

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША РАН

На правах рукописи

Ролдугин Дмитрий Сергеевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ И ТОЧНОСТИ
АЛГОРИТМОВ АКТИВНОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ
МАЛОГО СПУТНИКА**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
М.Ю. Овчинников

Москва – 2013

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Постановка задачи. Модели геомагнитного поля, системы координат, уравнения движения, метод исследования	16
1.1. Описание задачи	16
1.2. Модели геомагнитного поля	17
1.3. Уравнения движения.....	22
1.4. Асимптотические методы	25
Глава 2. Исследование алгоритма демпфирования «-Vdot»	28
2.1. Переходный процесс	28
2.2. Установившееся движение.....	38
Глава 3. Исследование алгоритмов ориентации спутника, стабилизированного собственным вращением	44
3.1. Алгоритм гашения нутационных колебаний	44
3.2. Алгоритм раскрутки вокруг оси симметрии	50
3.3. Алгоритм точной переориентации	53
3.4. Первый алгоритм предварительной переориентации	61
3.5. Второй алгоритм предварительной переориентации	67
Глава 4. Трехосная магнитная ориентация спутника в инерциальном пространстве	74
4.1. Конструирование алгоритма ориентации	74
4.2. Исследование переходных процессов.....	78
4.3. Исследование устойчивости	81
4.4. Численное моделирование	88
Глава 5. Численные, полунатурные и летные испытания алгоритмов	93
5.1. Численное исследование динамики спутника при использовании различных моделей геомагнитного поля	93
5.2. Стендовые испытания.....	99
5.3. Летные испытания на борту малого спутника «Чибиc-M»	102
Заключение.....	109
Литература	111
Приложение I. Асимптотические методы.....	119
Приложение II. Краткое описание лабораторного стенда	122

Введение

В последние два десятилетия наблюдается существенный рост интереса к малым спутникам (далее под малыми спутниками будем понимать спутники массой до нескольких десятков килограмм – наноспутники и микроспутники). Благодаря существующему уровню развития электроники и вычислительной техники были разработаны и выведены на орбиту десятки малых спутников. Напомним, что аппараты массой до 10 килограмм принято относить к наноспутникам, а аппараты массой до 100 килограмм – к микроспутникам. Далее речь пойдет в основном о наноспутниках. Интерес к малым спутникам и бурное развитие этого направления объясняется короткими сроками разработки и изготовления, относительно низкой стоимостью самого аппарата и его вывода на орбиту. Немаловажным фактором, обусловленным развитием техники, является способность малых спутников выполнять некоторые задачи, которые ранее были подвластны только большим и дорогостоящим аппаратам. Кроме того, на базе нескольких миниатюрных спутников возможно создание формаций и группировок спутников, предоставляющих возможность проведения одновременных экспериментов в различных, но близких точках пространства. Последнее направление, в англоязычной литературе носящее название «formation flying», в течение нескольких последних лет приобрело особенный интерес для исследователей и разработчиков.

Рассматриваемые в диссертации алгоритмы управления ориентацией спутника были предложены для реализации на борту малого аппарата «Чибис-М» (разработка Института космических исследований РАН), семейства малых спутников ТНС (технологический наноспутник, разработка ОАО «Российские космические системы»), малых спутников TabletSat, разрабатываемых ООО «Спутникс» и аппарата UniSat-5, разрабатываемого в GAUSS Srl. В диссертации детально исследуются алгоритмы управления этими аппаратами, так как необходимость (заметим, что для малых аппаратов магнитная система применяется с необходимостью) применения их на борту приводит к необходимости заранее понять, как будут влиять на их работу отдельные

параметры – как аппарата (моменты инерции), так и его орбиты (наклонение). Общность проблем ориентации малых аппаратов при помощи магнитной системы управления и задачи, стоящие в рамках трех указанных спутников или их серий, подтверждают *актуальность* диссертационной работы. Возникающие в каждой миссии требования по точности и быстродействию (время переходных процессов) системы ориентации привели к необходимости получения простых, наглядных формул, позволяющих оценить, насколько система ориентации удовлетворяет требованиям, предъявляемым к ней научной аппаратурой. Таким образом, *цель* диссертации – получение простых и эффективных методов анализа работоспособности системы ориентации и выбора параметров управления для каждой конкретной миссии. Основные решаемые при этом задачи – показать возможность реализации требуемой ориентации спутника при помощи известных алгоритмов с учетом ограничений, накладываемых малыми аппаратами, при необходимости разработать новые, исследовать эти алгоритмы, доведя результат до уровня конечных формул или первых интегралов, что позволит оперативно выбирать параметры системы ориентации, которые затем уточняются при помощи численного и полунатурного моделирования. При этом, несмотря на популярность магнитных систем ориентации, аналитическое исследование, позволяющее удовлетворить обозначенным выше целям, встречается редко. В частности, для рассмотренных в диссертационной работе алгоритмов удовлетворительных общих результатов найти не удалось, что указывает на *новизну* работы. Опишем сначала проекты, в рамках работы над которыми возникла необходимость представленной диссертации.

