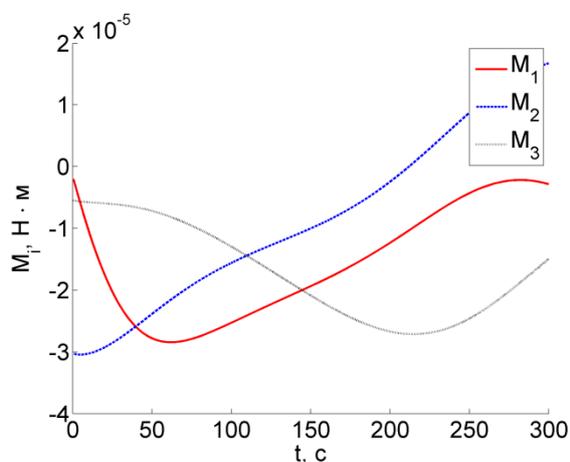


Рис. 3.8. Управляющие моменты

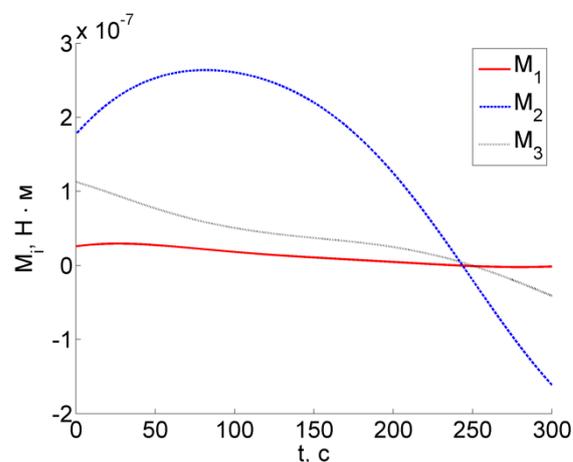


Рис. 3.9. Возмущения

Как видно из рис. 3.7, несмотря на наличие возмущений, ошибка в скорости бега изображения незначительна. В то же время отклонение точки визирования не превышает пятнадцати метров, что соответствует точности российского спутника ДЗЗ Ресурс-П и может считаться вполне приемлемым при выполнении миссий ДЗЗ. Небольшие скачки на рис. 3.6 и 3.7 происходят из-за того, что управляющий момент, который требуется создать в этот момент времени, настолько мал, что не может быть реализован системой управления ориентацией КА.

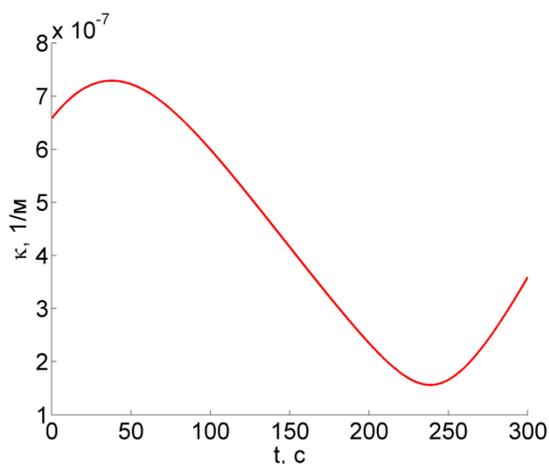


Рис. 3.10. Кривизна траектории



Рис. 3.11. Маршрут съемки

Как видно из рис. 3.10, кривизна траектории не превосходит 10^{-6} м^{-1} , что хорошо согласуется с полученной ранее оценкой. Для примера рассмотрим траекторию с большей кривизной: для этого положим безразмерный параметр $l=3000$ в (3.10). Результаты моделирования для этого случая представлены ниже.

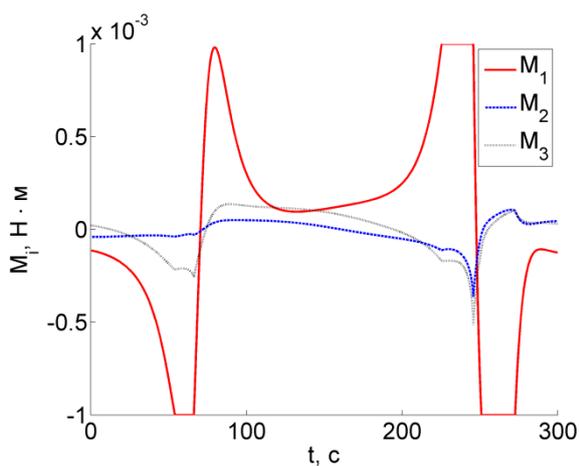


Рис. 3.12. Управление

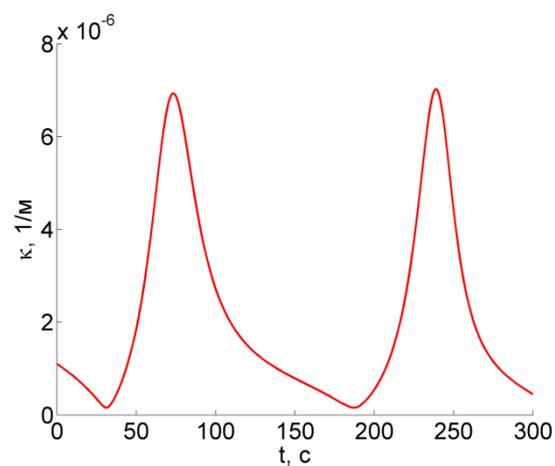


Рис. 3.13. Кривизна

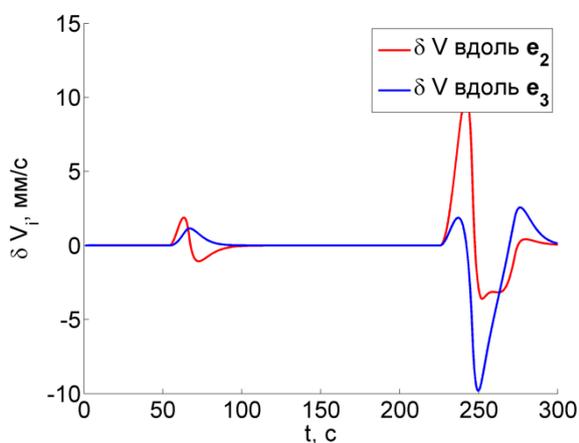


Рис. 3.14. Ошибка скорости бега изображения

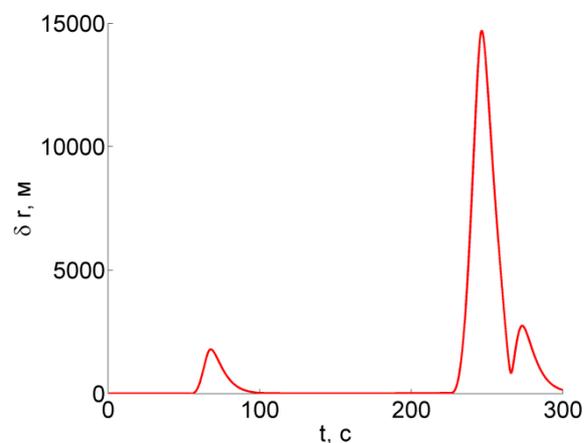


Рис. 3.15. Сдвиг точки визирования

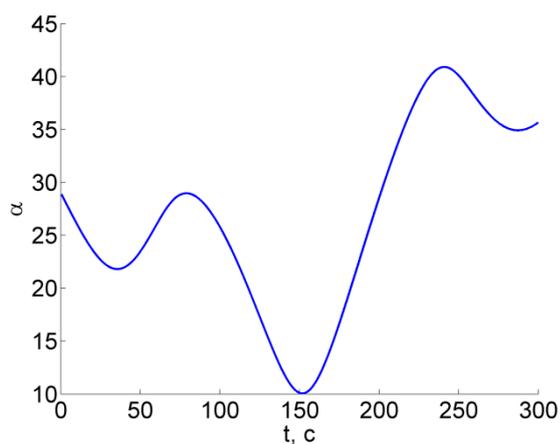


Рис. 3.16. Угол визирования (в градусах)

Как видно из этих рисунков, кривизна довольно сильно влияет на снимаемое изображение: в частности, при достаточно большой кривизне система управления ориентацией КА уже не способна обеспечить требуемый управляющий момент (рис. 3.12), и, как следствие, возрастает ошибка наведения и появляется ошибка скорости бега изображения. Близость съемки к надиру, как видно из рис. 3.14-3.16, также довольно сильно влияет на эти параметры.

3.8. Выводы по главе 3

В настоящей главе предложен алгоритм синтеза углового движения космического аппарата при выполнении миссий по отслеживанию сложных маршрутов на поверхности Земли. Получены как сложные, так и упрощенные оценки качества снимаемого изображения в зависимости от точности ориентации и стабилизации аппарата, что, совместно с выражениями из первой главы, позволяет на предварительном этапе проектирования. Помимо этого, получена оценка для максимальной кривизны снимаемой траектории, при которой гарантированно возможно проведение съемки в зависимости от возможностей актюаторов.

Глава 4. Использование солнечного и гравитационного моментов для разгрузки маховиков

Для реализации построенных законов управления часто используются гироскопические системы, основанные на применении двигателей-маховиков. Одним из ограничений этой системы является конечный запас кинетического момента, который маховики могут накопить. Если кинетический момент вовремя не разгружать, это может привести к потере управляемости – система маховиков будет неспособна реализовать требуемое управляющее воздействие. Это, в свою очередь, приводит к необходимости установки вспомогательных систем управления ориентацией, например магнитных или реактивных, которые используются исключительно для разгрузки маховиков. При этом на высоких орбитах, например геостационарных и высокоэллиптических орбитах (на которых исследуется взаимодействие земной магнитосферы с солнечным излучением: миссии Cluster II и Magnetospheric MultiScale [67,68]), использование магнитных систем практически невозможно из-за малости магнитного поля Земли, а значит и малости момента сил, создаваемого магнитными катушками. Применение же реактивных систем требует запаса рабочего тела, что может существенно снизить время жизни аппарата. В настоящей главе предлагается подход к построению углового движения аппарата в режиме солнечной ориентации, при котором воздействие внешних моментов сил (гравитационного и солнечного) используется для разгрузки маховиков.

4.1. Постановка задачи

Мы будем рассматривать задачу при следующих предположениях:

1. КА движется по высокой эллиптической кеплеровой орбите; выделяются два этапа движения: вблизи перицентра, где преобладает гравитационный момент, и вдали от перицентра, где преобладает солнечный момент.

2. На КА установлены две идентичные солнечные панели с известными коэффициентами отражения и зеркальности, а также направлениями нормалей к ним. Панели предполагаются жестко закрепленными на аппарате.

3. Известны инерционные параметры КА: тензор инерции, положение центра масс.

4. Для обеспечения требуемого токосъема угол между нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце должен оставаться достаточно малым на всем рассматриваемом отрезке времени.

5. Управление ориентацией осуществляется при помощи системы, состоящей из трех двигателей-маховиков.

