

Федеральное государственное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук»

*На правах рукописи*

Охитина Анна Сергеевна

**ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХОСНОГО МАГНИТНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА РОЯ ЧАСТИЦ**

Специальность 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент  
С.С. Ткачев

Москва – 2023

## Оглавление

Введение .....	4
Глава 1. Построение алгоритма трехосного магнитного управления КА с МСО .....	17
1.1. Постановка задачи и системы координат.....	17
1.2. Модели внешних возмущений .....	20
1.2.1. Гравитационный момент .....	20
1.2.2. Аэродинамический момент .....	20
1.3. Модельный управляющий момент .....	22
1.4. Магнитное управление.....	23
1.4.1. Магнитный момент .....	23
1.4.2. Модели геомагнитного поля .....	24
1.5. Поиск коэффициентов управления на основе теории Флоке.....	26
1.5.1. Положение равновесия или стационарное движение.....	27
1.5.2. Произвольная ориентация .....	28
1.6. Построение вспомогательного движения .....	29
1.7. Метод роя частиц.....	34
1.8. Применение метода роя для поиска опорного движения.....	41
1.8.1. Формализация задачи.....	41
1.8.2. Границы области поиска.....	42
1.8.3. Численный пример .....	46
1.9. Применение метода роя для поиска коэффициентов управления.....	48
1.9.1. Формализация задачи.....	48
1.9.2. Численный пример .....	50
Выводы к главе 1 .....	52
Глава 2. Построение управления с учетом возмущений .....	53
2.1. Постановка задачи .....	53
2.2. Учет ошибок моделей.....	54
2.2.1. Выбор модели геомагнитного поля .....	54
2.2.2. Формализация задачи.....	57
2.2.3. «Склейка» опорных движений.....	59

2.2.4. Численный пример .....	61
2.3. Учет ошибок знания моделей внешней среды и тензора инерции КА ...	64
2.3.1. «Сдвиг» коэффициентов управления .....	64
2.3.2. Численный пример .....	67
Выводы к главе 2 .....	70
Глава 3. Применение разработанной методики к задачам ориентации в ИСК и ОрбСК.....	71
3.1. Общая постановка задачи .....	71
3.2. Анализ влияния ошибки знания тензора инерции КА.....	74
3.3. Орбитальная ориентация .....	77
3.4. «Косая» орбитальная ориентация .....	87
3.5. Инерциальная ориентация .....	93
Выводы к главе 3 .....	99
Заключение.....	100
Список литературы.....	101
Приложения .....	108
А. Явный вид матрицы системы и неоднородного члена для ЦСК.....	108
Б. Явный вид матрицы системы и неоднородного члена для ОпСК .....	109
В. Решение задачи квадратичного программирования для режима орбитальной ориентации .....	112

## Введение

Создание новых и совершенствование существующих подходов к разработке малых космических аппаратов (МКА) в настоящее время является одной из важнейших тенденций развития в космической отрасли. Новейшие достижения в области электроники и технологии изготовления миниатюрных служебных систем космических аппаратов (КА) позволяют использовать МКА в достаточно сложных прикладных и научных задачах наравне с большими аппаратами. Малые КА предоставляют оперативные способы испытания в полете нового оборудования, тестирования новых алгоритмов, инженерных и технологических решений. МКА имеют преимущества перед большими аппаратами, будучи, как правило, менее дорогими в изготовлении и выведении на орбиту посредством попутного запуска. Кроме этого, в настоящее время происходит переход от производства одиночных аппаратов к большим сериям, когда группировка насчитывает сотни идентичных спутников. Это открывает новые возможности, например, для решения задач глобальной навигации (проект «Сфера», [1]), распределенных измерений (Cluster II, [2]), обеспечения связи и широкополосного Интернета (Спутниковая система персональной связи «Гонец», [3], OneWeb, [4]), дистанционного зондирования Земли (AstroBus, [5]). Относительно небольшая стоимость одного МКА (по сравнению с большими аппаратами) и возможность серийного производства позволяет значительно снизить стоимость подобных проектов в целом.

Для выполнения многих прикладных миссий необходимо активное управление ориентацией, поэтому управление угловым движением КА является одной из наиболее важных задач динамики космического полета. В настоящее время для решения многих задач все чаще используются спутники микро- и нанокласса. На их изготовление тратится еще меньше средств за счет меньших размеров и массы, однако из-за этого такие аппараты имеют существенные ограничения как по энерговооруженности, так и по массе и объему, которые

могут быть выделены для служебных систем, таких как системы идентификации и управления ориентацией. Однако зачастую с помощью таких аппаратов решается широкий круг задач, в которых требования к точности ориентации достаточно мягкие – 3-5 градусов. В связи с этим, как правило, в качестве исполнительных органов на таких МКА используется электромагнитная система управления ориентацией, которая обычно состоит из трех взаимно перпендикулярных токовых катушек (электромагнитов). Катушки имеют большое количество витков обмотки на железном сердечнике. При прохождении электрического тока по обмотке катушка обретает свойства магнита и, взаимодействуя с внешним геомагнитным полем, создает управляющий магнитный момент. Малый вес и небольшой размер катушек делает использование электромагнитной системы экономически выгодным. Построение системы управления ориентацией только на основе токовых катушек позволяет значительно снизить расходы миссии в целом, а также обеспечить длительный срок службы аппарата за счет высокой износостойкости магнитных исполнительных органов [6,7].

Активные магнитные системы ориентации использовались с начала космической эры. Первый КА с активным магнитным управлением (Tiros II, [8]) был запущен 23 ноября 1960 г. В настоящее время более половины аппаратов типа CubeSat используют активное магнитное управление ориентацией [9]. Магнитные системы ориентации (МСО) широко используются для решения задач демпфирования угловой скорости [10–15], так как они не расходуют рабочее тело и не накапливают кинетический момент. Однако в более сложных задачах, таких как обеспечение одноосной или трехосной ориентации КА с помощью МСО, применение стандартных подходов к синтезу управления становится затруднительным – с помощью МСО невозможно выдавать управление вдоль вектора геомагнитной индукции, откуда возникает проблема локальной неуправляемости. Магнитная система способна реализовать только перпендикулярный вектору геомагнитной индукции управляющий момент. По

этой причине, если есть возмущающий момент, направленный вдоль вектора геомагнитной индукции, он не может быть скомпенсирован МСО. С течением времени ошибка реализации накапливается и это приводит к ошибкам ориентации в 10-15 градусов, что подтверждается рядом исследований и летными испытаниями [16–18].

В работах [19–22] доказана управляемость системы в целом, так как при движении спутника по орбите направление вектора геомагнитной индукции меняется и со временем становятся доступными все направления. Однако для достижения управляемости на практике требуются значительные усилия. В основном для обхода указанного ограничения алгоритмы управления КА с МСО требуют использования вспомогательных элементов управления, с помощью которых можно создать управляющий момент вдоль вектора геомагнитной индукции. В ряде работ рассматриваются подходы к построению некоторого полностью управляемого МСО режима движения, затем строятся соответствующие законы управления и обосновывается их работоспособность. В работах [23,24] предложено использовать МСО в совокупности с электродинамическим эффектом от воздействия сил Лоренца. В [25] исследуется возможность построения трехосного управления с использованием скобок Ли. В работах [26–30] приведены законы управления КА с МСО, обеспечивающие одноосную ориентацию при помощи алгоритма стабилизации собственным вращением. Показано, что одной токовой катушки, перпендикулярной оси вращения, достаточно для стабилизации спутника в инерциальном пространстве. При этом асимптотическую устойчивость такое управление обеспечивает только при закрутке вокруг главной оси КА с максимальной величиной момента инерции. МСО также используется в качестве дополнительного элемента управления – в работах [31–33] гравитационная стабилизация МКА обеспечивается за счет совместного использования гравитационного и магнитного моментов.

В настоящее время активно исследуется проблема обеспечения трехосной ориентации КА только с помощью магнитных исполнительных органов [17,18,20,34–40]. Основным подходом здесь является использование закона управления, построенного на основе функции Ляпунова. В этом случае необходимо подбирать и настраивать коэффициенты усиления управления. Были предложены различные методики подбора коэффициентов [29,41–45], однако даже самым лучшим образом подобранные коэффициенты управления не обеспечивают полное и эффективное подавление возмущений. Такое управление особенно чувствительно к ошибкам знания тензора инерции КА, что приводит к значительному ухудшению точности итоговой ориентации – до 15-20 градусов. Другой подход состоит в том, чтобы строить заранее учитывающее ограничения управление с использованием скользящего режима, предложенного в [46]. Такой режим углового движения КА, когда ориентация и угловая скорость удерживаются управлением на специальной поверхности в фазовом пространстве, на которой проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции равна нулю, предложен в [47–50]. Также для КА с МСО используются различные оптимизационные алгоритмы для построения управления, учитывающего ограничения: линейно-квадратичный регулятор (ЛКР) [51], управление с прогнозирующими моделями [52,53], и другие более сложные подходы, такие как применение нейронных сетей [54] и алгоритмы прямой оптимизации [45], не требующие вычисления градиента целевой функции. Последние, как и классические методы оптимизации, позволяют учитывать ограничения, а результаты моделирования [45] показывают эффективность управления при парировании возмущений неизвестной природы. Однако реализация найденного таким способом управления на борту КА достаточно проблематична из-за существенных вычислительных затрат.

В диссертационной работе для достижения одновременного результата по обеспечению трехосной магнитной ориентации, улучшению точности отслеживания заданного режима и уменьшению общей сложности алгоритма без

ущерба для точности, предлагается использование комбинации классического подхода к построению управления (управление с обратной связью) и набирающего популярность адаптивного метода, а именно прямого метода глобальной оптимизации – метода роя частиц (particle swarm optimization, PSO).

Этот метод предложен в [55] и уже широко применяется во многих областях науки [56], в том числе и различных задачах динамики космического полета [57] – для обеспечения оптимальной по времени переориентации КА [58,59], в задачах ДЗЗ для оптимального разбиения снимаемой области между спутниками в группировке КА с целью исключения пересечения областей съемки для разных аппаратов [60], алгоритм PSO в [61] применяется для планирования оптимальной траектории движения космического робота, в [62] PSO применяется для нахождения оптимальных параметров управления с использованием скользящего режима и управления на основе ЛКР. Преимуществом использования именно прямого метода является то, что не требуется дифференцируемости целевой функции и, более того, представления ее в аналитическом виде.

В диссертационной работе для обхода ограничения направления управляющего магнитного момента и повышения точности ориентации предлагается алгоритм построения в окрестности целевой ориентации специального опорного углового движения, на котором проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции минимальна. Поддержание опорного движения, в том числе компенсация возмущений, требует определенного управляющего момента в зависимости от положения спутника на орбите, его ориентации и момента времени. Правильным образом выбранное опорное движение может обеспечить относительно небольшую компоненту управляющего момента вдоль вектора геомагнитной индукции, что позволит поддерживать этот режим ориентации с помощью только МСО с достаточно хорошей точностью. Стабилизация спутника на опорном движении реализуется с помощью управления на основе функции Ляпунова, обеспечивающего



асимптотическую устойчивость. Поиск оптимальных параметров опорного движения и оптимальных в некотором смысле коэффициентов усиления управления в диссертационной работе осуществлен с помощью метода роя частиц. В итоге спутник стабилизируется в малой окрестности целевой ориентации с точностью 2-5 градусов вместо стабилизации непосредственно в целевой ориентации с невысокой точностью 10-15 градусов, как в указанных ранее подходах.

**Целью** настоящей работы является реализация трехосного управления ориентацией КА с МСО и повышение точности ориентации, что позволит расширить круг задач, решаемых малыми космическими аппаратами микро- и нанокласса.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**:

1. Разработка методики построения алгоритма управления, обеспечивающего трехосную ориентацию с помощью электромагнитных управляющих элементов.
2. Анализ влияния возмущений на качество работы системы управления ориентацией и учет методических ошибок.
3. Адаптация методики к задачам трехосной ориентации в следующих режимах движения малых КА:
  - орбитальная ориентация,
  - «косая» орбитальная ориентация (повернутая на заданный постоянный угол относительно орбитальной ориентации),
  - инерциальная ориентация.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Разработана, обоснована и реализована методика построения закона управления, обеспечивающего трехосную магнитную ориентацию, состоящая из трех частей:
  - поиск оптимальных параметров дипольной модели, описывающей геомагнитное поле на заданном временном интервале,

- построение опорного движения в окрестности целевого режима ориентации,
  - построение закона управления и поиск коэффициентов управления.
2. Предложен подход к учету и уменьшению влияния возмущений, действующих на аппарат, при построении опорного движения. Подход включает в себя
- поиск оптимальных параметров дипольной модели,
  - алгоритм «сдвига» коэффициентов управления,
  - процедуру «склейки» опорных движений в момент переключения между интервалами.

Показана работоспособность методики при постоянно действующих возмущениях.

3. С использованием разработанной методики реализованы алгоритмы управления для трех типовых режимов движения малого космического аппарата:
- орбитальная ориентация,
  - «косая» орбитальная ориентация,
  - инерциальная ориентация.

Итоговая точность улучшена в несколько раз по сравнению с известными подходами.

**Научная новизна** проведенного в работе исследования заключается в следующем:

1. Разработана методика построения алгоритма трехосного магнитного управления, содержащая процедуру построения опорного движения, при реализации которого минимизируется проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции и таким образом улучшается итоговая точность ориентации (относительно заданной целевой ориентации).
2. Учитываются возмущения при синтезе управления путем применения вспомогательных процедур:

- различие моделей геомагнитного поля на этапе построения опорного движения и этапе численного моделирования учитывается с помощью подбора оптимальных на некотором временном интервале параметров дипольной модели,
  - влияние ошибок знания тензора инерции КА и ошибок знания модели взаимодействия КА с атмосферой Земли на итоговую точность ориентации уменьшается за счет процедуры «сдвига» коэффициентов управления вглубь области устойчивости.
3. Формализованы (предложены соответствующие целевые функции) и решены с помощью метода роя частиц задачи поиска оптимальных параметров опорного движения, оптимальных коэффициентов управления, а также оптимальных параметров дипольной модели.
  4. Рассмотрены три типовых режима ориентации КА – орбитальная, «косая» орбитальная и инерциальная ориентация, для каждого режима проведен численный анализ влияния ошибки знания тензора инерции на итоговую точность ориентации для различных наборов целевых функций, что позволяет определить наиболее «устойчивые к возмущениям» наборы в каждом случае.

**Практическая значимость** полученных результатов исследования состоит в том, что

1. В работе разработан подход к синтезу управления КА с помощью МСО, который позволяет решить задачу трехосной стабилизации для типовых ориентаций без необходимости применения других органов управления.
2. Реализация предложенного метода не требует значительных временных затрат и вычислительных мощностей, осуществляется на персональном компьютере (на бортовой компьютер необходимо загружать только параметры управления каждые несколько витков), а также позволяет учитывать изменения (уточнять модели и возмущения в управлении) для корректировки управления.

### 3. Увеличение точности ориентации достигается за счет

- построения вспомогательного управляемого МСО опорного движения,
- поиска оптимальных параметров дипольной модели,
- использования закона управления, стабилизирующего заданные режимы углового движения,
- формализации задачи (выбора целевых функций).

Итоговая точность ориентации улучшена в несколько раз по сравнению с известными подходами.

**Апробация результатов исследования.** Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», 3-5 июня 2020 г, Москва, ИПУ РАН, Россия.
2. 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, 23-29 ноября 2020 г, Москва, Россия.
3. XLV Академические чтения по космонавтике, 30 марта – 2 апреля 2021 г, Москва, Россия.
4. 72-й Международный Астронавтический Конгресс (72nd International Astronautical Congress, IAC), 25-29 октября 2021, Дубай, ОАЭ.
5. XLVI Академические чтения по космонавтике, 25-28 января 2022 г, Москва, Россия.
6. XLVII Академические чтения по космонавтике, 24-27 января 2023 г, Москва, Россия.
7. Конференция молодых ученых ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 24 марта 2023 г, Москва, Россия.

Результаты работы также обсуждались на следующих научных семинарах:

1. Семинар «Динамика космических систем» отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под рук. М.Ю. Овчинникова).

2. Семинар по прикладной механике и управлению НИИ механики МГУ (под рук. В.В. Александрова, Н.А. Парусникова, Ю.В. Болотина).
3. Научный семинар ИПМех РАН «Теория управления и динамика систем» (под рук. академика Ф.Л. Черноусько).
4. Научный семинар «Механика и управление движением космических аппаратов» Баллистического центра ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под рук. А.Г. Тучина).
5. Семинар отдела механики ФИЦ «Информатика и управление» РАН (под рук. проф. С.Я. Степанова).
6. Семинар «Динамические системы и механика» МАИ (под рук. Б.С. Бардина, П.С. Красильникова).
7. Научный семинар АО «Корпорация «ВНИИЭМ» «Вопросы электромеханики»» (под рук. В.Я. Гечи).
8. Научный семинар кафедры теоретической механики МФТИ (под рук. С.В. Соколова).
9. Семинар отдела №5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (под рук. проф. Ю.Ф. Голубева).

### **Публикации**

Количество публикаций в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в которых излагаются основные научные результаты диссертации – **6**. Из них **4** – статьи в журналах, индексируемых в базах данных Scopus и/или Web of Science, **2** – конференционные статьи в сборниках трудов конференций, индексируемых в базах данных Scopus и/или Web of Science:

1. A. Okhitina, S. Tkachev, D. Roldugin, Comparative cost functions analysis in the construction of a reference angular motion implemented by magnetorquers, *Aerospace*, 2023, 10(5), paper 468. WoS, Scopus, Q1.
2. A. Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev, M. Ovchinnikov, Academy transaction note “closed form solution for a minimum deviation magnetically controllable

- satellite angular trajectory”, Acta Astronautica, 2023, 203, p. 60–64. WoS, Scopus, Q1.
3. A. Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev, Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion, Acta Astronautica, 2022, 195, p. 86–97. WoS, Scopus, Q1.
  4. A. Guerman, D. Ivanov, D. Roldugin, S. Tkachev, and A. Okhitina. Orbital and Angular Dynamics Analysis of the Small Satellite SAR Mission INFANTE, Cosmic Research, 2020, 58(3), p. 206–217. WoS, Q4.
  5. A. Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev. Magnetically controllable attitude trajectory constructed using the particle swarm optimization method // 72nd International Astronautical Congress (IAC), 2021, 9 p. Scopus (*конф.*).
  6. A. Okhitina, D. Roldugin, S. Tkachev. Biologically inspired optimization algorithm in satellite attitude control problems // 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), 2020, p. 1-3. WoS (*конф.*).

**Личный вклад автора.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, некоторые методические аспекты и результаты исследований обсуждались с научным руководителем С.С. Ткачевым и соавторами.

Диссертационная работа **соответствует паспорту специальности (ПС) 1.1.7 «Теоретическая механика, динамика машин»** по ряду направлений. Работа посвящена построению законов управления механической системой, в качестве которой выступает КА с МСО. При анализе уравнений движения используются методы аналитической механики (направление 1 ПС), механики твердого тела (направление 6 ПС), динамики космических аппаратов (направление 10 ПС). Возможность применения предложенного стабилизирующего закона управления КА опирается на методы теории устойчивости (направление 2 ПС). Для верификации моделей и алгоритмов

управления проводилось математическое и компьютерное моделирование кинематики и динамики (направление 14 ПС) КА с МСО.

**Объем** диссертационной работы составляет 116 страниц. Работа включает в себя 31 рисунок и 15 таблиц (включая 2 таблицы в Приложении). Список литературы содержит 90 наименований. Диссертационная работа имеет следующую **структуру**. Она состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения, являющегося неотъемлемой частью диссертационной работы.

Во **введении** обосновывается актуальность и практическая значимость работы, а также проводится обзор существующих проблем и подходов к решению поставленных задач.

В **первой главе** рассматривается задача обеспечения трехосной ориентации КА с помощью МСО. В окрестности заданного положения строится опорное движение КА, на котором проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции минимальна. Предлагается формализация задачи поиска оптимальных параметров опорного движения и ее решение с помощью метода роя частиц. Затем строится управление, обеспечивающее стабилизацию КА на найденном движении, и производится численное моделирование для тестирования полученного алгоритма.

**Вторая глава** посвящена адаптации методики построения управляемого МСО движения КА к возмущенной задаче. Рассматривается влияние неточности знания модели геомагнитного поля, отличие тензора инерции от его расчетных значений и ошибки знания взаимодействия КА с атмосферой Земли. Предлагаются вспомогательные процедуры, позволяющие уменьшить отклонение от опорного движения, возникающее из-за возмущений. Суть вспомогательных процедур состоит в том, что интервал моделирования разбивается на несколько частей, на каждой из которых проводится поиск оптимальных параметров дипольной модели, которая описывает геомагнитное поле на заданном временном интервале точнее, чем модель прямого диполя;

обеспечивается непрерывный переход между опорными движениями в момент переключения на следующий временной интервал; коэффициенты управления адаптируются к возмущенной задаче. Проводится численное моделирование, демонстрирующее целесообразность применения предложенных процедур для улучшения итоговой точности ориентации в возмущенной задаче.

В **третьей главе** разработанная методика применяется к конкретным режимам ориентации КА – орбитальной, «косой» орбитальной и инерциальной ориентации. Для каждого режима проводится масштабное численное исследование и численное моделирование, позволяющее уменьшить ошибки отслеживания опорного движения за счет предварительного выбора набора целевых функций для того, чтобы построенное опорное движение было менее чувствительно к возмущениям в конкретном режиме ориентации, и сохранялась асимптотическая устойчивость.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

Наиболее объемные выкладки вынесены в **Приложения**.

Решенные в диссертационной работе задачи отвечают текущим запросам отечественной космической промышленности, соответствуют критическим технологиям: транспортные и космические системы, технологии создания ракетно-космической и транспортной техники нового поколения. Полученные результаты использовались в рамках выполнения госзадания Министерства науки и высшего образования РФ темы FFMN-2022-0006, грантов РФФИ №17-71-20117, РФФИ №22-71-10009, а также контрактов с ООО «Спутниковые инновационные космические системы».



# **Глава 1. Построение алгоритма трехосного магнитного управления КА с МСО**

В настоящей главе рассматривается управляемое с помощью магнитной системы ориентации (МСО) угловое движение космического аппарата (КА). Алгоритм построения управления состоит из двух последовательных этапов. Первый этап включает в себя построение вспомогательного движения, а на втором этапе проводится поиск коэффициентов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость. При синтезе закона управления используется теорема Барбашина-Красовского, для поиска оптимальных значений коэффициентов управления применяется метод глобальной оптимизации – метод роя частиц. Он же применяется и для нахождения оптимальных значений параметров вспомогательного движения.

Глава 1 построена следующим образом. Раздел 1.1 посвящен постановке задачи и введению систем координат, используемых при описании движения КА с МСО. В разделе 1.2 описываются используемые модели внешних возмущений. Раздел 1.3 посвящен выводу требуемого для обеспечения трехосной ориентации управляющего момента, а в разделе 1.4 приводится описание реализации требуемого управления магнитной системой. Далее в разделах 1.5 и 1.6 обозначаются возникающие при этом проблемы и приводятся способы их решения. В разделе 1.7 описывается метод глобальной оптимизации – метод роя частиц, который используется при решении задач оптимизации, поставленных в разделе 1.6. В разделах 1.8 и 1.9 приведены результаты, полученные при применении разработанного алгоритма к задаче орбитальной ориентации.

## **1.1. Постановка задачи и системы координат**

В работе рассматривается малый (около 10 кг) КА с МСО, находящийся на низкой околоземной орбите (400-1000 км, класс круговых кеплеровых орбит). На

КА действует гравитационный и аэродинамический моменты, а также внешние возмущения случайной природы. Необходимо обеспечить трехосную ориентацию КА с помощью магнитной системы управления в некотором заданном положении (например, в орбитальной ориентации).

Рассматриваются следующие системы координат (Рис. 1):

1.  $OZ_1Z_2Z_3$  – инерциальная система координат *J2000* (ИСК) с центром в центре масс Земли, ось  $OZ_3$  совпадает с осью вращения Земли (направлена по вектору угловой скорости), ось  $OZ_1$  направлена в точку весеннего равноденствия эпохи 2000.0, а ось  $OZ_2$  дополняет систему до правой тройки.
2.  $OX_1X_2X_3$  – целевая система координат (ЦСК), определяется требуемым режимом движения, например, это может быть орбитальная система координат (ОрбСК), которая вводится следующим образом: ось  $OX_3$  направлена вдоль радиус-вектора КА,  $OX_2$  совпадает с нормалью к орбите спутника, а первая ось  $OX_1$  дополняет систему до правой тройки.
3.  $Ox_1x_2x_3$  – связанная с КА система координат (ССК), оси которой суть главные центральные оси инерции КА, центр ССК совпадает с центром масс КА.

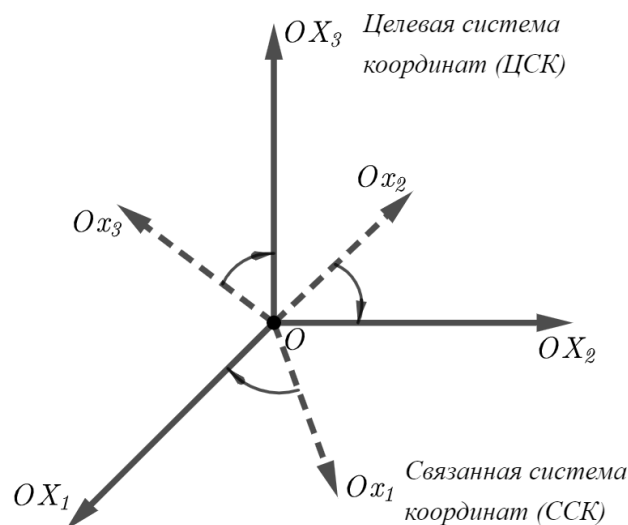


Рис. 1. Системы координат

Вводятся обозначения для соответствующих матриц перехода:

$$\text{ИСК} \xrightarrow{\mathbf{A}} \text{ССК}, \quad \text{ЦСК} \xrightarrow{\mathbf{D}} \text{ССК}.$$

Положение ССК относительно ЦСК задается углами ориентации  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (последовательность поворотов 2-3-1, Рис. 2).

Тогда соответствующая матрица перехода имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Задача системы управления – совместить оси ССК с осями ЦСК, то есть обеспечить  $\mathbf{D}=\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица, и равенство нулю угловой скорости ССК относительно ЦСК.

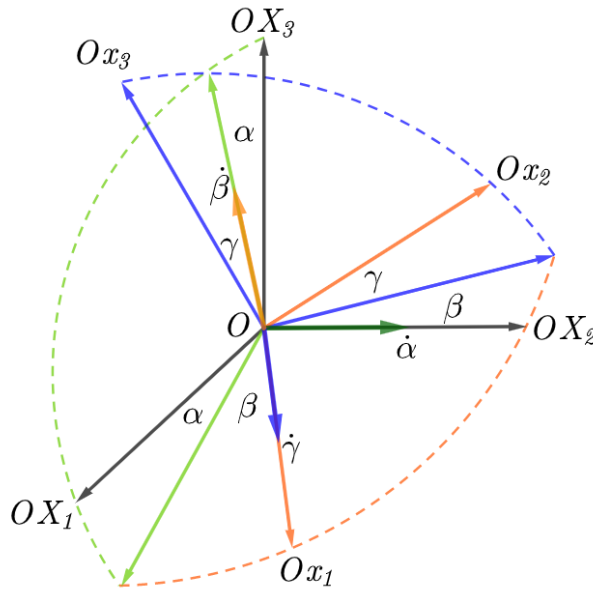


Рис. 2. Углы ориентации, последовательность поворотов 2-3-1

Для описания углового движения КА используются динамические уравнения Эйлера (в ССК) и соотношения Пуассона:

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} = -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{aero} + \mathbf{M}_{dist}, \\ \dot{\mathbf{A}} = -[\boldsymbol{\omega}_{abs}]_{\times} \mathbf{A}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{abs}$  – абсолютная угловая скорость КА,  $\mathbf{A}$  – матрица перехода из ИСК в ССК (переводит вектор  $\mathbf{r}_{\text{ИСК}}$ , заданный в ИСК, в вектор в ССК  $\mathbf{r}_{\text{ССК}}$  следующим

образом:  $\mathbf{r}_{\text{ССК}} = \mathbf{A}\mathbf{r}_{\text{ИСК}}$ ),  $\mathbf{J}$  – тензор инерции КА,  $\mathbf{M}_{\text{grav}}$  – гравитационный момент,  $\mathbf{M}_{\text{aero}}$  – аэродинамический момент,  $\mathbf{M}_{\text{ctrl}}$  – управляющий момент,  $\mathbf{M}_{\text{dist}}$  – внешний возмущающий момент случайной природы. Обозначение  $[\boldsymbol{\omega}_{\text{abs}}]_{\times}$  здесь и далее задает матрицу векторного произведения, составленную следующим образом из компонент соответствующего вектора  $\boldsymbol{\omega}_{\text{abs}} = (\omega_{\text{abs},1}, \omega_{\text{abs},2}, \omega_{\text{abs},3})^T$ :

$$[\boldsymbol{\omega}_{\text{abs}}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\text{abs},3} & \omega_{\text{abs},2} \\ \omega_{\text{abs},3} & 0 & -\omega_{\text{abs},1} \\ -\omega_{\text{abs},2} & \omega_{\text{abs},1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

## 1.2. Модели внешних возмущений

### 1.2.1. Гравитационный момент

Рассматривается ньютоновское (центральное) гравитационное поле. Выражение для гравитационного момента имеет вид

$$\mathbf{M}_{\text{grav}} = 3\omega_{\text{orb}}^2 \mathbf{e}_r \times \mathbf{J}\mathbf{e}_r, \quad (4)$$

где  $\omega_{\text{orb}} = \sqrt{\mu/r^3}$  – модуль орбитальной угловой скорости,  $\mu$  – гравитационный параметр,  $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$  – единичный радиус-вектор КА.

### 1.2.2. Аэродинамический момент

Для описания взаимодействия КА с атмосферой используется диффузно-зеркальная модель, предложенная в [63] и рассмотренная в работе [64] для КА в форме параллелепипеда. Аэродинамический момент, действующий на КА, есть сумма моментов, действующих на грани КА, обращенные к набегающему потоку. На каждую грань действует соответствующий аэродинамический момент вида

$$\mathbf{M}_{\text{aero}} = \rho V_0^2 \left( (1-\varepsilon)\mathbf{I}_1 + 2\varepsilon\mathbf{I}_2 + (1-\varepsilon)\frac{\nu}{V_0}\mathbf{I}_3 \right), \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность атмосферы,  $V_0$  – величина скорости набегающего потока, параметр модели  $\varepsilon \approx 0.1$  отвечает за долю молекул воздуха, отраженных зеркально, и  $\nu \approx 0.1V_0$  – параметр, пропорциональный наиболее вероятной тепловой скорости диффузно отраженных молекул. Выражения для величин  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}_3$  имеют следующий вид

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n}) \mathbf{r}_c \times \mathbf{e}_{V_0} \sigma, \quad \mathbf{I}_2 = (\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n})^2 \mathbf{r}_c \times \mathbf{n} \sigma, \quad \mathbf{I}_3 = (\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n}) \mathbf{r}_c \times \mathbf{n} \sigma, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}_c$  – радиус-вектор из центра масс КА в геометрический центр рассматриваемой грани КА,  $\sigma$  – площадь поверхности грани. Вклад в суммарный момент дают только грани, обращенные к набегающему потоку:

$$\mathbf{e}_{V_0}^T \mathbf{n} > 0,$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали соответствующей грани,  $\mathbf{e}_{V_0}$  – единичный вектор скорости потока (Рис. 3).

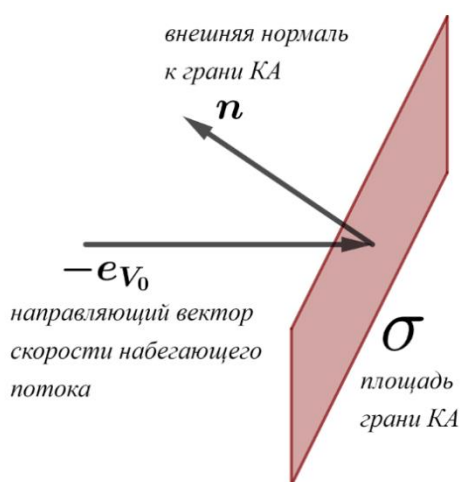


Рис. 3. Грань КА, обращенная к набегающему потоку

Скорость набегающего потока есть разность скорости КА и скорости атмосферы, которая возникает из-за вращения Земли вокруг своей оси:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{V}$  – радиус-вектор и скорость КА соответственно,  $\boldsymbol{\omega}_E$  – угловая скорость вращения Земли,  $|\boldsymbol{\omega}_E| \approx 7.29 \cdot 10^{-5}$  рад/с.

### 1.3. Модельный управляющий момент

Модельное управление, требуемое для обеспечения трехосной ориентации в заданном положении, строится с использованием функции Ляпунова [65–67].

Пусть  $\boldsymbol{\omega}_0$  – угловая скорость ЦСК относительно ИСК, заданная для удобства в проекциях на оси ЦСК,  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$  – угловая скорость ССК относительно ЦСК,  $\mathbf{D}$  – матрица перехода из ЦСК в ССК. Тогда абсолютная угловая скорость КА (угловая скорость ССК относительно ИСК) есть

$$\boldsymbol{\omega}_{abs} = \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad (7)$$

а выражение для производной абсолютной угловой скорости тогда имеет следующий вид

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} = \dot{\mathbf{D}}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}. \quad (8)$$

Уравнения относительного углового движения в невозмущенном случае ( $\mathbf{M}_{dist} = 0$ ) представимы в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_0) - \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{aero} + \mathbf{M}_{ctrl}, \\ \dot{\mathbf{D}} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{D}. \end{cases} \quad (9)$$

На основе [67] кандидат-функция Ляпунова выбирается в виде

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{rel}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{rel} + k_d \left( (1 - d_{11}) + (1 - d_{22}) + (1 - d_{33}) \right), \quad k_d = const > 0,$$

где  $d_{ij}$  – компоненты матрицы  $\mathbf{D}$ ,  $k_d$  – положительный скалярный параметр,  $[k_d] = [\text{Н} \cdot \text{м}]$ .