Микроспутник «Чибис-М» (запущен с борта космического аппарата Прогресс в ночь с 24 на 25 января 2012 года) предназначен для исследования атмосферных грозных разрядов. Научная аппаратура спутника требует его трехосной ориентации относительно орбитальной системы координат. Для этого используется магнитно-маховичная система ориентации, состоящая из трех пар маховиков и трех магнитных катушек. Демпфирование начальной

угловой скорости спутника после отделения от носителя производится с помощью электромагнитных катушек, взаимодействующих с геомагнитным полем. После этого осуществляется стабилизация аппарата в требуемом положении с помощью маховиков. В качестве датчиков определения ориентации используются магнитометр, набор датчиков Солнца и три одноосных датчика угловой скорости. Несмотря на то, что основными исполнительными элементами системы являются маховики, обеспечивающие точную (минимальное требование научной аппаратуры по точности – 5 градусов, маховики же обеспечивают точность лучше 1 градуса) ориентацию в орбитальной системе координат, магнитные катушки являются необходимым элементом системы управления. Они позволяют демпфировать начальную скорость и осуществлять разгрузку маховиков, необходимые для работы маховичной системы. Система ориентации аппарата была реализована в ИТЦ «СканЭкс», облик системы ориентации был проработан в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Отметим, что, несмотря на традиционный облик системы ориентации, возникла необходимость провести анализ ее работы. Возникший в последнее время разрыв преемственности опыта запуска малых спутников и разработки их систем ориентации, связанный с проблемами в ракетно-космической отрасли, побудил провести разносторонний анализ работы алгоритмов ориентации там, где в литературе традиционно приводятся лишь результаты летных и численных испытаний постоянно используемых алгоритмов (например, в отношении алгоритма демпфирования [1]). Только после проведения такой работы, включая верификацию на лабораторных стендах, было решено использовать алгоритмы на борту микроспутника «Чибис-М».

Рассматриваемый в первой главе диссертации алгоритм гашения угловой скорости планируется также использовать на аппаратах серии ТНС. С 2003 года в ОАО «Российские космические системы» (бывшее РНИИ космического приборостроения) проводится разработка серии технологических наноспутников ТНС-0, ТНС-1 и ТНС-2, предназначенных для ускоренной

летней отработки новых технологий и бортовых подсистем малых аппаратов. Как показали результаты летных испытаний ТНС-0 №1, запущенного вручную космонавтом С. Шариповым в марте 2005г., такая технология экспериментальной отработки обеспечивает надежность, простоту, регулярность запусков, малые стоимости и сроки работ. Пассивная магнитная система ориентации наноспутника ТНС-0 №1 была разработана в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. В настоящее время Институт разрабатывает магнитные системы ориентации, пассивные и активные, для новых спутников этой серии.

Следующий аппарат, ТНС-0 №2, будет также оснащен пассивной магнитной системой ориентации, однако третий аппарат планируется оснастить активной системой с использованием токовых катушек [2]. ТНС-0 №3/GRESAT (совместная разработка ОАО «РКС» и Центра космических технологий и микрогравитации ZARM Бременского университета) представляет собой наноспутник с двумя системами управления ориентацией, двумя бортовыми компьютерами и двумя бортовыми средствами связи с наземным Центром управления полетом [3]. Основная цель проекта – получить новые знания, накопить практический опыт в разработке и создании малогабаритных спутников с использованием современных средств миниатюризации, включая COTS-компоненты, верифицировать новые технологии и инженерные решения, в том числе относящиеся к системе ориентации.

К системе ориентации спутника GRESAT не предъявляются жестких требований по обеспечению его углового движения [4]. Будут апробированы различные как по режимам, так и по способам реализации алгоритмы ориентации. Планируется использовать трехосный магнитометр, солнечные датчики, три взаимно перпендикулярные токовые катушки, систему определения положения центра масс спутника на орбите. Оснащенный таким образом спутник предполагается стабилизировать в инерциальном пространстве собственным вращением. Отдельно стоит проблема выбора заданного направления в инерциальном пространстве для оси вращения

спутника. Самым привлекательным является режим ориентации оси вращения по нормали к плоскости орбиты. Этот режим не требует затрат энергии для поддержания заданного направления оси вращения. Удержание положения этой оси будет осуществляться за счет комбинации гравитационного момента и момента центробежных сил инерции [5]. Алгоритмы управления магнитными катушками, которые будут использованы на наноспутнике GRESAT, рассматриваются во второй главе. Они же могут быть использованы на спутнике ТНС-1, следующем в серии и предназначенном для дистанционного зондирования Земли. Спутник будет стабилизирован собственным вращением, «катясь» по орбите так, что его камеры постоянно была направлена на Землю.