Для миссии с этими предположениями необходимо построить алгоритм синтеза опорного углового движения, обеспечивающего разгрузку маховичной системы управления ориентацией.

4.2. Солнечный момент

В качестве модели сил давления солнечного излучения рассмотрим модель, учитывающую поглощение, зеркальное отражение и отражение по закону косинусов Ламберта [69],

$$d\mathbf{F} = -\frac{\Phi_0}{c}(\mathbf{r}_s, \tilde{\mathbf{n}}) \left((1-\alpha)\mathbf{r}_s + 2\alpha\mu(\mathbf{r}_s, \tilde{\mathbf{n}})\tilde{\mathbf{n}} + \alpha(1-\mu) \left(\mathbf{r}_s + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{n}} \right) \right) dS,$$

где Φ_0 – солнечная постоянная, равная 1367 Вт/м^2 , c – скорость света, \mathbf{r}_s – орт направления из центра масс КА на Солнце, $\tilde{\mathbf{n}}$ – нормаль к элементарной площадке площадью dS , α, μ – коэффициенты отражения и зеркальности соответственно. В соответствии с этой моделью солнечный момент, действующий на КА от каждой из солнечных панелей, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i = -S \frac{\Phi_0}{c} (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_i) \mathbf{R}_i \times \\ \times \left((1-\alpha)\mathbf{r}_s + 2\alpha\mu(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i + \alpha(1-\mu) \left[\mathbf{r}_s + \frac{2}{3}\mathbf{n}_i \right] \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где \mathbf{R}_i – радиус-вектор из центра масс КА в геометрический центр i -ой пластины, S – площадь пластины (мы рассматриваем две идентичных панели, следовательно, их площади, а также коэффициенты отражения и зеркальности одинаковы), \mathbf{n}_i – вектор нормали к i -ой солнечной панели. В общем случае эти нормали не совпадают (рис. 4.1), и угол между ними может быть достаточно произвольным, однако мы ограничимся лишь случаем, когда угол между ними мал.

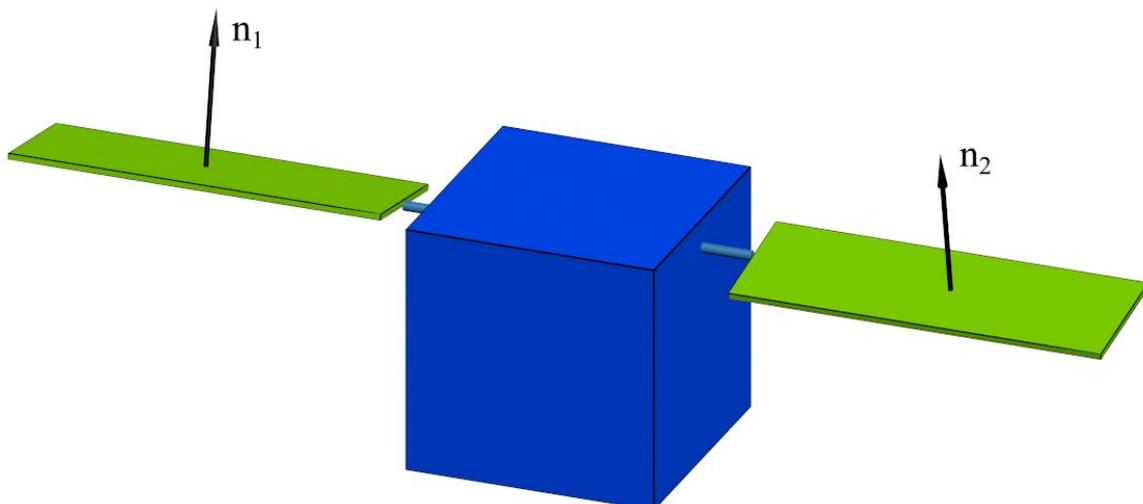


Рис. 4.1. Схематичная модель КА

Суммарный солнечный момент записывается в виде

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2), \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2),$$

$$a = -S \frac{\Phi_0}{c} (1 - \alpha\mu), \quad b = -S \frac{2\Phi_0}{3c} \alpha(1 - \mu), \quad d = -2S \frac{\Phi_0}{c} \alpha\mu.$$

Учтем малое отклонение нормалей $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ друг от друга:

$$|\mathbf{n}| = \cos \delta \approx 1 - \delta^2 \approx 1, \quad |\mathbf{v}| = \sin \delta \approx \delta, \quad (4.2)$$

где $0 \leq \delta \leq \pi/2$ – угол между \mathbf{n} и \mathbf{n}_1 (он же угол между \mathbf{n} и \mathbf{n}_2) (рис. 4.2). В дальнейшем мы будем полагать, что условие, накладываемое на ориентацию аппарата – близость нормалей к \mathbf{r}_s – будет накладываться именно на вектор средней нормали \mathbf{n} , иными словами

$$(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \geq \cos \theta_{max}, \quad (4.3)$$

где $\theta_{max} \ll 1$ – максимально допустимый угол между направлением на Солнце и нормалью.

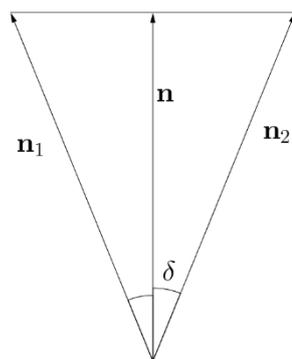


Рис. 4.2. Нормали

С использованием введенных обозначений момент, действующий на каждую из панелей,

$$\mathbf{M}_i = (\mathbf{R} \pm \boldsymbol{\rho}) \times \left[a \mathbf{r}_s (\mathbf{r}_s, \mathbf{n} \pm \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \pm \mathbf{v}) (\mathbf{r}_s, \mathbf{n} \pm \mathbf{v}) (b + d (\mathbf{r}_s, \mathbf{n} \pm \mathbf{v})) \right], \quad i = 1, 2,$$

где знак «+» выбирается для первой панели ($i = 1$), знак «-» – для второй ($i = 2$). Заметим, что

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4} (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = \frac{1}{4} (|\mathbf{n}_1|^2 - (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + (\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) - |\mathbf{n}_2|^2) = 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{r}_s, \mathbf{v})$ – величина второго порядка малости, т.к. по условию угол между \mathbf{r}_s и \mathbf{n} много меньше единицы, а также, согласно (4.2), $|\mathbf{v}| \ll 1$. Далее, отбрасывая величины второго и выше порядков малости, запишем выражение для солнечного момента:

$$\mathbf{M}_s \approx \mathbf{R} \times 2a \mathbf{r}_s + [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}] (b + d). \quad (4.4)$$

Таким образом, солнечный момент состоит из двух слагаемых. Первое из них отвечает за поглощенное излучение и существенно зависит от орта направления на Солнце. Второе же слагаемое возникает лишь в случае наличия отражения (зеркального и/или по закону косинусов), и его направление относительно КА всегда остается фиксированным. Необходимо отметить, что этот результат получен в рамках описанных выше условий, когда угол между средней нормалью \mathbf{n} и направлением на Солнце достаточно мал, а также что сами нормали к солнечным панелям практически совпадают.

4.3. Построение опорного движения

При построении опорного углового движения будем отталкиваться от следующих предпосылок. Во-первых, принцип действия маховичной системы ориентация основан на законе сохранения суммарного кинетического момента системы «спутник-маховик», а значит, в случае отсутствия внешних моментов или же на достаточно малых промежутках времени (например, во время быстрой переориентации КА при помощи маховиков) можно считать

суммарный кинетический момент постоянным. Во-вторых, в режиме солнечной стабилизации, когда КА не вращается вокруг направления на Солнце, кинетический момент аппарата (без учета маховиков) практически равен нулю. Таким образом, если удастся привести кинетический момент всей системы «спутник-маховик» к нулевому значению, то в режиме солнечной стабилизации кинетический момент маховиков также будет равен нулю.

Рассмотрим теперь эволюцию суммарного кинетического момента системы «спутник-маховики»

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (4.5)$$

где \mathbf{K} – суммарный кинетический момент системы «спутник-маховик», \mathbf{M} – суммарный момент внешних сил, действующих на систему, который при движении КА вдали от перицентра соответствует солнечному моменту, а при движении в окрестности перицентра равен гравитационному моменту. Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(K^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 2(\mathbf{K}, \mathbf{M}).$$

Следовательно, для уменьшения кинетического момента всей системы будет достаточно потребовать $(\mathbf{M}, \mathbf{K}) < 0$.

Как уже упоминалось выше, момент внешних сил зависит от текущей ориентации КА. Естественно, не всегда можно реализовать такую ориентацию КА, чтобы достигалось желаемое неравенство, однако в случае если в каждый момент времени будет выполняться

$$(\mathbf{M}, \mathbf{K}) \rightarrow \min, \quad (4.6)$$

можно ожидать, что в режиме солнечной ориентации избыточный кинетический момент маховиков будет, по крайней мере, накапливаться медленно. При этом условие (4.6) вместе с ограничением на угол между средней нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце позволяет найти требуемую ориентацию КА.

Полученный результат может быть распространен и на более общую задачу. В случае, когда солнечная ориентация является лишь временной, а у самого аппарата есть некоторый номинальный режим движения, подразумевающий постоянство вектора кинетического момента корпуса КА $\mathbf{K}_0 = \text{const}$ (например, инерциальная стабилизация или стабилизация собственным вращением), к началу номинального режима будет достаточно обеспечить равенство кинетического момента системы «спутник-маховик» \mathbf{K} и \mathbf{K}_0 , чтобы в номинальном режиме движения маховики были полностью разгружены.

Покажем, что для достижения целевого значения кинетического момента достаточно будет потребовать выполнения неравенства $(\mathbf{M}, \mathbf{K} - \mathbf{K}_0) < 0$, так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\mathbf{K} - \mathbf{K}_0|^2 &= \frac{d}{dt} (K^2 + K_0^2 - 2(\mathbf{K}_0, \mathbf{K})) = \frac{d}{dt} (\mathbf{K}, \mathbf{K}) - 2 \left(\mathbf{K}_0, \frac{d}{dt} \mathbf{K} \right) = \\ &= 2(\mathbf{K}, \mathbf{M}) - 2(\mathbf{K}_0, \mathbf{M}) = 2(\mathbf{M}, \mathbf{K} - \mathbf{K}_0). \end{aligned}$$

Таким образом, при наличии достаточного запаса кинетического момента в маховиках может быть достигнуто любое значение целевого кинетического момента, и к началу номинального движения маховики будут полностью разгружены.