Для асимптотической устойчивости в этом случае по теореме Барбашина-Красовского [68] достаточно обеспечить неположительность производной функции Ляпунова в силу уравнений движения (9)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\omega}_{rel}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} - k_d \left( \omega_{3,rel} (d_{21} - d_{21}) + \omega_{2,rel} (d_{13} - d_{31}) + \omega_{1,rel} (d_{32} - d_{23}) \right) = \\ &= \boldsymbol{\omega}_{rel}^T \left( \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + k_d \mathbf{S}_d \right) \\ &= \boldsymbol{\omega}_{rel}^T \left( -\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_0) - \mathbf{J}\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{M}_{grav} + \mathbf{M}_{aero} + \mathbf{M}_{ctrl} + k_d \mathbf{S}_d \right) \leq 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{S}_d = (d_{23} - d_{32}, d_{31} - d_{13}, d_{12} - d_{21})^T$ . Введем положительный скалярный параметр  $k_\omega = \text{const} > 0$  так, чтобы

$$\dot{V} = \boldsymbol{\omega}_{rel}^T (-k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel}) \leq 0.$$

Тогда получаем выражение для модельного управляющего момента

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_d \mathbf{S}_d + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{J} \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 - \mathbf{M}_{grav} - \mathbf{M}_{aero}. \quad (10)$$

Динамические уравнения относительного движения в этом случае принимают вид

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = -k_\omega \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_d \mathbf{S}_d. \quad (11)$$

Таким образом, выбрав в качестве коэффициентов управления  $k_\omega$  и  $k_d$  произвольные положительные константы, можно обеспечить асимптотическую устойчивость относительного положения равновесия  $(\mathbf{D} = \mathbf{E}, \boldsymbol{\omega}_{rel} = (0, 0, 0)^T)$ .

## 1.4. Магнитное управление

### 1.4.1. Магнитный момент

Требуемый управляющий момент (10) не всегда может быть полностью реализован с использованием МСО, так как с помощью токовых катушек вдоль вектора геомагнитной индукции невозможно выдать компоненту механического момента (Рис. 4). Магнитный момент имеет следующий вид

$$\mathbf{M}_{magn} = \mathbf{m} \times \mathbf{DB}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{m}$  – дипольный момент КА,  $\mathbf{B}$  – вектор геомагнитной индукции, заданный в проекциях на оси ЦСК.

Опираясь на [34,36,69], получаем связь между требуемым управляющим моментом (10) и реализуемым токовыми катушками моментом

$$\mathbf{M}_{magn} = \mathbf{m} \times \mathbf{DB} = \left( \frac{(\mathbf{DB}) \times \mathbf{M}_{ctrl}}{B^2} \right) \times \mathbf{DB} = \mathbf{M}_{ctrl} - \frac{\mathbf{DB} \left( (\mathbf{DB})^T \mathbf{M}_{ctrl} \right)}{B^2}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{m} = (\mathbf{DB}) \times \mathbf{M}_{ctrl} / B^2$ ,  $B = |\mathbf{B}|$ .

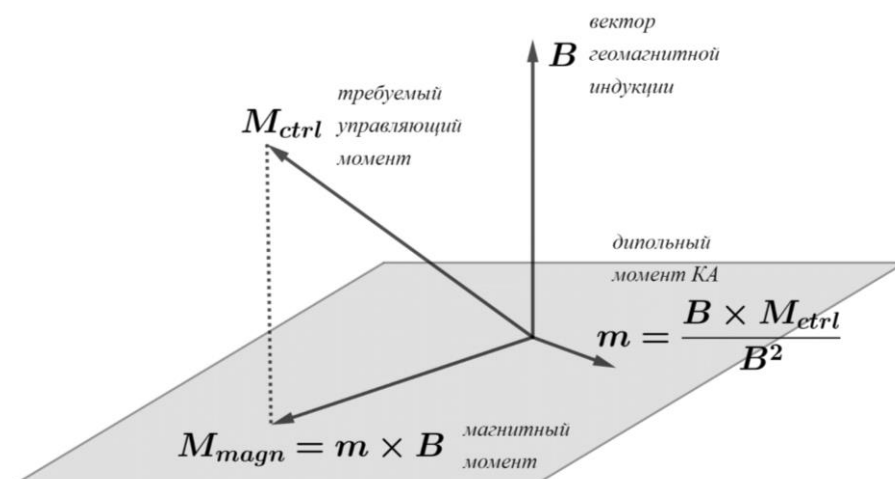


Рис. 4. Магнитный момент  $M_{magn}$  и требуемый управляющий момент  $M_{ctrl}$

При этом в зависимости от конкретных установленных на КА токовых катушек, есть ограничение не только на направление, но и на величину управляющего момента, которая зависит от максимального дипольного момента токовых катушек  $m_{max}$ :

$$|m_i| \leq m_{max}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Второе слагаемое в выражении (13) в общем случае представляет собой возмущение, так как управление не компенсирует его. Уравнение относительного движения в этом случае принимает вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_d\mathbf{S}_d - \frac{\mathbf{DB}\left((\mathbf{DB})^T \mathbf{M}_{ctrl}\right)}{B^2}. \quad (14)$$

Необходимо найти коэффициенты  $k_{\omega}$  и  $k_d$ , обеспечивающие асимптотическую устойчивость, так как гарантии, что подойдут любые положительные коэффициенты, в этом случае уже нет.

#### 1.4.2. Модели геомагнитного поля

В работе на разных этапах рассматриваются несколько моделей для описания геомагнитного поля – модель прямого диполя, модель наклонного диполя и модель IGRF.



Модели прямого и наклонного диполя описываются следующим выражением

$$\mathbf{B} = -B_0 \left( \mathbf{k} - 3 \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (15)$$

где  $B_0 = \mu_e / r^3$ ,  $\mathbf{k}$  – орт оси диполя в ИСК,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор КА. Для модели прямого диполя вектор оси диполя постоянный в инерциальном пространстве и направлен противоположно оси  $OZ_3$ :  $\mathbf{k}^{direct} = (0, 0, -1)^T$ . Изменение вектора геомагнитной индукции в модели прямого диполя описывается периодической функцией.

Модель наклонного диполя более точно описывает геомагнитное поле, позволяет учесть движение КА по орбите и суточное вращение Земли – два основных эффекта, влияющих на изменение вектора геомагнитной индукции поля в точке нахождения спутника. Орт оси диполя  $\mathbf{k}^{inclined}$  в этом случае наклонен под некоторым углом к оси, антипараллельной вращению Земли, и периодически изменяется с периодом 24 часа. Соответствующее выражение приведено в [70]. Вектор геомагнитной индукции в модели наклонного диполя является непериодической функцией.

Одна из наиболее полных моделей для описания геомагнитного поля – модель IGRF (International Geomagnetic Reference Field). В работе [71] представлены уравнения, определяющие параметры модели IGRF – коэффициенты сферических гармоник тринадцатого поколения, карты магнитного склонения, наклонения и общей напряженности поля для эпохи 2020.0 и карты их прогнозируемой скорости изменения для периода времени с 2020.0 по 2025.0.

Модель прямого диполя является достаточно простой моделью для использования ее в аналитическом исследовании или в качестве первого приближения, в то время как модели наклонного диполя и IGRF обычно используются при численном моделировании движения КА, а также на борту

спутника для достижения максимально возможной точности, но не используются для аналитических исследований. Сравнение указанных моделей приведено в [72].

### 1.5. Поиск коэффициентов управления на основе теории Флоке

Линеаризуем систему уравнений (14) в окрестности целевой ориентации с учетом следующих упрощающих предположений:

- 1) внешние возмущающие моменты равны нулю  $\mathbf{M}_{dist} = (0, 0, 0)^T$ ,
- 2) модель геомагнитного поля – прямой диполь,
- 3) аэродинамический момент, согласно (5), считается постоянным в малой окрестности целевой ориентации.

Считая углы малыми в окрестности ПР, из (1) получаем

$$\mathbf{D} \approx \begin{pmatrix} 1 & \beta & -\alpha \\ -\beta & 1 & \gamma \\ \alpha & -\gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\beta & \alpha \\ \beta & 0 & -\gamma \\ -\alpha & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E} - [\mathbf{s}]_x, \quad (16)$$

где  $\mathbf{s} = (\gamma, \alpha, \beta)^T$ .

Общий вид системы линеаризованных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (17)$$

где  $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}^T, \mathbf{s}^T)$  – вектор состояния системы,  $\mathbf{G}(t)$  – матрица размера  $6 \times 6$ ,  $\mathbf{f}(t)$  – вектор размера  $6 \times 1$ . Система (17) является системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений (ДУ) с  $T$ -периодическими коэффициентами и  $T$ -периодической неоднородной частью, так как с учетом упрощающих предположений  $\mathbf{G}(t)$  и  $\mathbf{f}(t)$  являются  $T$ -периодическими функциями. Их вывод приведен в Приложении А. Явный вид выражения для неоднородной части:

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0), \quad (18)$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ ,  $\mathbf{M}_{ctrl}^0$  – момент, реализующий целевую ориентацию, который получается из (10) подстановкой  $\boldsymbol{\omega}_{rel} = (0, 0, 0)^T$  и  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ :

$$\mathbf{M}_{ctrl}^0 = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{M}_{grav}^0 - \mathbf{M}_{aero}^0, \quad (19)$$

где  $\mathbf{M}_{grav}^0$ ,  $\mathbf{M}_{aero}^0$  – гравитационный и аэродинамический моменты, вычисленные на целевом движении.

В случае, когда целевая ориентация является положением равновесия или стационарным движением,  $\mathbf{f}(t) = 0$ , так как управляющий момент (19) при этом равен нулю  $\mathbf{M}_{ctrl}^0 = (0, 0, 0)^T$ . В случае, когда целевая ориентация не является положением равновесия или стационарным движением, неоднородная часть в уравнении (17) остается:  $\mathbf{f}(t) \neq 0$ , так как при этом  $(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0) \neq 0$ .

### ***1.5.1. Положение равновесия или стационарное движение***

Для поиска коэффициентов управления в случае, когда целевая ориентация является положением равновесия или стационарным движением ( $\mathbf{f}(t) = 0$ ), в работе [36] предложен подход на основе теории Флоке. Система (17) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{y}, \quad (20)$$

то есть становится линейной однородной системой ДУ с периодическими коэффициентами. Согласно [73] по теории Флоке, если все мультипликаторы системы  $\lambda_i$  (собственные значения матрицы монодромии) (20) лежат внутри единичного круга  $(\max_i |\lambda_i| < 1, i = \overline{1,6})$ , то эта система является асимптотически устойчивой, то есть все ее решения являются асимптотически устойчивыми. В этом случае в качестве коэффициентов управления  $k_d$ ,  $k_\omega$  (10) для обеспечения асимптотической устойчивости в [36] предлагается выбирать любые положительные константы, лежащие в области устойчивости. Область устойчивости – это область на плоскости параметров  $(k_d, k_\omega)$ , ограниченная

линией уровня  $|\lambda|=1$ , то есть такая область, выбор параметров  $k_d, k_\omega$  в которой дает асимптотическую устойчивость решений системы (20).

### 1.5.2. Произвольная ориентация

В диссертационной работе ставится задача поиска управляемого с помощью МСО углового движения КА в некотором заданном положении (ЦСК), однако в случае, когда целевая ориентация не является положением равновесия или стационарным движением, неоднородная часть в уравнении (17) остается:  $f(t) \neq 0$ . С учетом этого в диссертационной работе дорабатывается подход, описанный в п.1.5.1.

Рассматривается соответствующая системе (17) однородная система уравнений, которая имеет вид, аналогичный (20)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}. \quad (21)$$

Согласно [73], если тривиальное решение  $\mathbf{x}_0 \equiv 0$  системы (21) является асимптотически устойчивым при  $t \rightarrow \infty$ , то исходная линейная неоднородная система (17) также является асимптотически устойчивой. Кроме того, если все мультипликаторы отличны от единицы ( $\lambda_i \neq 1$ ), что верно для случая асимптотически устойчивых систем ДУ, то (17) имеет единственное  $T$ -периодическое решение:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t)[\mathbf{E} - \mathbf{X}(T)]^{-1} \left\{ \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau + \mathbf{X}(T) \int_t^T \mathbf{X}^{-1}(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau \right\}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{X}(t)$  – нормированная при  $t=0$  фундаментальная матрица системы (21). В случае, когда система (17) является асимптотически устойчивой, все ее решения являются асимптотически устойчивыми. Периодическое решение в том числе является асимптотически устойчивым. Все решения системы (17) сходятся к решению (22), которое и определяет движение в установившемся режиме.

Периодическое решение (22) зависит от фундаментальной матрицы решений  $\mathbf{X}(t)$  соответствующей однородной системы (21) и матрицы

монодромии  $\mathbf{X}(T)$ , а следовательно, от матрицы системы  $\mathbf{G}(t)$ . Обеспечив асимптотическую устойчивость системы (21) аналогично описанному в п. 1.5.1, можно утверждать, что система (17) будет асимптотически устойчивой.

При этом видно, что решение (22) зависит от неоднородного члена  $f(t)$ , который определяется действующими внешними воздействиями. Это влияет на итоговую точность ориентации. Поэтому важно не только обеспечить асимптотическую устойчивость, но и уменьшить амплитуду периодического решения с целью минимизации ошибок отслеживания заданного целевого режима ориентации.

### 1.6. Построение вспомогательного движения

В пункте 1.5.2 диссертационной работы рассмотрен общий случай, когда  $f(t) \neq 0$ . В этом случае скалярное произведение, входящее в выражение (18), не равно нулю:  $(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0) \neq 0$ . Эта величина напрямую зависит от величины той части модельного управления, которую невозможно реализовать с помощью МСО. Из выражения для магнитного момента (13) следует, что на целевом движении  $(\boldsymbol{\omega}_{rel} = (0, 0, 0)^T, \mathbf{D} = \mathbf{E})$  отличие требуемого управления от реализуемого составляет

$$\mathbf{M}_{ctrl}^0 - \mathbf{M}_{magn} = \mathbf{b}(\mathbf{b}^T \mathbf{M}_{ctrl}^0). \quad (23)$$

При равенстве нулю проекции управляющего момента на вектор геомагнитной индукции система полностью управляема, что сводит к нулю ошибки отслеживания целевой ориентации. Однако, добиться равенства нулю в общем случае не представляется возможным из-за наличия возмущающих моментов. Например, в случае, когда целевой ориентацией является орбитальная, то с учетом аэродинамического момента гравитационные положения равновесия уже не являются положениями равновесия для такой системы, что с неизбежностью приведет к ошибкам отслеживания ОрбСК с помощью МСО.

В диссертационной работе предлагается в окрестности целевого режима построить специальное вспомогательное (*опорное*) движение, на котором проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции будет в некотором смысле минимальна на всем движении (в каждый рассматриваемый момент времени).

Неоднородная часть  $f(t)$  будет зависеть только от опорного движения, в то время как матрица системы  $\mathbf{G}(t)$  кроме опорного движения зависит так же и от коэффициентов управления. Таким образом, задача разбивается на два этапа – на Этапе 1 строится специальное опорное движение, минимизирующее  $f(t)$ , а на Этапе 2, с учетом найденного опорного движения, ищутся коэффициенты управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость.

Опорное движение строится на период  $T$  в упрощенной модели движения спутника. Неизвестное возмущение равно нулю  $\mathbf{M}_{dist} = (0, 0, 0)^T$ , модель геомагнитного поля представляет собой прямой диполь, а аэродинамический момент (5) является постоянным в малой окрестности опорного движения. В этих упрощающих предположениях все моменты в правой части первого уравнения системы (2) являются периодическими, поэтому опорное движение также ищется в виде периодической функции, что позволит в дальнейшем применить выводы, сделанные на основании теории Флоке.

Введем дополнительную систему координат  $OY_1Y_2Y_3$  (Рис. 5) – опорную систему координат (ОпСК), ориентация которой относительно ЦСК определяется искомыми углами вспомогательного движения  $\alpha_{ref}, \beta_{ref}, \gamma_{ref}$  (последовательность поворотов 2-3-1). Матрицы перехода между ЦСК, ССК и ОпСК суть

$$\text{ЦСК} \xrightarrow{\mathbf{C}} \text{ОпСК}, \quad \text{ОпСК} \xrightarrow{\mathbf{D}} \text{ССК}.$$

Задача управления в этом случае – совместить оси ССК с осями ОпСК, то есть обеспечить  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$  (в этом случае матрица  $\mathbf{D}$  является матрицей перехода между ОпСК и ССК), и равенство нулю угловой скорости ССК относительно ОпСК.

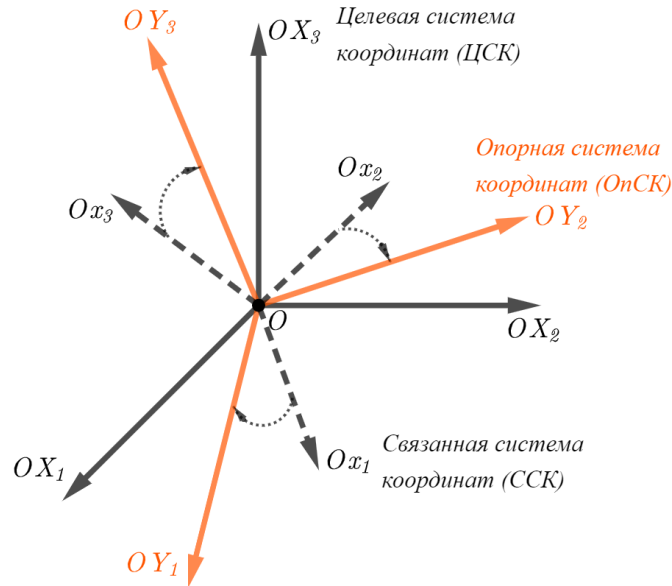


Рис. 5. Дополнительная система координат – ОпСК

Управляющий момент находится аналогично (10), однако абсолютная угловая скорость с учетом опорного движения имеет дополнительное слагаемое и принимает следующий вид

$$\boldsymbol{\omega}_{abs} = \mathbf{DC}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \boldsymbol{\omega}_{rel}, \quad (24)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{ref}$  – угловая скорость ОпСК относительно ЦСК, заданная в проекциях на оси ЦСК,  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$  – угловая скорость ССК относительно ОпСК. Тогда выражение для производной угловой скорости КА есть

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} &= \dot{\mathbf{D}}\mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{DC}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \\ &= -(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{DC}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref})) - \mathbf{D}(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref})) + \\ &\quad + \mathbf{DC}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}. \end{aligned} \quad (25)$$

С учетом этого получаем выражение для управляющего момента, обеспечивающего асимптотическую устойчивость опорного движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl} = & -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} - k_d \mathbf{S}_d + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{J} \left( \boldsymbol{\omega}_{rel} \times \mathbf{DC}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right) - \\ & - \mathbf{J} \mathbf{D} \left( \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right) + \mathbf{J} \mathbf{DC}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}) - \mathbf{M}_{grav} - \mathbf{M}_{aero}. \end{aligned} \quad (26)$$

При этом управляющий момент, реализующий опорное движение ( $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{rel} = (0, 0, 0)^T$ ), равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl}^0 = & \mathbf{J} \left( \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref}) \right) + \\ & + \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \times \mathbf{J} \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) - \mathbf{M}_{grav}^0 - \mathbf{M}_{aero}^0, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\mathbf{M}_{grav}^0$ ,  $\mathbf{M}_{aero}^0$  – гравитационный и аэродинамический моменты, вычисленные на опорном движении.

Параметризуем опорное движение в следующем виде

$$\begin{aligned} \alpha_{ref} &= a_1 \sin u + a_2 \cos u + a_3 \sin 2u + a_4 \cos 2u, \\ \beta_{ref} &= b_1 \sin u + b_2 \cos u + b_3 \sin 2u + b_4 \cos 2u, \\ \gamma_{ref} &= g_1 \sin u + g_2 \cos u + g_3 \sin 2u + g_4 \cos 2u, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $u = \omega_{orb} t$  – аргумент широты.

Для обоснования выбора такой параметризации проведем следующие рассуждения. С одной стороны, эта параметризация использует две собственные частоты как разумный компромисс между точностью и вычислительной сложностью. Орбитальная частота  $\omega_{orb}$  соответствует частоте движения КА по орбите (частота изменения радиус-вектора); двойная орбитальная частота  $2\omega_{orb}$  используется, так как вектор геомагнитной индукции  $\mathbf{B}$  в модели прямого диполя описывается периодической функцией с периодом  $T/2$  и частотой  $2\omega_{orb}$ . С другой стороны более формальное объяснение основано на следующих рассуждениях. Введем в рассмотрение некоторую функцию  $F_k$ , являющуюся линейной комбинацией синусов и косинусов:

$$F_k = F(u, 2u, 3u, \dots, ku) = f_1 \sin u + g_1 \cos u + \dots + f_k \sin ku + g_k \cos ku. \quad (29)$$



В силу формул для умножения тригонометрических функций выполняется соотношение

$$\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{k+m}.$$

Тогда выражение для управляющего момента в окрестности ЦСК и для вектора геомагнитной индукции в модели прямого диполя суть функции следующего вида соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl} &= \mathbf{F}_0 + \eta \mathbf{F}_k, \\ \mathbf{V} &= (\mathbf{F}_0 + \eta \mathbf{F}_k)(\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_0 + \eta \mathbf{F}_{k+1}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\eta$  – малый параметр. Выражения вида  $\eta \mathbf{F}_k$  задают слагаемые, линейные по параметрам опорного движения  $a_i, b_i, g_i$ . Тогда, полагая, что  $a_i, b_i, g_i$  малы (движение происходит в окрестности ЦСК), скалярное произведение векторов  $\mathbf{M}_{ctrl}$  и  $\mathbf{V}$  с точностью до линейных членов по  $a_i, b_i, g_i$  есть

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M}_{ctrl} = (\mathbf{F}_0 + \eta \mathbf{F}_k)^T (\mathbf{F}_0 + \eta \mathbf{F}_{k+1}) \approx F_0 + \eta F_{k+1},$$

где  $F_0$  и  $F_{k+1}$  скалярные функции аналогичного (29) вида. В предельном случае, когда проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции равна нулю, получаем следующее соотношение

$$F_0 + \eta F_{k+1} = 0. \quad (31)$$

Для того чтобы выполнялось равенство (31), каждое слагаемое в нем должно быть равно нулю. Так как (31) содержит  $1 + 2(k+1)$  гармоник, то получаем соответственно систему из  $1 + 2(k+1)$  уравнений на параметры  $a_i, b_i, g_i$  ( $i = \overline{1, 2k}$ ). Система уравнений имеет решение, если число уравнений меньше либо равно числу переменных:

$$3 + 2k \leq 6k, \quad k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad k \geq 1.$$

Таким образом, достаточно даже одной гармоники в параметризации опорного движения, однако, в этом случае получается 5 уравнений и 6 неизвестных – то есть только один свободный параметр, с помощью которого возможно найти минимальное значение  $f(t)$  на этом движении. В то время как две гармоники

дают 7 уравнений и 12 неизвестных – что оставляет 5 степеней свободы. Три гармоники в свою очередь обеспечат 9 степеней свободы, однако, поиск оптимального значения усложняется с ростом числа параметров. Таким образом, рационально выбрать 2 гармоники для параметризации опорного движения.

Аналогично п. 1.5 линеаризуем уравнения движения (2) в окрестности ОпСК (см. Приложение Б). В этом случае выражение для неоднородной части соответствующей линеаризованной системы ДУ с периодическими коэффициентами имеет вид

$$f(t) = -Cb(Cb, M_{ctrl}^0). \quad (32)$$

Коэффициенты опорного движения (28)  $a_i, b_i, g_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) ищутся так, чтобы обеспечить минимум проекции управляющего момента, реализующего опорное движение (27), на вектор геомагнитной индукции, тем самым минимизируя (в некотором смысле) выражение (32). Оптимальные коэффициенты опорного движения  $a_i, b_i, g_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) ищутся с помощью метода глобальной оптимизации – метода роя частиц.

### 1.7. Метод роя частиц

Роевой интеллект был предложен в [55] для описания движения стаи птиц с целью выяснить законы, управляющие синхронным движением и быстрой сменой его направления всей стаей. Модель, описывающая принятие решений частицами в стае, при этом оказалась достаточно эффективным способом оптимизации.

Метод роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO) основан на модели принятия решений о перемещениях каждой частицей роя. Положение частицы в рое задает возможное решение оптимизационной задачи. Решение о перемещении частица принимает на основе трех факторов: ее текущего направления поиска, знания о собственном лучшем положении за все

предыдущие шаги поиска и знания о лучшем положении всего роя. Для роя ставится задача обеспечить минимум целевой функции

$$\Phi(\mathbf{x}_p) \xrightarrow{\mathbb{U}} \min ,$$

где  $\Phi(\mathbf{x}_p): \mathbb{R}^W \rightarrow \mathbb{R}$  – целевая функция задачи,  $W$  – количество параметров оптимизации,  $p = \overline{1, P}$ , где  $P$  – общее количество частиц в рое,  $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^W$  –  $W$ -мерный вектор параметров (точка в  $\mathbb{R}^W$ ), который задает текущее положение  $p$ -й частицы. Пространство поиска

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^D \mid \chi_{\min}^j \leq x_p^j \leq \chi_{\max}^j, j = \overline{1, W} \right\}$$

определяет ограничения на величины параметров оптимизации.

Для нахождения наилучшего положения  $\mathbf{x}_{bob}$  роя отводится некоторый отрезок дискретного времени  $N$  (число итераций). Решение о том, какое положение занять на следующей итерации, каждая частица принимает на основе своего положения на текущей итерации  $\mathbf{x}_p(i)$  и величины смещения  $\Delta \mathbf{x}_p(i)$  по следующему закону

$$\mathbf{x}_p(i+1) = \mathbf{x}_p(i) + \Delta \mathbf{x}_p(i). \quad (33)$$

Выражение для смещения состоит из трех слагаемых

$$\Delta \mathbf{x}_p(i) = c_{in} \Delta \mathbf{x}_p(i-1) + c_{cog} [\mathbf{x}_{p,best}(i) - \mathbf{x}_p(i)] + c_{soc} [\mathbf{x}_{best}(i) - \mathbf{x}_p(i)]. \quad (34)$$

Первое слагаемое в выражении (34) называется *инерционная компонента* (отвечает за стремление  $p$ -й частицы продолжить движение в том же направлении), второе – *когнитивная компонента* (стремление к собственному лучшему среди найденных за предыдущие  $i$  итераций положению  $\mathbf{x}_{p,best}(i)$ ), и третье – *социальная компонента* (стремление к лучшему положению  $\mathbf{x}_{best}(i)$  всего роя, найденному за предыдущие  $i$  итераций).

Вклад каждой компоненты определяется с помощью соответствующих весовых коэффициентов  $c_{in}$ ,  $c_{cog}$ ,  $c_{soc}$  (инерциального, когнитивного и

социального). Большое значение  $c_{in}$  ускоряет исследование пространства поиска и не позволяет частице прекратить поиски нового оптимального положения и перейти к улучшению уже найденного в его окрестностях (избегание попадания в локальные оптимумы). В диссертационной работе инерционный коэффициент вычисляется по следующей формуле

$$c_{in}(i) = \left( c_{in}^{\min} - c_{in}^{\max} \right) \frac{i}{N} + c_{in}^{\max} \quad (35)$$

где  $c_{in}^{\min}$ ,  $c_{in}^{\max}$  – границы изменения инерционной компоненты. В этом случае сначала инерционный коэффициент равен большему числу  $c_{in}^{\max}$ , обычно принимаемому равным 0.9, к концу поиска инерционный коэффициент приближается к меньшему значению  $c_{in}^{\min}$ , обычно равному 0.4 [74,75]. За счет такого изменения инерционного коэффициента рой сначала активно ищет оптимальное положение, а в дальнейшем акцент смещается на более подробное изучение окрестностей уже найденных лучших положений (своего или лучшего положения роя в целом). Заметим, что при  $c_{in} > 1$  смещение частицы (34) неограниченно возрастает и она оказывается неспособной достичь оптимального положения. При  $c_{in} < 0$ , напротив, величина смещения уменьшается, и поиск останавливается раньше, чем удастся найти оптимальное положение.

Вклад второго и третьего слагаемых в (34) регулируется с помощью коэффициентов  $c_{cog}$  и  $c_{soc}$  соответственно, которые обычно принимаются постоянными и равными 1.49445 [76]. Однако параметры  $c_{cog}$  и  $c_{soc}$  эффективнее всего выбирать отдельно на каждой итерации для каждой частицы (то есть для каждой компоненты вектора  $\Delta \mathbf{x}_p$ ) как равномерно распределенные величины на интервалах  $[0, c_{cog}^{\max}]$  и  $[0, c_{soc}^{\max}]$  соответственно. Часто  $c_{cog}^{\max}$  и  $c_{soc}^{\max}$  принимают равными 2.05 [75] (эмпирическое правило). Но в диссертационной работе используется смешанный подход. Когнитивный и социальный коэффициенты

ищутся как произведение случайной величины на линейно убывающую с течением итераций функцию

$$c_{cog}(i) = U(0, c_{cog}^{\max}) \left( (c_{cog}^{\min} - c_{cog}^{\max}) \frac{i}{N} + c_{cog}^{\max} \right),$$

$$c_{soc}(i) = U(0, c_{soc}^{\max}) \left( (c_{soc}^{\max} - c_{soc}^{\min}) \frac{i}{N} + c_{soc}^{\min} \right),$$

где  $U(0, c_{cog}^{\max})$  и  $U(0, c_{soc}^{\max})$  – равномерно распределенные случайные величины на отрезках от 0 до  $c_{cog}^{\max}$  и от 0 до  $c_{soc}^{\max}$  соответственно. Такой выбор вкладов социальной и когнитивной компонент позволяет каждой частице поначалу самостоятельно искать лучшее положение, со временем смещая акцент на улучшение найденного соседями частицы положения. Оба коэффициента подбираются близкими, так как именно такой выбор позволяет соблюсти баланс между собственными знаниями частицы и знаниями всего роя.

Для обеспечения сходимости метода роя следует обеспечить условие [77]

$$c_{in} > \frac{1}{2}(c_{soc} + c_{cog}) - 1.$$

Описанный подход к выбору инерционного, когнитивного и социального параметров приводит к следующему. В начале поиска частицы активно перемещаются по допустимому пространству поиска  $\mathbb{U}$  за счет превалирования инерционной компоненты. При этом на нее практически не оказывают влияние сведения о лучшем положении, найденном всем роем, тогда как собственное лучшее положение имеет большее значение. Таким образом в начале поиска частицы роя исследуют  $\mathbb{U}$  практически независимо. Со временем они начинают все больше принимать во внимание полученный соседями результат, все меньше исследуя новые области в  $\mathbb{U}$  и все больше изучая окрестности собственного и соседних лучших положений. Наконец, к концу времени поиска все частицы переходят к изучению окрестности общего лучшего положения.

Социальная компонента скорости использует информацию о лучшем положении, найденном в окрестности частицы. Существует два подхода к

определению окрестности. Это может быть как весь рой, так и его часть. В первом случае имеет место глобальный метод роя частиц. Его преимущество – быстрая сходимость за счет использования более полного объема информации. Ценой этого является опасность попадания в локальный минимум. Большое разнообразие, предоставляемое локальным методом роя частиц, изменяет ситуацию на противоположную, при этом каждая частица обладает информацией только о частицах, входящих в ее окрестность. Для определения окрестности частицы есть несколько подходов [75], но в подавляющем большинстве случаев соседями  $p$ -й частицы считаются частицы с номерами от  $p - \Delta p$  до  $p + \Delta p$ , где  $\Delta p$  – размер окрестности  $p$ -й частицы, который может увеличиваться на заданную величину  $\Delta p_+$  раз в несколько итераций  $\Delta N$ . За счет этого после того, как удалось выделить лучшие варианты положений, рой переходит к все более детальному их исследованию. Все меньше частиц вместе со своей окрестностью активно ищет новые положения, все больше частиц, причем с увеличенной окрестностью (вплоть до окрестности, содержащей все частицы роя), переходит к улучшению найденных вариантов.