ООО «Спутникс» является инициатором создания Российского специализированного инновационного Центра в Сколково по разработке, изготовлению и наземным испытаниям перспективных элементов и служебных систем для малых спутников массой 10-50 кг. Основное новшество Центра для российской космонавтики – модульная структура аппаратов, заложенная в проекте «TabletSat». За рубежом такая схема уже получила признание и активно используется на аппаратах типа CubeSat. Для них создан Открытый стандарт на архитектуру космических систем, обеспечивающий быстрое определение и конфигурирование подключаемых устройств. Стандарт разработан Американским институтом аэронавтики и астронавтики. При этом даже каждый полностью собранный аппарат может стать модулем для большей конструкции, а большой аппарат с требуемыми характеристиками собирается из базовых функционально обособленных блоков, каждый из которых должен весить не более 1 кг и иметь определенный форм-фактор (1U-блок). В частности, ключевые служебные системы спутника должны уместиться в одном из таких базовых блоков. При необходимости к блоку служебных систем стыкуются другие функционально обособленные блоки – всего до 4 штук. Базовый блок типа 1U имеет название ТаблетСат (TabletSat). Для запуска и последовательного отделения от ракеты-носителя от 1 до 4 ТаблетСатов, созданных как 1U, 2U, 3U или 4U-блоки, предлагается использовать

универсальный транспортно-пусковой контейнер. Его габариты (диаметр, длина) и определяют форм-фактор базового 1U-блока. Использование Plug-and-Play-архитектуры бортовых систем, а также стандартного контейнера потребует от разработчиков соблюдать единые требования к информационным, физическим интерфейсам спутника, что в итоге должно сократить стоимость, время разработки и подготовки к запуску малых спутников. Однако, чтобы требования по стоимости и массе такого аппарата были выполнены, необходимо особенно тщательно относиться к любой служебной системе, в частности, к системе ориентации.

Система ориентации имеет решающее значение для успеха всей миссии. Большинство первых спутников либо не имело систему ориентации, либо имело пассивную систему. Развитие активных систем ориентации началось в основном благодаря запускам телекоммуникационных спутников, имеющих ограничение на направление антенны. Магнитные системы ориентации (МСО) широко применяются в контуре управления угловым движением искусственных спутников Земли в тех случаях, когда предпочтительно использовать недорогую элементную базу и простые, реализуемые на бортовых компьютерах с ограниченными ресурсами алгоритмы. В качестве основной МСО используется, как правило, на небольших спутниках. С одной стороны, к их системе ориентации обычно не предъявляют высоких требований по точности и быстродействию, с другой – МСО могут явиться единственно возможным вариантом для установки на борту спутника в силу имеющихся ограничений по его массе и энерговооруженности. МСО могут использоваться как самостоятельно, так и совместно с системами ориентации другого типа. Это, прежде всего, пассивные системы: например, гравитационные и аэродинамические, а также системы с использованием маховиков [6].

МСО, как правило, в качестве исполнительных элементов используют три взаимно перпендикулярные магнитные катушки. Магнитная катушка представляет собой ряд компланарных витков проводника (обычно меди или алюминия) вокруг сердечника. При приложении напряжения возникает ток,

создающий магнитный дипольный момент. Модуль и направление дипольного момента зависят от силы тока, его направления, числа витков и площади витка. Взаимодействие дипольного момента катушки \mathbf{m} с геомагнитным полем с вектором индукции \mathbf{B} создает механический момент \mathbf{M} , задаваемый соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

Возвращаясь к основным параметрам катушки, момент можно записать в виде [7]

$$\mathbf{M} = NIS\mathbf{m}_0 \times \mathbf{B},$$

где N – число витков, I – сила тока, S – площадь витка, \mathbf{m}_0 – единичный вектор в направлении дипольного момента. Таким образом, создаваемый механический момент линейно зависит от числа витков и их размера. Поэтому использование более крупных катушек позволяет добиться большего механического момента. Но при этом возрастает масса катушки. На самом деле, бортовая система питания создает не заданный ток, а заданное напряжение на концах катушки. Поэтому в рассуждения необходимо также ввести сопротивление провода, а значит, его удельное сопротивление и площадь поперечного сечения. Переходя далее к потребляемой мощности от напряжения, получаем следующее выражения для дипольного момента

$$|\mathbf{m}| = \frac{d}{4} \sqrt{PM / g\rho},$$

где d – диаметр витка, P – потребляемая мощность, M – масса, g – плотность, ρ – сопротивление. Последнее выражение содержит два основных параметра, на которые накладываются ограничения при разработке любой системы ориентации, в особенности, системы ориентации малого аппарата, – массу и потребляемую мощность. Соотношением параметров ρ, g можно добиться изменения P, M . При фиксированных размере и дипольном моменте катушки потребляемая мощность для алюминиевого провода в два раза ниже,

чем для медного. Перейдем теперь к изложению основных рассматриваемых в диссертации вопросов.

В первой главе диссертации приводятся системы координат и уравнения движения спутника; рассматриваются модели геомагнитного поля и анализируется осредненная модель, выбранная в данной работе для приближенного исследования динамики; обсуждаются методы асимптотического анализа.