4.4. Используемые системы координат

Прежде чем приступить к решению минимизационной задачи (4.6) при условии (4.3), введем следующие правые ортонормированные системы координат (рис. 4.3):

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$ – инерциальная система координат (ИСК): совпадает с введенной в первой главе ИСК;

$Ox_1 x_2 x_3$ – связанная с КА система координат (ССК): начало O расположено в центре масс КА, оси являются главными центральными осями инерции аппарата. Сделаем дополнительное предположение, что средняя нормаль к солнечным панелям \mathbf{n} направлена вдоль Ox_3 ;

$Oz_1 z_2 z_3$ – солнечная система координат (СолСК): Oz_3 направлена вдоль направления на Солнце \mathbf{r}_s , Oz_1 сонаправлен с векторным произведением $\mathbf{K} \times \mathbf{r}_s$ (если $\mathbf{K} \times \mathbf{r}_s = \mathbf{0}$, то Oz_1 сонаправлен с нормалью к плоскости эклиптики), следовательно, в этой СК $\mathbf{K} = (0 \quad K_2 \quad K_3)^T$;

$Oy_1 y_2 y_3$ – система координат, связанная с солнечными панелями (СПСК): Oy_3 сонаправлена с \mathbf{n} , Oy_1 сонаправлен с $\mathbf{n} \times \mathbf{p}$, где $\mathbf{p} = 2\mathbf{R}\mathbf{a}$ (если $\mathbf{n} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$, то СПСК выбирается совпадающей с ССК), следовательно, в этой СК $\mathbf{p} = (0 \quad p_2 \quad p_3)^T$;

$OZ_1 Z_2 Z_3$ – орбитально-солнечная система координат (ОССК): OZ_3 направлена вдоль направления на Солнце, OZ_2 сонаправлен с $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{sat}$, где \mathbf{r}_{sat} – радиус-вектор из центра Земли в центр масс КА (если $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{sat} = \mathbf{0}$, то OZ_2 совпадает с нормалью к плоскости эклиптики), следовательно, в этой СК $\mathbf{r}_{sat} = (r_1 \quad 0 \quad r_3)^T$, $r_1 \geq 0$.

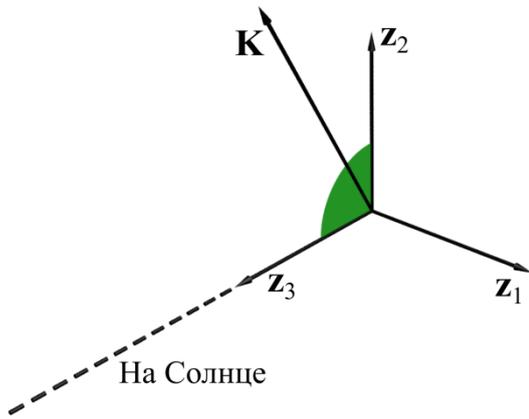


Рис. 4.3а. Солнечная СК

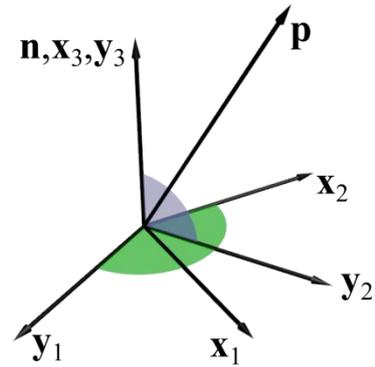


Рис. 4.3б. СПСК и ССК

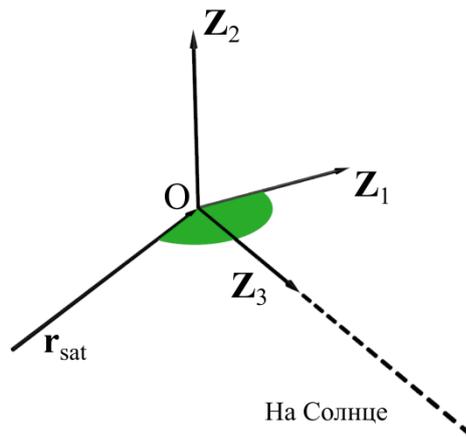


Рис. 4.3в. Орбитально-солнечная СК

Вектор, записанный в соответствующей системе координат, в дальнейшем будет помечаться верхним индексом: $\mathbf{a}^Y, \mathbf{a}^x, \mathbf{a}^z, \mathbf{a}^y, \mathbf{a}^Z$ для ИСК, ССК, СолСК, СПСК и ОССК соответственно. Переходы между системами координат задаются при помощи матриц направляющих косинусов \mathbf{D}_{ij} , причем

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{D}_{ij} \mathbf{a}^j,$$

где i, j могут принимать значения Y, x, z, y, Z .

4.5. Разгрузка при помощи солнечного момента

Рассмотрим более подробно задачу разгрузки маховиков при движении аппарата вдали от перигея, где преобладает солнечный момент. Выпишем в явном виде выражение для

матрицы перехода из СолСК в СПСК \mathbf{D}_{zy} с использованием углов Эйлера (последовательность поворотов 3-1-3 на углы ψ, θ, φ соответственно):

$$\begin{aligned} D_{11} &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \cos(\theta)\sin(\varphi)\sin(\psi), \\ D_{21} &= -\cos(\psi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\cos(\theta)\sin(\psi), \\ D_{31} &= \sin(\psi)\sin(\theta), \\ D_{12} &= \cos(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi), & D_{13} &= \sin(\varphi)\sin(\theta), \\ D_{22} &= \cos(\varphi)\cos(\psi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\psi), & D_{23} &= \cos(\varphi)\sin(\theta), \\ D_{32} &= -\cos(\psi)\sin(\theta), & D_{33} &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

Легко видеть, что угол между \mathbf{r}_s и \mathbf{n} равен θ , соответственно, ограничение (4.3) может быть переписано в виде

$$-\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}. \quad (4.7)$$

В дальнейшем мы будем использовать ограничения именно в форме (4.7).

Введем еще одно обозначение

$$\mathbf{q} = [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \mathbf{p} \times 2\mathbf{v}](b + d).$$

Тогда выражение для солнечного момента можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{p} \times \mathbf{r}_s + \mathbf{q}.$$

Учитывая малость θ_{max} , линеаризуем выражение для матрицы \mathbf{D}_{zy} :

$$\mathbf{D}_{zy} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & \sin(\varphi + \psi) & \theta \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) & \theta \cos(\varphi) \\ \theta \cos(\psi) & -\theta \sin(\psi) & 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к записи выражения $(\mathbf{M}_s, \mathbf{K})$. Наиболее простой вид векторы \mathbf{K} и \mathbf{r}_s имеют в СолСК, а векторы \mathbf{p}, \mathbf{q} – в СПСК. Следовательно,

$$(\mathbf{M}_s, \mathbf{K}) = (\mathbf{K}, \mathbf{p} \times \mathbf{r}_s + \mathbf{q}) = (\mathbf{D}_{zy} [\mathbf{r}_s^z \times \mathbf{K}^z], \mathbf{p}^y) + (\mathbf{D}_{zy} \mathbf{K}^z, \mathbf{q}^y).$$

После приведения подобных слагаемых и их группировки это выражение преобразуется в

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_s, \mathbf{K}) &= q_3 K_3 + K_2 [q_2 \cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)(q_1 + p_2)] + \\ &+ \theta [K_3 (q_1 \sin(\varphi) + q_2 \cos(\varphi)) - K_2 (p_3 \sin(\psi) + q_3 \cos(\psi))]. \end{aligned}$$

В итоге, задача сводится к следующей:

$$\begin{aligned}
& q_3 K_3 + K_2 (q_2 \cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)(q_1 + p_2)) + \\
& + \theta (K_3 (q_1 \sin(\varphi) + q_2 \cos(\varphi)) - K_2 (p_3 \sin(\psi) + q_3 \cos(\psi))) \rightarrow \min_{\psi, \theta, \varphi}, \\
& -\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Для ее решения воспользуемся методом множителей Лагранжа, а также условием Каруша-Куна-Таккера [70]. Функция Лагранжа этой системы записывается в виде

$$\begin{aligned}
L = & q_3 K_3 + K_2 (q_2 \cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)(q_1 + p_2)) + \\
& + \theta (K_3 (q_1 \sin(\varphi) + q_2 \cos(\varphi)) - K_2 (p_3 \sin(\psi) + q_3 \cos(\psi))) \\
& + \lambda_1 (\theta_{max} - \theta) + \lambda_2 (\theta_{max} + \theta) + q_3 K_3,
\end{aligned}$$

где λ_i – множители Лагранжа. Соответствующие необходимые условия минимума тогда принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= K_3 (q_1 \sin(\varphi) + q_2 \cos(\varphi)) - K_2 (p_3 \sin(\psi) + q_3 \cos(\psi)) + \lambda_2 - \lambda_1 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= K_2 ((q_1 + p_2) \cos(\varphi + \psi) - \sin(\varphi + \psi) q_2) + \theta K_3 (q_1 \cos(\varphi) - q_2 \sin(\varphi)) = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \psi} &= K_2 ((q_1 + p_2) \cos(\varphi + \psi) - \sin(\varphi + \psi) q_2) - \theta K_2 (p_3 \cos(\psi) - q_3 \sin(\psi)) = 0, \\
\lambda_1 (\theta_{max} - \theta) &= 0, \\
\lambda_2 (\theta_{max} + \theta) &= 0, \\
\lambda_i &\geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, получена система уравнений, которая позволяет найти все экстремумы задачи (4.8). В общем случае решение ее затруднительно, поэтому мы рассмотрим лишь ее частный случай. Обратим внимание, что вектор \mathbf{q} состоит из двух слагаемых, по крайней мере одно из которых, а именно

$$\boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}(b + d)$$

в рамках сделанных ранее предположений о малости угла между нормальными к солнечным панелям, по модулю много меньше единицы. Помимо этого, коэффициент отражения солнечных панелей является малой величиной. Следовательно, это слагаемое имеет второй порядок малости и можно пренебречь им. Безусловно, решение в рамках этого допущения уже не будет доставлять минимум задачи (4.8), однако, учитывая малость поправки, полученное решение будет близко к оптимальному.

Рассмотрим разложение вектора \mathbf{q} (с уже откинутым малым слагаемым) по базису СПСК. Согласно определению этой системы координат, верны следующие выражения:

$$\mathbf{R}^y = (0 \ R_2 \ R_3)^T, \quad \mathbf{n}^y = (0 \ 0 \ 1)^T.$$

В то же время

$$\mathbf{q}^y = 2\mathbf{R}^y \times \mathbf{n}^y (b+d) = (2R_2(b+d) \ 0 \ 0)^T.$$

Таким образом, $q_3 = q_2 = 0$. Введем дополнительные обозначения

$$f = K_2(q_1 + p_2), \quad g = K_3q_1, \quad h = K_2p_3.$$

Тогда минимизационная задача принимает вид

$$\begin{aligned} f \sin(\varphi + \psi) + \theta(g \sin(\varphi) - h \sin(\psi)) \rightarrow \min_{\psi, \theta, \varphi}, \\ -\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

а необходимые условия минимума записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) + \lambda_2 - \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= f \cos(\varphi + \psi) + \theta g \cos(\varphi) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= f \cos(\varphi + \psi) - \theta h \cos(\psi) = 0, \\ \lambda_1(\theta_{max} - \theta) &= 0, \\ \lambda_2(\theta_{max} + \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Общее решение полученной системы уравнений представлено в Приложении А. Здесь мы отметим лишь, что минимальное значение функция (4.9) будет принимать на границе области допустимых параметров, т.е. при $|\theta| = \theta_{max}$. В случае, когда ни один из коэффициентов f, g, h не равен нулю, общее количество точек, претендующих на экстремальное значение, не превышает двадцати четырех. Более того, легко видеть, что функция обладает симметрией, а именно, при замене θ на $-\theta$ и одновременном сдвиге φ и ψ на π значение функции не изменится. Это связано с тем, что при такой замене линеаризованная матрица перехода \mathbf{D}_{zy} не изменяется, т.е. два набора углов, с точностью до величин второго порядка малости по θ , отвечают одному и тому же положению КА. Таким образом, является целесообразным проводить минимизацию этой функции лишь при одном фиксированном $\theta = \theta_{max}$, и общее количество возможных экстремумов тогда сокращается до двенадцати.