После определения значения смещения по формуле (34) проверяется выполнение следующего неравенства

$$0.15\Delta\chi_{\min}^j \leq \Delta x_p^j \leq 0.15\Delta\chi_{\max}^j, \quad j = \overline{1, W}. \quad (36)$$

Коэффициент 0.15 выбран исходя из результатов, полученных в исследованиях [74,78], в которых показано, что каждый элемент максимального и минимального значений скорости должен быть ограничен соответствующим динамическим диапазоном поискового пространства и составлять 10-20% от этого диапазона, иначе частица может легко покинуть поисковое пространство уже на первых итерациях, что приведет к замедлению процесса поиска оптимального решения. Если какая-либо компонента вектора  $\Delta \mathbf{x}_p$  выходит за пределы установленной области, то ей присваивается соответствующее граничное значение. Стоит отметить, что левая граница в неравенстве (36)

должна быть отрицательной, а правая – положительной, иначе не будет возможности изменить направление движения частицы. Для этого выбирать  $\Delta\chi_{\min}^j$  и  $\Delta\chi_{\max}^j$  можно, например, следующим способом:

$$\begin{aligned}\Delta\chi_{\min}^j &= -\max\left(|\chi_{\min}^j|, |\chi_{\max}^j|\right), \\ \Delta\chi_{\max}^j &= \max\left(|\chi_{\min}^j|, |\chi_{\max}^j|\right).\end{aligned}$$

Аналогично при расчете значения  $\mathbf{x}_p$  по формуле (33) на каждой следующей итерации необходимо проверить, не вышла ли частица  $p$  за пределы допустимой области  $\mathbb{U}$ . В случае выхода хотя бы одной компоненты вектора  $\mathbf{x}_p$  за допустимую область после вычисления по формуле (33), это значение  $\mathbf{x}_p$  дополнительно меняется по формуле, описывающей аналог неупругого удара молекулы от стенки сосуда, сопровождающегося потерей энергии (уменьшением модуля скорости). Выражения для случая выхода частицы за правую или левую границы интервала суть соответственно

$$\begin{aligned}x_p^j(i+1) &= \chi_{\max}^j - 0.5 \cdot \left(1 - \frac{\chi_{\max}^j - x_p^j(i)}{\Delta\chi_{\max}^j}\right) \Delta\chi_{\max}^j, \\ x_p^j(i+1) &= \chi_{\min}^j - 0.5 \cdot \left(1 - \frac{\chi_{\min}^j - x_p^j(i)}{\Delta\chi_{\min}^j}\right) \Delta\chi_{\min}^j.\end{aligned}\tag{37}$$

В работе используется два критерия остановки поиска:

1. Если одновременно выполнены условия:

- малая величина изменения целевой функции  $\Delta\Phi$  (отношение разницы текущего и предыдущего лучших значений целевой функции к текущему значению), то есть при переходе роя к медленному улучшению уже найденного лучшего положения в течение заданного количества итераций подряд (число шагов стагнации  $N_{stagn}$ );
- попадание всех частиц в некоторую окрестность  $\varepsilon$  найденного лучшего положения (в этом случае также возможно лишь

дальнейшее улучшение уже найденного решения). Для этого на каждой итерации определяется максимальное среди всех пар частиц расстояние

$$r_{\max}(i) = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_P \left( \frac{\mathbf{x}_p(i) - \mathbf{x}_{best}(i)}{\chi_{\max} - \chi_{\min}} \right)^2} \quad (38)$$

и проверяется, превышает ли это значение заданный размер окрестности  $\varepsilon$ .

Однако если первое условие выполнено, но при этом еще не все частицы находятся в окрестности лучшего положения, сохраняется возможность дальнейшего нахождения лучшего значения.

- По окончании отведенного количества времени (заданного числа итерации). В этом случае есть вероятность того, что оптимальное решение не найдено, и следует изменить параметры (коэффициенты в выражении для скорости, изменить область поиска, задать большее число итераций).

Параметры метода роя, которые используются в дальнейшем во всей работе, приведены в Таблице 1. Количество частиц и итераций подбираются исходя из конкретной задачи в зависимости от количества оптимизационных параметров, вида целевой функции, вычислительной сложности, а также структуры области поиска.

Таблица 1. Параметры метода роя

Размер окрестности, сведения о которой имеет частица	$\Delta p$	4
Число итераций, через которое каждый раз увеличивается размер окрестности частицы, пока окрестность не станет равна количеству частиц в рое	$\Delta N$	20
На какое число увеличивается окрестность	$\Delta p_+$	1
Число шагов стагнации	$N_{stagn}$	15
Относительная величина изменения целевой функции, при которой констатируется стагнация	$\Delta \Phi$	0.001



Относительный размер стаи по сравнению с начальным, при котором частицы считаются собравшимися около оптимального решения	$\varepsilon$	0.005
Максимальное и минимальное значения инерционного коэффициента	$c_{in}^{\min}, c_{in}^{\max}$	0.4, 0.9
Максимальное и минимальное значения когнитивного коэффициента	$c_{cog}^{\min}, c_{cog}^{\max}$	0, 2.05
Максимальное и минимальное значения социального коэффициента	$c_{soc}^{\min}, c_{soc}^{\max}$	0, 2.05

## 1.8. Применение метода роя для поиска опорного движения

### 1.8.1. Формализация задачи

Задача построения опорного движения, на котором величина (32) минимальна, требует формализации и введения целевой функции. Опорное движение строится на один период  $T$ . Отметим, что при построении опорного движения отсутствуют внешние возмущения и используется модель прямого диполя. В Таблице 2 приведены три выражения, которые минимизируют  $f(t_i)$  (32) на каждом дискретном шаге времени  $t_i \in [0, T]$ , где  $T$  – орбитальный период. Управляющий момент соответствует выражению (27).

Таблица 2. Используемые в целевой функции в задаче построения опорного движения выражения

$\phi_1$	$\left\  \frac{\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i)}{B(t_i)} \left( \frac{(\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i))^T \mathbf{M}_{ctrl}^0(t_i)}{B(t_i)} \right) \right\ _2$
$\phi_2$	$(\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i))^T \mathbf{M}_{ctrl}^0(t_i)$
$\phi_3$	$\left\  \frac{\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i)}{B(t_i)} \left( \frac{(\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i))^T \mathbf{M}_{ctrl}^0(t_i)}{B(t_i)} \right) \right\ _\infty$

где  $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ,  $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_i |x_i|$ .

Ставится задача нелинейной оптимизации с целевой функцией, для которой может быть использовано одно из выражений, приведенных в Таблице 2 ( $n = \overline{1,3}$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_n^{trajectory} &= \max_i |\phi_n(t_i)| \rightarrow \min, \quad t_i \in [0, T], \\ \mathbb{U} &= \{a_k, b_k, g_k \in [b_{\min}, b_{\max}], \quad k = \overline{1,4}\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\mathbb{U}$  – пространство поиска, оптимизируемые параметры – коэффициенты опорного движения (28)  $a_k, b_k, g_k$  ( $k = \overline{1,4}$ ), которые ищутся с помощью PSO. В Таблице 3 приведены параметры метода роя для задачи поиска оптимальных коэффициентов опорного движения.

Таблица 3. Параметры метода роя

Число частиц в рое	$P$	48
Число итераций	$N$	300

### 1.8.2. Границы области поиска

Выбор границ  $b_{\min}, b_{\max}$  области поиска  $\mathbb{U}$  является нетривиальной задачей. Для эффективной работы PSO необходима априорная информация о допустимой области  $\mathbb{U}$ . С одной стороны желательно иметь меньшие значения коэффициентов, чтобы получить меньшие углы, задающие опорное движение (28), чтобы ориентация была максимально приближена к целевой. При этом проекция управляющего момента на вектор геомагнитной индукции может оказаться большой из-за невозможности реализовать близкое к целевому опорное движение с хорошей точностью. С другой стороны, чем шире границы, тем проще найти требуемое управление, и значение целевой функции при этом может быть ближе к нулю, что в конечном итоге позволит отслеживать опорное движение с меньшей ошибкой. Однако в этом случае само найденное движение может задаваться большими значениями углов ориентации и, следовательно, лежать дальше от целевого. Из-за этих противоречивых требований необходимо

оценить предельную точность стабилизации (отклонения), которую можно получить используя только МСО.

Для оценки достижимой точности ориентации относительно целевой ставится и решается задача квадратичного программирования с ограничением типа равенства в следующем виде

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^4 (a_k^2 + b_k^2 + g_k^2) \rightarrow \min, \\ (\mathbf{DCB})^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 = 0, \end{cases} \quad (40)$$

где  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$  в установившемся режиме (на опорном движении).

Ограничение является нелинейным по отношению к оптимизируемым параметрам из-за вида управляющего момента. Однако, предполагая, что опорное движение строится в окрестности ЦСК, углы, задающие это движение, можно считать малыми. Линеаризуя ограничение в окрестности ЦСК, получаем выражение вида

$$\begin{aligned} (\mathbf{CB})^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 &= f_{s1} \sin u + f_{c1} \cos u + \\ &+ f_{s2} \sin 2u + f_{c2} \cos 2u + \\ &+ f_{s3} \sin 3u + f_{c3} \cos 3u + f = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где множители  $f_{sj}$ ,  $f_{cj}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) и  $f$  зависят от параметров опорного движения  $a_k, b_k, g_k$  ( $k = \overline{1,4}$ ) и параметров задачи.

Решение уравнения (41) при всех значениях  $u$  существует тогда и только тогда, когда каждый множитель  $f_{sj}$ ,  $f_{cj}$ , и  $f$  равен нулю. Таким образом, получаем семь независимых линейных относительно параметров опорного движения  $a_k, b_k, g_k$  ( $k = \overline{1,4}$ ) уравнений. Рассматривая эти параметры как неизвестный вектор и объединяя семь уравнений в одно матричное уравнение, получаем следующий вид ограничения

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{u}.$$

Правая часть  $\mathbf{u}$  появляется за счет слагаемых в множителях  $f_{sj}$ ,  $f_{cj}$ , и  $f$ , не содержащих в себе параметры опорного движения  $a_k, b_k, g_k, k = \overline{1,4}$ , и возникающих только в аэродинамическом моменте за счет смещения центра масс относительно центра давления.

С учетом линеаризованного ограничения задача (40) сводится к виду

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{12} x_k^2 \rightarrow \min, \\ \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{u}, \end{cases} \quad (42)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{12})^T = (a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, g_1, g_2, g_3, g_4)^T$  – вектор искомым параметров размера  $12 \times 1$ ,  $\mathbf{U}$  – матрица  $7 \times 12$ ,  $\mathbf{u}$  – вектор  $7 \times 1$ . Ненулевое решение задачи квадратичного программирования (42) существует, когда вектор правых частей  $\mathbf{u} \neq 0$ , и ищется согласно теореме Мура-Пенроуза о псевдообратной матрице [79]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^+ \mathbf{u}, \quad (43)$$

где  $\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^T (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1}$  – операция псевдообращения матрицы. В предположении малых углов полученное решение (43) линеаризованной задачи (42) близко к решению исходной системы (40).

Границы области поиска для PSO с учетом полученного решения (43) можно задать, например, удвоенной максимальной по модулю компонентой вектора  $\mathbf{x}$ . Тогда область поиска задается следующим образом

$$\mathbb{U} = \left\{ a_k, b_k, g_k \in (-2x_{\max}, 2x_{\max}), k = \overline{1,4} \right\},$$

где  $x_{\max} = \max |\mathbf{x}|$ .

Аналитически полученный явный вид уравнений (41) для целевой ориентации, совпадающей с орбитальной, приведен в Приложении В. Так как получение явного вида матрицы  $\mathbf{U}$  и вектора правой части  $\mathbf{u}$  системы (42) достаточно длительный и затруднительный процесс, для упрощения процесса линеаризации воспользуемся методом символьных вычислений в программе

Matlab, а также свойствами тригонометрических функций. Опишем численный метод получения матрицы  $\mathbf{U}$  и вектора правых частей  $\mathbf{u}$  для общего случая произвольной целевой ориентации. Чтобы посчитать множители  $f_{sj}$ ,  $f_{cj}$ , и  $f$  в выражении (41), достаточно вычислить следующие собственные интегралы:

$$f_{sj} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \sin(ju) du, \quad j=1,2,$$

$$f_{cj} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cos(ju) du, \quad j=1,2,$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F du,$$

где  $F$  обозначает левую часть выражения в (41) (линеаризованную):

$$F = \mathbf{B}^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_0 + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_{\mathbf{s}_{ref}, \boldsymbol{\omega}_{ref}} - \left( \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ref} \\ \times \end{bmatrix} \mathbf{B} \right)^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_0,$$

где  $\mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_0 + \mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_{\mathbf{s}_{ref}, \boldsymbol{\omega}_{ref}} = \mathbf{M}_{ctrl}^0$  — части момента, реализующего опорное движение, первая из которых содержит все слагаемые без  $\mathbf{s}_{ref}$  и  $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ , а вторая содержит слагаемые, в которых есть либо  $\mathbf{s}_{ref}$ , либо  $\boldsymbol{\omega}_{ref}$ :

$$\mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_0 = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0 - 3\omega_{opb}^2 \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{e}_r - \mathbf{M}_{aero}^0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ctrl}^0 \Big|_{\mathbf{s}_{ref}, \boldsymbol{\omega}_{ref}} = & -\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{ref} \times \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ref} \\ \times \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{ref} + \boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0 - \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ref} \\ \times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ref} \\ \times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 + 3\omega_{opb}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ref} \\ \times \end{bmatrix} \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{e}_r + \\ & + 3\omega_{opb}^2 \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{ref} \\ \times \end{bmatrix} \mathbf{e}_r - \mathbf{M}_{aero}^{s_{ref}}. \end{aligned}$$

Далее, зная символьные выражения для  $f_{sj}$ ,  $f_{cj}$ , и  $f$ , компоненты матрицы  $\mathbf{U}$  и вектора правых частей  $\mathbf{u}$  находятся дифференцированием по соответствующим коэффициентам опорного движения.

### 1.8.3. Численный пример

Рассмотрим в качестве примера целевой ориентации орбитальную (ОрбСК). В Таблице 4 приведены параметры КА и параметры моделирования для решения задачи орбитальной ориентации.

Таблица 4. Параметры задачи построения опорного движения для орбитальной ориентации

ЦСК	Орбитальная ориентация
Высота круговой орбиты	а) 550 км; б) 650 км
Наклонение	$i = 57^\circ$
Время моделирования	$T = 2\pi/\omega_{орб}$ (1 виток)
Форма КА	10×20×30 см (параллелепипед, 6U-кубсат)
Тензор инерции КА	$\mathbf{J} = \text{diag}(0.15, 0.13, 0.11)$ кг·м <sup>2</sup>
Смещение центра масс	$\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ см
Ограничение на управление (дипольный момент)	$ m_i  \leq 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2, i = \overline{1,3}$

Рассматриваются две высоты орбит 550 км и 650 км для анализа влияния аэродинамического момента на допустимую точность ориентации. Из оценки границ области поиска (43), в случае, когда высота круговой орбиты равна 550 км, получаем  $x_{\max} = 1.35^\circ$ . Область поиска для метода роя в этом случае задается так:

$$\mathbb{U} = \{a_k, b_k, g_k \in (-2^\circ, 2^\circ), k = \overline{1,4}\}.$$

Для высоты орбиты 650 км из (43) аналогично получаем, что  $x_{\max} = 0.14^\circ$ . Так как плотность атмосферы на высоте 650 км на порядок меньше плотности атмосферы на высоте 550 км ( $\rho \sim 10^{-14}$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho \sim 10^{-13}$  кг/м<sup>3</sup> соответственно), достижимая точность итоговой ориентации относительно целевой (орбитальной)

также отличается на порядок. Область поиска в этом случае можно выбрать следующей

$$\mathbb{U} = \{a_k, b_k, g_k \in (-0.2^\circ, 0.2^\circ), k = \overline{1,4}\},$$

однако, для примера работы алгоритма метода роя и с заведомо бóльшими областями поиска для высоты 650 км выберем область поиска такую же, как и для высоты 550 км.

На Рис. 6 изображен результат поиска метода роя – опорные движения для каждого варианта целевой функции (см. Таблицу 2) на двух рассматриваемых высотах. Полученное отклонение опорного движения от целевого в каждом случае несущественно зависит от конкретной формализации задачи, то есть от выбора одной из предложенных в п.1.8.1 целевых функций. Для высоты 550 км максимальное отклонение опорного движения от целевого составляет примерно 2 градуса, а для высоты 650 км – 1 градус, что объясняется меньшим влиянием атмосферы на данной высоте.

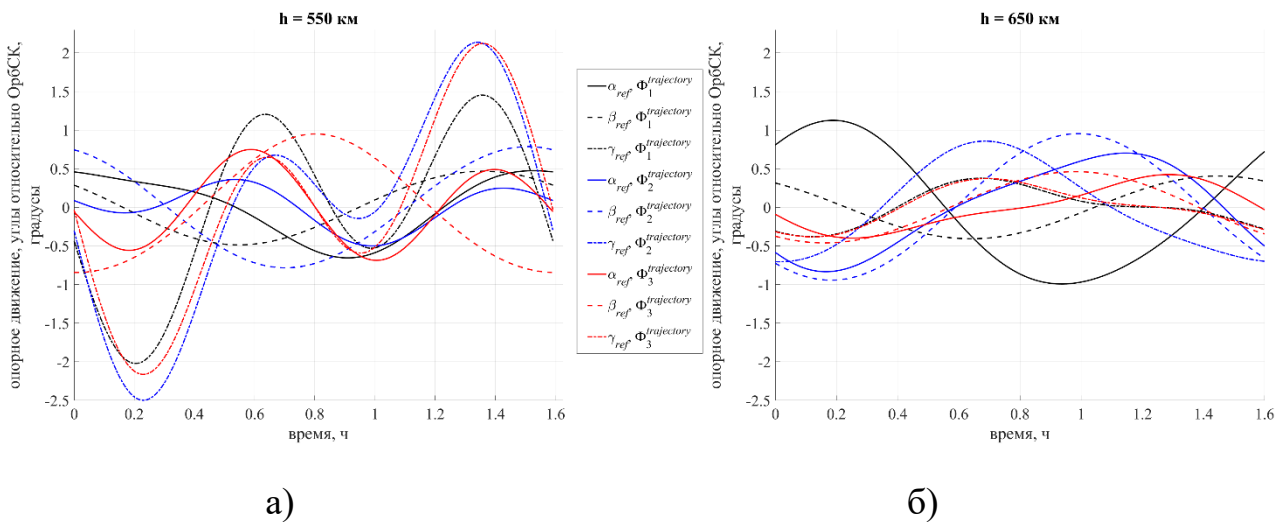


Рис. 6. Опорные движения, найденные методом роя для высот орбит 550 км (а) и 650 км (б), для целевой ориентации, являющейся орбитальной

## 1.9. Применение метода роя для поиска коэффициентов управления

За счет минимизации проекции управляющего момента на вектор геомагнитной индукции амплитуда периодического решения в окрестности специальным образом построенного вспомогательного (опорного) движения уменьшается, а за счет предложенной в п. 1.6 специальной процедуры построения, само вспомогательное движение находится в малой окрестности. Для обеспечения асимптотической устойчивости полученного опорного движения поиск коэффициентов  $k_\omega$  и  $k_d$  ляпуновского управления (26) основывается на теории Флоке и опирается на выводы, сделанные в п. 1.5.2. Периодическое решение  $y(t)$  (22) зависит как от неоднородной части  $f(t)$ , так и от матрицы монодромии системы  $X(T)$ .

### 1.9.1. Формализация задачи

Ставится задача поиска оптимальных коэффициентов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость. Параметры оптимизации – коэффициенты управления  $k_d, k_\omega$ . Целевая функция задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^{gains} &= \max_i (|\lambda_i|) \rightarrow \min, \quad i = \overline{1,6}, \\ \mathbb{U} &= \left\{ \begin{array}{l} k_\omega \in (5 \cdot 10^{-5}, 10^{-2}) \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \\ k_d \in (10^{-8}, 5 \cdot 10^{-5}) \text{ Н} \cdot \text{м} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Рассматриваются только пары коэффициентов, для которых выполняется условие  $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1,6}$ . Задача решается методом роя частиц. Пространство поиска  $\mathbb{U}$  задается на основе результатов, описанных в работе [67].

Стоит отметить, что для вычисления целевой функции, минимизирующей максимальный по модулю мультипликатор, необходимо вычислить соответствующую матрицу монодромии. Матрица монодромии вычисляется для линеаризованной системы ДУ, описывающей движение в окрестности опорного. Однако для того, чтобы полностью автоматизировать процесс поиска



оптимальных в смысле целевой функции (44) коэффициентов управления, матрица монодромии вычисляется численно без предварительной линеаризации. Для этого уравнения движения (2) численно интегрируются на один виток (период), при этом считается, что внешних неучтенных возмущений нет –  $\mathbf{M}_{dist} = (0,0,0)^T$ . Для численного интегрирования используется метод Рунге-Кутты 4 порядка, интегрирование проводится 7 раз со следующими начальными данными

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0(0) &= (0,0,0,0,0,0)^T, \\ \mathbf{y}_1(0) &= k \cdot (1,0,0,0,0,0)^T, \\ \mathbf{y}_2(0) &= k \cdot (0,1,0,0,0,0)^T, \\ \mathbf{y}_3(0) &= k \cdot (0,0,1,0,0,0)^T, \\ \mathbf{y}_4(0) &= k \cdot (0,0,0,1,0,0)^T, \\ \mathbf{y}_5(0) &= k \cdot (0,0,0,0,1,0)^T, \\ \mathbf{y}_6(0) &= k \cdot (0,0,0,0,0,1)^T, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{y} = (\boldsymbol{\omega}_{rel}^T, \mathbf{s}^T)$ , множитель  $k$  выбирается достаточно малым, чтобы можно было считать, что начальные условия находятся в линейной окрестности опорного движения. В работе значение  $k = 10^{-7}$ . Оно подобрано таким образом, чтобы отклонение каждой компоненты численно полученной матрицы монодромии было меньше 1% по сравнению с соответствующими компонентами матрицы монодромии, полученной аналитически (Приложение Б). В обоих случаях матрицы монодромии вычислялись для случая орбитальной ориентации на высоте 550 км с параметрами, указанными в Таблице 4. Численно матрица монодромии вычисляется следующим образом

$$\mathbf{X}(T) = \frac{1}{k} (\mathbf{X}_1(T), \dots, \mathbf{X}_6(T)),$$

где  $\mathbf{X}_i(T) = \mathbf{y}_i(T) - \mathbf{y}_0(T)$ ,  $\mathbf{y}_i(T)$  ( $i = \overline{0,6}$ ) – векторы фазовых переменных через период  $T$  при интегрировании с соответствующими начальными данными.

В Таблице 5 приведены параметры метода роя для задачи поиска коэффициентов управления.

Таблица 5. Параметры метода роя

Число частиц в рое	$P$	32
Число итераций	$N$	20

### 1.9.2. Численный пример

Для того, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость опорного движения (например, одного из приведенных в п.1.8.3), необходимо с учетом найденных параметров опорного движения решить оптимизационную задачу поиска коэффициентов управления (44). Рассмотрим для примера опорное движение, найденное с помощью целевой функции  $\Phi_1^{trajectory}$ , для высоты орбиты 550 км. Параметры задачи и аппарата приведены в Таблице 4. Начальные данные (ориентация и угловая скорость ССК относительно ОпСК) зададим следующими:

$$\alpha(0) = 75^\circ, \beta(0) = 55^\circ, \gamma(0) = 30^\circ,$$

$$\omega_{rel,1}(0) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \omega_{rel,2}(0) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \omega_{rel,3}(0) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}.$$

На Рис. 7 показана эволюция углов ориентации ССК относительно ОрбСК (черным), а также найденное с помощью описанного выше подхода опорное движение – движение ОпСК относительно ОрбСК (красным). Коэффициенты управления, найденные методом роя, равны

$$k_d = 9.49 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$k_\omega = 2.51 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

На Рис. 7 показано, что найденные коэффициенты обеспечивают асимптотическую устойчивость построенного опорного движения, переходные процессы завершаются примерно через 9 часов от начала моделирования в случае невозмущенной задачи. При этом на Рис. 8 продемонстрировано, что

максимальное значение дипольного момента не превосходит ограничение на управление.

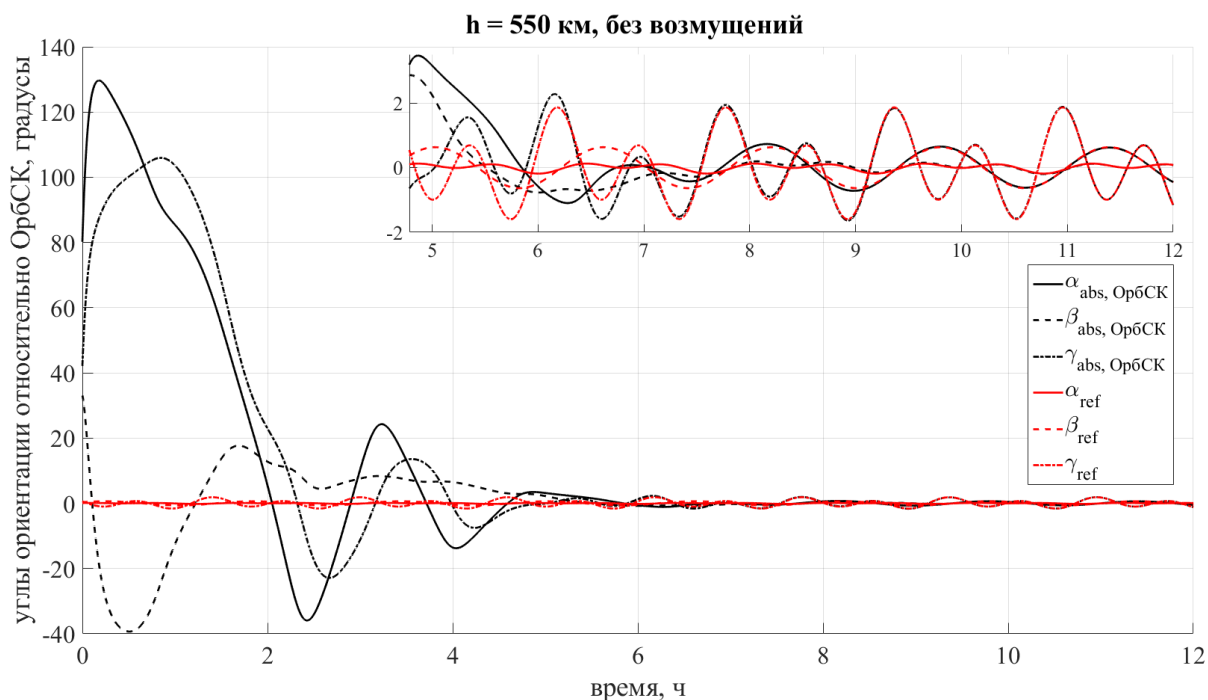


Рис. 7. Углы ориентации относительно ОрбСК: *черным* – углы изменения ориентации ССК относительно ОрбСК, *красным* – углы, задающие опорное движение (ОпСК относительно ОрбСК)

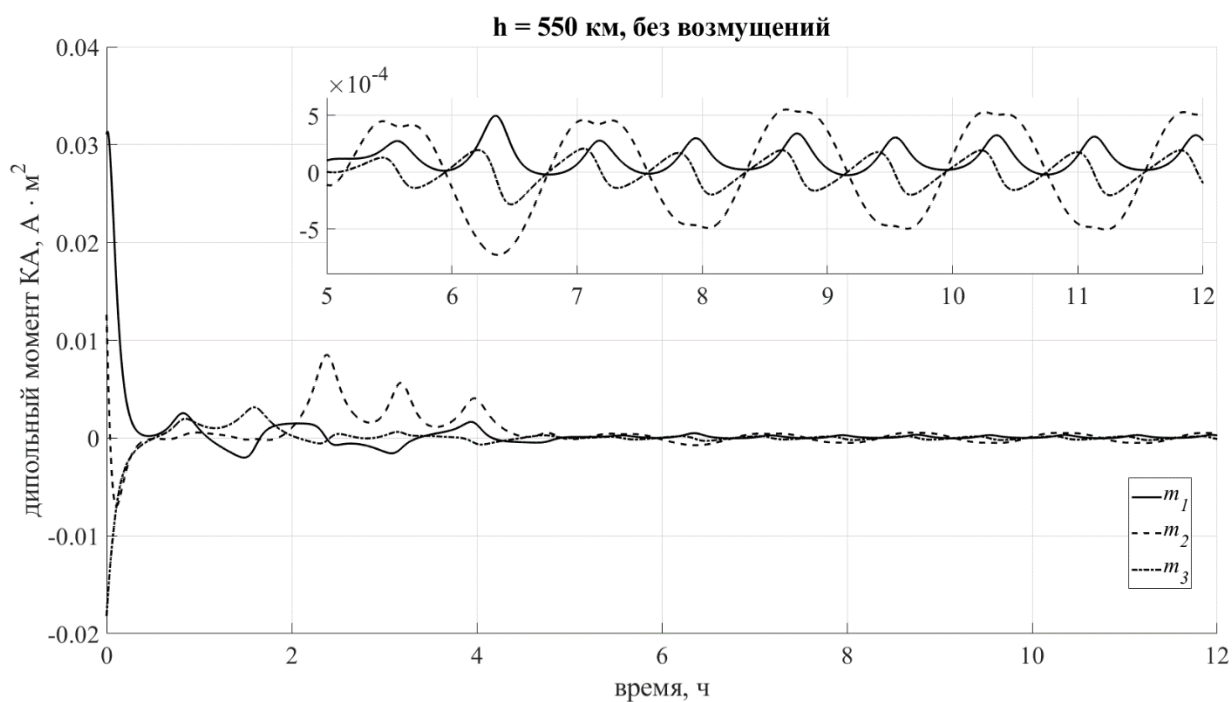


Рис. 8. Дипольный момент КА

Таким образом, с помощью метода роя построено опорное движение и найдены коэффициенты управления, которые обеспечивают итоговую точность относительно целевой ориентации (орбитальной) равную 2 градусам в невозмущенной задаче.

### **Выводы к главе 1**

В Главе 1 построена и обоснована методика построения управляемого МСО опорного движения и коэффициентов управления с помощью решения задач нелинейной оптимизации методом роя частиц. Получены оценки точности ориентации в окрестности целевой с помощью решения задачи квадратичного программирования с ограничением типа равенства. Результаты Главы 1 опубликованы в работах [64,80–83].

## Глава 2. Построение управления с учетом возмущений

В настоящей главе рассматривается адаптация методики, построенной в Главе 1 диссертационной работы, к возмущенной задаче. Рассматриваются неточности знания моделей геомагнитного поля, отличие тензора инерции от его расчетных значений и ошибки знания взаимодействия КА с атмосферой Земли.

Глава 2 построена следующим образом. Раздел 2.1 посвящен постановке задачи и анализу уравнений движения, используемых при описании движения КА с МСО, с учетом возмущений. В разделе 2.2 предложена методика уменьшения ошибки отслеживания опорного движения, возникающей из-за различия используемых моделей геомагнитного поля. В разделе 2.3 описывается эмпирический подход к автоматической донастройке коэффициентов управления для сохранения асимптотической устойчивости в возмущенной задаче.

### 2.1. Постановка задачи

В Главе 1 рассматривалась невозмущенная задача. Построенное с использованием функции Ляпунова управление (10) обеспечивает асимптотическую устойчивость только для решений невозмущенных уравнений движения. При добавлении возмущений итоговая точность ориентации относительно ЦСК в общем случае может ухудшиться. Во второй главе ставится задача адаптации построенной методики к возмущенной задаче и уменьшения влияния возмущений на итоговую точность ориентации. Рассматриваются следующие возмущения:

- 1) различие моделей геомагнитного поля на этапе построения опорного движения и этапе моделирования,
- 2) ошибки знания тензора инерции КА,
- 3) ошибки знания модели взаимодействия КА с атмосферой Земли,
- 4) влияние неучтенных случайных возмущающих моментов  $\mathbf{M}_{dist}$ .

Для оценки итоговой точности в зависимости от внешних возмущений записываются линеаризованные в окрестности опорной ориентации дифференциальные уравнения движения, которые в случае возмущенной задачи имеют вид

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{G}(t) + \delta\mathbf{G}(t))\mathbf{y} + (\mathbf{f}(t) + \delta\mathbf{f}(t)), \quad (45)$$

где матрица  $\delta\mathbf{G}(t)$  и вектор  $\delta\mathbf{f}(t)$  появляются из-за возмущений. Полностью учесть возмущения на этапах построения опорного движения и поиска коэффициентов управления не представляется возможным. При этом точность отслеживания опорного движения обычно ухудшается из-за возмущений неоднородного члена  $\delta\mathbf{f}(t)$ . Из-за возмущений матрицы системы  $\delta\mathbf{G}(t)$  также может ухудшаться точность итоговой ориентации, а в некоторых случаях будет возникать неустойчивость.

Таким образом в Главе 2 диссертационной работы ставится задача уменьшить влияние  $\delta\mathbf{f}(t)$  и  $\delta\mathbf{G}(t)$  за счет учета ошибок и внесения поправок в используемые модели. Далее рассмотрим эти две величины по отдельности.

## 2.2. Учет ошибок моделей

### 2.2.1. Выбор модели геомагнитного поля

Рассмотрим выражение для правой части уравнения (45) и найдем явный вид неоднородной части  $\mathbf{f}(t) + \delta\mathbf{f}(t)$ , учитывая возмущения только от различия моделей, описывающих геомагнитное поле, используемых на этапе построения опорного движения и этапе численного моделирования. По аналогии с описанным в Приложении Б матрица возмущенной системы  $\mathbf{G}(t) + \delta\mathbf{G}(t)$  имеет блочный вид и включает члены для соответствующих компонент вектора состояния  $(\boldsymbol{\omega}_{rel}^T, \mathbf{s}^T)^T$ . Неоднородная часть  $\mathbf{f}(t) + \delta\mathbf{f}(t)$  не содержит этих величин; ее первое слагаемое совпадает с выражением (32), а второе равно

$$\delta f(t) \approx -2 \frac{\mathbf{C}\mathbf{B} \left( (\mathbf{C}\mathbf{B})^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 \right)}{B^2} (\mathbf{B}^T \delta \mathbf{B}) -$$

$$- \frac{\mathbf{C} \delta \mathbf{B} \left( (\mathbf{C}\mathbf{B})^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 \right)}{B^2} - \frac{\mathbf{C}\mathbf{B} \left( (\mathbf{C} \delta \mathbf{B})^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 \right)}{B^2}.$$

Таким образом, уменьшение ошибки отслеживания опорного движения возможно за счет выбора более близкого к реальному магнитному полю Земли описания геомагнитного поля и использования его на этапе построения опорного движения. Модель наклонного диполя (или модель IGRF), используемая при численном моделировании, считается «реальным» полем  $\mathbf{B}^{real}$ . Модель прямого диполя используется в процессе построения опорного движения и управления, так как является периодической, и считается приближенным упрощенным представлением геомагнитного поля. Разница между «реальным» полем и упрощенной моделью влияет на эффективность управления. Отклонение вектора геомагнитной индукции в модели наклонного диполя от модели, используемой на этапах построения  $\mathbf{B}$ , равно

$$\delta \mathbf{B} = \mathbf{B}^{real} - \mathbf{B}. \quad (46)$$

Обеспечение равенства нулю выражения (46) за счет использования одной из указанных моделей «реального» поля на этапе построения опорного движения невозможно, так как эти модели не являются периодическими функциями, следовательно, выводы, сделанные из теории Флоке, будут неприменимы. Однако, если найти модель геомагнитного поля  $\tilde{\mathbf{B}}$ , более близкую в некотором смысле в каждый момент на заданном временном промежутке  $[t_0, t_1]$  к «реальному» полю, чем прямой диполь, и использовать ее вместо модели прямого диполя при построении опорного движения и управления, то отклонение (46) можно уменьшить. Искомая модель  $\tilde{\mathbf{B}}$  ищется в виде функции со следующими свойствами:

- 1)  $\tilde{\mathbf{V}}(t)$  – периодическая функция с периодом  $\frac{T}{2}$ , равным периоду вектора геомагнитной индукции в модели прямого диполя,
- 2) разница  $\delta\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}^{real}(t) - \tilde{\mathbf{V}}(t)$  на заданном интервале времени  $[t_0, t_1]$  минимальна в некотором смысле.