Во второй главе рассматривается движение спутника на начальном этапе, после его отделения от ракеты-носителя. Рассматривается работа МСО, реализующей алгоритм демпфирования угловой скорости “*-Bdot*” (принятое и ставшее уже традиционным в англоязычной литературе обозначение алгоритма отражает зависимость дипольного момента исполнительных магнитных элементов от производной вектора \mathbf{B} геомагнитной индукции). Алгоритм был впервые опубликован в 1976 году К.Т. Алфрендом (Alfriend) [8]. Автором алгоритма, однако, является Сеймор Кант, инженер Центра космических полетов имени Годдарда. Первое упоминание алгоритма относится к 1972 году в отчете [1]. Ни эта работа, ни статья [8], однако, не содержит аналитического исследования динамики спутника под действием алгоритма “*-Bdot*”. Для него и ряда других алгоритмов приводится логика формирования и результаты численного исследования. В статье [9] автор алгоритма Алфренд исследует алгоритм, представленный в [8] при помощи методов асимптотического анализа. Исследуемый алгоритм реализуется одной магнитной катушкой, при этом демпфирующая часть дополняется позиционной компонентой. Важным результатом, полученным в статье, является зависимость скорости демпфирования и переориентации алгоритма от величины проекции вектора геомагнитной индукции на орбитальную плоскость. Показано, что алгоритм быстрее работает на приполярных орбитах, тогда как на околоэкваториальных орбитах его эффективность резко падает. Начиная с этих двух пионерских исследований, в большинстве работ, где рассматривается движение спутника с МСО, которая реализует алгоритм “*-Bdot*”, основное внимание уделяется либо

проблеме использования алгоритма для спутников с заданными параметрами [10], либо численному моделированию динамики [7]. Отдельно выделим следующие три работы. В [12] приведены результаты численного моделирования гашения начальных колебаний спутника массой несколько килограмм, оснащенного слабыми магнитными катушками. Время гашения начальных колебаний составляет порядка 1000с. Интерес данной работы заключается исключительно в том, что рассматривался малый спутник, на борту которого установлены небольшие катушки. Численно показано, что время демпфирования начальной угловой скорости приемлемо для подавляющего широкого спектра миссий, для которых проводилось моделирование. В работе [13] показано демпфирование угловой скорости в случае быстро вращающегося спутника, а также приведены результаты численного моделирования для наклонений орбиты 30° и 85° , во втором случае демпфирование происходит несколько быстрее. Таким образом, повторен результат [9], но теперь уже для алгоритма “-*Bdot*” без дополнительных компонент управляющего дипольного момента. Авторы, однако, не делают выводов из полученного результата, и он не может рассматриваться как обоснованная закономерность. В [14] рассматривается модельная задача. Спутник закручен вокруг оси симметрии, вектор геомагнитной индукции лежит в плоскости, ей перпендикулярной. В этом случае уменьшение угловой скорости происходит в зависимости от времени экспоненциально. В случае произвольного трехосного спутника показано уменьшение модуля вектора кинетического момента. Хотя рассматриваемая модельная задача во многом искусственна, это одно из немногих аналитических исследований, в котором был получен важный результат – экспоненциальный закон затухания кинетического момента.

Схожая по сути задача, но с иной физической интерпретацией, исследовалась ранее В.В. Белецким в [11], [12], где рассматривалось воздействие вихревых токов на спутник. Воздействие аппроксимировалось моментом, по форме, как позже оказалось, совпадающим с создаваемым МСО

при использовании алгоритма “*-Bdot*” и упрощенного для случая быстрых вращений. Анализируя динамику спутника, автор пришел к выводу об уменьшении модуля вектора кинетического момента и стремлении его к определенному фиксированному в инерциальном пространстве направлению. Для движения по экваториальной орбите это направление было найдено. Выводы, однако, были получены на основе анализа уравнений, которые в рамках принятой им модели геомагнитного поля не удалось проинтегрировать. В работах [17], [18] проведено исследование зависимости кинетического момента от времени для спутника под воздействием вихревых токов. Опираясь на уравнения движения, полученные в [11], авторы нашли выражения, ограничивающие значения модуля кинетического момента в течение всего времени движения.

Третья глава посвящена анализу динамики спутника, стабилизированного собственным вращением и оснащенного МСО. Стабилизация собственным вращением является одним из часто используемых способов поддержания ориентации спутника [19]. Спутник, быстро закрученный вокруг оси симметрии, приобретает свойства гироскопа и в течение длительного времени сохраняет ориентацию этой оси в инерциальном пространстве. В [20] показано, что если на спутник не действуют внешние моменты, но имеется механизм диссипации энергии, устойчивым является только вращение вокруг оси наибольшего момента инерции. Механизм диссипации энергии необходим для правильного функционирования любой системы ориентации спутника, в том числе, стабилизируемого собственным вращением. Обычно работу системы ориентации разбивают на три этапа: гашение нутационных колебаний, закрутка спутника вокруг оси симметрии, переориентация оси симметрии в заданное направление в инерциальном пространстве. Этапы могут совмещаться. Такая схема предложена, в частности, в [21]. Алгоритмы, предложенные в работе [21], исследуются в настоящей диссертации. В диссертации рассматриваются также дополнительные алгоритмы или их режимы работы, позволяющие начать процесс переориентации без предварительного успокоения и закрутки, за счет