Заметим также, что при

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \gamma_0, \quad \theta = \theta_{max}, \quad \varphi = (1 - \text{sign}(f))\frac{\pi}{2} + \gamma_0, \quad (4.11)$$

где для γ_0 выполнено

$$\sin(\gamma_0) = \frac{-g \operatorname{sign}(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad (4.12)$$

функция (4.9) принимает значение

$$-|f| - \theta_{\max} \sqrt{g^2 + h^2}.$$

Это значение не является минимальным для исследуемой функции в общем случае, что может быть легко проверено подстановкой в систему уравнений (4.10), однако показывает, что всегда можно выбрать ориентацию аппарата таким образом, чтобы осуществлялась разгрузка маховиков при помощи солнечного момента.

Покажем, что приведенное здесь приближенное решение достаточно близко к оптимальному. Легко видеть, что

$$0 \leq \frac{\min(f \sin(\varphi + \psi) + \theta(g \sin \varphi - h \sin \psi))}{-|f| - \theta_{\max} \sqrt{g^2 + h^2}} \leq \frac{|f| + \theta_{\max} (|g| + |h|)}{|f| + \theta_{\max} \sqrt{g^2 + h^2}}.$$

Если $f = 0, g = h$, то правое выражение из этого неравенства равно $\sqrt{2}$. Докажем, что

$$\frac{|f| + \theta_{\max} (|g| + |h|)}{|f| + \theta_{\max} \sqrt{g^2 + h^2}} \leq \sqrt{2}.$$

Перепишем это в виде

$$(1 - \sqrt{2}) \frac{|f|}{\theta_{\max}} \leq 2 \left(\sqrt{\frac{g^2 + h^2}{2}} - \frac{|g| + |h|}{2} \right).$$

Левая часть этого неравенства всегда неположительна. Учитывая

$$\sqrt{\frac{g^2 + h^2}{2}} \geq \frac{|g| + |h|}{2},$$

очевидно, что правая часть всегда неотрицательна. Таким образом, требуемое утверждение доказано, а значит, приближенное решение будет отличаться от оптимального не более чем в $\sqrt{2}$ раз.

4.6. Разгрузка при помощи гравитационного момента

Прежде чем мы приступим к построению опорного движения, обеспечивающего разгрузку маховиков при помощи гравитационного момента, рассмотрим более детально выражение для солнечного момента, а точнее его проекцию на направление на Солнце \mathbf{r}_s :

$$(\mathbf{M}_s, \mathbf{r}_s) = (\mathbf{R} \times 2a\mathbf{r}_s + [\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b+d), \mathbf{r}_s) = ([\mathbf{R} \times 2\mathbf{n} + \boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}](b+d), \mathbf{r}_s).$$

Как уже было отмечено выше, $|\boldsymbol{\rho} \times 2\mathbf{v}(b+d)|$ является величиной второго порядка малости. В силу того, что угол между вектором средней нормали \mathbf{n} и направлением на Солнце \mathbf{r}_s достаточно мал, величина

$$(\mathbf{R} \times 2\mathbf{n}(b+d), \mathbf{r}_s)$$

также является величиной второго порядка малости. Таким образом, проекция солнечного момента на направление на Солнце фактически является малой величиной второго порядка, а значит, разгрузка маховиков вдоль направления на Солнце практически не производится.

Учитывая вышесказанное, мы будем проводить разгрузку маховиков при помощи гравитационного момента исключительно вдоль направления на Солнце, т.к. кинетический момент, ортогональный этому направлению, может быть разгружен за счет солнечного момента. В итоге, мы приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{r}_s(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s), 3 \frac{\mu}{r_{sat}^5} \mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{J} \mathbf{r}_{sat} \right) \rightarrow \min, \\ (\mathbf{r}_s, \mathbf{n}) \geq \cos \theta_{max}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где μ – гравитационный параметр Земли, \mathbf{r}_{sat} – радиус-вектор из центра Земли в центр масс КА, \mathbf{J} – его тензор инерции. В качестве независимых переменных, как и в предыдущем пункте, будут выступать углы Эйлера (последовательность 3-1-3 на углы Ψ, Θ, Φ соответственно). Ограничение (4.3) при этом снова можно переписать в более компактном виде

$$-\theta_{max} \leq \Theta \leq \theta_{max}.$$

Матрица перехода из ОССК в ССК после линеаризации записывается в виде

$$\mathbf{D}_{Zx} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi + \Psi) & \sin(\Phi + \Psi) & \Theta \sin(\Phi) \\ -\sin(\Phi + \Psi) & \cos(\Phi + \Psi) & \Theta \cos(\Phi) \\ \Theta \cos(\Psi) & -\Theta \sin(\Psi) & 1 \end{pmatrix}.$$

В ОССК выражения для вектора направления на Солнце и радиус-вектора КА записываются в виде

$$\mathbf{r}_s^Z = (0 \ 0 \ 1)^T, \quad \mathbf{r}_{sat}^Z = (r_1 \ 0 \ r_3)^T.$$

Минимизируемая функция принимает вид

$$\left(\mathbf{r}_s(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s), 3 \frac{\mu}{r_{sat}^5} \mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{J} \mathbf{r}_{sat} \right) = 3 \frac{\mu}{r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) (\mathbf{r}_s^Z \times \mathbf{r}_{sat}^Z, \mathbf{D}_{Zx}^T \mathbf{J}^x \mathbf{D}_{Zx} \mathbf{r}_{sat}^Z), \quad (4.14)$$

где \mathbf{J}^x – тензор инерции КА, записанный в ССК, при этом

$$\mathbf{J}^x = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Итоговое выражение для (4.14) имеет вид

$$3 \frac{\mu}{r_{sat}^5}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) \left[r_1^2 \frac{A-B}{2} \sin(2\Psi + 2\Phi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} r_1 r_3 \Theta \left((A-B) \cos(2\Phi + \Psi) - \cos(\Psi)(A+B-2C) \right) \right].$$

Введем обозначения

$$F = \frac{3\mu}{2r_{sat}^5}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1^2 (B-A), \quad G = -\frac{3\mu}{2r_{sat}^5}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 (A-B), \\ H = -\frac{3\mu}{2r_{sat}^5}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 (A+B-2C), \\ \alpha = 2\Phi + \Psi + \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \Psi + \frac{\pi}{2}.$$

Тогда минимизационная задача принимает вид

$$F \sin(\alpha + \beta) + \Theta(G \sin(\alpha) - H \sin(\beta)) \rightarrow \min_{\alpha, \beta, \Theta}, \\ -\theta_{max} \leq \Theta \leq \theta_{max}.$$

Легко видеть, что с точностью до обозначений она совпадает с задачей (4.9), а значит, и метод решения, предложенный в предыдущем пункте, также может быть без изменений и дополнений применен к ней.

Рассмотрим более детально приближенное решение (4.11). Запишем явные выражения для угла γ_0 из предыдущего пункта с учетом переобозначений:

$$\begin{aligned}\sin \gamma_0 &= \frac{-G \operatorname{sign}(F)}{\sqrt{G^2 + H^2}} = \frac{\frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 (A - B) \operatorname{sign}((\mathbf{K}, \mathbf{r}_s)(B - A))}{\left| \frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 \right| \sqrt{(A - B)^2 + (A + B - 2C)^2}} = \\ &= \frac{-\operatorname{sign}(r_3) |B - A|}{\sqrt{(A - B)^2 + (A + B - 2C)^2}}, \\ \cos \gamma_0 &= \frac{-H}{\sqrt{G^2 + H^2}} = \frac{-\frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 (A + B - 2C)}{\left| \frac{3\mu}{2r_{sat}^5} (\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_1 r_3 \right| \sqrt{(A - B)^2 + (A + B - 2C)^2}} = \\ &= \frac{-\operatorname{sign}((\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) r_3) (A + B - 2C)}{\sqrt{(A - B)^2 + (A + B - 2C)^2}}.\end{aligned}$$

Углы ориентации Φ, Ψ однозначно выражаются через угол γ_0 :

$$\Phi = \gamma_0 + \frac{2 - \operatorname{sign}((\mathbf{K}, \mathbf{r}_s)(B - A))}{2}, \quad \Psi = -\gamma_0 - \pi.$$

Таким образом, ориентация КА относительно ОССК может принимать лишь конечное число значений, которые определяются знаками проекций $r_3 = (\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_s)$ и $(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s)$, а также компонентами тензора инерции аппарата. Иными словами, в случае, когда знаки этих проекций не изменяются по ходу движения, КА будет неподвижен в ОССК.

Получим явные выражения для угловой скорости ОССК. Согласно определению ее базисные оси могут быть записаны в виде

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_s (\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_s (\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_s)|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{r}_s, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Компоненты угловой скорости этой СК могут быть найдены при помощи уравнений Пуассона

$$\dot{\mathbf{D}}_{YZ} = -[\boldsymbol{\omega}_0^Z]_{\times} \mathbf{D}_{YZ},$$

где \mathbf{D}_{YZ} – матрица перехода из ИСК в ОССК, $\boldsymbol{\omega}_0^Z$ – вектор угловой скорости ОССК. Выражения для компонент угловой скорости записываются в виде

$$\boldsymbol{\omega}_0^Z = ((\dot{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2) \quad -(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_2) \quad (\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1))^T.$$

Вектор направления на Солнце делает один полный оборот за год, поэтому его изменением можно пренебречь, т.е. $\dot{\mathbf{e}}_3 = \dot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0}$. Производная первого базисного вектора тогда

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{r}_s (\mathbf{v}_{sat}, \mathbf{r}_s) - \mathbf{e}_1 (\mathbf{v}_{sat} - \mathbf{r}_s (\mathbf{v}_{sat}, \mathbf{r}_s), \mathbf{e}_1)}{|\mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_s (\mathbf{r}_{sat}, \mathbf{r}_s)|} = \frac{\mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_{sat})}{|\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{r}_s|}.$$

Здесь мы учли, что

$$\mathbf{v}_{sat} = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_{sat}) + \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_{sat}) + \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_{sat}), \quad (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Таким образом, выражение для угловой скорости принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}_0^z = \left(\frac{\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_{sat})}{|\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{r}_s|} \quad 0 \quad 0 \right)^T.$$

Легко видеть, что в случае, когда \mathbf{r}_{sat} и \mathbf{r}_s коллинеарны, угловая скорость ОССК получается неограниченной. Это должно быть учтено при построении требуемой ориентации и требуемой угловой скорости КА на этапе разгрузки вблизи перицентра. При достаточно малых $|\mathbf{r}_{sat} \times \mathbf{r}_s|$ разгрузку при помощи гравитационного момента проводить становится нецелесообразно, т.к. требуется довольно большая угловая скорость аппарата и у маховиков может не хватить запаса кинетического момента для ее обеспечения. Отметим также, что из-за вращения вектора направления на Солнце такие этапы будут достаточно кратковременны и не будут превышать нескольких витков КА, а в случае когда перицентр находится на достаточном удалении от плоскости эклиптики, и вовсе отсутствовать.