Первое требование основано на применимости теории Флоке для построения опорного движения с использованием новой модели. Для этого будем искать  $\tilde{\mathbf{V}}$  в виде дипольной модели

$$\tilde{\mathbf{V}} = -B_0 \left( \tilde{\mathbf{k}} - 3 \left( \frac{\tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{r}}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (47)$$

где  $\tilde{\mathbf{k}} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, -\cos \theta)^T = const$  – орт оси диполя, заданный с помощью сферических координат – углов  $\varphi, \theta$  – в ИСК.

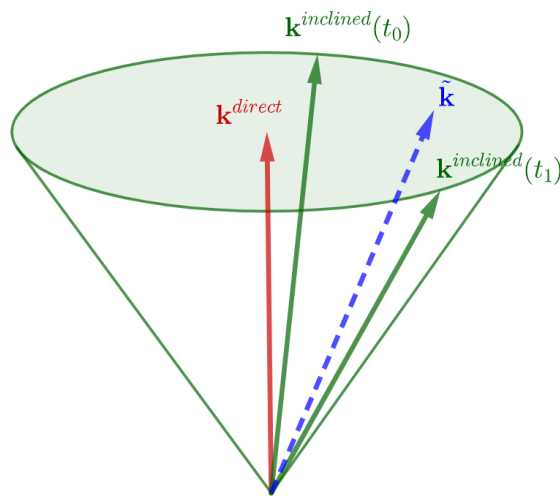


Рис. 9. Ортосей прямого  $\mathbf{k}^{direct}$ , наклонного  $\mathbf{k}^{inclined}$  и нового диполя  $\tilde{\mathbf{k}}$ ;

$\mathbf{k}^{direct}$  и  $\tilde{\mathbf{k}}$  – постоянные векторы в ИСК,

$\mathbf{k}^{inclined}(t)$  – периодическая вектор-функция с периодом 24 часа

Для примера на Рис. 9 показан орт оси прямого диполя  $\mathbf{k}^{direct}$ , ортосей наклонного диполя  $\mathbf{k}^{inclined}(t_0)$  и  $\mathbf{k}^{inclined}(t_1)$  в моменты времени на границах рассматриваемого временного интервала  $[t_0, t_1]$ , а также орт оси искомой модели диполя  $\tilde{\mathbf{k}}$  (наклонен по отношению к орту оси прямого диполя).



Нужно найти такой орт  $\tilde{\mathbf{k}}$  новой дипольной модели (47), чтобы функция, описывающая ее, была ближе в некотором смысле на рассматриваемом интервале времени к функции, описывающей модель наклонного диполя, которая является «реальной» в этом примере. С помощью метода роя осуществляется поиск коэффициентов  $\varphi$  и  $\theta$ , параметризующих орт оси нового диполя  $\tilde{\mathbf{k}}$ , таким образом, чтобы удовлетворить второму свойству, которым должна обладать функция  $\tilde{\mathbf{V}}(t)$ .

### 2.2.2. Формализация задачи

Для формализации задачи поиска оптимальных параметров орта оси искомой дипольной модели, рассмотрим четыре выражения, приведенные в Таблице 6, каждое из которых задает отличие вектора  $\tilde{\mathbf{V}}(t_i)$  от вектора геомагнитной индукции «реального» поля  $\mathbf{B}^{real}(t_i)$  в момент времени  $t_i \in [t_0, t_1]$ .

Таблица 6. Используемые в задаче поиска параметров дипольной модели выражения

$\delta\beta_1$	$\frac{\ \mathbf{B}^{real}(t_i) - \tilde{\mathbf{V}}(t_i)\ _2}{\ \mathbf{B}^{real}(t_i)\ _2}$
$\delta\beta_2$	$\frac{\ \mathbf{B}^{real}(t_i) - \tilde{\mathbf{V}}(t_i)\ _\infty}{\ \mathbf{B}^{real}(t_i)\ _\infty}$
$\delta\beta_3$	$\frac{\ \mathbf{B}^{real}(t_i) - \tilde{\mathbf{V}}(t_i)\ _2}{\ \mathbf{B}^{real}(t_i)\ _2}$
$\delta\beta_4$	$\frac{\ \mathbf{B}^{real}(t_i) - \tilde{\mathbf{V}}(t_i)\ _\infty}{\ \mathbf{B}^{real}(t_i)\ _2}$

Для того, чтобы обеспечить минимум нормы в каждый момент времени на всем рассматриваемом временном интервале  $[t_0, t_1]$ , ставится задача нелинейной оптимизации с целевой функцией

$$\Phi_k^{dipole} = \max_{t_i} (\delta\beta_k)_{t_i} \rightarrow \min, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad t_i \in [t_0, t_1], \quad (48)$$

$$\mathbb{U} = \{\varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi/2)\},$$

где выражения для  $\delta\beta_k$  приведены в Таблице 6.

Искомая дипольная модель тем лучше приближает «реальное» магнитное поле по сравнению с прямым диполем, чем меньше выбран рассматриваемый временной интервал  $[t_0, t_1]$ . Однако, минимально возможный интервал равен одному витку (орбитальному периоду  $T$ ), так как опорное движение, которое учитывает дипольную модель, строится на один период. Таким образом, наилучшей будет длительность  $L$  интервала  $[t_0, t_1]$ , равная одному витку, то есть каждый виток необходимо искать новый вектор  $\tilde{\mathbf{k}}$ . Однако, с учетом нового приближения необходимо будет пересчитывать опорное движение на следующий виток, а затем искать новые коэффициенты управления. Это требует значительных вычислительных затрат при решении задач оптимизации, поскольку для повышения конечной точности ориентации на каждом временном интервале должны решаться все три задачи оптимизации – поиск оптимальных параметров дипольной модели, оптимальных параметров опорного движения и оптимальных коэффициентов управления. При этом смена опорного движения приведет в моменты переключения между ними к неизбежным переходным процессам. Более того, переходные процессы могут не успеть закончиться до момента переключения на следующее опорное движение. Следовательно, длительность временного интервала необходимо выбирать с учетом этого, но не меньше, чем один виток:  $L \geq T$ .

В Таблице 7 приведены параметры метода роя для задачи поиска оптимальных параметров орта оси искомой дипольной модели.

Таблица 7. Параметры метода роя

Число частиц в рое	$P$	24
Число итераций	$N$	250

### 2.2.3. «Склейка» опорных движений

Для лучшего приближения геомагнитного поля на этапе построения опорного движения к «реальному» геомагнитному полю, используемому при моделировании в полной модели, чтобы тем самым уменьшить ошибки отслеживания опорного движения, каждый раз через временные интервалы выбранной длительности  $L$  повторяется поиск оптимальных параметров орта оси диполя. Затем с учетом этого проводится построение опорного движения на этом интервале и поиск коэффициентов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость (Рис. 10).

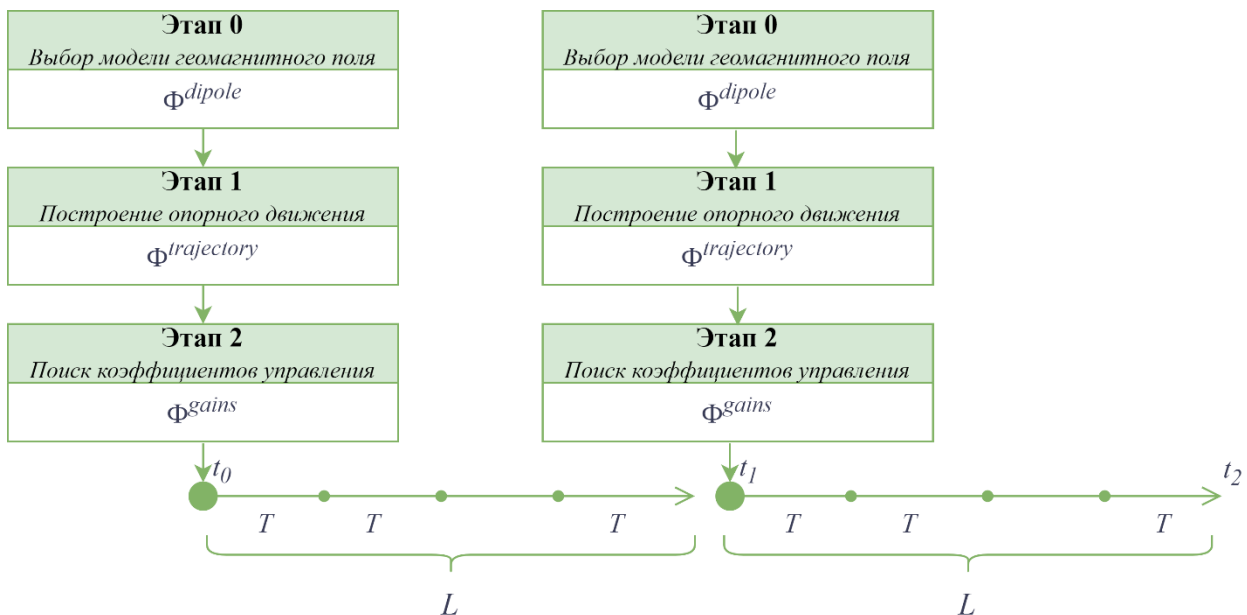


Рис. 10. Схема алгоритма построения управляемого МСО движения

В моменты «переключения» между интервалами при переходе от опорного движения на одном интервале к опорному движению на другом интервале углы ориентации меняются скачком – происходит разрыв функции первого рода. Для того, чтобы обеспечить непрерывность управляющего момента при переключении интервалов необходимо гарантировать непрерывность вторых производных углов опорного движения. Для этого в работе предлагается проводить в момент переключения между интервалами процедуру «склейки» опорных движений. «Склейка» реализуется путем изменения количества

независимых параметров (коэффициентов) опорного движения на Этапе 1 (этапе поиска их оптимальных значений методом роя) на всех интервалах, начиная со второго. Рассмотрим без ограничения общности условия для процедуры «склейки» угла  $\alpha_{ref}(t)$  между первым интервалом  $[t_0, t_1]$  и вторым  $[t_1, t_2]$  (Рис. 10). С учетом (28) запишем выражения для угла  $\alpha_{ref}$ , его производной  $\dot{\alpha}_{ref}$  и второй производной  $\ddot{\alpha}_{ref}$  на правой границе первого интервала

$$\begin{aligned}\alpha_{ref}(t_1) &= a_1 \sin \omega_0 t_1 + a_2 \cos \omega_0 t_1 + a_3 \sin 2\omega_0 t_1 + a_4 \cos 2\omega_0 t_1, \\ \dot{\alpha}_{ref}(t_1) &= a_1 \omega_0 \cos \omega_0 t_1 - a_2 \omega_0 \sin \omega_0 t_1 + 2a_3 \omega_0 \cos 2\omega_0 t_1 - 2a_4 \omega_0 \sin 2\omega_0 t_1, \\ \ddot{\alpha}_{ref}(t_1) &= -a_1 \omega_0^2 \sin \omega_0 t_1 - a_2 \omega_0^2 \cos \omega_0 t_1 - 4a_3 \omega_0^2 \sin 2\omega_0 t_1 - 4a_4 \omega_0^2 \cos 2\omega_0 t_1.\end{aligned}$$

Выберем в качестве свободной переменной  $a_1$ , а остальные параметры  $a_2, a_3, a_4$  получим из решения следующей системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ref}(t_1) - a_1 \sin \omega_0 t_1 \\ \dot{\alpha}_{ref}(t_1)/\omega_0 - a_1 \cos \omega_0 t_1 \\ \ddot{\alpha}_{ref}(t_1)/\omega_0^2 + a_1 \sin \omega_0 t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t_1 & \sin 2\omega_0 t_1 & \cos 2\omega_0 t_1 \\ -\sin \omega_0 t_1 & 2\cos 2\omega_0 t_1 & -2\sin 2\omega_0 t_1 \\ -\cos \omega_0 t_1 & -4\sin 2\omega_0 t_1 & -4\cos 2\omega_0 t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Для углов  $\beta_{ref}$  и  $\gamma_{ref}$  – аналогично. Соответствующая задача оптимизации также решается методом роя частиц, однако, необходимо выбрать границы области поиска коэффициентов так, чтобы зависимые параметры удовлетворяли исходным ограничениям  $\mathbb{U} = \{a_k, b_k, g_k \in [b_{\min}, b_{\max}], k = \overline{2,4}\}$ . Для поиска новой области поиска введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t_1 & \sin 2\omega_0 t_1 & \cos 2\omega_0 t_1 \\ -\sin \omega_0 t_1 & 2\cos 2\omega_0 t_1 & -2\sin 2\omega_0 t_1 \\ -\cos \omega_0 t_1 & -4\sin 2\omega_0 t_1 & -4\cos 2\omega_0 t_1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{a}} &= \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \alpha_{ref}(t_1) \\ \dot{\alpha}_{ref}(t_1)/\omega_0 \\ \ddot{\alpha}_{ref}(t_1)/\omega_0^2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t_1 \\ -\cos \omega_0 t_1 \\ \sin \omega_0 t_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тогда система (49) в новых обозначениях принимает вид

$$\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{a}} = \widehat{\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{c}}a_1. \quad (50)$$

Из вида ограничений в задаче поиска оптимальных параметров опорного движения (39) получаем оценку

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \leq \xi^2,$$

или

$$a_1^2 + \hat{a}^2 \leq \xi^2, \quad (51)$$

где  $\xi^2 = 4 \max(b_{\min}^2, b_{\max}^2)$ . С учетом (50) неравенство (51) переписывается в виде

$$fa_1^2 + ga_1 + h \leq 0,$$

где  $f = 1 + \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{A}}^{-T} \hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{c}}$ ,  $g = \hat{\mathbf{b}}^T \hat{\mathbf{A}}^{-T} \hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{A}}^{-T} \hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{b}}$ ,  $h = -\xi^2 + \hat{\mathbf{b}}^T \hat{\mathbf{A}}^{-T} \hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{b}}$ .

Таким образом, решая квадратное неравенство, получаем новые границы на оптимизируемый параметр  $a_1$ :

$$\hat{b}_{\min} = \frac{-g - \sqrt{g^2 - 4fh}}{2f} \leq a_1 \leq \frac{-g + \sqrt{g^2 - 4fh}}{2f} = \hat{b}_{\max}.$$

Для параметров  $b_1$ ,  $g_1$  аналогично.

Преимущества процедуры «склейки»:

- ускорение работы программы за счет оптимизации 3-х параметров вместо 12-ти,
- построение дважды непрерывно-дифференцируемого опорного движения, обеспечивающего непрерывность управляющего момента  $\mathbf{M}_{ctrl}^0$  (27), реализующего опорное движение, что позволяет избежать переходных процессов при переключении между интервалами.

#### 2.2.4. Численный пример

На примере орбитальной целевой ориентации для высоты орбиты 650 км рассмотрим опорное движение, состоящее из трех временных интервалов длительностью  $L = 6T$  каждый. На каждом интервале с помощью метода роя частиц получен оптимальный в смысле целевой функции №4 (48) орт оси  $\tilde{\mathbf{k}}$  дипольной модели  $\tilde{\mathbf{B}}$  геомагнитного поля

$$\Phi_4^{dipole} = \max_{t_i} \left( \frac{\|\mathbf{B}^{real}(t_i) - \tilde{\mathbf{B}}(t_i)\|_{\infty}}{\|\mathbf{B}^{real}(t_i)\|_2} \right)_{t_i},$$

где для первого интервала  $L_1 - t_i \in [0, 6T]$ , для второго  $L_2 - t_i \in [6T, 12T]$ , для третьего  $L_3 - t_i \in [12T, 18T]$ . Затем с учетом этого для каждого интервала найдены оптимальные в смысле целевой функции №1 (39) параметры опорного движения

$$\Phi_1^{trajectory} = \max_i \left\| \left\| \frac{\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i)}{B(t_i)} \left( \frac{(\mathbf{C}(t_i)\mathbf{B}(t_i))^T \mathbf{M}_{ctrl}^0(t_i)}{B(t_i)} \right) \right\|_2 \right\|.$$

Границы области поиска аналогичны приведенным в п.1.8.3.

На Рис. 11а изображен график для угла  $\alpha_{ref}$ . На Рис. 11б в полярных координатах отмечены концы векторов  $\tilde{\mathbf{k}}$ : по радиус-вектору отложена длина проекции вектора  $\tilde{\mathbf{k}}$  на плоскость  $OZ_1Z_2$  инерциальной системы координат, а угол соответствует углу между осью  $OZ_1$  и указанной проекцией. Значения параметров  $a_k$ ,  $k = \overline{1,4}$ , а также орты оси диполей, найденные методом роя для каждого интервала, приведены в Таблице 8. На соседних интервалах значения параметров  $a_k$ ,  $k = \overline{1,4}$  близки, а орты осей диполя распределены в пространстве около вектора оси прямого диполя (Рис. 11б), так как суммарный рассматриваемый временной интервал составляет около 28 часов (чуть больше суток – периода изменения направления орта оси наклонного диполя). Таким образом, итоговое опорное движение, состоящее из 3 интервалов длительностью 6 витков каждый, обеспечивает непрерывность управляющего момента на нем, а также хорошую точность ориентации в окрестности целевой – в среднем отклонение ОпСК от ОрбСК для угла  $\alpha_{ref}$  составляет около 0.3 градусов.

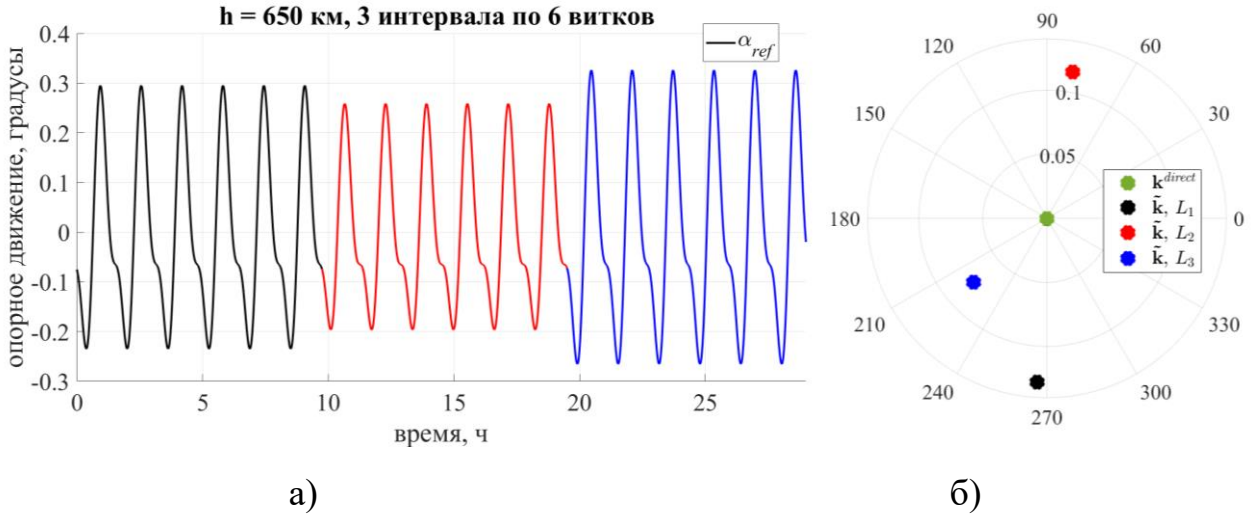


Рис. 11. а) опорное движение для задачи орбитальной ориентации с процедурой «склейка» для 3 интервала длительностью  $L = 6T$ , б) положение векторов  $\tilde{\mathbf{k}}$  для каждого интервала

Таблица 8. Значения для коэффициентов  $a_k$ ,  $k = \overline{1,4}$  в выражении для угла  $\alpha_{ref}$  и орты осей диполей на каждом интервале

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$\tilde{\mathbf{k}}$
Интервал 1 $L_1 = [0, 6T]$	-0.153	-0.154	0.051	0.079	$\begin{pmatrix} 0.007 \\ -0.128 \\ -0.992 \end{pmatrix}$
Интервал 2 $L_2 = [6T, 12T]$	-0.107	-0.153	0.029	0.078	$\begin{pmatrix} 0.020 \\ 0.114 \\ -0.993 \end{pmatrix}$
Интервал 3 $L_3 = [12T, 18T]$	-0.182	-0.158	0.066	0.082	$\begin{pmatrix} -0.057 \\ -0.050 \\ -0.997 \end{pmatrix}$

## 2.3. Учет ошибок знания моделей внешней среды и тензора инерции КА

### 2.3.1. «Сдвиг» коэффициентов управления

Далее рассмотрим влияние возмущений на асимптотическую устойчивость опорного движения. Матрице возмущенной системы (45)  $\mathbf{G}(t) + \delta \mathbf{G}(t)$  соответствует матрица монодромии  $\mathbf{X}(T) + \delta \mathbf{X}(T)$ . С помощью метода роя на Этапе 2 в Главе 1 диссертационной работы найдены коэффициенты управления  $k_d$ ,  $k_\omega$ , обеспечивающие асимптотическую устойчивость без учета возмущений. Коэффициенты удовлетворяют условию  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = \overline{1,6}$ , где  $\lambda_i$  – собственные значения матрицы монодромии  $\mathbf{X}(T)$  невозмущенной системы, то есть лежат внутри области устойчивости невозмущенной задачи. При учете внешних возмущений область устойчивости деформируется и коэффициенты управления  $k_d$ ,  $k_\omega$ , найденные на Этапе 2, могут оказаться вне новой (деформированной) области устойчивости, то есть модуль одного или нескольких собственных значений для найденных коэффициентов управления могут стать больше единицы или близкими к единице в возмущенном случае. Это приведет либо к существенному ухудшению итоговой точности ориентации, либо к потере устойчивости.

Чаще всего такая ситуация наблюдается, если точка на плоскости коэффициентов лежит близко к границе недеформированной области устойчивости (Рис. 12) (деформированная область устойчивости приведена для примера для некоторых типовых возмущений). Таким образом, необходима процедура, предотвращающая выход коэффициентов из области устойчивости при добавлении возмущений. Из Рис. 12а видно, что если передвинуть коэффициенты управления вверх (по оси  $k_d$ ), ближе к центру области устойчивости, то в деформированной области (с учетом возмущений) коэффициенты также будут лежать вдали от границы (Рис. 12б).



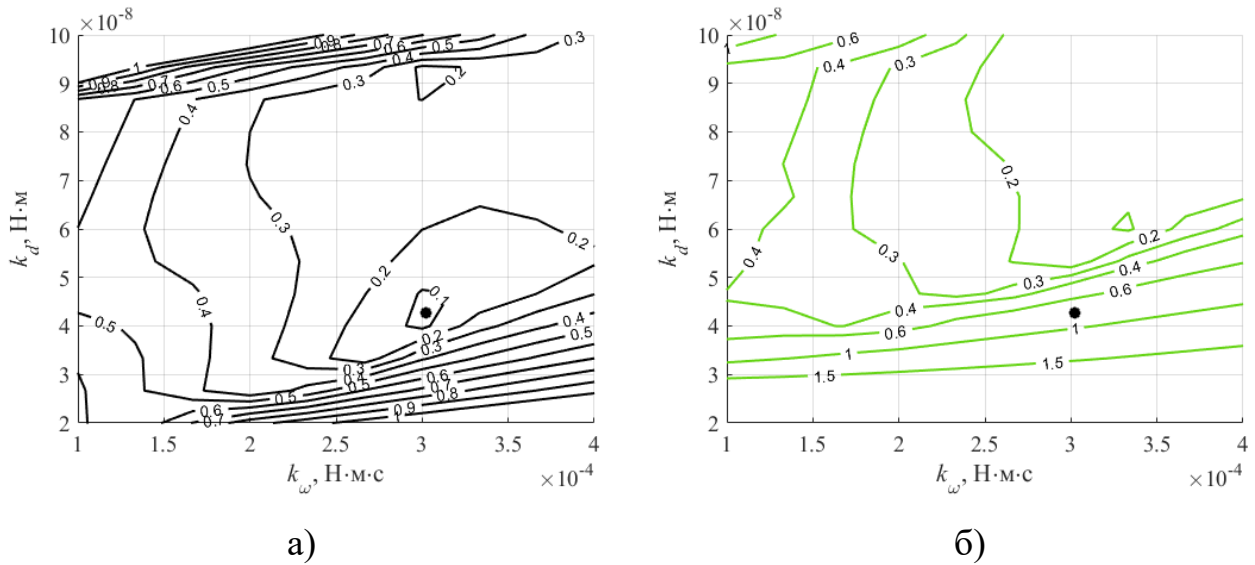


Рис. 12. Линии уровня  $\max |\lambda_i|$  в пространстве коэффициентов управления:  
 без возмущений (а) и с возмущениями (б),  
 найденные методом роя коэффициенты управления  $k_d$ ,  $k_\omega$  (точка)

Однако, такая процедура предполагает построение области устойчивости и изменение коэффициентов вручную после анализа полученной области в невозмущенном случае. Недостатки такого подхода очевидны. Во-первых, необходимо построить область устойчивости, что требует значительных вычислительных затрат, так как требуется численное вычисление матриц монодромии (как описано в п.1.9.1) для большого количества коэффициентов. Для нахождения линий уровня, подобных изображенным на Рис. 12, в пространстве коэффициентов строится сетка. Каждый узел сетки соответствует некоторой паре коэффициентов, для которых необходимо вычислить матрицу монодромии и найти максимальное по модулю ее собственное значение. Чем мельче ячейки сетки, тем точнее линии уровня будут описывать область устойчивости. Второй недостаток приведенного подхода состоит в необходимости непосредственного участия человека в принятии решения о перемещении коэффициентов управления после того, как получена область устойчивости в невозмущенной задаче.

В диссертационной работе оба недостатка описанного выше способа устраняются с помощью эмпирически разработанной процедуры автоматического «сдвига» коэффициентов на основе информации, собранной методом роя в процессе поиска оптимальных коэффициентов управления. Суть алгоритма автоматического «сдвига» коэффициентов состоит в следующем. Так как на Этапе 2 на каждой итерации каждая частица роя в своем положении вычисляет значение целевой функции, то рой в процессе поиска собирает некоторые сведения о структуре области устойчивости в пространстве коэффициентов. На Рис. 13б изображены положения частиц роя за все итерации поиска метода роя, у которых в этом положении значение целевой функции было не больше 0.6. Расположение частиц около лучшего положения и в пространстве коэффициентов в целом за все итерации дает представление об области устойчивости и позволяет «сдвинуть» найденные коэффициенты «вглубь» области устойчивости, дальше от ее границы.

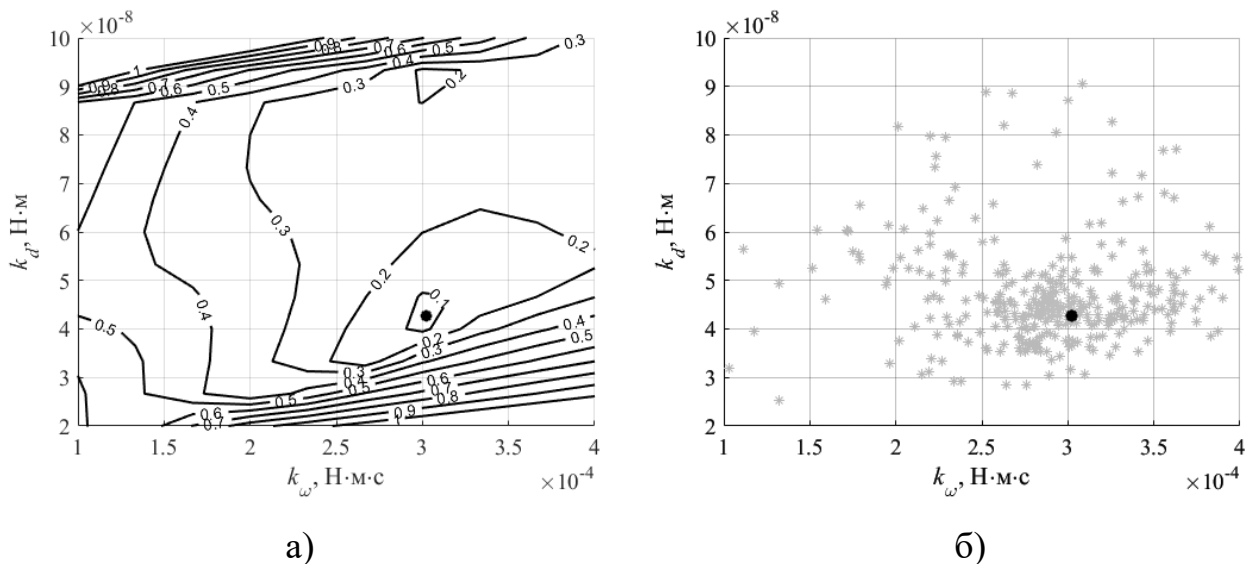


Рис. 13. а) линии уровня  $\max |\lambda_i|$  в пространстве коэффициентов управления без возмущений, б) распределение частиц роя на всех итерациях поиска

Будем полагать, что область устойчивости односвязная (это подтверждается численными расчетами, проведенными в рамках диссертационного исследования, и другими работами [44,84]). Из Рис.13б видно, что лучшее значение не находится на равномерном удалении от всех выбранных положений

роя, отсюда можно сделать предположение о том, что лучшее значение лежит близко к одной из границ области устойчивости и далеко от противоположной, что согласуется с областью устойчивости, построенной по сетке (Рис. 13а). При этом, так как область устойчивости в рассматриваемых в диссертации задачах обеспечения типовых целевых ориентаций, как правило, является протяженной вдоль параметра  $k_\omega$ , то выход точки (коэффициентов управления) из области устойчивости обусловлен деформациями области устойчивости вдоль направления изменения параметра  $k_d$ . Таким образом, целесообразно проводить «сдвиг» коэффициентов только по значению параметра  $k_d$ . Новое значение для коэффициента  $k_d$  определяется выражением (которое является некоторым аналогом средневзвешенного для материальных точек с различными массами)

$$\begin{pmatrix} k_\omega \\ k_d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«сдвиг»}} \begin{pmatrix} k_\omega \\ k_{d,new} \end{pmatrix}, \text{ где } k_{d,new} = \frac{\sum_{p=1}^{p_{\max}} \Phi^{gains}(p) \cdot k_d(p)}{\sum_{p=1}^{p_{\max}} \Phi^{gains}(p)},$$

где  $p_{\max}$  – количество частиц на всех итерациях, для которых  $\Phi^{gains}(p) \leq 0.6$ .

### 2.3.2. Численный пример

Приведем пример работы процедуры «сдвига» коэффициентов управления на задаче орбитальной ориентации. Опорное движение найдем с помощью целевой функции  $\Phi_2^{trajectory}$ . Параметры моделирования приведены в Таблице 9.

Таблица 9. Параметры задачи

ЦСК	орбитальная ориентация
Высота круговой орбиты	550 км
Наклонение	$i = 57^\circ$
Время моделирования	6T (6 витков)
Форма КА	10 × 20 × 30 см (параллелепипед, 6U-кубсат)

Тензор инерции КА	$\mathbf{J} = \text{diag}(0.15, 0.13, 0.11) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
Смещение центра масс	$\mathbf{c} = (0, 1, 0) \text{ см}$
Ограничение на управление (дипольный момент)	$ m_i  \leq 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2, i = \overline{1, 3}$
Модель магнитного поля Земли	наклонный диполь
Неточность знания плотности атмосферы	20%
Неточность знания тензора инерции КА	5%
Внешние неучтенные возмущения	$\mathbf{M}_{dist} \sim 0.1 \cdot \mathbf{M}_{grav}$

Для оценки конечной точности ориентации в ЦСК (ОрбСК) в установившемся режиме, начальные условия КА рассчитываются по следующей формуле, которая определяет периодическое решение (22) в начальный момент времени:

$$\mathbf{y}(0) = [\mathbf{E} - \mathbf{X}(T)]^{-1} \mathbf{X}(T) \int_0^T \mathbf{X}^{-1}(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (52)$$

Таким образом, космический аппарат начинает движение на установившемся движении, минуя переходные процессы.

На Рис. 14 приведен результат работы описанного в п. 2.3.2 алгоритма. На Рис. 14а показано распределение частиц роя, для которых значение целевой функции меньше 0.6, на Рис. 14б изображены линии уровня возмущенной задачи в пространстве коэффициентов управления. На обоих рисунках показаны коэффициенты управления, найденные методом роя на Этапе 2 (обозначено точкой), а также коэффициенты управления, полученные после применения процедуры «сдвига» (обозначено ромбом). После автоматической процедуры «сдвига», описанной в п. 2.3.1, коэффициенты управления сместились ближе к геометрическому центру области устойчивости, и возможность потери асимптотической устойчивости при добавлении возмущений уменьшается.