чего значительно увеличивается быстродействие системы. Для этого используется либо один из алгоритмов, предложенных в [21], либо алгоритм, предложенный в [22]. Основные принципы активного магнитного управления спутника, стабилизированного вращением, изложены в [23] и [24]. Эти работы легли в основу методики и алгоритмов, рассматриваемых в [21]. Также как и в случае алгоритма “-Bdot”, основной фокус работ лежит в области летных испытаний и численного моделирования динамики спутника. В работе [25] представлены алгоритмы для первого бразильского спутника SCD-1, стабилизированного вращением и оснащенного МСО, реализующей алгоритмы, построенные на основе [23]. Аналогичные принципы использовались при разработке спутника LionSat [26], где показано, что использование МСО на аппарате, оборудованном магнитометром и солнечными панелями для определения ориентации, можно достичь точности ориентации 5° . В работе [27] предложен оптимальный по быстродействию алгоритм переориентации аппарата для случая большого угла поворота, результаты подтверждаются численным моделированием. Несмотря на привлекательность предложенного подхода, его реализация сопряжена с вычислительными трудностями, включающими решение оптимизационной задачи на каждом шаге управления. В этом свете простые и надежные алгоритмы, рассматриваемые в [21], представляются предпочтительными для использования на малом спутнике, стабилизированном вращением. Общие вопросы динамики стабилизированных вращением аппаратов, а также проблемы, связанные с технической реализацией систем ориентации стабилизированных собственным вращением аппаратов можно найти в [28]. Там же приведено описание их систем ориентации. Работа [29] содержит детальный обзор литературы по вопросам ориентации спутников, в том числе, стабилизированных собственным вращением.

В четвертой главе рассматривается алгоритм, обеспечивающий трехосную ориентацию в инерциальном пространстве, реализуемую при помощи только токовых катушек. Специфика этих исполнительных элементов такова, что возникает проблема неуправляемости – невозможно в каждый момент времени

реализовать произвольный механический момент. Попытки преодоления этого ограничения предпринимались неоднократно. Среди работ, имеющих большой интерес с точки зрения теории, можно выделить только [30], в которой показана возможность обеспечения трехосной ориентации аппарата при помощи токовых катушек. Однако, в работе рассматривается малая окрестность требуемой ориентации спутника, сам спутник – сферически симметричный, а полученные в рамках теории дифференциальных игр фундаментальные результаты с трудом переносятся на реальные аппараты. Отметим также работу [31], в которой бегло рассматривается задача стабилизации аппарата при помощи токовых катушек, но основное внимание уделено задаче определения ориентации, а решение задачи управления не обосновано должным образом и содержит лишь несколько результатов численного моделирования. Интересный подход представлен в [32], где на основе функций Ляпунова и теоремы Барбашина-Красовского доказывается асимптотическая устойчивость трехосной ориентации. Однако в работе сделано важное допущение о сферической симметричности аппарата, что позволяет авторам в функции Ляпунова отбросить один из членов. В случае же произвольного тензора инерции это условие не выполняется, в результате работа не удовлетворяет критерию применимости разработанного подхода. Работ, посвященных численному моделированию динамики спутника с трехосной магнитной системой ориентации, заметно больше. Например, в [33] рассматриваются линеаризованные уравнения движения, а работа предложенного закона управления исследуется численно. Аналогично в [34] рассматривается удержание аппарата в окрестности требуемой ориентации при помощи только токовых катушек. Особняком стоит статья [35], в которой показана работа токовых катушек, установленных на борту аппарата Gurwin-Techsat. В работе приведены данные летных испытаний с использованием только магнитных катушек, но для специфического случая – после отключения основных исполнительных элементов – маховиков. Таким образом, была решена лишь задача поддержания требуемой ориентации после ее достижения, а также в

статье не приводятся никаких аналитических результатов, которые позволили бы обобщить этот успех. В настоящей диссертации предлагается алгоритм управления, который, как и в рассмотренных выше работах, конструируется «по мотивам» ПД-регулятора [31]. Однако вместо того, чтобы просто отбросить нереализуемую часть требуемого механического момента (параллельную локальному вектору геомагнитной индукции), здесь предлагается другой путь, который вначале обосновывается при решении плоской модельной задачи, а затем обобщается на трехмерное движение аппарата. При помощи методов осреднения исследуется работа предложенного алгоритма, доказывается асимптотическая устойчивость требуемой ориентации при некоторых (особенно важных с практической точки зрения) параметрах управления.

В пятой главе приводятся результаты численного моделирования динамики спутника при использовании различных моделей геомагнитного поля. Для алгоритма “*-Bdot*” приводятся результаты стендовых и летных испытаний на борту микроспутника «Чибиc-M».