4.7. Численное моделирование

Для демонстрации работы предложенных алгоритмов построения опорного углового движения и его реализации было проведено моделирование движений КА со следующими параметрами и предположениями:

- КА движется по высокоэллиптической кеплеровой орбите с наклоном 60° , перицентром 9 000 км и апоцентром 150 000 км, длительность одного витка 62.7 ч.

- Тензор инерции КА $\mathbf{J}^x = \text{diag}(150, 120, 200)$ кг·м².

- Суммарная площадь солнечных панелей 3 м².

- $\mathbf{R}_1^x = (0 \quad 0.75 \quad 0.15)^T$ м, $\mathbf{R}_2^x = (0 \quad -0.85 \quad 0.15)^T$ м.

- $\mathbf{n}_1^x = (0.075 \quad 0.075 \quad 0.996)^T$, $\mathbf{n}_2^x = (-0.075 \quad -0.075 \quad 0.996)^T$.

- Коэффициент отражения $\alpha = 0.1$, коэффициент зеркальности $\mu = 0.5$.

- Земля вращается вокруг Солнца с постоянной угловой скоростью, изменением вектора направления на Солнце при движении КА по орбите пренебрегаем, т.е. вектор направления на Солнце вращается с постоянной угловой скоростью в ИСК.

- $\theta_{max} = 10^\circ$.

- Начальная ориентация $\mathbf{D}_{yx} = \mathbf{E}_3$, начальная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^x = (0 \quad 0 \quad 0)^T$.

- Максимальный управляющий момент 0.01 Н·м.

- Начальное значение накопленного маховиками кинетического момента $\mathbf{H} = (1 \ 1 \ 1)^T \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

- На участках вдали от перицентра ориентация пересчитывается каждые 40 000 с (около 11 часов).

При построении опорного движения использовались представленные выше упрощенные уравнения для солнечного момента (4.4), а границей смены режима являлось расстояние между спутником и центром Земли в 15 000 км. В ходе интегрирования уравнений движения использовалась более точная модель солнечного момента (4.1), а гравитационный момент всегда действовал на КА. На рис. 4.4-4.9 представлены результаты работы алгоритма, при котором использовалось точное решение минимизационных задач (4.9) и (4.13).

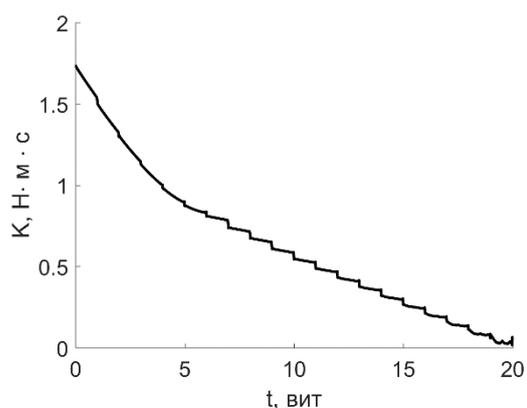


Рис. 4.4. Полный кинетический момент

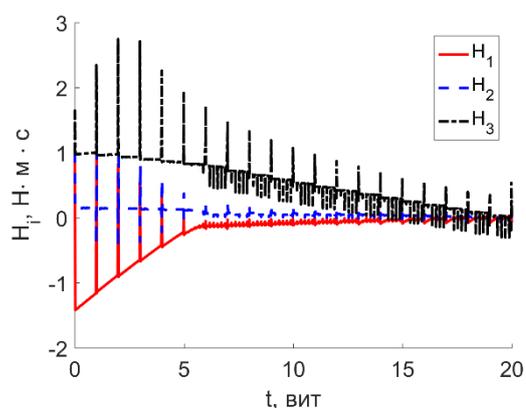


Рис. 4.5. Кинетический момент маховиков

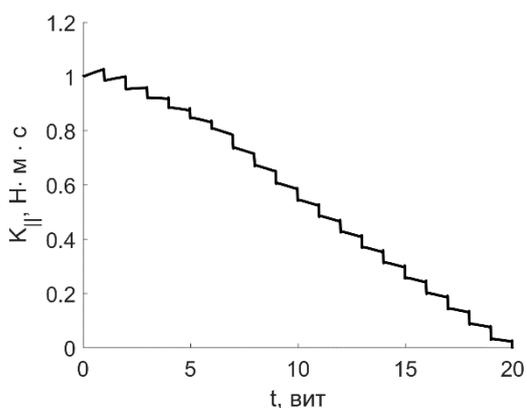


Рис. 4.6. Проекция кинетического момента на направление на Солнце

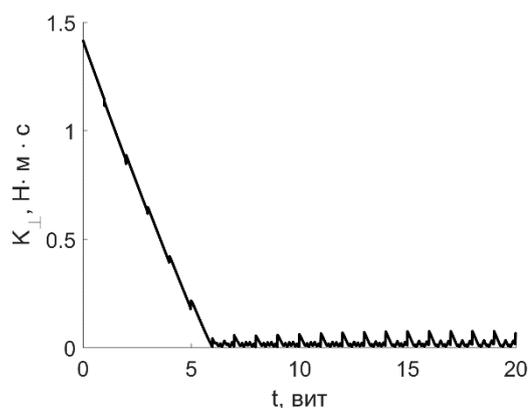


Рис. 4.7. Кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце

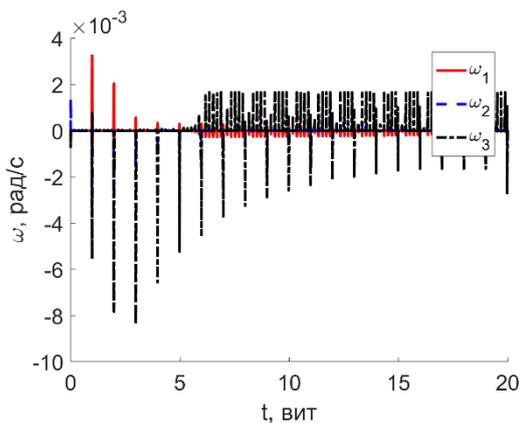


Рис. 4.8. Угловая скорость КА

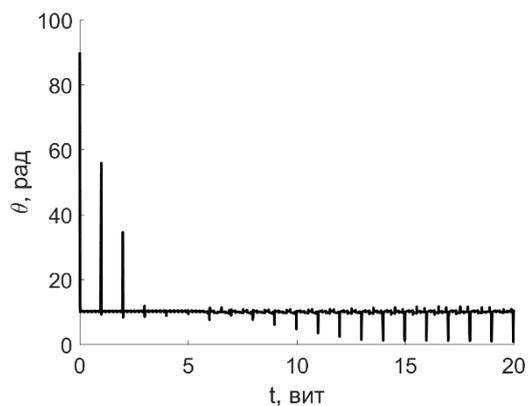


Рис. 4.9. Угол между средней нормалью и направлением на Солнце

Скачки в значении кинетического момента маховиков на рис. 4.5 обусловлены тем, что КА должен быстро переориентироваться при движении вблизи перицентра. Начиная с шестого витка также появляются скачки и при движении вдали от перицентра, что связано с тем, что кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце, практически полностью сброшен, и каждый раз при обновлении ориентации оптимальное ее значение существенно отличается от предыдущего. Этим же обусловлены и резкие изменения в угловой скорости КА. Довольно большой угол между средней нормалью к солнечным панелям и направлением на Солнце вызван также большой разницей в значении оптимальной ориентации при движении вдали от перицентра и вблизи от него, однако промежутки времени, на которых этот угол значителен, кратковременны и не будут оказывать существенного влияния на энергетику КА.

Для сравнения на рис. 4.10-4.15 представлены результаты моделирования, в которых при построении опорного движения использовались не точные решения минимизационных задач, а лишь их приближение (4.11).