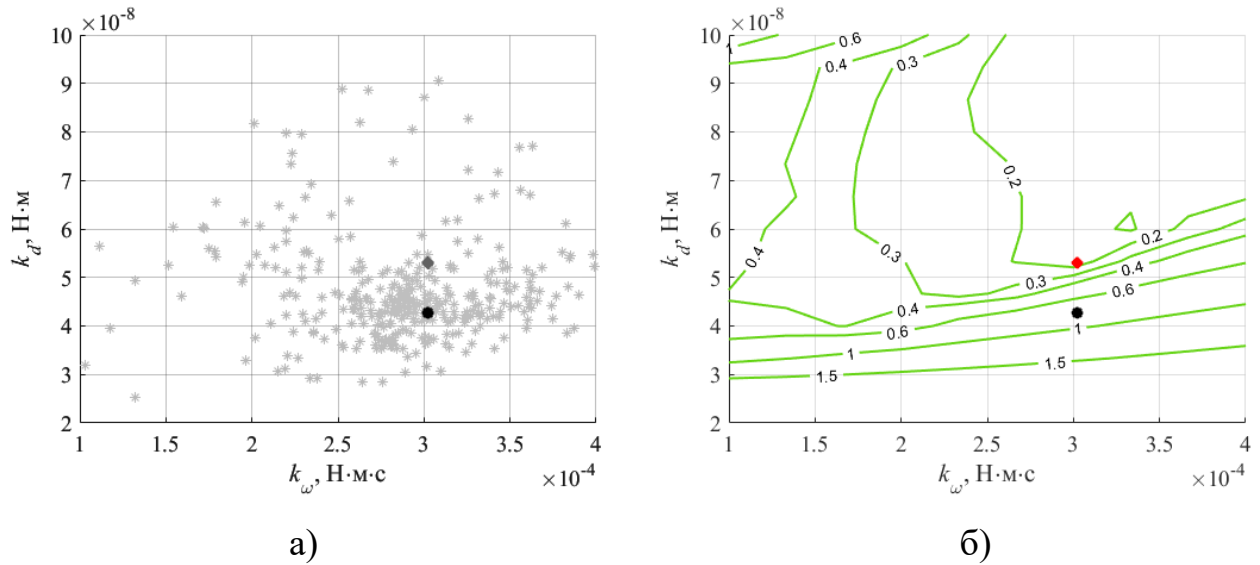


Рис. 14. Коэффициенты управления: найденные методом роя на этапе 2 (точка), полученные после применения процедуры «сдвига» (ромб); а) распределение частиц роя, для которых значение функционала меньше 0.6 (все итерации поиска); б) линии уровня  $\max|\lambda_i|$  в пространстве коэффициентов управления с возмущениями

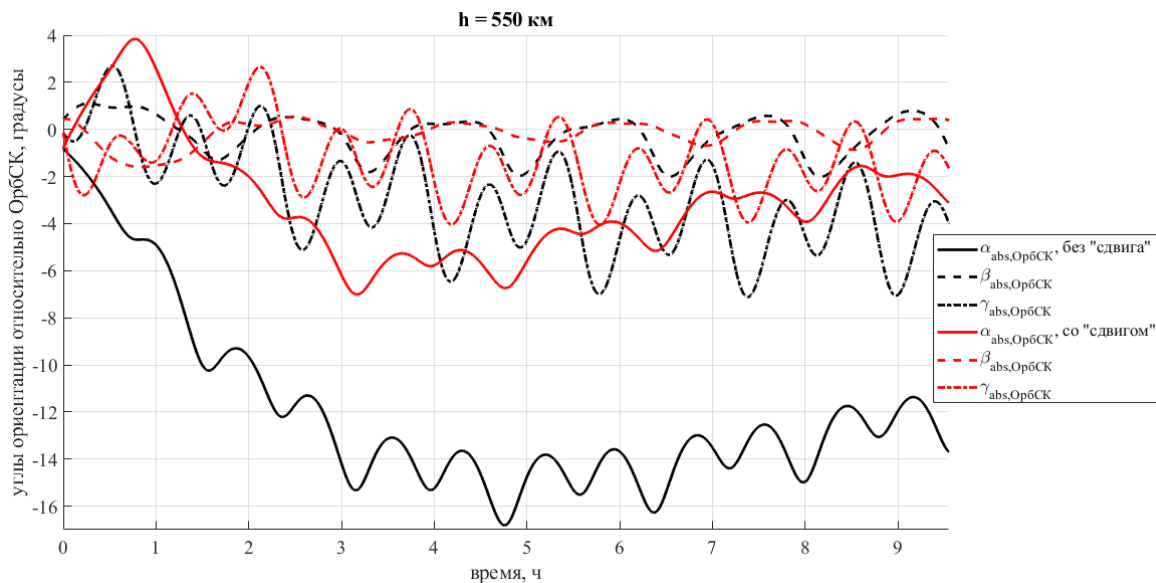


Рис. 15. Углы ориентации относительно ОрбСК: черным – углы изменения ориентации ССК относительно ОрбСК с коэффициентами, найденными методом роя на Этапе 2, красным – углы изменения ориентации ССК относительно ОрбСК с коэффициентами, полученными после процедуры «сдвига»

На Рис. 15 приведены углы ориентации ССК относительно ОрбСК при наличии возмущений. Черным изображен график для итоговых углов ориентации без применения алгоритма «сдвига» коэффициентов, точность составляет около 16 градусов. Красным – график для итоговых углов ориентации с использованием коэффициентов управления, полученных после применения алгоритма «сдвига». Точность улучшается в 2 раза и составляет около 7-8 градусов. Асимптотическая устойчивость при этом есть в обоих случаях, однако, при рассмотрении других возмущений может появиться неустойчивость в первом случае (без «сдвига»). Таким образом, процедура сдвига позволяет улучшить итоговую точность и сохранить асимптотическую устойчивость при наличии возмущений.

## **Выводы к главе 2**

Предложена методика поиска оптимальных параметров дипольной модели, описывающей геомагнитное поле, которая позволяет на заданных интервалах времени подобрать более близкую к реальному полю (чем модель прямого диполя) дипольную модель с постоянным вектором оси диполя. Это уменьшает ошибку отслеживания опорного движения, которая возникает из-за различия моделей геомагнитного поля на этапе построения опорного движения и этапе моделирования. Предложено несколько целевых функций для этой оптимизационной задачи. В моменты переключения между соседними интервалами проводится процедура «склейки» опорных движений, обеспечивающая непрерывность управляющего момента на опорном движении, а также позволяющая ускорить процесс поиска оптимальных коэффициентов опорного движения методом роя в 4 раза за счет уменьшения числа искомых параметров. Предложен алгоритм «сдвига» коэффициентов управления для улучшения итоговой точности и сохранения асимптотической устойчивости при наличии возмущений. Результаты Главы 2 опубликованы в работах [82,85].

## **Глава 3. Применение разработанной методики к задачам ориентации в ИСК и ОрбСК**

В настоящей главе методика построения трехосного магнитного управления КА, разработанная в Главе 1 и адаптированная к возмущенной задаче в Главе 2, применяется к типовым задачам ориентации – инерциальной, орбитальной и «косой» орбитальной. Учитываются особенности применения методики в каждом случае, проводится численный анализ, позволяющий выбрать те целевые функции, которые обеспечат минимальное отклонение от опорного движения при наличии возмущений.

Глава 3 построена следующим образом. Раздел 3.1 посвящен описанию общей постановки задачи, также в нем приведены параметры численного моделирования, которые используются во всех режимах ориентации. Раздел 3.2 содержит в себе подробный численный анализ влияния ошибок знания тензора инерции КА, описан подход к формализации задачи на основе этого анализа – подход к выбору одного из лучших наборов целевых функций. Разделы 3.3-3.5 посвящены решению задач обеспечения трехосной ориентации КА с помощью МСО в заданных режимах – орбитальной ориентации, «косой» орбитальной и инерциальной ориентации соответственно. В каждом из этих разделов приведен анализ влияния ошибок знания тензора инерции, выбран один из наиболее устойчивых к возмущениям наборов целевых функций, а также приведен пример численного моделирования в полной модели для некоторых конкретных возмущений.

### **3.1. Общая постановка задачи**

Задача, решаемая в Главе 3 диссертационной работы, состоит в том, чтобы применить разработанную методику и исследовать влияние возмущений на итоговую точность ориентации для типовых режимов:

- 1) орбитальная ориентация в неустойчивом гравитационном положении равновесия,
- 2) «косая» орбитальная ориентация (постоянное отклонение осей от ОрбСК),
- 3) инерциальная ориентация.

Корректная формализация задачи способствует достижению цели по улучшению итоговой точности ориентации КА относительно ЦСК наравне со вспомогательными методиками, процедурами и алгоритмами, направленными на учет и уменьшение различных возмущений. Для того, чтобы выбрать конкретную целевую функцию, нужно проанализировать, к чему приведет такой выбор в возмущенной задаче. При построении опорного движения с целевыми функциями (39) получаются близкие значения углов, что было продемонстрировано в п. 1.8.3. Однако, при добавлении возмущений, отслеживание разных опорных движений может привести уже к существенно разным результатам. Это связано с тем, что часть модельного управляющего момента (26), которая в разные моменты времени не может быть реализована с помощью МСО, будет отличаться на близких движениях. На решение о том, какую целевую функцию на этапе построения опорного движения выбрать, влияет анализ возможных отклонений от опорного движения (то есть ССК от ОпСК) при рассмотрении большого количества различных возмущений в заданном известном диапазоне. Проведение такого численного анализа позволит выбрать один из наиболее устойчивых наборов целевых функции для каждого режима.

Во всех задачах ориентации в Главе 3 для примера рассматривается КА в форме прямоугольного параллелепипеда размером  $10 \times 20 \times 30$  см (6U-кубсат) со смещенным на 1 см в положительном направлении второй оси ССК центром масс. Тензор инерции КА в ССК –  $\mathbf{J} = \text{diag}(0.15, 0.13, 0.11)$  кг·м<sup>2</sup>. Наклонение орбиты –  $i = 57^\circ$ . Для анализа влияния атмосферы на итоговую точность



ориентации по аналогии с примером, приведенным в п. 1.8.3, рассматриваются две высоты орбит – 550 км и 650 км.

В первом и втором целевых режимах – орбитальной ориентации в неустойчивом гравитационном положении равновесия и «косой» орбитальной ориентации – при построении опорного движения в малой окрестности целевого на рассматриваемый КА действует малый гравитационный момент, характерная величина которого  $\mathbf{M}_{grav} \sim 10^{-9} - 10^{-10}$  Н·м, а также постоянный возмущающий аэродинамический момент того же порядка –  $\mathbf{M}_{aero} \sim 10^{-9} - 10^{-10}$  Н·м. Это приводит к необходимости учитывать и компенсировать управлением оба указанных момента на этапе построения опорного движения в указанных режимах.

Режим инерциальной ориентации характеризуется тем, что аэродинамический момент ( $\mathbf{M}_{aero} \sim 10^{-9} - 10^{-10}$  Н·м) на порядок меньше, чем гравитационный ( $\mathbf{M}_{grav} \sim 10^{-7} - 10^{-8}$  Н·м), и меняется периодически, тем самым вносит меньший вклад по сравнению с гравитационным. В связи с этим, на этапе построения опорного движения для режима инерциальной ориентации  $\mathbf{M}_{aero}$  не учитывается и считается возмущением.

В Таблице 10 приведены параметры моделирования, которые используются во всех режимах ориентации.

Таблица 10. Параметры моделирования

Высота круговой орбиты	1) 550 км 2) 650 км
Наклонение	$i = 57^\circ$
Время моделирования	$18T$ (18 витков)
Форма КА	$10 \times 20 \times 30$ см (параллелепипед, 6U-кубсат)
Тензор инерции КА	$\mathbf{J} = \text{diag}(0.15, 0.13, 0.11)$ кг·м <sup>2</sup>

Смещение центра масс	$\mathbf{c} = (0,1,0)$ см
Ограничение на управление (дипольный момент)	$ m_i  \leq 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2, i = \overline{1,3}$
Модель магнитного поля Земли	IGRF
Неточность знания плотности атмосферы	1) 20% (ОрбСК); 2) 100% (весь аэродинамический момент $\mathbf{M}_{aero}$ является возмущающим в ИСК)
Неточность знания тензора инерции КА	ошибка знания величин главных моментов – до 5%, ошибка знания положения главных осей – до 5°
Внешние неучтенные возмущения	$\mathbf{M}_{dist} \sim 0.1 \cdot \mathbf{M}_{grav}$

### 3.2. Анализ влияния ошибки знания тензора инерции КА

Для обеспечения трехосной ориентации в заданном целевом режиме последовательно решаются три оптимизационные задачи:

- 1) поиск оптимальных параметров орта оси дипольной модели,
- 2) построение опорного движения,
- 3) подбор оптимальных коэффициентов управления.

Для определения наилучшего набора целевых функций для первой (39) и второй (48) оптимизационных задач для каждого рассматриваемого режима ориентации (в ОрбСК, «косой» ОрбСК и ИСК) анализируются распределения наихудших значений точности отслеживания опорного движения (углов ориентации ССК относительно ОпСК в установившемся режиме) для различных возмущений тензора инерции КА.

Возмущенный тензор инерции моделируется следующим образом

$$\mathbf{J}_{dist} = \delta \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{J},$$

где  $\mathbf{J}$  – невозмущенный тензор инерции КА,  $\delta\mathbf{J} = \|\delta J_{ij}\|$  – матрица возмущений следующего вида

$$\delta\mathbf{J} = \delta\mathbf{J}^{diag} \delta\mathbf{J}^{rotation},$$

где  $\delta\mathbf{J}^{diag}$  – диагональная матрица, задающая отличие величин главных моментов (до 5% по каждой компоненте),  $\delta\mathbf{J}^{rotation}$  – матрица поворота, задающая отклонения главных осей инерции (максимальный угол в возмущенном и невозмущенном случаях составляет  $5^\circ$ ), задается углами  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , последовательность поворотов 2-3-1. Для удобства дальнейшего анализа набор возмущенных тензоров инерции (всего 3000 штук) разбит на четыре блока, описание которых приведено в Таблице 11.

Таблица 11. Структура набора возмущенных тензоров

Обозначение	Количество	Описание
$\mathbf{J}_{dist}^1$	600	только отличие величин главных моментов в возмущенном и невозмущенном случаях 0-3% (в том числе сюда входит невозмущенный тензор инерции $\mathbf{J}$ при $\delta\mathbf{J} = diag(1,1,1)$ )
$\mathbf{J}_{dist}^2$	400	только отличие величин главных моментов в возмущенном и невозмущенном случаях 3-5%
$\mathbf{J}_{dist}^3$	1200	отличие величин главных моментов до 5% и отклонение главных осей инерции до $3^\circ$
$\mathbf{J}_{dist}^4$	800	отличие величин главных моментов до 5% и отклонение главных осей инерции от $3^\circ$ до $5^\circ$

Для каждого набора целевых функций, приведенных в Таблице 12, находим оптимальные параметры дипольной модели, и, учитывая их, опорное движение и коэффициенты управления. Далее в каждом случае на одном и том же опорном движении для различных возмущений тензора вычисляем максимальное отклонение от опорного

$$\max_i |\alpha_{rel}(t_i), \beta_{rel}(t_i), \gamma_{rel}(t_i)|, \quad (53)$$

где  $t_i \in [0, L]$ , то есть моделирование проводится на промежутке, равном длительности временного интервала, выбранного при поиске оптимальных параметров дипольной модели. Параметры моделирования приведены в Таблице 10. Начальные данные КА выбираются равными начальным данным на соответствующем периодическом решении (аналогично описанному в п. 2.3.2 (52)). В Главе 3 для сравнения рассматриваются временные интервалы длительностью  $L = 3T$  и  $L = 6T$ .

Таблица 12. Наборы целевых функций для оптимизационных задач на этапе поиска параметров дипольной модели и параметров опорного движения

	$\Phi_1^{trajectory}$	$\Phi_2^{trajectory}$	$\Phi_3^{trajectory}$
Прямой диполь	№ 1.0	№ 2.0	№ 3.0
$\Phi_1^{dipole}$	№ 1.1	№ 2.1	№ 3.1
$\Phi_2^{dipole}$	№ 1.2	№ 2.2	№ 3.2
$\Phi_3^{dipole}$	№ 1.3	№ 2.3	№ 3.3
$\Phi_4^{dipole}$	№ 1.4	№ 2.4	№ 3.4

В каждом режиме полученные значения, по которым определяется одна из лучших пар целевых функций, для визуализации и отслеживания выбросов, медианных значений, а также определения интервала, содержащего 50% от всех результатов наносятся на коробчатые диаграммы (Box-plot). Пример подобной диаграммы приведен на Рис. 16. На диаграмме на горизонтальной оси отмечен номер набора целевых функции в соответствии с Таблицей 12, на вертикальной оси отложены значения наибольших относительных углов отклонения от опорного движения для рассматриваемых возмущений тензора инерции. Прямоугольник (*коробочка*) содержит 50% от всех полученных результатов, горизонтальная линия – медианное значение (выше и ниже указанной линии лежат соответственно по 50% результатов). Красные плюсики – *выбросы* – значения вне коробочки, составляющие также 50% результатов.

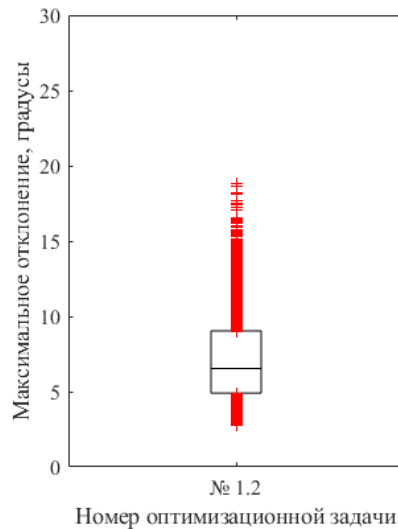


Рис. 16. Пример коробчатой диаграммы

Таким образом, «главной» целевой функцией является выражение (53), минимум которого необходимо найти среди всех предложенных наборов функционалов для типовых возмущений, то есть обеспечить трехосную ориентацию в заданном положении с помощью МСО с хорошей точностью ориентации (лучшей, чем в известных подходах) в возмущенном случае. Сразу формализовать задачу именно таким образом не представляется возможным, так как предсказать и учесть неизвестные возмущения на этапе построения опорного движения заранее невозможно. В предложенной методике, состоящей из последовательных этапов оптимизации (оси диполя, параметров опорного движения и коэффициентов управления), предлагается решать задачу минимизации отклонения ССК от ОпСК методом декомпозиции, разбивая большую сложную для формализации задачу на более простые подшаги. Приведенный в этой главе численный анализ, рассматривающий возмущения тензора инерции, представляет собой последний шаг, формализующий «главную» целевую функцию.

### 3.3. Орбитальная ориентация

Режим орбитальной ориентации часто используется в практических задачах для обеспечения связи, наблюдений Земли из космоса, которые не требуют высокой точности (достаточно 5-7 градусов), а также в качестве «дежурного»

режима – переходного режима ориентации между другими целевыми, так как в режиме орбитальной ориентации гравитационный момент мал и не требует компенсации.

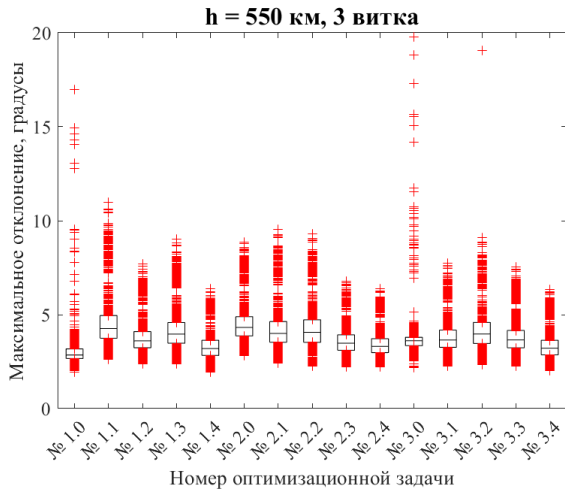
Следуя разработанной в Главах 1 и 2 методике построения трехосного управляемого МСО движения, необходимо предварительно выбрать границы области поиска оптимальных параметров опорного движения – для орбитальной ориентации они приведены в п. 1.8.3. Для определения конкретного набора целевых функций (Таблица 12) с параметрами, приведенными в Таблице 10, проведено моделирование с различными возмущениями тензора инерции, как описано в п. 3.2. Результаты представлены на Рис. 17 и Рис. 18 для высот орбит 550 км и 650 км соответственно.

Итоговая точность ориентации в случаях, когда тензор инерции известен только с ошибкой определения главных моментов (Рис. 17а,в, Рис. 18а,в), для высоты 550 км составляет 3-4 градуса (медианное значение) и для высоты 650 км – 0.5-1 градус. Однако, если направления главных осей тензора инерции известны с погрешностью до  $5^\circ$ , то это может привести в некоторых случаях к значительному ухудшению итоговой точности ориентации – до 20 градусов, медианное значение для проведенных численных экспериментов в этом случае ухудшается и составляет 4-5 градусов (550 км) и 2-3 градуса (650 км), при этом сама *коробочка* увеличивается, то есть ошибка ориентации в значительной степени зависит от ошибки знания тензора.

Точность ориентации улучшается (примерно на 1-1.5 градуса) при более частом пересчете оси диполя, опорного движения и коэффициентов управления, однако, если тензор инерции известен с достаточно большими ошибками, то длительность интервала аппроксимации геомагнитного поля играет несущественную роль (Рис. 17б,г, Рис. 18б,г).

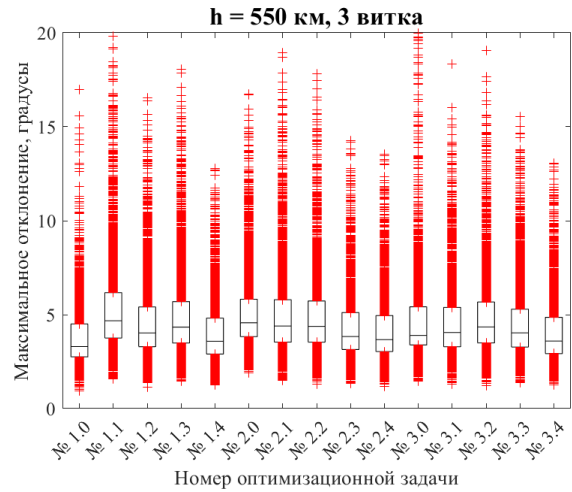
Использование новой дипольной модели целесообразно при более частом пересчете опорного движения, то есть при меньшей длительности интервала аппроксимации. Например, в случае, приведенном на Рис. 18а, видно, что наборы

целевых функций №1.3, №2.2, №3.1 (в каждом из которых используются соответствующие целевые функции для определения параметров новой дипольной модели) по медианному значению и *коробочке* лучшие в своих группах (группами назовем множество номеров целевых функций, стоящих в одном столбце в Таблице 12).



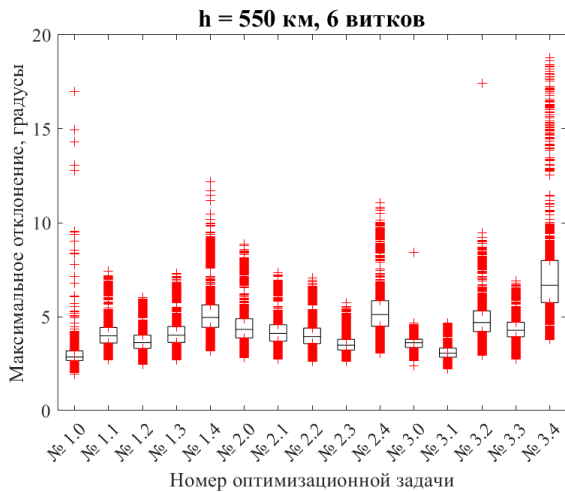
а) возмущенные тензоры из блоков

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



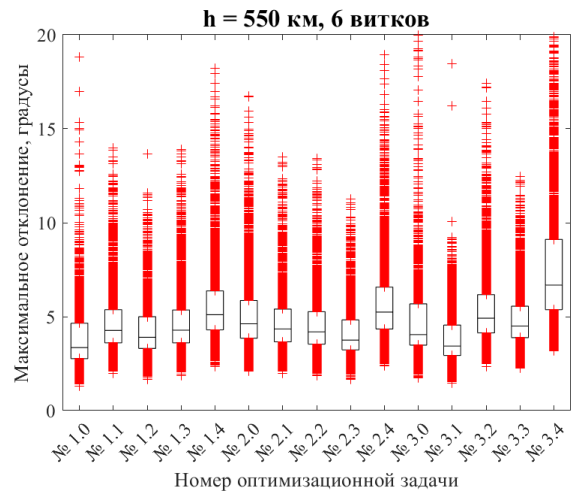
б) все рассматриваемые возмущения

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$



в) возмущенные тензоры из блоков

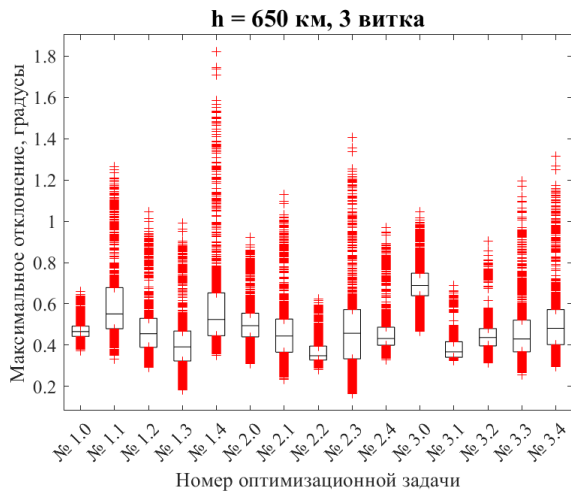
$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



г) все рассматриваемые возмущения

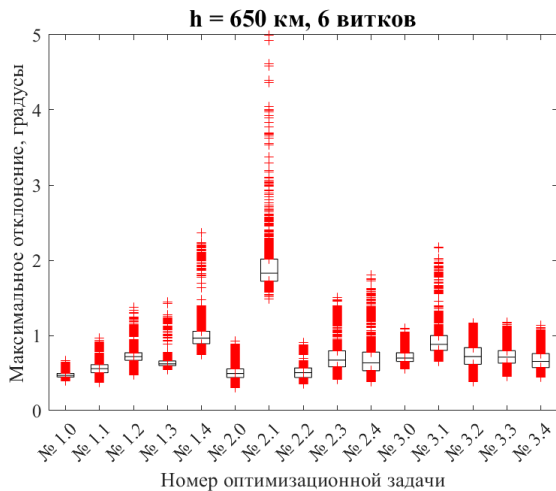
$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$

Рис. 17. Коробчатые диаграммы распределения максимального отклонения от опорной траектории для высоты 550 км в случае  $L = 3T$  (а, б) и  $L = 6T$  (в, г), целевой режим – орбитальная ориентация



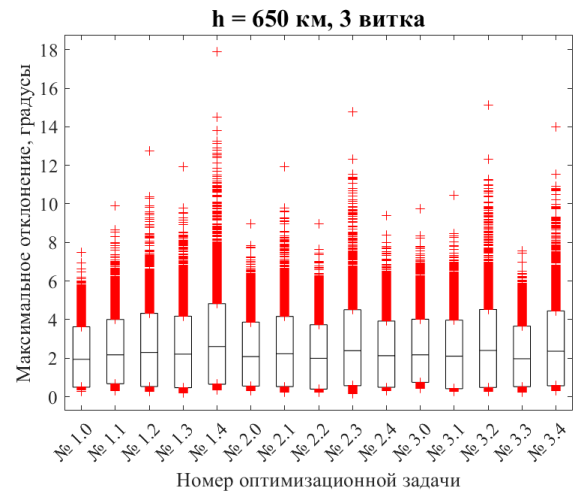
а) возмущенные тензоры из блоков

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



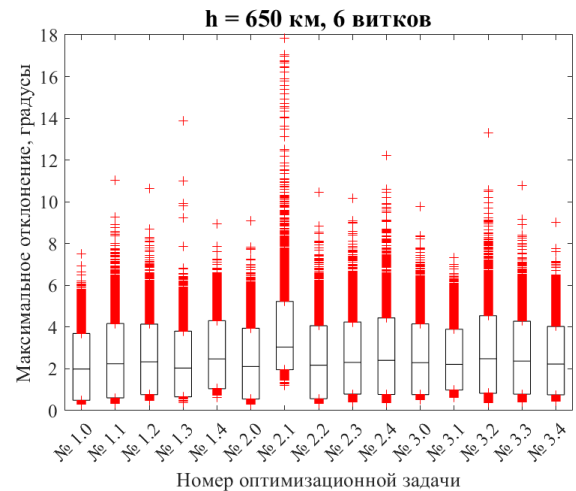
в) возмущенные тензоры из блоков

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



б) все рассматриваемые возмущения

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$



г) все рассматриваемые возмущения

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$

Рис. 18. Коробчатые диаграммы распределения максимального отклонения от опорной траектории для высоты 650 км в случае  $L = 3T$  (а, б) и  $L = 6T$  (в, г), целевой режим – орбитальная ориентация

Зачастую прямой диполь дает сравнимый или даже более хороший результат в среднем, однако важно, какая затем используется целевая функция для поиска параметров опорного движения. На примере Рис. 17а видно, что прямой диполь в первой или третьей группе (№1.0 и №3.0) является достаточно хорошим по медианному значению и положению *коробочки* в целом, однако, для



этих пар целевых функций значительно больше *выбросов*, чем для других в группе. Наблюдается локальное (для определенных возмущений тензоров) ухудшение точности до 20 градусов и более. В этом случае наборы №1.4, №2.4 и №3.4 являются более предпочтительными, что говорит в пользу выбора новой модели диполя, которая ищется с помощью оптимизации целевой функции  $\Phi_4^{dipole}$ .

Построим для каждой высоты орбиты (550 км и 650 км) управляемое МСО угловое движение КА, состоящее из

- 1) шести интервалов, длительностью по три витка каждый (длительность интервала, на котором ищутся оптимальные параметры дипольной модели равна  $L = 3T$ ),
- 2) трех интервалов, длительностью по шесть витков каждый (длительность интервала, на котором ищутся оптимальные параметры дипольной модели равна  $L = 6T$ ),

то есть общее время моделирования составляет  $18T$  (около 30 часов).

Воспользуемся в каждом случае одним из наиболее устойчивых наборов целевых функций (по лучшему медианному значению, *коробочке* в целом, а также концентрации и величинам *выбросов*) – для высоты 550 км выберем набор №1.4 (при  $L = 3T$ ), набор №3.1 (при  $L = 6T$ ), а для высоты 650 км – №2.2 (при  $L = 3T$ ) и №2.0 (при  $L = 6T$ ). Найденные методом роя опорные движения для высоты орбиты 550 км приведены на Рис. 19а,в, найденные оптимальные положения ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала приведены на Рис. 19б,г. Для высоты 650 км – все результаты изображены на Рис 20. Наибольшее отклонение ОпСК от ОрбСК в первом случае (550 км) составляет 1.5-2 градуса, а во втором (650 км) – 0.5-0.7 градуса.