Глава 1. Постановка задачи. Модели геомагнитного поля, системы координат, уравнения движения, метод исследования

В этой главе описываются основные предположения и упрощения, в рамках которых анализируется динамика спутника, вводятся системы координат и уравнения движения, описывается выбранная модель геомагнитного поля и кратко обсуждаются асимптотические методы, используемые в диссертации для исследования движения.

1.1. Описание решаемых задач

Рассматриваемая в диссертации МСО содержит три взаимно перпендикулярные токовые катушки. Предполагается, что МСО создает произвольный по направлению в теле спутника, но ограниченный по величине дипольный магнитный момент. Для аппроксимации геомагнитного поля используется осредненная модель [37]. Угловое движение спутника описывается с помощью переменных Белецкого-Черноуьско [38] или уравнений Эйлера. Орбита спутника круговая.

Рассматриваются три разных режима работы системы ориентации. Для первого режима (глава 2) исследуется движение спутника на начальном этапе полета после отделения от ракеты носителя. Исследуется гашение начальной угловой скорости спутника при помощи алгоритма “*-Bdot*”. Рассматривается осесимметричный спутник. В переходных процессах учитывается действие на спутник только механического момента, создаваемого в результате взаимодействия МСО с геомагнитным полем, спутник считается быстро вращающимся. В установившемся режиме рассматривается движение в окрестности устойчивого положения равновесия спутника в гравитационном поле.

Во втором режиме (глава 3) МСО реализует одноосную ориентацию спутника, стабилизированного собственным вращением. Рассматриваются следующие алгоритмы.

1. Гашение нутационных колебаний. Используется одна катушка, расположенная на оси симметрии спутника и реализующая алгоритм “ $-B\dot{\theta}$ ”. Спутник считается быстро вращающимся.

2. Предварительная переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве. Используется одна катушка, расположенная на оси симметрии спутника. Спутник при этом не предполагается закрученным вокруг оси симметрии.

3. Раскрутка спутника вокруг оси симметрии до заданной угловой скорости. Используются две катушки, расположенные в экваториальной плоскости спутника. Предполагается, что начальная экваториальная компонента угловой скорости на этом этапе мала в результате действия алгоритма гашения нутационных колебаний.

4. Приведение оси симметрии спутника в заданное положение в инерциальном пространстве. Спутник считается быстро вращающимся вокруг оси симметрии телом.

На всех этапах механический момент мал, спутник – осесимметричный.

Третий режим (глава 4) – трехосная ориентация в инерциальном пространстве.

В рамках описанных допущений динамика спутника аналитически исследуется для каждого режима ориентации.

1.2. Модели геомагнитного поля

Опишем используемую в диссертации модель геомагнитного поля. Обычно вектор напряженности геомагнитного поля вычисляется при помощи разложения потенциала поля в ряд Гаусса [15]

$$V = -R \sum_{i=1}^k \left(\frac{R}{r} \right)^{i+1} \sum_{n=0}^m \left(g_n^m(t) \cos m\lambda_0 + h_n^m(t) \sin m\lambda_0 \right) P_n^m(\cos \vartheta_0), \quad \mathbf{B} = \mu_0 \nabla V,$$

где λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности, $\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта, r – расстояние от центра Земли, R – средний

радиус Земли, g_n^m и h_n^m – коэффициенты Шмидта, определяемые из таблицы [4], μ_0 – магнитная постоянная (или магнитная проницаемость вакуума), P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра.

Использование этой модели в аналитических исследованиях затруднительно, поэтому вводятся упрощенные модели. Модель *наклонного* диполя, получающаяся из гауссовой модели при учете первых трех слагаемых, описывает поле диполя, наклоненного под углом $168^\circ 26'$ к оси вращения Земли. Хотя эта модель допускает достаточно простую запись, с ее использованием не удастся провести наглядное аналитическое исследование получающихся уравнений. Широко используется дальнейшее упрощение этой модели – модель *прямого* диполя, согласно которой геомагнитное поле аппроксимируется полем диполя, лежащего на оси вращения Земли в ее центре и антипараллельного ей. При движении спутника по орбите вектор индукции движется практически равномерно по почти круговому конусу в системе координат, начало которой лежит в центре масс спутника, а оси параллельны осям инерциальной системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, где O_a – центр масс Земли, ось $O_a Y_3$ направлена по оси вращения Земли, $O_a Y_1$ лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника, $O_a Y_2$ дополняет систему до правой. Но и при использовании этой модели еще не удастся получить решение уравнений движения спутника хотя бы в квадратурах. Поэтому логично провести дальнейшее упрощение, моделируя геомагнитное поле вектором, равномерно движущимся по прямому круговому конусу. Если перенести вектор индукции в центр масс Земли, то конус касается оси $O_a Y_3$ системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, его ось лежит в плоскости $O_a Y_2 Y_3$ (рис. 1.1.1). Угол полураствора конуса вычисляется [37] из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2 \left(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right)}. \quad (1.2.1)$$

Вектор геомагнитной индукции в рамках этой модели движется по конусу равномерно с удвоенной орбитальной скоростью, $\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi'_0$, где ω_0

– орбитальная угловая скорость, u – аргумент широты. Без ограничения общности можно считать, что $\chi'_0 = 0$.