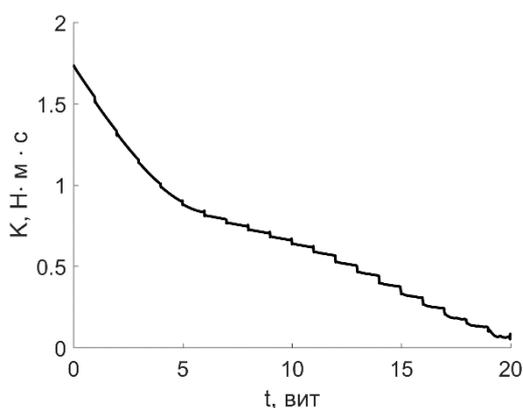


Рис. 4.10. Полный кинетический момент

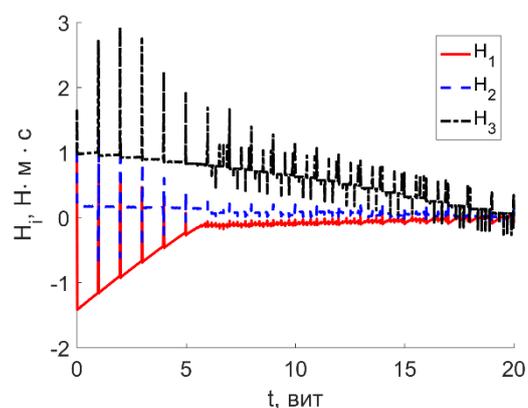


Рис. 4.11. Кинетический момент маховиков

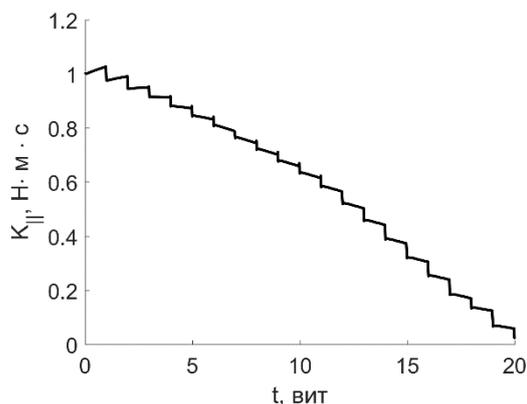


Рис. 4.12. Проекция кинетического момента на направление на Солнце

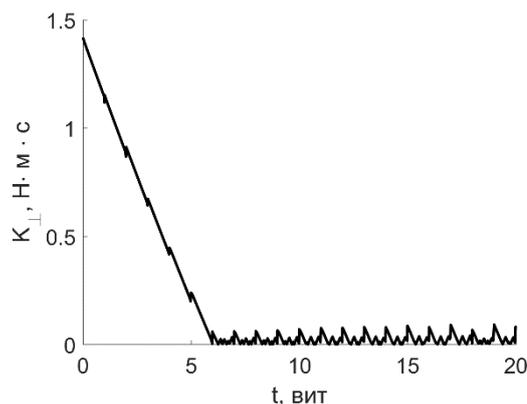


Рис. 4.13. Кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце

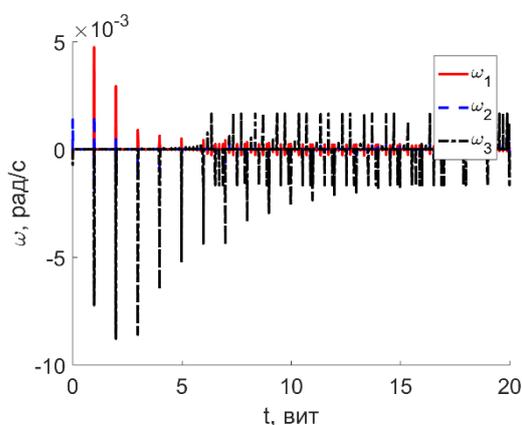


Рис. 4.14. Угловая скорость КА

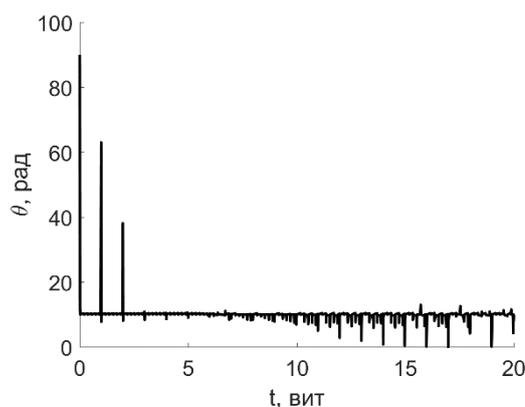


Рис. 4.15. Угол между средней нормалью и направлением на Солнце

Легко видеть, что поведение кинетического момента мало отличается от случая с точным решением минимизационных задач.

4.8. Спутник на высокой орбите

Как было продемонстрировано в предыдущих пунктах, для разгрузки маховиков на эллиптических орбитах могут быть использованы моменты гравитационных сил и сил солнечного давления. В то же время, предложенная методика будет неэффективной для спутников на орбитах с высоким перигелием, так как разгрузка кинетического момента вдоль направления на Солнце практически не производится. Для решения этой проблемы предлагается использовать следующий подход. Рассмотрим эволюцию проекции кинетического момента на направление на Солнце:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s) = (\mathbf{M}_s, \mathbf{r}_s) + (\mathbf{K}, \boldsymbol{\omega}_{sun} \times \mathbf{r}_s),$$

где ω_{sun} угловая скорость вектора направления на Солнце в инерциальной системе координат. Первое слагаемое в правой части, как уже было показано ранее, является величиной второго порядка малости. Второе же слагаемое, при наличии достаточного запаса кинетического момента, может быть сделано достаточно большим. Этот факт в дальнейшем используется для разгрузки избыточного кинетического момента вдоль направления на Солнце. Для этого достаточно, чтобы

$$(\mathbf{K}, \omega_{sun} \times \mathbf{r}_s) = -\lambda \text{sign}(\mathbf{K}, \mathbf{r}_s).$$

В силу того, что кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце может эффективно меняться, это легко может быть реализовано. Следовательно, возможна разгрузка избыточного кинетического момента вдоль направления на Солнце при помощи только солнечного момента. Отметим, что скорость сброса кинетического момента при этом оказывается довольно мала (порядка $10^{-7} \cdot H_{max}$). Для демонстрации работы алгоритма будем рассматривать тот же спутник, что и в случае движения по эллиптической орбите, только на этот раз орбита спутника будет геостационарной (рис. 4.16-4.19).

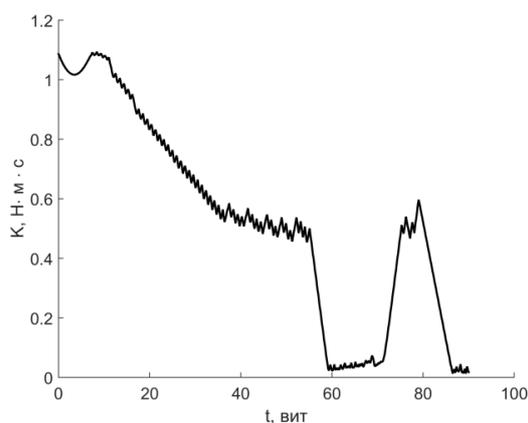


Рис. 4.16. Суммарный кинетический момент

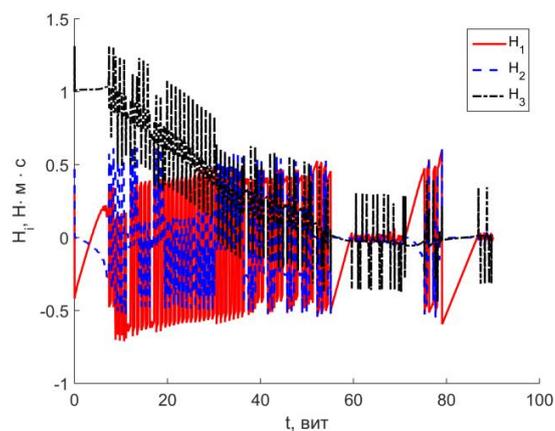


Рис. 4.17. Кинетический момент маховиков

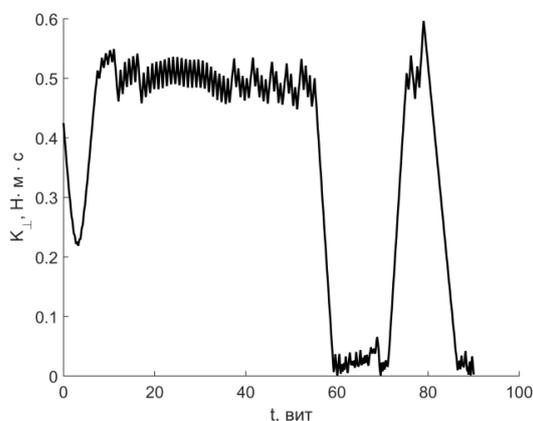


Рис. 4.18. Кинетический момент, ортогональный направлению на Солнце

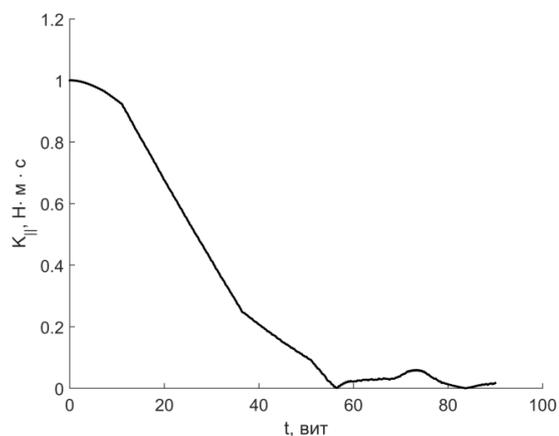


Рис. 4.19. Кинетический момент вдоль направления на Солнце

Как видно из результатов моделирования, предложенная методика позволила разгрузить избыточный кинетический момент вдоль направления на Солнце. Осцилляции на графике связаны с тем, что требуемая ориентация аппарата обновляется каждые 40 000 с.

4.9. Выводы по главе 4

В настоящей главе была рассмотрена задача бестопливной разгрузки маховичной системы ориентации аппарата, движущегося по высокоэллиптической орбите и находящегося в окоლოსолнечной ориентации. Для ее решения было предложено использовать моменты внешних сил, действующих на аппарат, а именно гравитационный момент и момент сил давления солнечного излучения.

Для спутника с двумя идентичными солнечными панелями, в предположении малой разницы между нормальными к солнечным панелям и малом отклонении средней нормали от направления на Солнце, была получена упрощенная модель для момента сил солнечного давления, которая в дальнейшем использовалась для поиска ориентации КА, обеспечивающей наибольшую скорость разгрузки избыточного кинетического момента маховиков.

Было показано, что как для упрощенной модели момента сил давления солнечного излучения, так и для гравитационного момента, всегда существует такая ориентация КА, обеспечивающая как разгрузку маховиков, так и малое отклонение средней нормали от направления на Солнце.

Полученные результаты были протестированы на модельном примере. Как показало моделирование, не наблюдается существенной разницы в работе алгоритма при использовании точного решения минимизационных задач или при использовании лишь приближенного решения. Учитывая гораздо более простой вид приближенного решения, целесообразным является использовать именно его.

Выводы и заключение по диссертации

В настоящей работе были рассмотрены подходы к построению алгоритмов управления ориентацией на основе прямого метода Ляпунова, а также предложены алгоритмы синтеза опорного углового движения для двух различных сценариев миссий. Основными результатами, полученными в ходе выполнения диссертационной работы, являются:

1. Оценки точности стандартных алгоритмов управления ориентации на основе прямого метода Ляпунова в конечном виде. Они могут быть использованы на этапе предварительных расчетов облика аппарата для выбора параметров системы ориентации, соответствующих требованиям, предъявляемым полезной нагрузкой.
2. Алгоритм одноосной стабилизации аппарата, который может использоваться для решения задачи переориентации аппарата при наличии ограничений на возможную ориентацию.
3. Методика синтеза опорного углового движения спутника дистанционного зондирования, позволяющая отслеживать заданные сложные маршруты на поверхности Земли. Помимо этого, получены оценки влияния точности ориентации и стабилизации на качество снимаемого изображения, что, совместно с оценками точности ляпуновского управления, позволяет, не проводя массивных численных расчетов, подобрать необходимые для выполнения миссии датчики и актюаторы.
4. Методика синтеза опорного углового движения спутника, находящегося в режиме солнечной стабилизации. Было показано, что с использованием только моментов внешних сил, а именно гравитационного и солнечного, удастся разгрузить избыточный кинетический момент, накопленный системой маховиков. При этом было показано, что предложенная методика может работать как для высоких эллиптических орбит с достаточно низким перицентром, так и для просто высоких орбит, когда единственным внешним моментом, действующим на аппарат, является момент сил солнечного давления.