Результаты работы алгоритма приведены на Рис. 21 для высоты 550 км и на Рис. 22 для высоты 650 км. Параметры моделирования приведены в Таблице 10. Моделирование проводилось со следующими начальными данными (начальное положение и угловая скорость ССК относительно ОпСК):

$$\alpha(0) = -25^\circ, \beta(0) = 45^\circ, \gamma(0) = 30^\circ,$$

$$\omega_{rel,1}(0) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \omega_{rel,2}(0) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \omega_{rel,3}(0) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с},$$

и двумя различными возмущениями тензора инерции (первое из блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$ , второе – из  $\mathbf{J}_{dist}^4$ ):

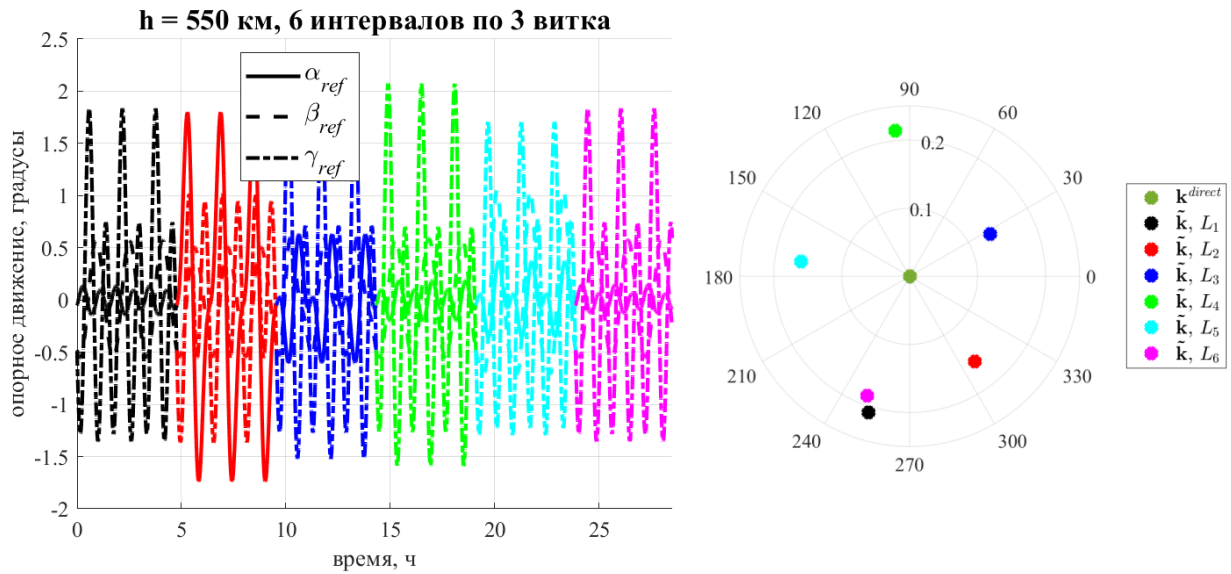
$$\delta \mathbf{J}_{dist}^{OpбСК,1} = \begin{pmatrix} 1.0090 & -0.0352 & -0.0264 \\ 0.0348 & 0.9841 & 0.0163 \\ 0.0250 & -0.0171 & 0.9793 \end{pmatrix},$$

$$\delta \mathbf{J}^{diag} = diag(1.01, 0.9849, 0.9798), \varphi_1 = 1.5^\circ, \varphi_2 = -2^\circ, \varphi_3 = 1^\circ,$$

$$\delta \mathbf{J}_{dist}^{OpбСК,2} = \begin{pmatrix} 1.0177 & -0.0535 & -0.0801 \\ 0.0564 & 0.9761 & 0.0641 \\ 0.0729 & -0.0681 & 0.9721 \end{pmatrix},$$

$$\delta \mathbf{J}^{diag} = diag(1.0223, 0.9798, 0.9772), \varphi_1 = 4.5^\circ, \varphi_2 = -3^\circ, \varphi_3 = 4^\circ.$$

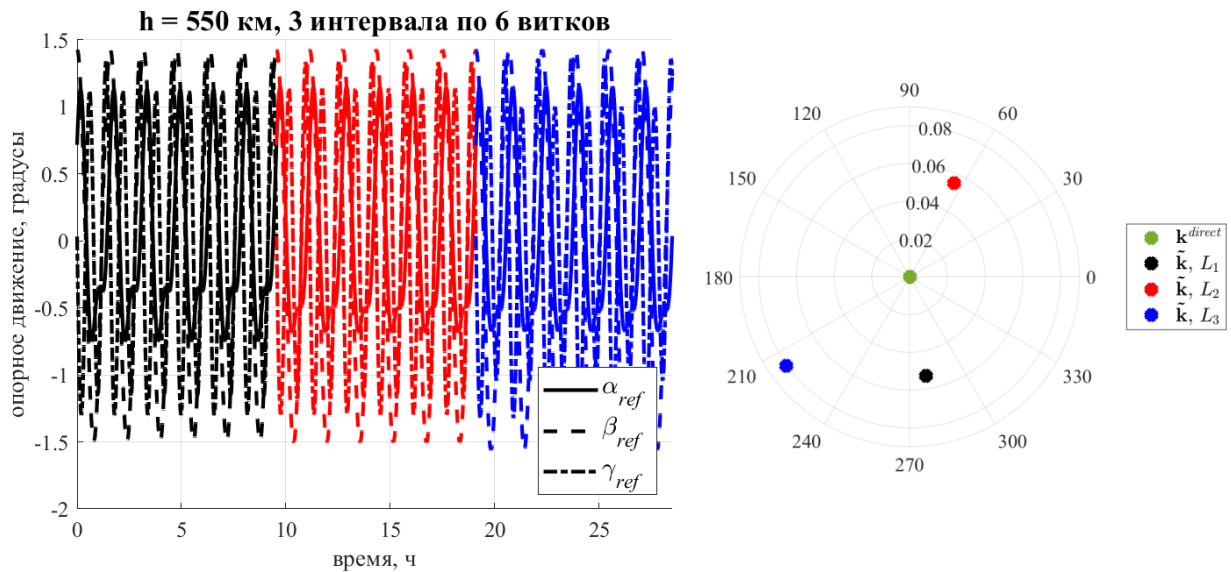
На Рис. 21а и Рис. 21в для высоты орбиты 550 км видно, что итоговая точность ориентации относительно ОрбСК в обоих случаях (6 интервалов по 3 витка и 3 интервала по 6 витков) составляет 3-10 градусов. Однако, в первом случае наблюдается в среднем точность 3-5 градусов около 20 часов (с непродолжительными интервалами, где точность ориентации ухудшается до 7 градусов), а во втором случае в течение 15 часов достигается точность 3-5 градусов, но последующие 10 часов точность ухудшается до 7-10 градусов. Таким образом, предпочтительнее разбивать общее время полета КА на большее количество менее продолжительных временных интервалов аппроксимации геомагнитного поля для того, чтобы обеспечить хорошую *в среднем* точность на всем промежутке моделирования. На Рис. 21б и Рис. 21г изображены углы ориентации относительно ОрбСК для случая большей ошибки знания тензора инерции ( $\delta \mathbf{J}_{dist}^{OpбСК,2}$ ) – итоговая точность ориентации составляет от 5 до 15 градусов в обоих случаях, что делает возможным поиск опорного движения с менее частым пересчетом опорного движения на рассматриваемом 30-часовом интервале (разбивая его на 3 интервала длительностью 6 витков каждый).



а) **шесть** интервалов длительностью **три** витка каждый, возмущение тензора из

блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$

б) положение ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала



в) **три** интервала длительностью **шесть** витков каждый, возмущение тензора из

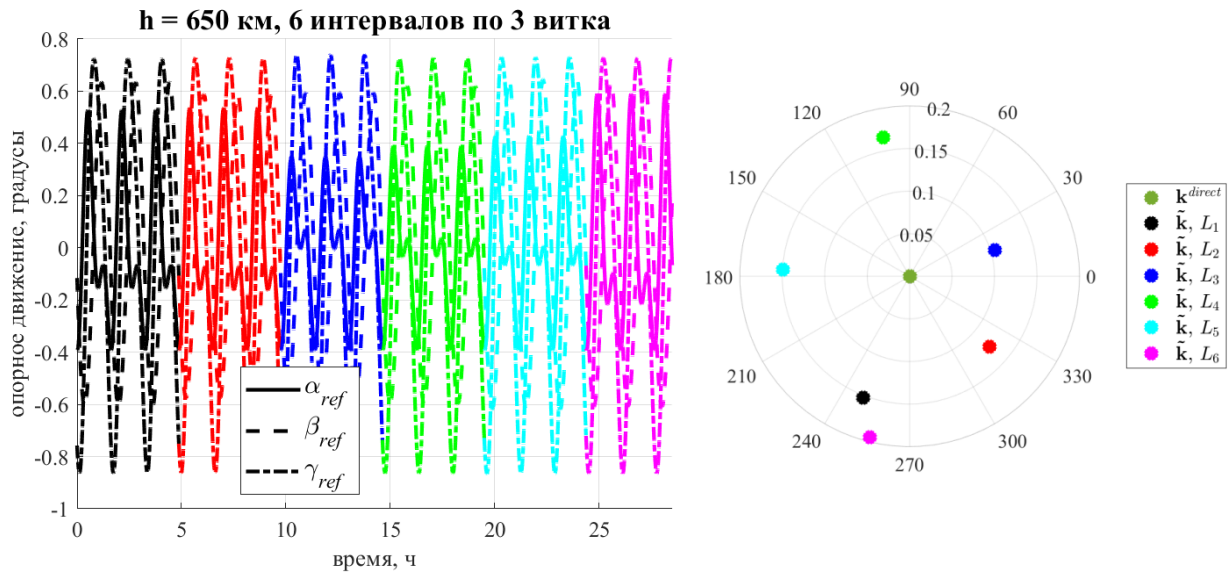
блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$

г) положение ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала

Рис. 19. Опорное движение, целевая ориентация – орбитальная, высота

орбиты 550 км: (а,б) набор целевых функций №1.4, ( $L = 3T$ );

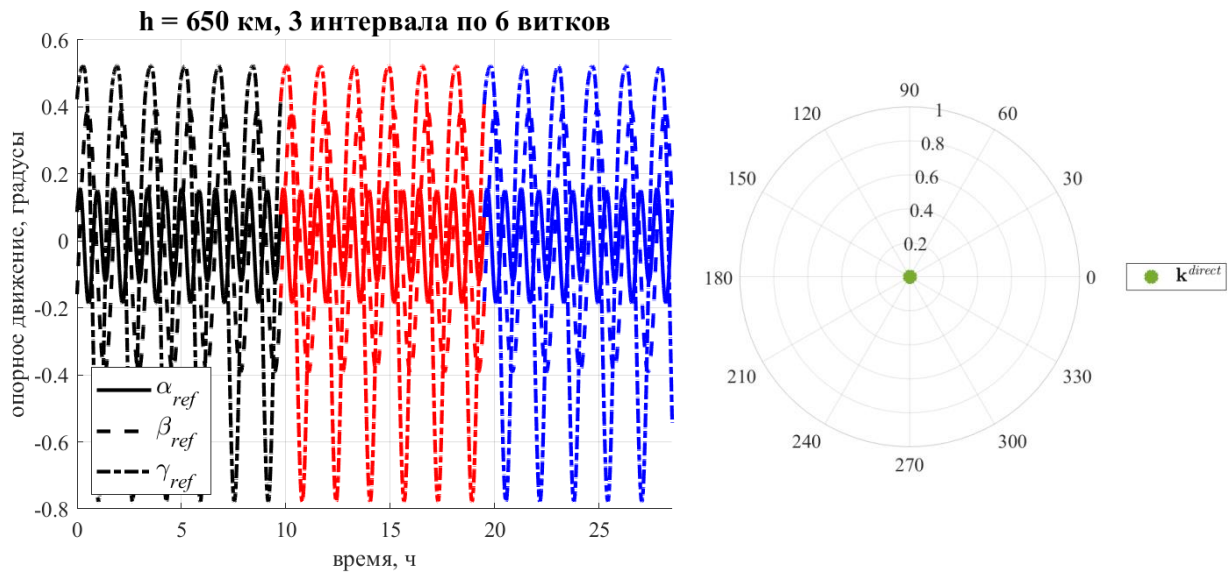
(в,г) набор целевых функций №3.1, ( $L = 6T$ )



а) **шесть** интервалов длительностью **три** витка каждый, возмущение тензора из

блока  $\mathbf{J}_{dist}^4$

б) положение ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала



в) **три** интервала длительностью **шесть** витков каждый, возмущение тензора из

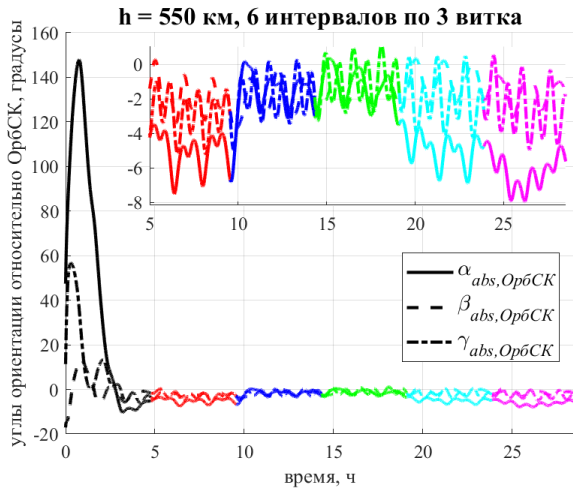
блока  $\mathbf{J}_{dist}^4$

г) положение ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала

Рис. 20. Опорное движение, целевая ориентация – орбитальная, высота

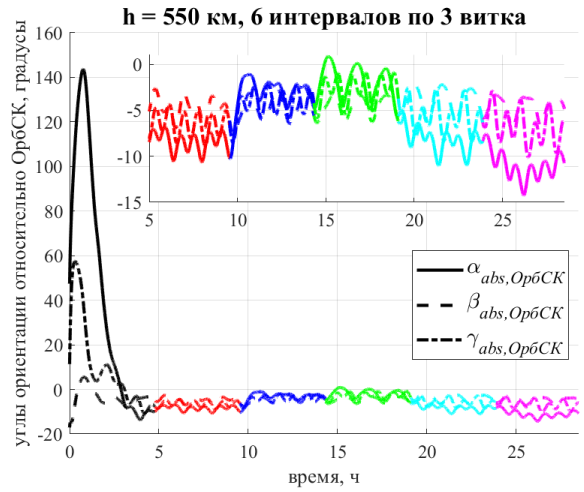
орбиты 650 км: (а,б) набор целевых функций №2.2, ( $L = 3T$ );

(в,г) набор целевых функций №2.0, ( $L = 6T$ )



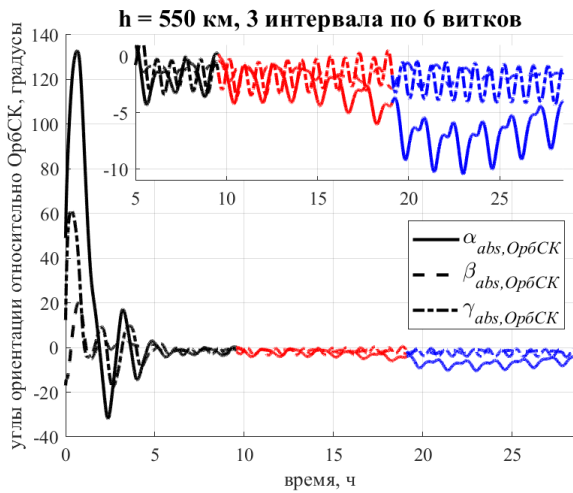
а) 550 км, №1.4,

6 интервалов по 3 витка,

возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$ 

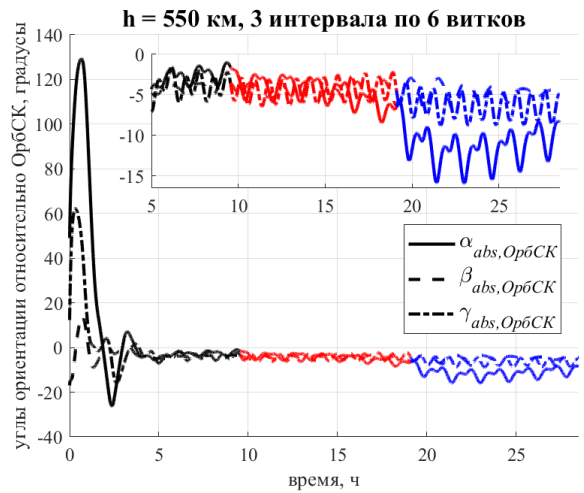
б) 550 км, №1.4,

6 интервалов по 3 витка,

возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^4$ 

в) 550 км, №3.1,

3 интервала по 6 витков,

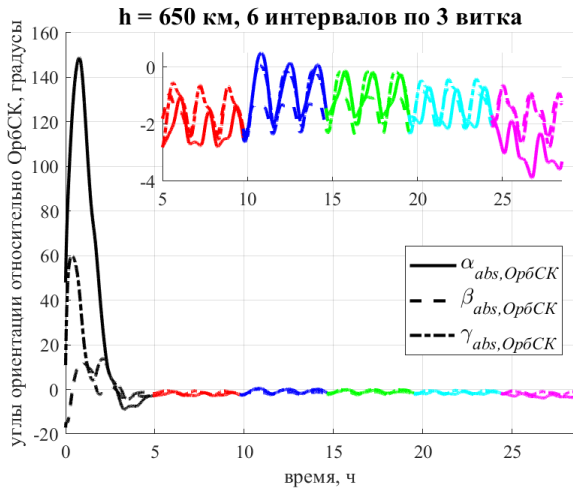
возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$ 

г) 550 км, №3.1,

3 интервала по 6 витков,

возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^4$ 

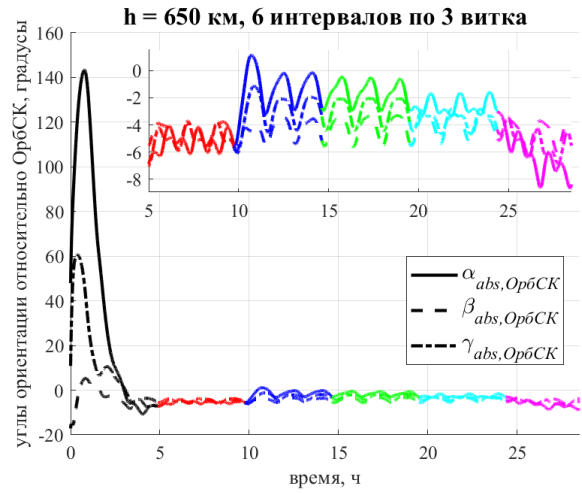
Рис. 21. Углы ориентации относительно ОрбСК



д) 650 км, №2.2,

6 интервалов по 3 витка,

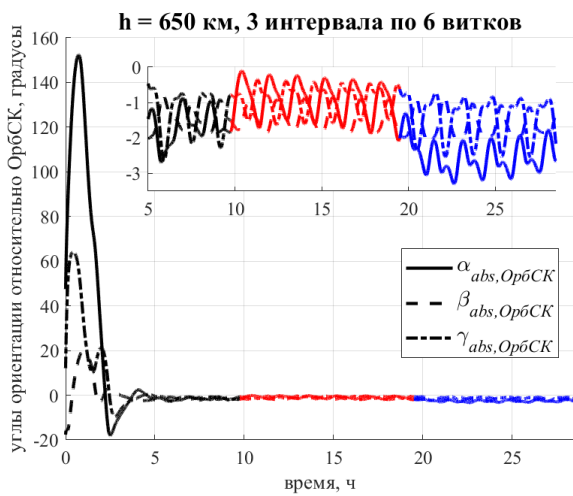
возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$



е) 650 км, №2.2,

6 интервалов по 3 витка,

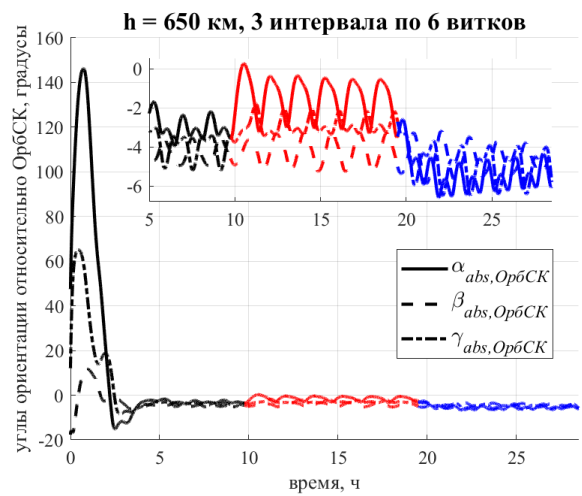
возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^4$



ж) 650 км, №2.0,

3 интервала по 6 витков,

возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$



з) 650 км, №2.0,

3 интервала по 6 витков,

возмущение тензора из блока  $\mathbf{J}_{dist}^4$

Рис. 22. Углы ориентации относительно ОрбСК

Для высоты 650 км (Рис. 22а-22г) оба варианта построения опорного движения дают примерно одинаковый результат. Более того, во втором случае (3 интервала по 6 витков) в рассматриваемом примере используется модель прямого диполя, таким образом, предпочтительнее использовать этот вариант как менее вычислительно затратный, так как не нужно предварительно решать задачи оптимизации для поиска параметров дипольной модели.

Таким образом, набор целевых функций, обеспечивающих хорошую точность, необходимо выбирать для каждого конкретного случая в зависимости от целей и задачи – необходима приемлемая точность в среднем или хорошая точность лишь некоторый промежуток времени, а в остальное время допускается большее отклонение от целевой ориентации.

Важным фактором выбора набора целевых функций также является то, с какой точностью известен тензор инерции КА, так как даже малые ошибки отклонения главных осей инерции могут привести к значительному ухудшению итоговой точности ориентации независимо от набора целевых функций, что делает поиск новой дипольной модели нецелесообразным. Однако, после уточнения тензора инерции, воспользовавшись новым описанием геомагнитного поля на заданных интервалах, можно значительно уменьшить отклонение от целевой (орбитальной) ориентации.

### **3.4. «Косая» орбитальная ориентация**

В разделе рассматривается «косая» орбитальная ориентация. В этом случае оси ОпСК повернуты относительно ОрбСК на заданный постоянный угол (рассматривается угол поворота на 30 градусов вокруг оси  $OX_1$ ), для удобства положение задается углами ориентации  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  (последовательность поворотов 1-2-1). Тогда угол  $\theta$  в целевой ориентации («косой» орбитальной) составляет требуемые 30 градусов.

Режим «косой» орбитальной ориентации применяется, если необходимо отслеживать направление не в надир, например, когда область интереса на Земле

находится в стороне от подспутниковой точки. Рассматриваемый режим с разными значениями угла поворота относительно ОрбСК также подходит для решения задачи разведения группы КА по орбите при помощи аэродинамики [86–89], так как с помощью «косых» орбитальных ориентаций с разными (заданными) углами поворота  $\theta$  относительно ОрбСК для каждого КА в группе можно обеспечить нужную площадь поперечного сечения.

Здесь, как и ранее, моделирование проводится для орбит высотой 550 км и 650 км. Границы области поиска оптимальных параметров опорного движения для случая «косой» орбитальной ориентации ищутся, исходя из решения задачи квадратичного программирования (42). Область поиска в этом случае

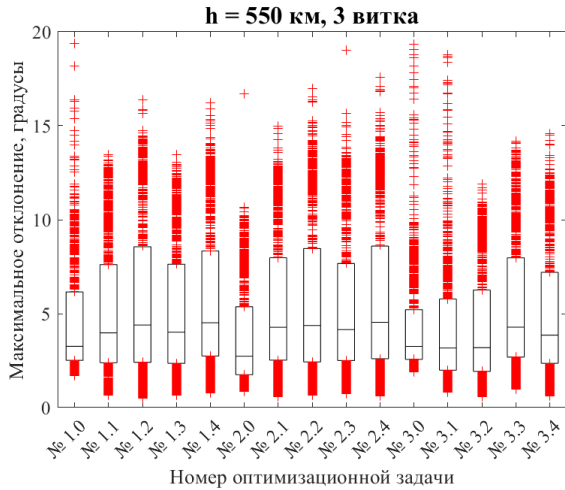
$$\mathbb{U} = \{a_k, b_k, g_k \in (-6^\circ, 6^\circ), k = \overline{1,4}\}.$$

Результаты приведены на Рис. 23 и Рис. 24 для высот орбит 550 км и 650 км соответственно. Общие выводы, сделанные в п.3.3, о том, что уменьшение количества витков аппроксимации геомагнитного поля на интервалах улучшает итоговую точность ориентации, справедливы и в случае «косой» орбитальной ориентации, однако, разница менее заметная (около 0.5 градуса). Преимущество использования новой дипольной модели перед прямым диполем наблюдается при меньшей длительности интервала аппроксимации.

Для высоты 550 км в группе 1 и 3 медианные значения для прямых диполей (№1.0, №3.0) меньше остальных наборов в их группах, однако выбросы больше, что делает использование прямого диполя менее предпочтительным. Однако во второй группе набор №2.0 оказывается лучше, что говорит о том, что применение прямого диполя может быть выигрышным при правильном дальнейшем выборе целевой функции в задаче определения оптимальных коэффициентов опорного движения. Таким образом, полученные коробчатые диаграммы демонстрируют необходимость подробного численного исследования наборов целевых функций на предмет их «чувствительности к возмущениям» в совокупности в каждой конкретной задаче. То есть, выбрав

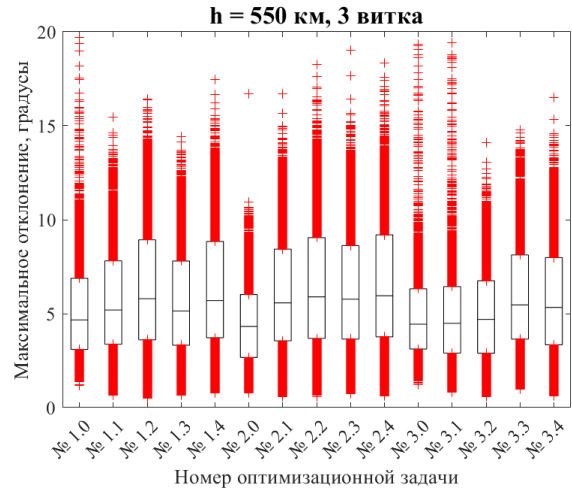


лишь «лучшую» целевую функцию для одной оптимизационной задачи (поиска оптимальных параметров дипольной модели), нельзя гарантировать и «лучший» итог без анализа двух этапов вместе.



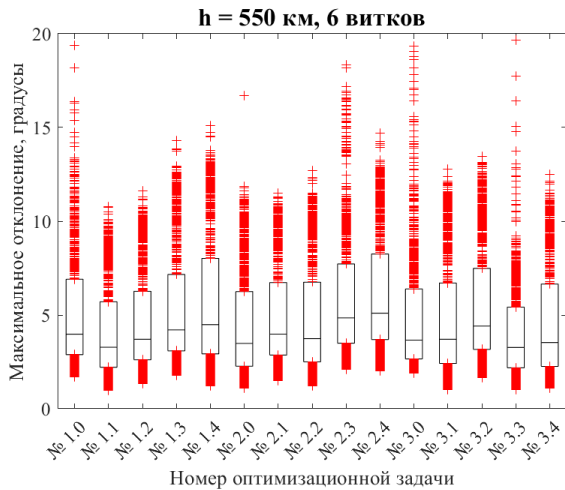
а) возмущенные тензоры из блоков

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



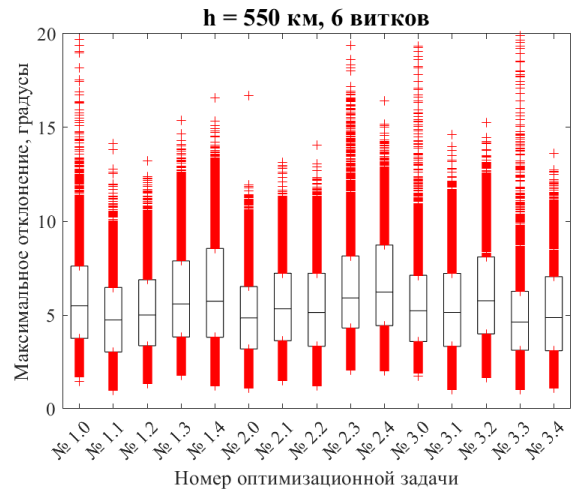
б) все рассматриваемые возмущения

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, \quad i = \overline{1,4}$$



в) возмущенные тензоры из блоков

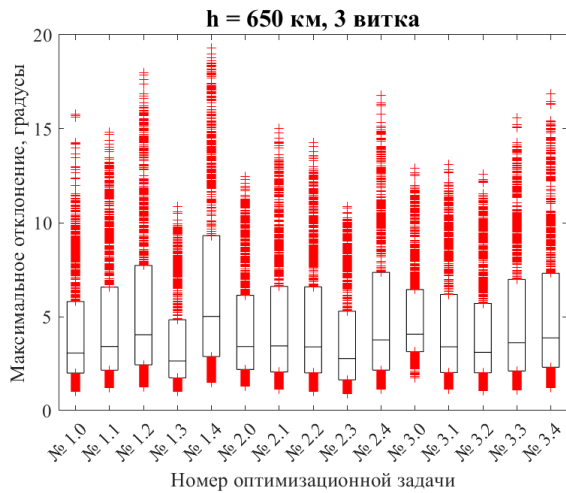
$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



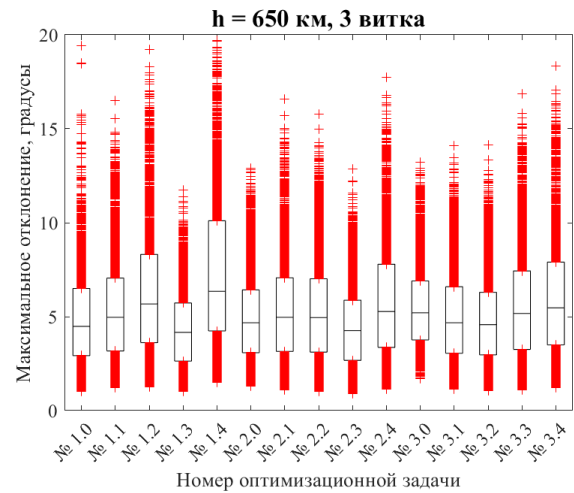
г) все рассматриваемые возмущения

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, \quad i = \overline{1,4}$$

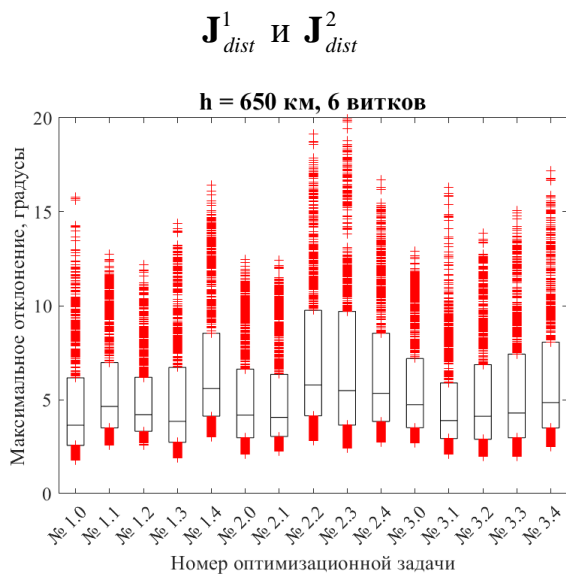
Рис. 23. Коробчатые диаграммы распределения максимального отклонения от опорной траектории для высоты 550 км в случае  $L = 3T$  (а, б) и  $L = 6T$  (в, г)



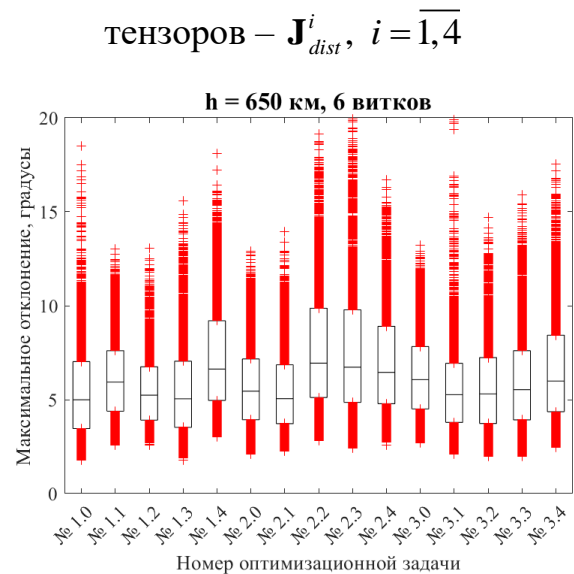
а) возмущенные тензоры из блоков



б) все рассматриваемые возмущения



в) возмущенные тензоры из блоков



г) все рассматриваемые возмущения

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$

Рис. 24. Коробчатые диаграммы распределения максимального отклонения от опорной траектории для высоты 650 км в случае  $L = 3T$  (а, б) и  $L = 6T$  (в, г)

Для высоты 650 км явно выделяется лучший набор целевых функций №1.3 для случая  $L = 3T$ , при этом в случае  $L = 6T$  преимущество этого набора уже не столь очевидно, есть и другие сравнимые по качеству наборы целевых функций. Можно сделать следующий вывод – 6-витковые интервалы аппроксимации геомагнитного поля можно использовать на начальном (предварительном) этапе

(в том числе, можно использовать модель прямого диполя), когда много неизвестных возмущений, ошибка знания тензора инерции большая. Далее, при уточнении моделей внешних возмущений и взаимодействия с внешней средой (атмосферой), а также тензора инерции для уменьшения ошибок отслеживания опорного движения следует использовать 3-витковые интервалы с предварительным поиском оптимальных параметров дипольной модели на них.

Приведенные здесь результаты получены для «косой» орбитальной ориентации, при использовании всех вспомогательных процедур, изложенных в Главе 2. Для высоты 550 км на примере случая, когда  $L = 6T$ , тензор инерции известен лишь с ошибкой знания главных моментов, а направления главных осей известны точно, продемонстрируем важность и целесообразность применения

- «сдвига» коэффициентов управления;
- поиска оптимальных параметров орта оси дипольной модели (6 витков);
- «склейки» опорных движений между интервалами (3 интервала).

В соответствии с приведенной ниже Таблицей 13 рассмотрим четыре возможных варианта решения задачи обеспечения трехосной ориентации на примере «косой» ОрбСК: минусы «-» показывают, что в данном случае указанная процедура не применялась, плюсы «+» говорят о том, что предложенная процедура была применена.

Таблица 13. Способы построения управляемого МСО движения – без учета или с учетом дополнительных вспомогательных процедур

номер моделирования	№1	№2	№3	№4
используемые целевые функции	№1.0	№1.0	№1.3	№1.3
«сдвиг»	-	+	+	+
$\tilde{\mathbf{B}}$	-	-	+	+
«склейка»	-	-	-	+

Моделирование проводилось с начальными данными, равными начальным значениям углов ориентации на соответствующем периодическом решении, вычисленные по формуле (52), и возмущением тензора инерции (только диагональные элементы):

$$\delta \mathbf{J}_{dist} = \delta \mathbf{J}^{diag} = \text{diag}(1.0257, 0.9695, 0.9747).$$

Графики эволюции угла  $\theta$  представлены на Рис. 25.