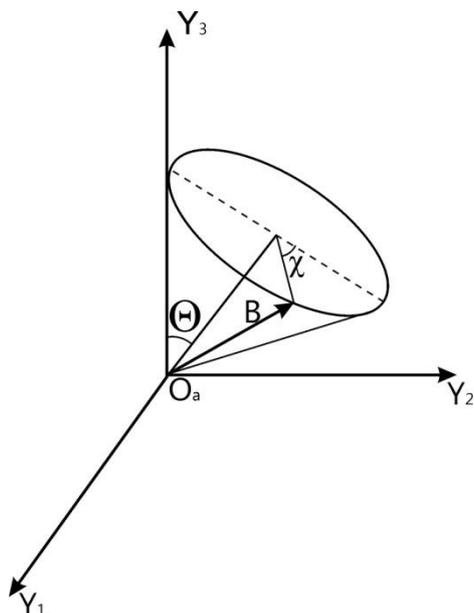


Рис. 1.2.1. Осредненная модель геомагнитного поля

Описанную модель геомагнитного поля, иногда называемую *осредненной*, будем использовать в настоящей работе при проведении аналитических исследований. Хотя эта модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает, например, модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя), тем не менее, она позволяет достаточно достоверно описать основные свойства магнитного поля, влияющие на динамику спутника. Детальное сравнение моделей выполнено в [15]. Приведем здесь график зависимости максимального угла отклонения вектора геомагнитной индукции в рамках модели прямого диполя от конуса осредненной модели δ_{\max} в зависимости от наклона (рис. 1.2.2). Максимальное значение отклонения достигается при наклонении 52° . Для этого наклона приведем график угла отклонения вектора геомагнитной индукции в модели прямого диполя от конуса δ в зависимости от аргумента широты (рис. 1.2.3). Отклонение вектора индукции в модели наклонного диполя от вектора индукции в осредненной модели не превышает $1^\circ 11'$.

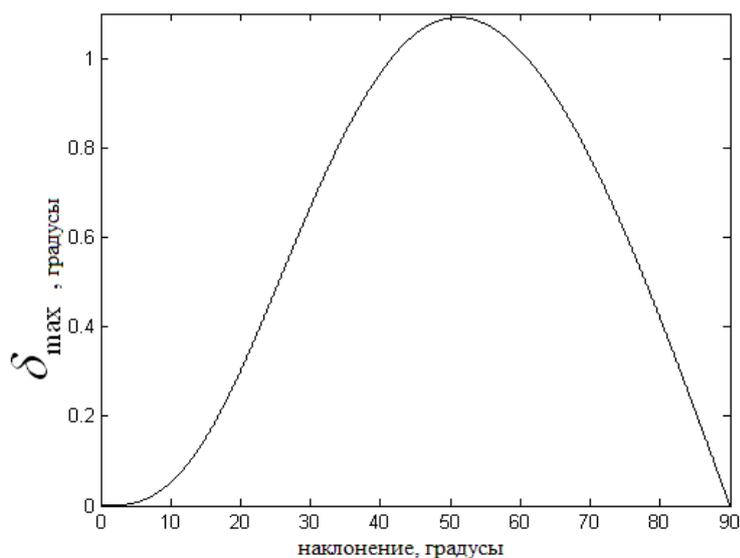


Рис. 1.2.2. Максимальное отклонение вектора геомагнитной индукции в дипольной модели от конуса осредненной модели

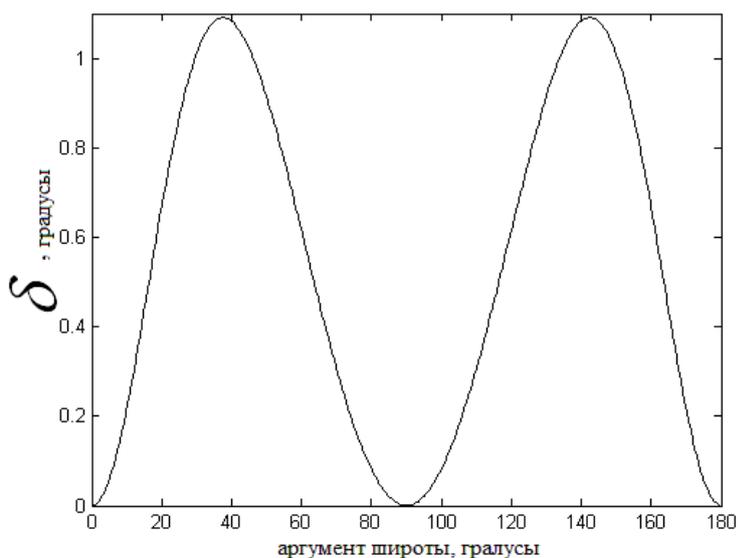


Рис. 1.2.3. Отклонение вектора геомагнитной индукции в дипольной модели от конуса осредненной модели при движении по орбите

Представленные графики позволяют заключить, что осредненная модель близка к модели прямого диполя по направлению вектора индукции, хотя по его величине наблюдается отличие (в модели прямого диполя максимальное и минимальное значение индукции отличаются в два раза). Краткое сравнение динамики спутника при использовании разных моделей приведено в главе 5.