Список использованной литературы

1. Ресурс-П [Электронный ресурс]. URL: http://samspace.ru/products/earth_remote_sensing_satellites/ka_resurs_p/
(дата доступа: 20.12.2018).
2. World View [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/WorldView-2>
(дата доступа: 20.12.2018).
3. Lelong P., Lemercier C., Cheganças J. AstroBus S, the high performance and competitive Small Satellites platform for Earth Observation // 10th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation / ed. Sandau R., Roser H.-P., Valenzuela A. 2015. P. 15–18.
4. Gunter's Space Page [Электронный ресурс]. URL: <http://space.skyrocket.de/index.html>
(дата доступа: 20.12.2018).
5. Spacecraft Encyclopedia [Электронный ресурс]. URL: <http://claudelaflour.qc.ca/Scfam-remotesensing.html> (дата доступа: 20.12.2018).
6. Earth Observation Portal [Электронный ресурс]. URL: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions> (дата доступа: 20.12.2018).
7. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке земли // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2007. Т. 9, № 3. С. 664–670.
8. Бутырин С.А. Программный комплекс для расчета и визуализации маршрутов оптико-электронной съемки Земли // Вестник Самарского государственного технического университета. 2007. Т. 2. С. 11–17.
9. Сомов С.Е., Бутырин С.А., Сомова Т.Е. Оптимизация законов наведения, имитация и анимация движения спутника землеобзора // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. 2014. С. 3489–3500.
10. Wie B., Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints // J. Guid. Control. Dyn. 1995. Vol. 18, № 6. P. 1372–1379.
11. Wie B., Barba P.M. Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. // J. Guid. Control. Dyn. 1985. Vol. 8, № 3. P. 360–365.
12. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Карпенко С.О. Исследование углового движения микроспутника ЧИБИС-М с трехосным маховичным управлением // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 6. С. 462–471.
13. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. Наука, 1981.
14. Lo S.-C., Chen Y.-P. Smooth sliding-mode control for spacecraft attitude tracking maneuvers // J. Guid. Control. Dyn. 1995. Vol. 18, № 6. P. 1345–1349.

15. Chubb W.B., Seltzer S.M. Skylab attitude and pointing control system. 1971.
16. Coon T.R., Irby J.E. Skylab attitude control system // IBM J. Res. Dev. IBM, 1976. Vol. 20, № 1. P. 58–66.
17. POWELL B. Gravity gradient desaturation of a momentum exchange attitude control system // Guidance, Control and Flight Mechanics Conference. 1971. P. 940.
18. Bedrossian N.S. et al. Zero-propellant maneuver guidance // IEEE Control Syst. IEEE, 2009. Vol. 29, № 5.
19. Bedrossian N. et al. First ever flight demonstration of zero propellant maneuver (tm) attitude control concept // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. 2007. P. 6734.
20. Bedrossian N. et al. Zero-Propellant Maneuver [TM] Flight Results for 180 deg ISS Rotation. 2007.
21. Tong D. Spacecraft Momentum Dumping Using Gravity Gradient // J. Spacecr. Rockets. 1998. Vol. 35. P. 714–717.
22. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка остаточных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. № 65. С. 35.
23. Богачев А.В. и др. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С. 132–139.
24. Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. Безрасходная разгрузка накопленного кинетического момента инерционных исполнительных органов автономного космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Инженерный журнал наука и инновации. 2013. № 10.
25. Harvie E., Rowe J., Tsui Y.-K.J. Performance analysis of the GOES trim tab solar pressure torque angular momentum control // GOES-8 and Beyond. 1996. Vol. 2812. P. 741–753.
26. Tsuda Y. et al. Flight status of robotic asteroid sample return mission Hayabusa2 // Acta Astronaut. Elsevier, 2016. Vol. 127. P. 702–709.
27. Богачев А.В. Управление кинетическим моментом космического аппарата на высокоэллиптической орбите с использованием гравитационного момента и момента сил светового давления // Сборник научных трудов РКК «Энергия» им. С. П. Королева. Серия XII. Выпуск 1. 2010. С. 57–60.
28. Латынцев С.В. и др. Оценка эффективности алгоритма управления приводом солнечных батарей космического аппарата с целью создания моментов для разгрузки электромеханического исполнительного органа системы ориентации и стабилизации //

- Механика, управление и информатика. 2015. Т. 7, № 2. С. 348–352.
29. Chen X. et al. Optimal Combined Reaction-Wheel Momentum Management for Earth-Pointing Satellite // *J. Guid. Control. Dyn.* 1999. Vol. 22, № 4. P. 543–550.
 30. Giulietti F., Quarta A.A., Tortora P. Optimal control laws for momentum-wheel desaturation using magnetorquers // *J. Guid. Control. Dyn.* 2006. Vol. 29, № 6. P. 1464.
 31. Tregouet J.F. et al. Reaction wheels desaturation using magnetorquers and static input allocation // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* 2015. Vol. 23, № 2. P. 525–539.
 32. Зубов В.И. Динамика управляемых систем. М.: Высшая школа, 1982. 285 с.
 33. Hablani H.B. Attitude commands avoiding bright objects and maintaining communication with ground station // *J. Guid. Control. Dyn.* 1999. Vol. 22, № 6. P. 759–767.
 34. Kjellberg H.C., Lightsey E.G. Discretized constrained attitude pathfinding and control for satellites // *J. Guid. Control. Dyn.* American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2013. Vol. 36, № 5. P. 1301–1309.
 35. Tanygin S. Fast three-axis constrained attitude pathfinding and visualization using minimum distortion parameterizations // *J. Guid. Control. Dyn.* American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015. Vol. 38, № 12. P. 2324–2336.
 36. Tegmark M. An icosahedron-based method for pixelizing the celestial sphere // *arXiv Prepr. astro-ph/9610094*. 1996.
 37. O'Neill E.M., Laubscher R.E. Extended studies of a quadrilateralized spherical cube Earth data base. 1976.
 38. Hart P.E., Nilsson N.J., Raphael B. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths // *IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern.* IEEE, 1968. Vol. 4, № 2. P. 100–107.
 39. Frazzoli E. et al. A randomized attitude slew planning algorithm for autonomous spacecraft // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2001.
 40. Frazzoli E., Dahleh M.A., Feron E. Real-time motion planning for agile autonomous vehicles // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 1. P. 116–129.
 41. Kim Y. et al. On the constrained attitude control problem // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. 2004. P. 5129.
 42. Kim Y. et al. On the convex parameterization of constrained spacecraft reorientation // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* IEEE, 2010. Vol. 46, № 3. P. 1097–1109.
 43. Sun C., Dai R. Spacecraft attitude control under constrained zones via quadratically constrained quadratic programming // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2015. P. 2010.
 44. Melton R.G. Hybrid methods for determining time-optimal, constrained spacecraft reorientation maneuvers // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2014. Vol. 94, № 1. P. 294–301.
 45. Salama O. Autonomous Spacecraft Attitude Constraints Avoidance // *Proceedings of the 65th*

- IAC. 2014. P. 9.
46. Shen Q., Goh C.H., Yue C. Constrained attitude control of agile spacecraft using CMGs // Region 10 Conference (TENCON). 2016. P. 3664–3669.
 47. McInnes C.R. Large angle slew maneuvers with autonomous sun vector avoidance // J. Guid. Control. Dyn. 1994. Vol. 17, № 4. P. 875–877.
 48. Lee U. State-Constrained Rotational and Translational Motion Control with Applications to Monolithic and Distributed Spacecraft. 2014.
 49. Wisniewski R., Kulczycki P. Slew maneuver control for spacecraft equipped with star camera and reaction wheels // Control Eng. Pract. Elsevier, 2005. Vol. 13, № 3. P. 349–356.
 50. Diaz Ramos M., Schaub H. Kinematic Steering Law for Conically Constrained Torque-Limited Spacecraft Attitude Control // J. Guid. Control. Dyn. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2018. Vol. 41, № 9. P. 1990–2001.
 51. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 20. С. 31.
 52. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Влияние возмущений на точность стабилизации спутника ДЗЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. № 18. С. 31.
 53. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение опорного углового движения для обеспечения разгрузки маховиков // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 78. С. 32.
 54. Mashtakov Y.V., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. Study of the disturbances effect on small satellite route tracking accuracy // Acta Astronaut. 2016. Vol. 129. P. 22–31.
 55. Mashtakov Y.V., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Usage of solar and gravitational torques for reaction wheels desaturation // Proceedings of the 68th International Astronautical Congress, Adelaide, Australia. 2017. P. 6888–6896.
 56. Mashtakov Y.V., Tkachev S.S., Ovchinnikov M.Y. Fuelless Means of Reaction Wheels Desaturation // Adv. Astronaut. Sci. 2017. Vol. 161. P. 903–921.
 57. Mashtakov Y.V. et al. Lyapunov based attitude control algorithm for slew maneuvers with restrictions // Adv. Astronaut. Sci. 2018. Vol. 163. P. 355–364.
 58. Mashtakov Y., Tkachev S., Ovchinnikov M. Use of External Torques for Desaturation of Reaction Wheels // J. Guid. Control. Dyn. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2018. P. 1663–1674.
 59. Tsiotras P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. 1994. P. 316–321.
 60. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
 61. Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем //

- Итоги науки и техники. Общая механика. 1983. Т. 6. С. 132.
62. Ovchinnikov M.Y. et al. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // Acta Astronaut. Elsevier, 2014. Vol. 93. P. 23–33.
 63. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Изд. 2-е. М.: УРСС, 2004. 496 с.
 64. Verhulst F. Nonlinear differential equations and dynamical systems. Springer Science & Business Media, 2006.
 65. ТаблетСат Аврора [Электронный ресурс]. URL:
<http://sputnix.ru/ru/o-nas/novosti/pervyj-rossijskij-tabletsat-gotov-k-poletu>
(дата доступа: 18.12.2018).
 66. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 604 p.
 67. Cluster II [Электронный ресурс]. URL:
http://m.esa.int/Our_Activities/Operations/Cluster_II_operations (дата доступа: 20.12.2018).
 68. Magnetospheric Multiscale [Электронный ресурс]. URL: <https://mms.gsfc.nasa.gov/>
(дата доступа: 20.12.2018).
 69. Fliegel H.F., Gallini T.E., Swift E.R. Global Positioning System Radiation Force Model for geodetic applications // J. Geophys. Res. 1992. Vol. 97, № B1. P. 559.
 70. Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.

Приложение А. Решение минимизационной задачи

Будем рассматривать следующую минимизационную задачу

$$f \sin(\varphi + \psi) + \theta(g \sin(\varphi) - h \sin(\psi)) \rightarrow \min_{\psi, \theta, \varphi}, \quad (\text{A.1})$$

$$-\theta_{max} \leq \theta \leq \theta_{max}.$$

Метод поиска минимума существенно будет зависеть от параметров f, g, h , поэтому начинать решение поставленной задачи следует с некоторых частных случаев. Все они разобраны в таблице 1, где представлены результаты как по значению переменных, так и по величине искомого функционала.