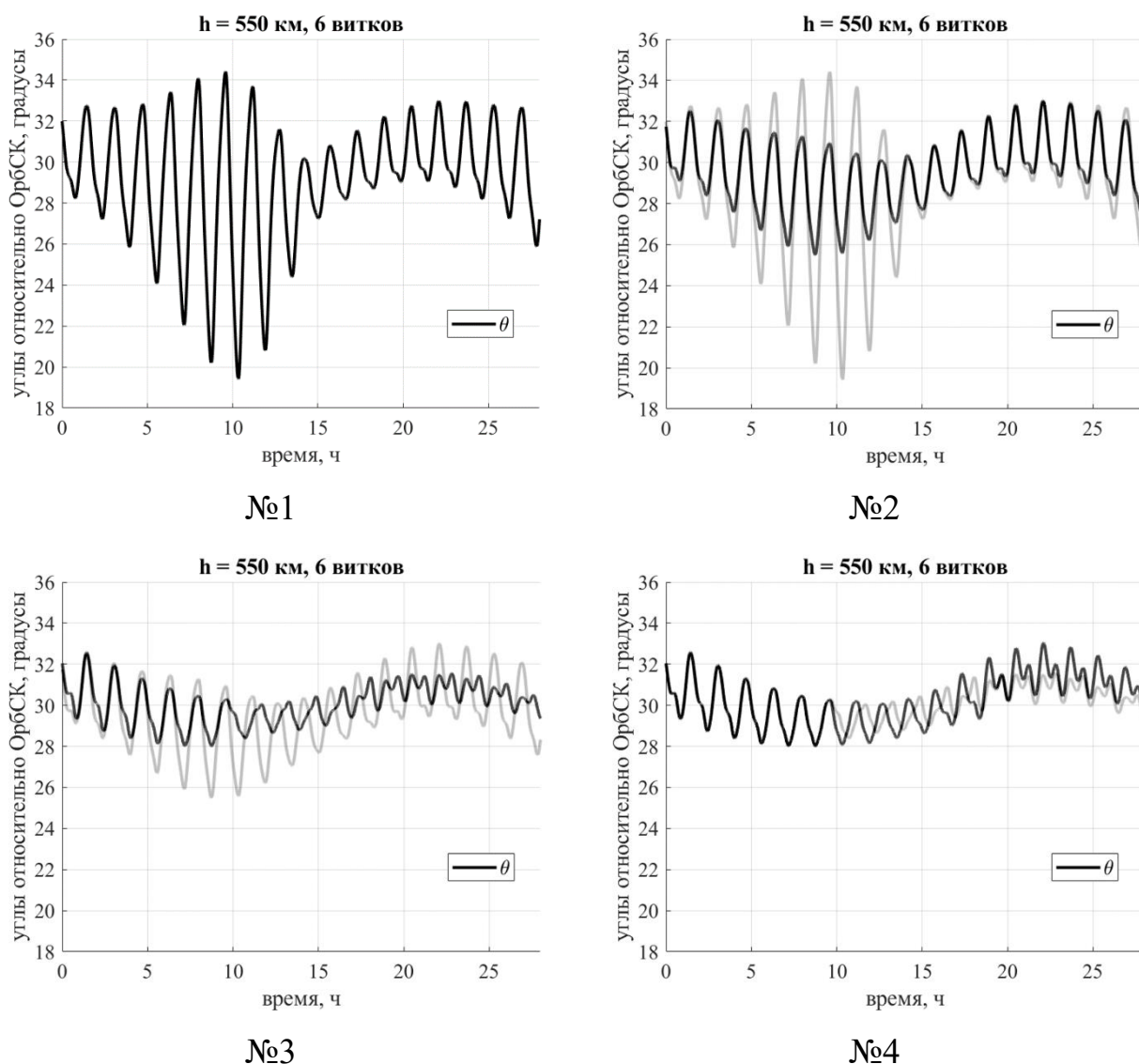


Рис. 25. Улучшение точности в «косой» орбитальной ориентации за счет применения процедур «сдвига», «склейки» и предварительного поиска оптимальных параметров дипольной модели  
(номер в подписи соответствует номеру в Таблице 13)

В относительном положении равновесия, когда ССК совпадает с «косой» ОрбСК и угловая скорость ее относительного движения равна нулю, угол  $\theta$  равен 30 градусам. Точность ориентации постепенно улучшается при добавлении процедур, предложенных в Главе 2 диссертационной работы. На Рис. 25 №1 показано, что без использования вспомогательных процедур итоговая ориентация составляет  $20^\circ - 34^\circ$ , то есть отклонение от заданного положения (от 30 градусов) составляет от  $-10^\circ$  до  $4^\circ$ . С учетом процедуры «сдвига» коэффициентов (Рис. 25, №2) этот диапазон уменьшается и составляет уже от  $-4^\circ$  до  $2^\circ$ . Далее, если разбить временной интервал моделирования на 3 части и на каждой части найти оптимальные параметры для дипольной модели, то точность ориентации улучшается до  $\pm 2^\circ$  (Рис. 25, №3). Затем, применяя алгоритм «склейки» опорных движений между интервалами аппроксимации, получаем дважды непрерывно-дифференцируемое опорное движение, обеспечивающее непрерывность управляющего момента на нем, точность ориентации при этом сохраняется такой же –  $\pm 2^\circ$  (Рис. 25, №4).

Таким образом, использование всех предложенных вспомогательных процедур, позволяющих учесть ошибки внешних возмущений и обеспечивающих асимптотическую устойчивость, улучшает итоговую точность ориентации в несколько раз.

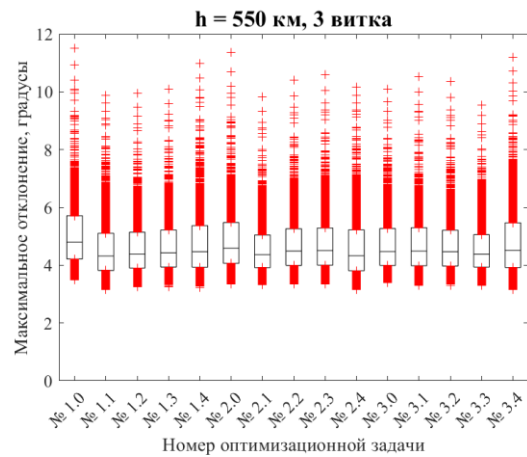
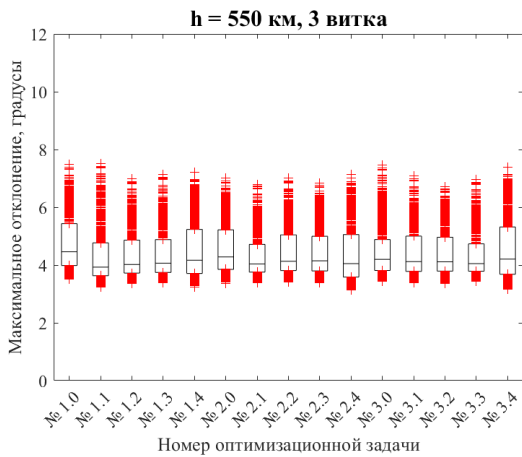
### **3.5. Инерциальная ориентация**

Режим инерциальной ориентации можно использовать, например, в практических задачах исследования процессов на Солнце в режиме солнечной ориентации [90]. Преимущество разработанной методики при применении ее для обеспечения инерциальной ориентации состоит в том, что можно стабилизировать любую ось КА в любом направлении в ИСК, в то время как алгоритм стабилизации вращением [26–30] с хорошей точностью обеспечивает только ориентацию главной оси максимального момента инерции КА.

Предельно допустимая точность ориентации равна  $x_{\max} = 2.85^\circ$ , согласно численно полученному решению (43) задачи квадратичного программирования (42) в случае инерциальной ориентации. Границы области поиска оптимальных параметров опорного движения в этом случае задаются следующими

$$\mathbb{U} = \{a_k, b_k, g_k \in (-3^\circ, 3^\circ), k = \overline{1,4}\}.$$

Результаты приведены на Рис. 26 и Рис. 27 для высот орбит 550 км и 650 км соответственно.

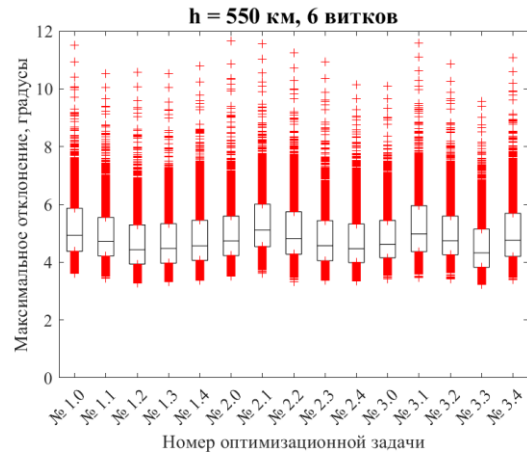
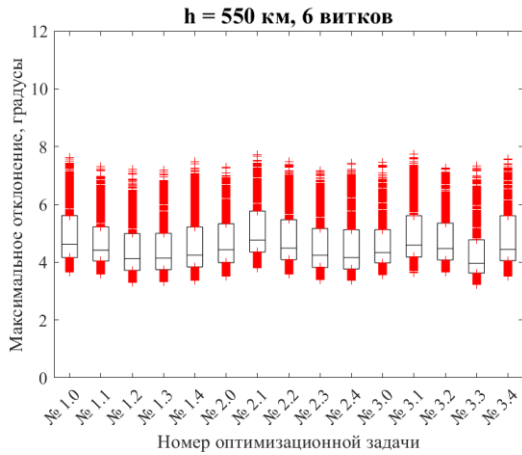


а) возмущенные тензоры из блоков

б) все рассматриваемые возмущения

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$



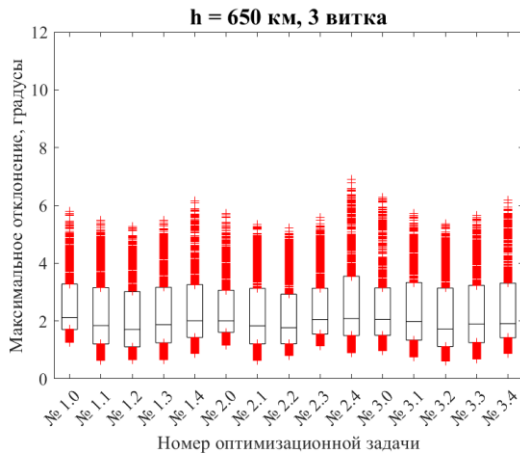
в) возмущенные тензоры из блоков

г) все рассматриваемые возмущения

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$

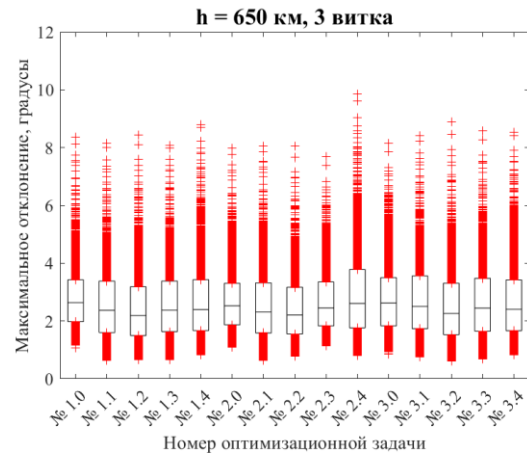
$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, i = \overline{1,4}$$

Рис. 26. Коробчатые диаграммы распределения максимального отклонения от опорной траектории для высоты 550 км в случае  $L = 3T$  (а, б) и  $L = 6T$  (в, г)



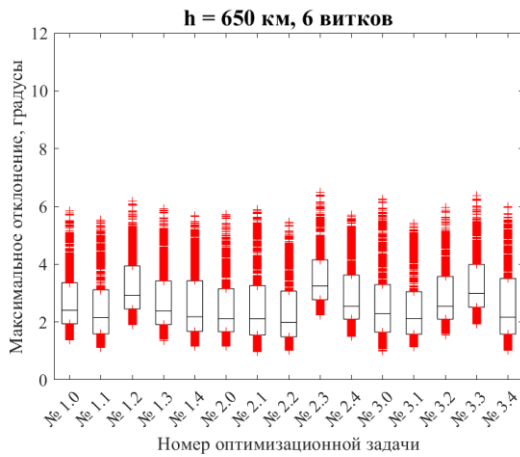
а) возмущенные тензоры из блоков

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



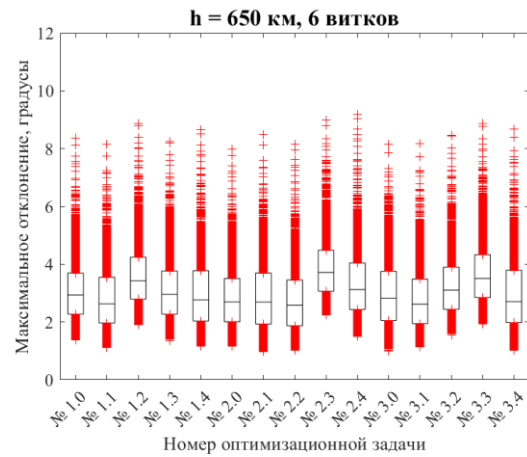
б) все рассматриваемые возмущения

$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, \quad i = \overline{1,4}$$



в) возмущенные тензоры из блоков

$$\mathbf{J}_{dist}^1 \text{ и } \mathbf{J}_{dist}^2$$



г) все рассматриваемые возмущения

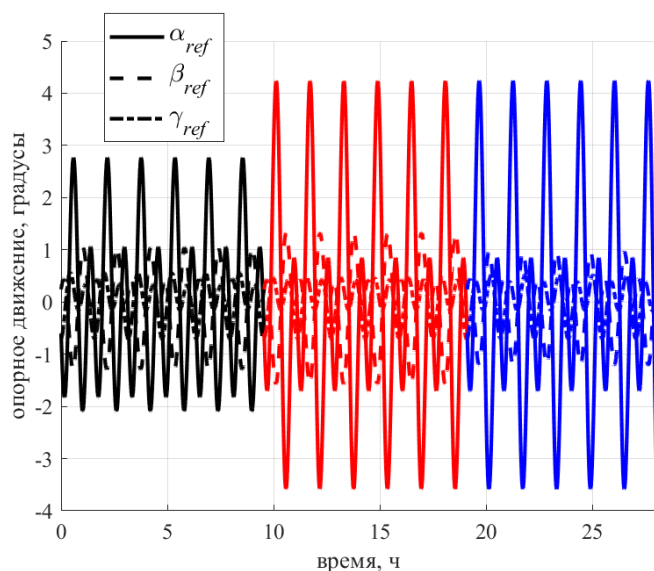
$$\text{тензоров} - \mathbf{J}_{dist}^i, \quad i = \overline{1,4}$$

Рис. 27. Коробчатые диаграммы распределения максимального отклонения от опорной траектории для высоты 650 км в случае  $L = 3T$  (а, б) и  $L = 6T$  (в, г)

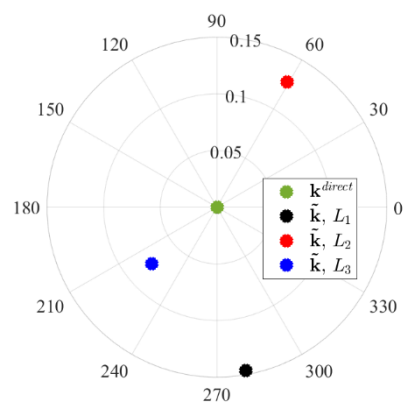
Для инерциальной ориентации все наборы предложенных целевых функций дают близкие результаты, поэтому можно выбрать любой набор. Точность ориентации при моделировании с «хорошими» тензорами – блоки  $\mathbf{J}_{dist}^1$  и  $\mathbf{J}_{dist}^2$  (Рис. 26а,б и Рис. 27а,б) – оказывается в среднем в 1.5 раза лучше, чем в случаях, когда главные оси инерции известны с ошибкой (Рис. 26в,г и Рис. 27в,г). Аппроксимация поля на обоих рассматриваемых временных интервалах

показывает близкий по итоговой точности ориентации результат, таким образом, целесообразнее для решения задачи инерциальной стабилизации использовать интервал  $L = 6T$  для уменьшения временных затрат решения оптимизационных задач поиска оптимальной модели диполя, опорного движения и коэффициентов управления.

Для примера рассмотрим высоту орбиты 550 км. Для построения управляемого МСО углового движения КА воспользуемся набором целевых функций №2.1. Построим опорное движение, состоящее из трех интервалов, длительностью 6 витков каждый (каждый интервал, на котором ищутся оптимальные параметры дипольной модели, равен  $L = 6T$ ). Полученное методом роя опорное движение приведено на Рис. 28а, с найденным перед этим на каждом интервале оптимальным положением ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала (Рис. 28б). Наибольшее отклонение ОпСК от ИСК в этом случае составляет около 4 градусов.



а) опорное движение, состоящее из **трех** интервалов длительностью **шесть** витков каждый



б) положение ортов  $\tilde{\mathbf{k}}$  оси диполя для каждого интервала

Рис. 28. Опорное движение



Результаты численного моделирования приведены на Рис. 29-31. Моделирование проводилось со следующими начальными данными (начальное положение и угловая скорость ССК относительно ОпСК)

$$\alpha(0) = 35^\circ, \beta(0) = -55^\circ, \gamma(0) = 20^\circ, \\ \omega_{rel,1}(0) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \omega_{rel,2}(0) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \omega_{rel,3}(0) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}.$$

Для моделирования в полной модели (параметры моделирования приведены в Таблице 10) рассмотрим два конкретных возмущения тензора инерции (первый из блока  $\mathbf{J}_{dist}^3$ , второй – из  $\mathbf{J}_{dist}^4$ ):

$$\delta \mathbf{J}_{dist}^{ИСК,1} = \begin{pmatrix} 1.0111 & -0.0134 & -0.0427 \\ 0.0152 & 1.0103 & 0.0421 \\ 0.0423 & -0.0430 & 1.0154 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$$\delta \mathbf{J}^{diag} = \text{diag}(1.012, 1.011, 1.017), \varphi_1 = 2.42, \varphi_2 = -0.76, \varphi_3 = 2.42,$$

$$\delta \mathbf{J}_{dist}^{ИСК,2} = \begin{pmatrix} 1.0157 & 0.0848 & -0.0877 \\ -0.0732 & 0.9692 & 0.0888 \\ 0.0916 & -0.0829 & 0.9807 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\delta \mathbf{J}^{diag} = \text{diag}(1.023, 0.976, 0.988), \varphi_1 = 4.93, \varphi_2 = 4.75, \varphi_3 = 4.83.$$

Возмущению тензора (54) соответствуют картинки в левой колонке (Рис. 29а-31а), возмущению (55) – в правой (Рис. 29б-31б).

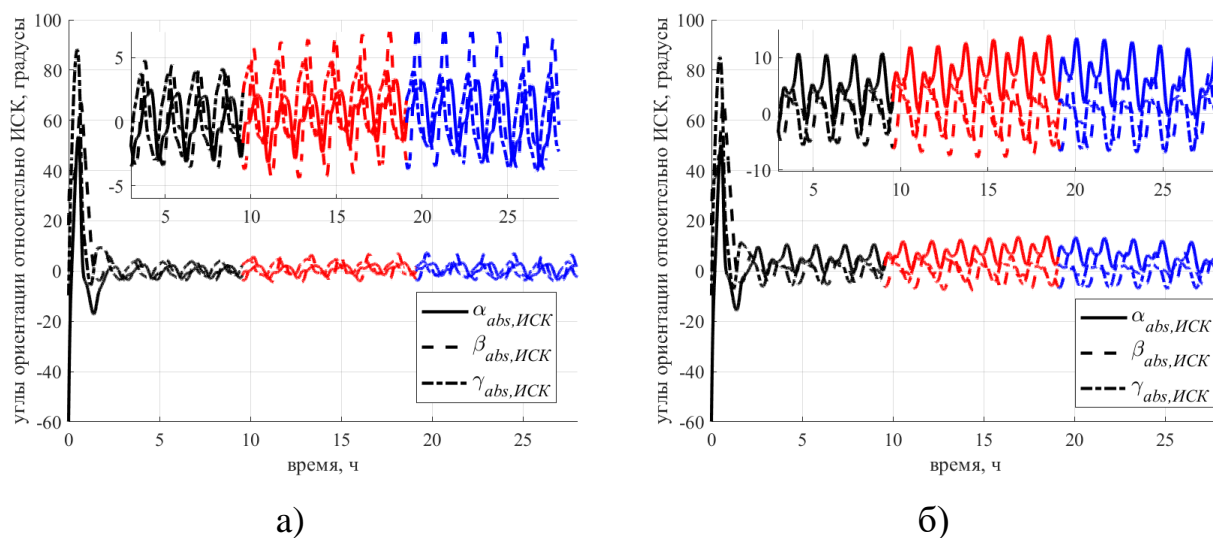


Рис. 29. Углы ориентации относительно ИСК

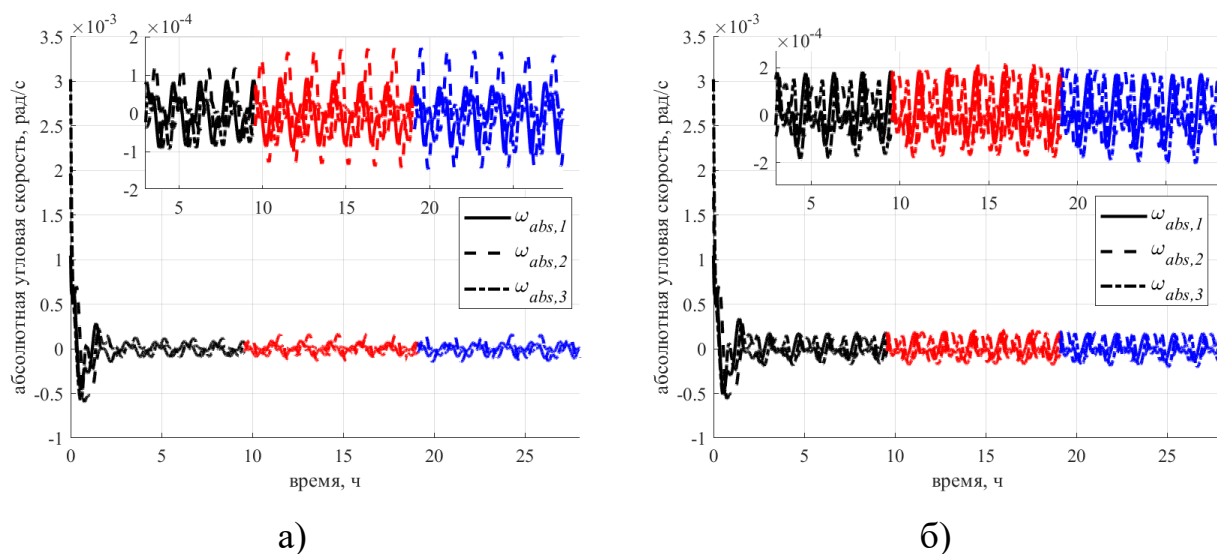


Рис. 30. Абсолютная угловая скорость

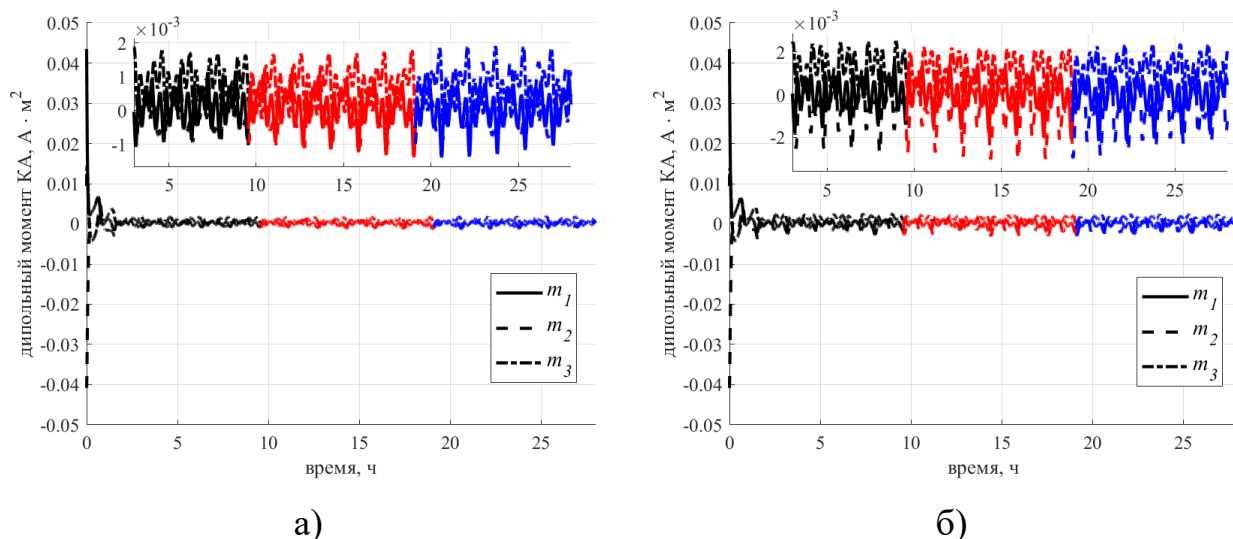


Рис. 31. Дипольный момент КА

Итоговая точность ориентации относительно ИСК в случае с первым возмущением тензора составляет около 6 градусов (Рис. 29а), а во втором случае – 14 градусов (Рис. 29б). Величины абсолютной угловой скорости (Рис. 30) и дипольного момента КА (Рис. 31) также увеличились вдвое в случае с моделированием со вторым возмущением тензора  $\delta \mathbf{J}_{dist}^{ИСК,2}$  по сравнению с первым случаем.

Таким образом, данными примерами продемонстрировано, что даже если опорное движение находится достаточно близко к целевому (в данном случае

инерциальной ориентации), возмущения тензора инерции могут приводить к ухудшению итоговой точности в 3 и более раз.

### **Выводы к главе 3**

Методика построения управляемого углового движения КА с МСО, предложенная в диссертационной работе, применена для реализации используемых в практических приложениях режимов ориентации: орбитальной, «косой» орбитальной и инерциальной ориентации. Показана необходимость численного исследования наборов целевых функций на предмет «чувствительности к возмущениям» в каждой конкретной задаче, так как заранее произвольно выбранная пара целевых функций не всегда даст лучший результат. Проведен численный анализ влияния ошибки знания тензора инерции на итоговую точность ориентации для всех указанных режимов. Показано, что формализация задачи также может существенно влиять на итоговую точность ориентации. Кроме этого на примере «косой» орбитальной ориентации продемонстрирована эффективность вспомогательных процедур «сдвига» коэффициентов управления, «склейки» опорных движений, поиска оптимальных параметров дипольной модели. Использование всех трех процедур позволяет улучшить точность ориентации в 3-5 раз. В целом, предложенная в работе методика позволяет улучшить точность ориентации в ОрбСК в 2-3 раза по сравнению с известными подходами и реализовать режим «косой» орбитальной ориентации с точностью  $\pm 3^\circ$  с помощью МСО. В режиме инерциальной ориентации с помощью разработанной методики можно обеспечить ориентацию любой оси в любом заданном направлении в ИСК, при этом не требуется стабилизация вращением, которая возможна только вокруг главных осей инерции. Результаты третьей главы опубликованы в [80,82,83,85].

## Заключение

В диссертационной работе исследованы ключевые аспекты актуальной в настоящее время задачи обеспечения трехосной ориентации с помощью электромагнитной системы управления ориентацией в типовых режимах углового движения КА – орбитальной ориентации, «косой» орбитальной ориентации, инерциальной ориентации. Предложена, обоснована и апробирована методика построения управляемого МСО опорного движения КА и поиска коэффициентов управления. С помощью метода роя частиц решены задачи поиска оптимальных параметров опорного движения и оптимальных коэффициентов управления. Получены оценки точности в окрестности целевой ориентации с помощью решения задачи квадратичного программирования с ограничением типа равенства. Построена и обоснована методика поиска оптимальных параметров дипольной модели, описывающей геомагнитное поле на заданном интервале времени, предложены целевые функции для соответствующей задачи нелинейной оптимизации, которая решена с помощью метода роя частиц. Построено дважды непрерывно-дифференцируемое опорное движение с помощью алгоритма «склейки» между рассматриваемыми временными интервалами, позволяющая избежать переходных процессов в момент переключения между ними. Предложен алгоритм «сдвига» коэффициентов управления для улучшения итоговой точности ориентации относительно целевой и сохранения асимптотической устойчивости при наличии возмущений. Предложена методика оценки и проведена оценка влияния возмущений на итоговую точность ориентации для разных целевых функций в указанных режимах ориентации, что позволило выбрать одну из наиболее «устойчивых к возмущениям» пару целевых функций для каждого из режимов. Ключевым преимуществом предложенной в диссертационной работе методики является улучшенная в несколько раз точность ориентации по сравнению с существующими подходами при рассмотрении аналогичных возмущений.

## Список литературы

1. Проект “Сфера” [Электронный ресурс].  
URL: [https://www.tadviser.ru/index.php/Продукт:Сфера\\_Космическая\\_программа\\_многоспутниковых\\_систем](https://www.tadviser.ru/index.php/Продукт:Сфера_Космическая_программа_многоспутниковых_систем). Дата доступа: 23.07.2023.
2. Escoubet C.P., Schmidt R. Cluster II: Plasma measurements in three dimensions // *Adv. Sp. Res.* 2000. Vol. 25, № 7. P. 1305–1314.
3. Спутниковая система персональной связи «Гонец» [Электронный ресурс].  
URL: <https://www.roscosmos.ru/23941/>. Дата доступа: 23.07.2023.
4. OneWeb [Электронный ресурс].  
URL: [https://www.tadviser.ru/index.php/Компания:OneWeb\\_LLC](https://www.tadviser.ru/index.php/Компания:OneWeb_LLC).  
Дата доступа: 23.07.2023.
5. Lelong P., Lemercier C., Chegancas J. AstroBus S, the high performance and competitive Small Satellites platform for Earth Observation // 10th IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation / ed. Sandau R., Roser H.-P., Valenzuela A. 2015. P. 15–18.
6. Desouky M.A.A., Abdelkhalik O. A Recursive Approach for Magnetic Field Estimation in Spacecraft Magnetic Attitude Control // *Aerospace*. 2022. Vol. 9, № 12.
7. Farissi M.S. et al. Implementation and Hardware-In-The-Loop Simulation of a Magnetic Detumbling and Pointing Control Based on Three-Axis Magnetometer Data // *Aerospace*. 2019. Vol. 6, № 12.
8. Grasshoff L.H. A Method for Controlling the Attitude of a Spin-Stabilized Satellite // *ARS J.* 1961. Vol. 31, № 5. P. 646–649.
9. Polat H.C., Virgili-Llop J., Romano M. Survey, Statistical Analysis and Classification of Launched CubeSat Missions with Emphasis on the Attitude Control Method // *J. Small Satell.* 2016. Vol. 5, № 3. P. 513–530.
10. Овчинников М.Ю. и др. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования*. 2012. Vol. 50, № 2. С. 176–183.
11. Ovchinnikov M.Y. et al. B-dot algorithm steady-state motion performance // *Acta Astronaut.* 2018. Vol. 146. P. 66–72.
12. Flatley T.W. et al. A B-dot acquisition controller for the RADARSAT spacecraft // *Flight Mechanics Symposium*. Greenbelt, 1997. P. 79–89.
13. Stickler A.C. A Magnetic Control System for Attitude Acquisition // Ithaco, Inc., Rep. N 90345. 1972.

14. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // *J. Spacecr. Rockets*. 1976. Vol. 13, № 5. P. 282–287.
15. Avanzini G., Giulietti F. Magnetic Detumbling of a Rigid Spacecraft // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 4. P. 1326–1334.
16. Chasset C. et al. 3-Axis magnetic control: flight results of the TANGO satellite in the PRISMA mission // *CEAS Sp. J. Springer Vienna*, 2013. Vol. 5, № 1–2. P. 1–17.
17. Bodin P. et al. PRISMA: An In-Orbit Test Bed for Guidance, Navigation, and Control Experiments // *J. Spacecr. Rockets*. 2009. Vol. 46, № 3. P. 615–623.
18. Ivanov D.S. et al. Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties // *Acta Astronaut.* 2017. Vol. 132. P. 103–110.
19. Bhat S.P. Controllability of nonlinear time-varying systems: applications to spacecraft attitude control using magnetic actuation // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2005. Vol. 50, № 11. P. 1725–1735.
20. Morozov V.M., Kalenova V.I. Satellite Control Using Magnetic Moments: Controllability and Stabilization Algorithms // *Cosm. Res. Springer*, 2020. Vol. 58, № 3. P. 158–166.
21. Yang Y. Controllability of spacecraft using only magnetic torques // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2016. Vol. 52, № 2. P. 954–961.
22. Smirnov G., Ovchinnikov M., Miranda F. On the magnetic attitude control for spacecraft via the -strategies method // *Acta Astronaut.* 2008. Vol. 63. P. 690–694.
23. Tikhonov A.A. A Method of Semipassive Attitude Stabilization of a Spacecraft in the Geomagnetic Field // *Cosm. Res.* 2003. Vol. 41, № 1. P. 63–73.
24. Kalenova V.I., Morozov V.M. Stabilization of Satellite Relative Equilibrium Using Magnetic and Lorentzian Moments // *Cosm. Res.* 2021. Vol. 59, № 5. P. 343–356.
25. Misra R., Wisniewski R., Zuyev A. Attitude Stabilization of a Satellite Having Only Electromagnetic Actuation Using Oscillating Controls // *Aerospace. Multidisciplinary Digital Publishing Institute*, 2022. Vol. 9, № 8. P. 444.
26. Avanzini G., de Angelis E.L., Giulietti F. Spin-axis pointing of a magnetically actuated spacecraft // *Acta Astronaut.* 2014. Vol. 94, № 1. P. 493–501.
27. Shigehara M. Geomagnetic Attitude Control of an Axisymmetric Spinning Satellite // *J. Spacecr. Rockets*. 1972. Vol. 9, № 6. P. 391–398.
28. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И. Исследование связки трех

алгоритмов магнитного управления угловой скоростью и ориентацией спутника, стабилизируемого вращением // *Космические исследования*. 2012. Vol. 50, № 4. С. 326–334.

29. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // *Acta Astronaut.* 2012. Vol. 77. P. 48–60.
30. de Ruiter A. A fault-tolerant magnetic spin stabilizing controller for the JC2Sat-FF mission // *Acta Astronaut.* 2011. Vol. 68, № 1. P. 160–171.
31. Martel F., Pal P., Psiaki M. Active magnetic control system for gravity gradient stabilized spacecraft // *Proceedings of the 2nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*. Logan, USA, 1988. P. 19.
32. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2016. № №28. 32 с.
33. Lovera M., Astolfi A. Global magnetic attitude control of spacecraft in the presence of gravity gradient // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2006. Vol. 42, № 3. P. 796–805.
34. Lovera M., Astolfi A. Spacecraft attitude control using magnetic actuators // *Automatica*. 2004. Vol. 40, № 8. P. 1405–1414.
35. Wisniewski R., Blanke M. Fully magnetic attitude control for spacecraft subject to gravity gradient // *Automatica*. Pergamon, 1999. Vol. 35, № 7. P. 1201–1214.
36. Ovchinnikov M., Roldugin D., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 110. P. 279–286.
37. Celani F. Robust three-axis attitude stabilization for inertial pointing spacecraft using magnetorquers // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 107. P. 87–96.
38. Sofyali A., Jafarov E.M. Purely magnetic spacecraft attitude control by using classical and modified sliding mode algorithms // *2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems*. 2012. P. 117–123.
39. Wang P., Shtessel Y.B., Wang Y.-Q. Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*. 1998. P. 500–504.
40. Reyhanoglu M., Hervas J.R. Three-axis magnetic attitude control algorithms for small satellites // *Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances in Space Technologies - RAST2011*. 2011. P. 897–902.
41. Bruni R., Celani F. A Robust Optimization Approach for Magnetic Spacecraft Attitude Stabilization // *J. Optim. Theory Appl.* Springer US, 2017. Vol. 173, № 3. P. 994–1012.

42. Celani F. Gain Selection for Attitude Stabilization of Earth-Pointing Spacecraft Using Magnetorquers // *Aerotec. Missili Spaz.* Springer, 2021. Vol. 100, № 1. P. 15–24.
43. Damaren C.J. Hybrid magnetic attitude control gain selection // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part G J. Aerosp. Eng.* SAGE PublicationsSage UK: London, England, 2009. Vol. 223, № 8. P. 1041–1047.
44. Ovchinnikov M.Y. et al. Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame // *Acta Astronaut.* 2015. Vol. 116. P. 74–77.
45. Bruni R., Celani F. Parameter Optimization for Spacecraft Attitude Stabilization Using Magnetorquers // *Advances in Spacecraft Attitude Control* / ed. Sands T. Rijeka: IntechOpen, 2020.
46. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука. 1974. 272 с.
47. Ovchinnikov M.Y. et al. Fully magnetic sliding mode control for acquiring three-axis attitude // *Acta Astronaut.* 2016. Vol. 121. P. 59–62.
48. Sofyalı A., Jafarov E.M. Integral Sliding Mode Control of Small Satellite Attitude Motion by Purely Magnetic Actuation // *IFAC Proc.* Vol. Elsevier, 2014. Vol. 47, № 3. P. 7947–7953.
49. Sofyali A., Jafarov E.M., Wisniewski R. Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode // *Aerosp. Sci. Technol.* Elsevier Masson, 2018. Vol. 76. P. 91–104.
50. Wiśniewski R. Sliding Mode Attitude Control for Magnetic Actuated Satellite // *IFAC Proc.* Vol. 1998. Vol. 31, № 21. P. 179–184.
51. Psiaki M.L. Magnetic Torquer Attitude Control via Asymptotic Periodic Linear Quadratic Regulation // *J. Guid. Control. Dyn.* 2001. Vol. 24, № 2. P. 386–394.
52. Silani E., Lovera M. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results // *Control Eng. Pract.* Pergamon, 2005. Vol. 13, № 3. P. 357–371.
53. Wood M., Chen W.H. Model predictive control of low Earth-orbiting satellites using magnetic actuation // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part I J. Syst. Control Eng.* SAGE PublicationsSage UK: London, England, 2008. Vol. 222, № 6. P. 619–631.
54. Das S., Sinha M., Misra A.K. Dynamic Neural Units for Adaptive Magnetic Attitude Control of Spacecrafts // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 4. P. 1280–1291.
55. Kennedy, J., Eberhart R. Particle swarm optimization // *Proc. Int. Conf. Neural Networks.* IEEE. 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.



56. Tang J., Liu G., Pan Q. A Review on Representative Swarm Intelligence Algorithms for Solving Optimization Problems: Applications and Trends // IEEE/CAA J. Autom. Sin. 2021. Vol. 8, № 10. P. 1627–1643.
57. Cooper M.A., Smeresky B. An Overview of Evolutionary Algorithms toward Spacecraft Attitude Control // Advances in Spacecraft Attitude Control / ed. Sands T. Rijeka: IntechOpen, 2020.
58. Spiller D., Ansalone L., Curti F. Particle Swarm Optimization for Time-Optimal Spacecraft Reorientation with Keep-Out Cones // J. Guid. Control. Dyn. 2016. Vol. 39, № 2. P. 312–325.
59. Melton R.G. Differential evolution/particle swarm optimizer for constrained slew maneuvers // Acta Astronaut. 2018. Vol. 148. P. 246–259.
60. Wu X. et al. Dynamic regional splitting planning of remote sensing satellite swarm using parallel genetic PSO algorithm // Acta Astronaut. 2023. Vol. 204. P. 531–551.
61. Wang M. et al. Coordinated trajectory planning of dual-arm space robot using constrained particle swarm optimization // Acta Astronaut. 2018. Vol. 146. P. 259–272.
62. Fakoor M., Nikpay S., Kalhor A. On the ability of sliding mode and LQR controllers optimized with PSO in attitude control of a flexible 4-DOF satellite with time-varying payload // Adv. Sp. Res. 2021. Vol. 67, № 1. P. 334–349.
63. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Наук. думк. Киев, 1984. 187 с.
64. Guerman A., Ivanov D., Roldugin D., Tkachev S., and Okhitina A. Orbital and Angular Dynamics Analysis of the Small Satellite SAR Mission INFANTE // Cosm. Res. 2020. Vol. 58, № 3. P. 206–217.
65. Зубов В.И. Лекции по теории управления. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, М., 1975. 495 с.
66. Tsiotras P. New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies // IFAC Proc. Vol. 1994. Vol. 27, № 13. P. 321–326.
67. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Карпенко С.О. Исследование углового движения микроспутника Чибис-м с трехосным маховичным управлением // Космические исследования. 2012. Vol. 50, № 6. С. 462–471.
68. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. Москва: Наука, 1967. 225 с.
69. Guelman M. et al. Design and testing of magnetic controllers for Satellite stabilization // Acta Astronaut. 2005. Vol. 56, № 1. P. 231–239.

70. Овчинников М.Ю. и др. Магнитные системы ориентации малых спутников. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 366 с.
71. Alken P. et al. International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation // *Earth, Planets Sp.* 2021. Vol. 73, № 1. P. 49.
72. Пичужкина А.В., Ролдугин Д.С. Использование моделей геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* 2016. № 87. 30 с.
73. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
74. Eberhart R., Shi Y. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. // *IEEE Congr. Evol. Comput. San Diego, Calif.* 2000. P. 84–88.
75. Simon D. *Evolutionary Optimization Algorithms.* Wiley, 2013. 742 p.
76. Hu X., Eberhart R. Solving Constrained Nonlinear Optimization Problems with Particle Swarm Optimization // *6th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics.* Orlando, Florida, USA, 2002. P. 203–206.
77. Vanderbergh F., Engelbrecht A. A study of particle swarm optimization particle trajectories // *Inf. Sci. (Ny).* 2006. Vol. 176, № 8. P. 937–971.
78. Eberhart R., Shi Y. Particle swarm optimization: Developments, applications and resources. // *IEEE Congr. Evol. Comput. Seoul, Korea.* 2001. P. 81–86.
79. Penrose R. On best approximate solutions of linear matrix equations // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1956. Vol. 52(1). P. 17–19.
80. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S. Application of the PSO for the construction of a 3-axis stable magnetically actuated satellite angular motion // *Acta Astronaut.* 2022. Vol. 195. P. 86–97.
81. Okhitina A. et al. Academy transaction note “closed form solution for a minimum deviation magnetically controllable satellite angular trajectory” // *Acta Astronaut.* 2023. Vol. 203. P. 60–64.
82. Okhitina A.S., Roldugin D.S., Tkachev S.S. Biologically inspired optimization algorithm in satellite attitude control problems // *15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems.* Moscow, 2020.
83. Okhitina A., Roldugin D., Tkachev S. Magnetically controllable attitude trajectory constructed using the particle swarm optimization method // *72nd Int. Astronaut. Congr.* 2021. P. 9.
84. Пеньков В.И., Ролдугин Д.С. Трехосная инерциальная магнитная

ориентация спутника в гравитационном поле // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. №163. 18 с.

85. Okhitina A., Tkachev S., Roldugin D. Comparative cost functions analysis in the construction of a reference angular motion implemented by magnetorquers // *Aerospace*. 2023. Vol. 10. P. 468.
86. Kumar B.S. et al. Differential Drag as a Means of Spacecraft Formation Control // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2011. Vol. 47, № 2. P. 1125–1135.
87. Skelton W. V et al. Differential Drag Maneuvers for 6U CubeSat Separation: Enabling Space Based Radio Interferometry Observation from Small Satellite Platforms // *2022 IEEE Aerospace Conference (AERO)*. 2022. P. 1–11.
88. Ivanov D. et al. Decentralized Control of Nanosatellite Tetrahedral Formation Flying Using Aerodynamic Forces // *Aerospace*. 2021. Vol. 8, № 8.
89. Sin E., Arcaç M., Packard A. Small Satellite Constellation Separation using Linear Programming based Differential Drag Commands // *2018 Annual American Control Conference (ACC)*. 2018. P. 4951–4956.
90. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // *Космические исследования*. 2018. Vol. 56, №5. С. 375–383.

## Приложения

### А. Явный вид матрицы системы и неоднородного члена для ЦСК

Выпишем явный вид матрицы и неоднородного члена линеаризованной в окрестности ЦСК системы уравнений движения.

С учетом выражения (16) получаем

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}} &= -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} \mathbf{D} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times} (\mathbf{E}_{3 \times 3} - [\mathbf{s}]_{\times}) = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_{\times}, \\ \mathbf{S}_d &= 2(\gamma, \alpha, \beta)^T = 2\mathbf{s}, \\ \mathbf{DB} &= (\mathbf{E}_{3 \times 3} - [\mathbf{s}]_{\times}) \mathbf{B}, \\ \frac{\mathbf{DB}}{B} &= (\mathbf{E}_{3 \times 3} - [\mathbf{s}]_{\times}) \mathbf{b}, \quad \text{где } \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}.\end{aligned}$$

Подставляем в правую часть уравнения (14):

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} &= -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} - 2k_d \mathbf{s} - \frac{\mathbf{DB}((\mathbf{DB}), \mathbf{M}_{ctrl})}{B^2} \approx \\ &\approx -k_{\omega} \mathbf{E}_{3 \times 3} \boldsymbol{\omega}_{rel} - 2k_d \mathbf{E}_{3 \times 3} \mathbf{s} - \mathbf{b}(\mathbf{b}, -k_{\omega} \boldsymbol{\omega}_{rel} - 2k_d \mathbf{s}) \\ &\quad - \mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0) - \mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^{linear}) - [\mathbf{s}]_{\times} \mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0) - \mathbf{b}([\mathbf{s}]_{\times} \mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0).\end{aligned}\tag{56}$$

Здесь  $\mathbf{M}_{ctrl}^0$  соответствует формуле (19), а  $\mathbf{M}_{ctrl}^{linear} = \frac{\partial \mathbf{M}_{ctrl}}{\partial (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{s})} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{rel} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$ , тогда

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \mathbf{M}_{ctrl}^0 + \frac{\partial \mathbf{M}_{ctrl}}{\partial (\boldsymbol{\omega}_{rel}^T, \mathbf{s}^T)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{rel} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} + o \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{rel} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \approx \mathbf{M}_{ctrl}^0 + \mathbf{M}_{ctrl}^{linear}.$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{G}(t)$  системы (17) состоит из четырех блоков размера  $3 \times 3$

$$\mathbf{G}(t) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{G}_{\omega} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{G}_s \\ \hline \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \end{array} \right),$$

где  $\mathbf{E}_{3 \times 3}$  – единичная матрица,  $\mathbf{O}_{3 \times 3}$  – нулевая матрица, матрица  $\mathbf{G}_{\omega}$  состоит из суммы матриц, стоящих при  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ , а матрица  $\mathbf{G}_s$  – сумма матриц при  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{G}_\omega = -k_\omega \mathbf{E}_{3 \times 3} + k_\omega \mathbf{b} \mathbf{b}^T - \mathbf{b} \mathbf{b}^T [\boldsymbol{\omega}_0]_x \mathbf{J} + \mathbf{b} \mathbf{b}^T [\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0]_x - \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{J} [\boldsymbol{\omega}_0]_x,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_s = & -2k_d \mathbf{E}_{3 \times 3} + 2k_d \mathbf{b} \mathbf{b}^T - \mathbf{b} \mathbf{b}^T [\boldsymbol{\omega}_0]_x \mathbf{J} [\boldsymbol{\omega}_0]_x + \\ & + \mathbf{b} \mathbf{b}^T [\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0]_x [\boldsymbol{\omega}_0]_x - \mathbf{b} (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0)^T [\boldsymbol{\omega}_0]_x^T [\mathbf{b}]_x - \\ & - \mathbf{b}^T [\boldsymbol{\omega}_0]_x \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_0 [\mathbf{b}]_x \\ & + \mathbf{b} \mathbf{b}^T (3\omega_{op\delta}^2 [\mathbf{e}_r]_x \mathbf{J} [\mathbf{e}_r]_x) - \mathbf{b} \mathbf{b}^T (3\omega_{op\delta}^2 [\mathbf{J} \mathbf{e}_r]_x [\mathbf{e}_r]_x) + \\ & + \mathbf{b} (3\omega_{op\delta}^2 (\mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{e}_r)^T [\mathbf{b}]_x) + (3\omega_{op\delta}^2 \mathbf{b}^T (\mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{e}_r)) [\mathbf{b}]_x + \\ & + \rho V_0^2 \left( (1-\varepsilon) \tilde{\mathbf{I}}_1 + 2\varepsilon \tilde{\mathbf{I}}_2 + (1-\varepsilon) \frac{\nu}{V_0} \tilde{\mathbf{I}}_3 \right), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{I}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{I}}_2$  и  $\tilde{\mathbf{I}}_3$  – линеаризованные в окрестности ЦСК выражения  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  и  $\mathbf{I}_3$  (6), входящие в аэродинамический момент (5).

Выражение для  $\mathbf{f}(t)$ , включает в себя оставшиеся в (56) слагаемые, которые не содержат ни  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ , ни  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{b}(\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0).$$

### Б. Явный вид матрицы системы и неоднородного члена для ОпСК

С учетом введенного вспомогательного (опорного) движения матрица перехода из ЦСК в ССК, линеаризованная в окрестности опорного движения, имеет вид

$$\mathbf{DC} = (\mathbf{E}_{3 \times 3} - [\mathbf{s}]_x) \mathbf{C},$$

$$\frac{d(\mathbf{DC})}{dt} = \dot{\mathbf{D}}\mathbf{C} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{C}} = -[\boldsymbol{\omega}_{rel}]_x \mathbf{DC} - \mathbf{D}[\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref}]_x \mathbf{C},$$

$$\mathbf{S}_d = 2(\gamma, \alpha, \beta)^T = 2\mathbf{s},$$

$$\mathbf{DCB} = (\mathbf{E}_{3 \times 3} - [\mathbf{s}]_x) \mathbf{CB},$$

$$\frac{\mathbf{DCB}}{B} = (\mathbf{E}_{3 \times 3} - [\mathbf{s}]_x) \mathbf{Cb}, \quad \text{где } \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Подставляя в правую часть уравнения относительного движения, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - k_d\mathbf{S}_d - \frac{\mathbf{DCB}\left(\left(\mathbf{DCB}\right)^T \mathbf{M}_{ctrl}\right)}{B^2},$$

получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} &= -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - 2k_d\mathbf{s} - \frac{\mathbf{DCB}\left(\left(\mathbf{DCB}\right), \mathbf{M}_{ctrl}\right)}{B^2} \approx \\ &-k_{\omega}\mathbf{E}_{3\times 3}\boldsymbol{\omega}_{rel} - 2k_d\mathbf{E}_{3\times 3}\mathbf{s} - \mathbf{Cb}\left(\mathbf{Cb}, -k_{\omega}\boldsymbol{\omega}_{rel} - 2k_d\mathbf{s}\right) - \mathbf{Cb}\left(\mathbf{Cb}, \mathbf{M}_{ctrl}^0\right) - \\ &- \mathbf{Cb}\left(\mathbf{Cb}, \mathbf{M}_{ctrl}^{linear}\right) - [\mathbf{s}]_{\times} \mathbf{Cb}\left(\mathbf{Cb}, \mathbf{M}_{ctrl}^0\right) - \mathbf{Cb}\left([\mathbf{s}]_{\times} \mathbf{Cb}, \mathbf{M}_{ctrl}^0\right). \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь  $\mathbf{M}_{ctrl}^0$  соответствует формуле (27), а  $\mathbf{M}_{ctrl}^{linear} = \frac{\partial \mathbf{M}_{ctrl}}{\partial (\boldsymbol{\omega}_{rel}, \mathbf{s})} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{rel} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$ , тогда

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \mathbf{M}_{ctrl}^0 + \frac{\partial \mathbf{M}_{ctrl}}{\partial (\boldsymbol{\omega}_{rel}^T, \mathbf{s}^T)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{rel} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} + o \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{rel} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \approx \mathbf{M}_{ctrl}^0 + \mathbf{M}_{ctrl}^{linear}.$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{G}(t)$  системы вида (17) состоит из четырех блоков размера  $3 \times 3$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}_{\omega} & \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}_s \\ \mathbf{E}_{3\times 3} & \mathbf{O}_{3\times 3} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{E}_{3\times 3}$  – единичная матрица,  $\mathbf{O}_{3\times 3}$  – нулевая матрица, матрицы  $\mathbf{G}_{\omega}$  и  $\mathbf{G}_s$  размера  $3 \times 3$  получаются при группировке соответствующих матриц при  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$  и  $\mathbf{s}$  соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\omega} &= -k_{\omega}\mathbf{E}_{3\times 3} + k_{\omega}\mathbf{Cbb}^T\mathbf{C}^T - \mathbf{Cbb}^T\mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} \mathbf{J} + \\ &+ \mathbf{Cbb}^T\mathbf{C}^T \left[ \mathbf{JC}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} - \mathbf{Cbb}^T\mathbf{C}^T \mathbf{J} \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_s = & -2k_d \mathbf{E}_{3 \times 3} + 2k_d \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T - \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} \mathbf{J} \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} + \\
& + \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{J} \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} \\
& - \mathbf{C} \mathbf{b} \left( \mathbf{J} \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right)^T \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times}^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} - \\
& - \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} \mathbf{J} \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} \\
& + \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \mathbf{J} \left[ \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{ref} \right]_{\times} \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} - \\
& - \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \mathbf{J} \left[ \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right]_{\times} \left[ \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{ref} \right]_{\times} - \\
& - \left( \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \mathbf{J} \left[ \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_{ref} \right]_{\times} \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) \right) \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} + \\
& - \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \mathbf{J} \left[ \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} \right]_{\times} - \mathbf{C} \mathbf{b} \left( \mathbf{J} \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} \right)^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} - \left( \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \mathbf{J} \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} \right) \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} + \\
& + \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left( 3\omega_{op\delta}^2 \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_r \right]_{\times} \mathbf{J} \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_r \right]_{\times} \right) - \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left( 3\omega_{op\delta}^2 \left[ \mathbf{J} \mathbf{C} \mathbf{e}_r \right]_{\times} \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_r \right]_{\times} \right) + \\
& + \mathbf{C} \mathbf{b} \left( 3\omega_{op\delta}^2 \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{C} \mathbf{e}_r \right)^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} \right) + \left( 3\omega_{op\delta}^2 \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \mathbf{C} \mathbf{e}_r \right) \right) \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} + \\
& + \rho V_0^2 \left( (1-\varepsilon) \tilde{\mathbf{I}}_1 + 2\varepsilon \tilde{\mathbf{I}}_2 + (1-\varepsilon) \frac{\nu}{V} \tilde{\mathbf{I}}_3 \right),
\end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{I}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{I}}_2$  и  $\tilde{\mathbf{I}}_3$  – линеаризованные в окрестности ЦСК выражения  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  и  $\mathbf{I}_3$  (6), входящие в аэродинамический момент (5). В случае, когда целевая ориентация является орбитальной (ЦСК = ОрбСК), выражения имеют достаточно простой и компактный вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{I}}_1 = & - \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{r}_c \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right)^T \mathbf{n} \right]_{\times} \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \sigma \right]_{\times} - \\
& - \mathbf{C} \mathbf{b} \left( \left( \mathbf{r}_c \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right)^T \mathbf{n} \right) \times \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \sigma \right) \right)^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} - \\
& - \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \sigma \right]_{\times} \mathbf{r}_c \mathbf{n}^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right]_{\times} - \\
& - \left( \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left( \mathbf{r}_c \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right)^T \mathbf{n} \right) \times \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \sigma \right) \right) \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times}, \\
\tilde{\mathbf{I}}_2 = & - 2 \mathbf{C} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left[ \mathbf{n} \sigma \right]_{\times} \mathbf{r}_c \left( \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right)^T \mathbf{n} \right) \mathbf{n}^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right]_{\times} - \\
& - \mathbf{C} \mathbf{b} \left( \left( \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right)^T \mathbf{n} \right)^2 \mathbf{r}_c \times \mathbf{n} \sigma \right)^T \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times} - \\
& - \left( \mathbf{b}^T \mathbf{C}^T \left( \left( \mathbf{C} \mathbf{e}_1 \right)^T \mathbf{n} \right)^2 \mathbf{r}_c \times \mathbf{n} \sigma \right) \left[ \mathbf{C} \mathbf{b} \right]_{\times},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{I}}_3 = & -2\mathbf{C}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{C}^T[\mathbf{n}\sigma]_{\times}\mathbf{r}_c\mathbf{n}^T[\mathbf{C}\mathbf{e}_1]_{\times} - \\ & -\mathbf{C}\mathbf{b}\left(\left(\left(\mathbf{C}\mathbf{e}_1\right)^T\mathbf{n}\right)\mathbf{r}_c\times\mathbf{n}\sigma\right)^T[\mathbf{C}\mathbf{b}]_{\times} - \\ & -\left(\mathbf{b}^T\mathbf{C}^T\left(\left(\mathbf{C}\mathbf{e}_1\right)^T\mathbf{n}\right)\mathbf{r}_c\times\mathbf{n}\sigma\right)[\mathbf{C}\mathbf{b}]_{\times},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$ .

Выражение для  $\mathbf{f}(t)$ , включает в себя оставшиеся в (57) слагаемые, которые не содержат ни  $\boldsymbol{\omega}_{rel}$ , ни  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{b}\left(\mathbf{C}\mathbf{b}, \mathbf{M}_{ctrl}^0\right). \quad (58)$$

В случае орбитальной ориентации выражение (58) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t) = & -\mathbf{C}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{C}^T\left(\mathbf{J}\left[\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref}\right]_{\times}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}\right) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \right. \\ & \left. + \mathbf{C}\left(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}\right) \times \mathbf{J}\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}\right) + 3\omega_{opb}^2\left[\mathbf{C}\mathbf{e}_3\right]_{\times}\mathbf{J}\mathbf{e}_r\right) - \\ & -\mathbf{C}\mathbf{b}\left(\mathbf{b}^T\mathbf{C}^T\left(\mathbf{r}_c\left(\mathbf{C}\mathbf{e}_1\right)^T\mathbf{n}\right) \times \left(\mathbf{C}\mathbf{e}_1\sigma\right)\right) - \\ & -\mathbf{C}\mathbf{b}\left(\mathbf{b}^T\mathbf{C}^T\left(\left(\mathbf{C}\mathbf{e}_1\right)^T\mathbf{n}\right)^2\mathbf{r}_c\times\mathbf{n}\sigma\right) - \\ & -\mathbf{C}\mathbf{b}\left(\mathbf{b}^T\mathbf{C}^T\left(\left(\mathbf{C}\mathbf{e}_1\right)^T\mathbf{n}\right)\mathbf{r}_c\times\mathbf{n}\sigma\right),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ .

## **В. Решение задачи квадратичного программирования для режима орбитальной ориентации**

Рассмотрим орбитальную систему координат в качестве целевой (ЦСК = ОрбСК). В этом случае угловая скорость ЦСК относительно ИСК постоянная, а ее производная равна нулю

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \omega_0, 0)^T = const, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = (0, 0, 0)^T. \quad (59)$$

Вид линеаризованной в окрестности ОрбСК матрицы перехода из ОрбСК в ОпСК



$$\mathbf{C} \approx \begin{pmatrix} 1 & \beta_{ref} & -\alpha_{ref} \\ -\beta_{ref} & 1 & \gamma_{ref} \\ \alpha_{ref} & -\gamma_{ref} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\beta_{ref} & \alpha_{ref} \\ \beta_{ref} & 0 & -\gamma_{ref} \\ -\alpha_{ref} & \gamma_{ref} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E} - [\mathbf{s}_{ref}]_{\times},$$

где  $\mathbf{s}_{ref} = (\gamma_{ref}, \alpha_{ref}, \beta_{ref})^T$ .

Выражение для производной произведения матриц  $\mathbf{DC}$  принимает вид

$$\dot{\mathbf{C}} = -[\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref}]_{\times} \mathbf{C},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{ref} = (\dot{\gamma}_{ref}, \dot{\alpha}_{ref}, \dot{\beta}_{ref})$ .

$$\boldsymbol{\omega}_{abs} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \boldsymbol{\omega}_{rel},$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{abs} &= \dot{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref}) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \\ &= -(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{C}(\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{ref})) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel} = \\ &= -(\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0) + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{rel}, \end{aligned}$$

В этом случае выражение для управляющего момента на опорном движении имеет вид (согласно (27) и (59))

$$\mathbf{M}_{ctrl}^0 = \mathbf{J}\mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_{ref} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{J}\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} + \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{M}_{grav} - \mathbf{M}_{aero}. \quad (60)$$

Вектор геомагнитной индукции в модели прямого диполя после линеаризации в окрестности ОрбСК есть

$$\mathbf{B}_{magn} = \mathbf{DCB} = \mathbf{CB} = (\mathbf{E} - [\mathbf{s}]_{\times}) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{E} - [\mathbf{s}]_{\times}) B_0 \begin{pmatrix} \sin i \cos u \\ \cos i \\ -2 \sin i \sin u \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Учитывается также, что  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ref} = (\ddot{\gamma}_{ref}, \ddot{\alpha}_{ref}, \ddot{\beta}_{ref})$ ,  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ .

Далее для сокращения записи индекс «ref» в обозначении углов и их производных опущен.

Рассмотрим скалярное произведение вектора геомагнитной индукции на управляющий момент

$$\mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{M}_{ctrl}^0 = \mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{J} \mathbf{C} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{J} \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{B}_{magn}^T \boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs} - \mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{M}_{grav} - \mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{M}_{aero}. \quad (62)$$

Результаты соответствующих скалярных произведений показаны в Таблице В.1 для всех слагаемых выражения (60), кроме умножения вектора геомагнитной индукции на  $\mathbf{M}_{aero}$ . Явный вид последнего слагаемого из (62) из-за громоздкости приведен сразу после Таблицы В.1. В первом столбце Таблицы В.1 указаны слагаемые в выражении (60). Второй столбец содержит их линеаризованные выражения, а в третьем записан результат скалярного умножения выражений из второго столбца на  $\mathbf{B}_{magn}$  (61). При этом используются обозначения  $B_{i,sk}, B_{i,ck}, i = \overline{1,3}, k = \overline{1,2}$ , явный вид которых приведен в Таблице В.2. Они представляют собой всевозможные произведения компонент вектора геомагнитной индукции на тригонометрические выражения, указанные в левом столбце Таблицы В.2.

Таблица В.1. Результат скалярного произведения  $\mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{M}_{ctrl}$

Слагаемое в $\mathbf{M}_{ctrl}^0$ (60)	Линеаризованная форма	Результат умножения $\mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{M}_{ctrl}$ (по соответствующим слагаемым)
$\mathbf{J} \mathbf{C} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}_0$	$\begin{pmatrix} J_1 \dot{\beta} \omega_0 \\ 0 \\ -J_3 \dot{\gamma} \omega_0 \end{pmatrix}$	$J_1 \omega_0^2 (B_{1,c1} b_1 - B_{1,s1} b_2 + 2B_{1,c2} b_3 - 2B_{1,s2} b_4) - J_3 \omega_0^2 (B_{3,c1} g_1 - B_{3,s1} g_2 + 2B_{3,c2} g_3 - 2B_{3,s2} g_4)$
$\mathbf{J} \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\omega}}$	$\begin{pmatrix} J_1 \ddot{\gamma} \\ J_2 \ddot{\alpha} \\ J_3 \ddot{\beta} \end{pmatrix}$	$-\omega_0^2 (B_{1,s1} J_1 g_1 + B_{2,s1} J_2 a_1 + B_{3,s1} J_3 b_1 + B_{1,c1} J_1 g_2 + B_{2,c1} J_2 a_2 + B_{3,c1} J_3 b_2 + 4(B_{1,s2} J_1 g_3 + B_{2,s2} J_2 a_3 + B_{3,s2} J_3 b_3 + B_{1,c2} J_1 g_4 + B_{2,c2} J_2 a_4 + B_{3,c2} J_3 b_4))$

$\boldsymbol{\omega}_{abs} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{abs}$	$\begin{pmatrix} (J_3 - J_2)(\omega_0 \dot{\beta} - \omega_0^2 \gamma) \\ 0 \\ (J_2 - J_1)(\omega_0 \dot{\gamma} - \omega_0^2 \beta) \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} & \omega_0^2 (J_3 - J_2) (B_{1,c1} b_1 - B_{1,s1} b_2 + 2B_{1,c2} b_3 - 2B_{1,s2} b_4) + \\ & \omega_0^2 (J_2 - J_1) (B_{3,c1} g_1 - B_{3,s1} g_2 + 2B_{3,c2} g_3 - 2B_{3,s2} g_4) + \\ & \omega_0^2 (J_2 - J_3) (B_{1,s1} g_1 + B_{1,c1} g_2 + B_{1,s2} g_3 + B_{1,c2} g_4) + \\ & \omega_0^2 (J_2 - J_1) (B_{3,s1} b_1 + B_{3,c1} b_2 + B_{3,s2} b_3 + B_{3,c2} b_4) \end{aligned}$
$\mathbf{M}_{grav}$	$\begin{pmatrix} (J_2 - J_3) \gamma \\ (J_1 - J_3) \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} & 3\omega_0^2 ((J_2 - J_3) (B_{1,s1} g_1 + B_{1,c1} g_2 + B_{1,s2} g_3 + B_{1,c2} g_4) + \\ & + (J_1 - J_3) (B_{2,s1} a_1 + B_{2,c1} a_2 + B_{2,s2} a_3 + B_{2,c2} a_4)) \end{aligned}$

$$\mathbf{B}_{magn}^T \mathbf{M}_{aero} =$$

$$\begin{aligned} = & B_0 \left( \sin i \left( c_y \xi_1 \left( a_1 \frac{\sin 2u}{2} + a_2 \frac{1 + \cos 2u}{2} + a_3 \frac{\sin u + \sin 3u}{2} + a_4 \frac{\cos u + \cos 3u}{2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + c_z \xi_1 \left( b_1 \frac{\sin 2u}{2} + b_2 \frac{1 + \cos 2u}{2} + b_3 \frac{\sin u + \sin 3u}{2} + b_4 \frac{\cos u + \cos 3u}{2} \right) \right) + \right. \\ & + \cos i \left( -c_x \xi_1 (a_1 \sin u + a_2 \cos u + a_3 \sin 2u + a_4 \cos 2u) + c_z (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \right) + \\ & - 2 \sin i \left( -c_x \xi_1 \left( b_1 \frac{1 - \cos 2u}{2} + b_2 \frac{\sin 2u}{2} + b_3 \frac{\cos u - \cos 3u}{2} + b_4 \frac{\sin 3u - \sin u}{2} \right) \right. \\ & \left. - c_y \sin u (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \right) - \\ & - \sin i \left( c_z (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \left( b_1 \frac{\sin 2u}{2} + b_2 \frac{1 + \cos 2u}{2} + b_3 \frac{\sin u + \sin 3u}{2} + b_4 \frac{\cos u + \cos 3u}{2} \right) + \right. \\ & \left. + c_y (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \left( a_1 \frac{\sin 2u}{2} + a_2 \frac{1 + \cos 2u}{2} + a_3 \frac{\sin u + \sin 3u}{2} + a_4 \frac{\cos u + \cos 3u}{2} \right) \right) \\ & - \cos i c_y (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) (g_1 \sin u + g_2 \cos u + g_3 \sin 2u + g_4 \cos 2u) - \\ & - 2 \sin i c_z (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \left( g_1 \frac{1 - \cos 2u}{2} + g_2 \frac{\sin 2u}{2} + g_3 \frac{\cos u - \cos 3u}{2} + g_4 \frac{\sin 3u - \sin u}{2} \right), \end{aligned}$$

где  $\xi_1 = -\rho V_0^2 \sigma (1 - \varepsilon)$ ,  $\xi_2 = -2\rho V_0^2 \sigma \varepsilon$ ,  $\xi_3 = -\rho V_0^2 \sigma (1 - \varepsilon) d$ ;  $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_n - \mathbf{OC} = (c_x, c_y, c_z)$

задан в ССК,  $\mathbf{r}_n$  – вектор из геометрического центра КА к геометрическому центру рассматриваемой грани,  $\mathbf{OC}$  – вектор из геометрического центра КА к его центру масс.

Таблица В.2. Произведения компонент вектора  $\mathbf{B}_{\text{mag}}$  и соответствующих тригонометрических выражений

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$\sin u$	$B_{1,s1} = B_0 \sin i \frac{\sin 2u}{2}$	$B_{2,s1} = B_0 \cos i \sin u$	$B_{3,s1} = -2B_0 \sin i \frac{1 - \cos 2u}{2}$
$\cos u$	$B_{1,c1} = B_0 \sin i \frac{1 + \cos 2u}{2}$	$B_{2,c1} = B_0 \cos i \cos u$	$B_{3,c1} = -2B_0 \sin i \frac{\sin 2u}{2}$
$\sin 2u$	$B_{1,s2} = B_0 \sin i \frac{\sin u + \sin 3u}{2}$	$B_{2,s2} = B_0 \cos i \sin 2u$	$B_{3,s2} = -2B_0 \sin i \frac{\cos u - \cos 3u}{2}$
$\cos 2u$	$B_{1,c2} = B_0 \sin i \frac{\cos u + \cos 3u}{2}$	$B_{2,c2} = B_0 \cos i \cos 2u$	$B_{3,c2} = -2B_0 \sin i \frac{\sin 3u - \sin u}{2}$