Нерассмотренными остались два случая. Первый из них тривиален: когда все параметры нулевые – функционал обращается в тождественный нуль. Приступим теперь к рассмотрению случая, когда все представленные параметры ненулевые.

Прежде чем заняться поиском точного решения, отметим, что можно всегда выбрать значения переменных таким образом, чтобы в рамках используемой модели происходила разгрузка маховиков. В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$\varphi + \psi = -\text{sign}(f) \frac{\pi}{2}.$$

Тогда функционал принимает вид

$$-|f| + \theta(-g \text{sign}(f) \cos(\psi) - h \sin(\psi)) = -|f| + \theta \sqrt{g^2 + h^2} \sin(\psi + \gamma_0),$$

$$\sin(\gamma_0) = \frac{-g \text{sign}(f)}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}}.$$

Следовательно, при

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \gamma_0, \quad \theta = \theta_{max}, \quad \varphi = (1 - \text{sign}(f)) \frac{\pi}{2} + \gamma_0 \quad (\text{A.2})$$

функционал принимает значение

$$-|f| - \theta_{max} \sqrt{g^2 + h^2}.$$

Это значение, безусловно, не является оптимальным, однако показывает, что всегда можно подобрать ориентацию таким образом, чтобы минимизируемая функция была отрицательна.

Таблица А.1. Решение при различных вариантах параметров

Величины параметров	φ_{opt}	θ_{opt}	ψ_{opt}	Значение функционала
$f = 0, g = 0, h \neq 0$	произвольно	θ_{max}	$\text{sign}(h) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max} h $
	произвольно	$-\theta_{max}$	$-\text{sign}(h) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max} h $
$f = 0, g \neq 0, h = 0$	$-\text{sign}(g) \frac{\pi}{2}$	θ_{max}	произвольно	$-\theta_{max} g $
	$\text{sign}(g) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max}$	произвольно	$-\theta_{max} g $
$f = 0, g \neq 0, h \neq 0$	$-\text{sign}(g) \frac{\pi}{2}$	θ_{max}	$\text{sign}(h) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max} (g + h)$
	$\text{sign}(g) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max}$	$-\text{sign}(h) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max} (g + h)$
$f \neq 0, g = 0, h = 0$	произвольно	произвольно	$-\text{sign}(f) \frac{\pi}{2} - \varphi_{opt}$	$- f $
$f \neq 0, g = 0, h \neq 0$	$-\text{sign}(f) \frac{\pi}{2} - \psi_{opt}$	θ_{max}	$\text{sign}(h) \frac{\pi}{2}$	$- f - \theta_{max} h $
	$-\text{sign}(f) \frac{\pi}{2} - \psi_{opt}$	$-\theta_{max}$	$-\text{sign}(h) \frac{\pi}{2}$	$- f - \theta_{max} h $
$f \neq 0, g \neq 0, h = 0$	$-\text{sign}(g) \frac{\pi}{2}$	θ_{max}	$-\text{sign}(f) \frac{\pi}{2} - \varphi_{opt}$	$- f - \theta_{max} g $
	$\text{sign}(g) \frac{\pi}{2}$	$-\theta_{max}$	$-\text{sign}(f) \frac{\pi}{2} - \varphi_{opt}$	$- f - \theta_{max} g $

А.1. Поиск решений во внутренней области

Будем искать решение внутри допустимой области, т.е. $|\theta| < \theta_{max}$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \\ g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) = 0, \\ f \cos(\varphi + \psi) + \theta g \cos(\varphi) = 0, \\ f \cos(\varphi + \psi) - \theta h \cos(\psi) = 0.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Пусть $\theta = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \psi) = 0, \\ g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) = 0.\end{aligned}$$

Соответствующее решение принимает вид:

$$\psi = \pi n - \gamma_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi(k - n) + \gamma_0, \quad \sin(\gamma_0) = \frac{g(-1)^k}{\sqrt{g^2 + h^2}}, \quad \cos(\gamma_0) = \frac{-h}{\sqrt{g^2 + h^2}},$$

где $k, n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что в рассматриваемом случае функционал (А.1) будет зависеть лишь от суммы ψ и φ , а его минимум будет достигаться при $\psi + \varphi = -\text{sign}(f) \frac{\pi}{2}$ и будет равен $-|f|$.

Пусть теперь $\theta \neq 0$. Тогда следствием системы (А.3)

$$\begin{aligned}g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) = 0, \\ g \cos(\varphi) + h \cos(\psi) = 0.\end{aligned}$$

Возводя каждое из них в квадрат и складывая, получаем

$$g^2 + h^2 + 2gh \cos(\varphi + \psi) = 0.$$

Помимо этого, умножим второе уравнение на $\sin(\varphi)$, первое – на $-\cos(\varphi)$ и сложим:

$$\sin(\varphi + \psi) = 0.$$

Отсюда следует, что решение будет возможно лишь при $|g| = |h|$. В этом случае можно получить следующие следствия:

$$\varphi + \psi = \begin{cases} \pi + 2\pi k, & \text{при } g = h \\ 2\pi k, & \text{при } g = -h \end{cases}$$

Этого уже достаточно, чтобы показать, что значение функционала на решении будет равно нулю, что заведомо не лучше значения функционала при выборе параметров (А.2). Таким образом, внутри области допустимых значений нет глобально оптимального решения, а есть только локальные минимумы.

А.2. Поиск решений на границе допустимой области

Рассмотрим случай, когда решение находится на границе допустимой области, т.е. $|\theta| = \theta_{max}$. Система уравнений для поиска минимума переписывается в виде

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 0, \\ g \sin(\varphi) - h \sin(\psi) - \lambda_1 &= 0, \\ f \cos(\varphi + \psi) + \theta^* g \cos(\varphi) &= 0, \\ f \cos(\varphi + \psi) - \theta^* h \cos(\psi) &= 0, \end{aligned} \tag{A.4}$$

где $\theta^* = \theta_{max}$ или $\theta^* = -\theta_{max}$. Следовательно,

$$\cos(\varphi) = -\frac{h}{g} \cos(\psi), \quad \sin(\varphi) = \pm \sqrt{1 - \frac{h^2}{g^2} \cos^2(\psi)}.$$

Раскроем косинус суммы углов в третьем уравнении и используем полученные выражения:

$$f \left(-\frac{h}{g} \cos^2(\psi) \mp \sin(\psi) \sqrt{1 - \frac{h^2}{g^2} \cos^2(\psi)} \right) = \theta^* h \cos(\psi).$$

Перенесем первое слагаемое в правую часть и возведем обе части в квадрат. После несложных выкладок итоговое уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\cos^3(\psi) + \frac{1}{2} \cos^2(\psi) \left(\frac{g\theta^*}{f} + \frac{f}{g\theta^*} + \frac{fg}{h^2\theta^*} \right) - \frac{fg}{2h^2\theta^*} = 0. \tag{A.5}$$

Решение этого уравнения довольно громоздко, хотя и может быть найдено в явном виде с использованием формулы Кардано.

Покажем, что у этого кубического уравнения относительно косинуса всегда будет по крайней мере одно решение, по модулю не превышающее единицы. Введем обозначения

$$\beta = \frac{fg}{2h^2\theta^*}, \quad \alpha = \frac{fg}{h^2\theta^*} \left(\left(\frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} + 1 \right), \quad x = \cos(\psi).$$

Тогда это уравнение переписывается в виде

$$q(x) = \beta, \quad q(x) = x^3 + \frac{1}{2} \alpha x^2.$$

График $q(x)$ для некоторых значений α приведен на рис. А.1.

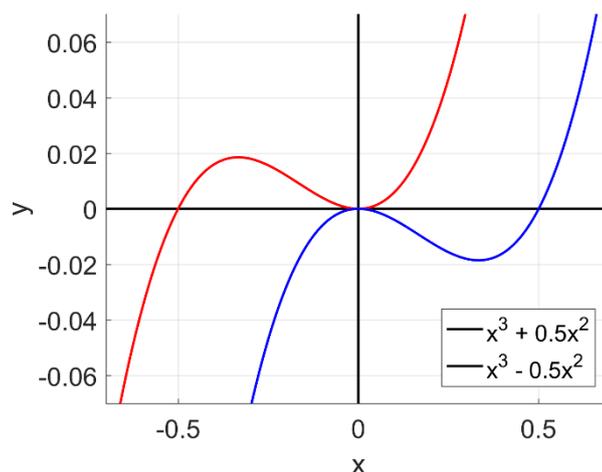


Рис. А.1. График функции при различных значениях параметра

Осталось показать, что β принадлежит области значений функции $q(x)$ на отрезке $[-1,1]$.

Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Тогда у $q(x)$ будет две точки экстремума

$$q(0) = 0, \quad q\left(-\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{1}{54}\alpha^3.$$

При этом $x=0$ является точкой локального минимума, а $x=-3^{-1}\alpha$ – точкой локального максимума. Очевидно, что область значений $q(x)$ будет представлять собой

$$\text{Im}_{-1 \leq x \leq 1} q(x) = \begin{cases} \left[\min\left(0, -1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right), \max\left(\frac{1}{54}\alpha^3, -1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right) \right], & 0 < \alpha \leq 3 \\ \left[\min\left(0, -1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right), \max\left(-1 + \frac{1}{2}\alpha, 1 + \frac{1}{2}\alpha\right) \right], & \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Легко видеть, что это выражение упрощается и приводится к виду

$$\text{Im}_{-1 \leq x \leq 1} q(x) = \left[\min\left(-1 + \frac{1}{2}\alpha, 0\right), 1 + \frac{1}{2}\alpha \right], \quad \alpha > 0.$$

Аналогичные рассуждения для случая $\alpha < 0$ приводят к

$$\text{Im}_{-1 \leq x \leq 1} q(x) = \left[-1 + \frac{1}{2}\alpha, \max\left(1 + \frac{1}{2}\alpha, 0\right) \right], \quad \alpha < 0.$$

Учтем, что α и β одного и того же знака, и помимо этого их связывает соотношение

$$\alpha = 2\beta \left(1 + \left(\frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} \right).$$

Следовательно, достаточно лишь проверить

$$\beta \leq \beta \left(1 + \left(\frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} \right) + 1, \quad \beta \geq 0,$$

$$\beta \geq \beta \left(1 + \left(\frac{h\theta^*}{f} \right)^2 + \frac{h^2}{g^2} \right) - 1, \quad \beta < 0,$$

которые с очевидностью выполняются. Таким образом, мы показали, что у исходного кубического уравнения относительно $\cos(\psi)$ всегда будет действительное решение, не превышающее по модулю единицы.

Отметим также, что каждому действительному решению кубического уравнения, не превышающему по модулю единицы, соответствуют четыре решения (по модулю 2π) исходной системы (A.4), каждое из которых является точкой экстремума минимизируемой функции (A.1). Помимо этого, минимизируемая функция обладает симметрией, а именно: при одновременной замене θ на $-\theta$ и сдвиге φ, ψ на угол π значение этой функции не изменится, а значит, достаточно найти ее минимум лишь для $\theta = \theta_{max}$.