Угол Θ имеет важное значение в представленной работе. Выражение (1.2.1) задает связь между наклоном орбиты и углом Θ . Рис. 1.2.4 и рис. 1.2.5 показывают, что эти два угла близки. Рис. 1.2.4 отражает соотношение (1.2.1). На рис. 1.2.5 представлена разница между Θ и наклоном орбиты в зависимости от последнего.

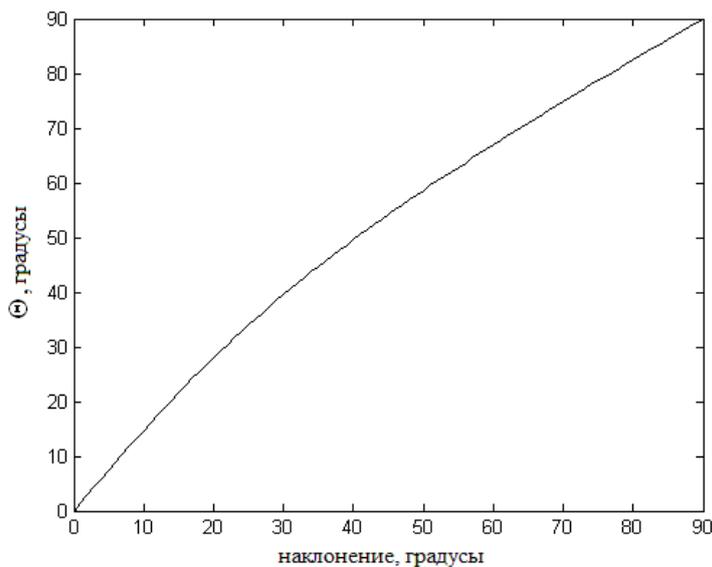


Рис. 1.2.4. Зависимость $\Theta(i)$

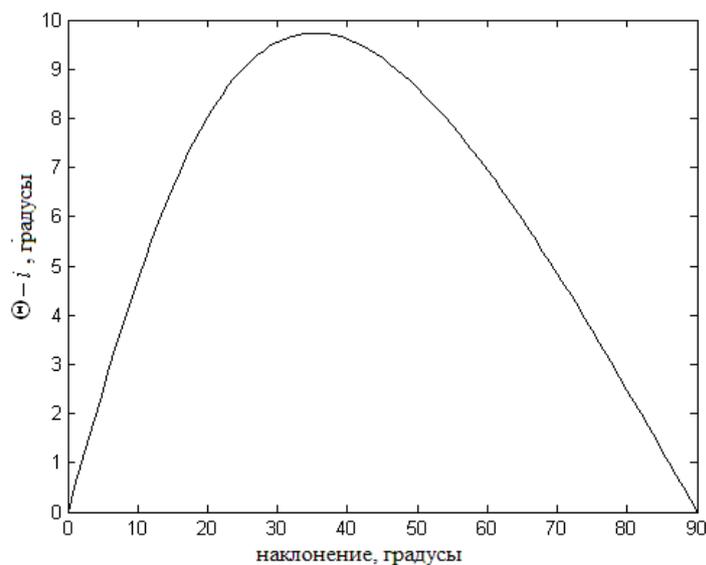


Рис. 1.2.5. Разница между Θ и i в зависимости от i

Из рис. 1.2.3 и рис. 1.2.4 видно, что можно считать $\Theta \approx i$ при качественном анализе поведения спутника, так как разница между ними не превышает 10° . В разделе 4.1 рассматривается динамика спутника при его движении в магнитном

поле с использованием моделей наклонного диполя, прямого диполя и осредненной.

1.3. Уравнения движения

Введем недостающие для описания движения спутника правые ортогональные системы координат.

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ поворотом на угол Θ вокруг оси $O_a Y_1$.

$OL_1 L_2 L_3$ – система, связанная с кинетическим моментом спутника. O – центр масс спутника, ось OL_3 направлена по вектору кинетического момента спутника, ось OL_2 – перпендикулярно OL_3 и лежит в плоскости, параллельной $O_a Z_1 Z_2$ и проходящей через O , ось OL_1 дополняет систему до правой.

$Ox_1 x_2 x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

$OX_1 X_2 X_3$ – орбитальная система координат, ось OX_1 лежит в плоскости орбиты и направлена по нормали к радиус-вектору в сторону движения спутника, составляя острый угол с вектором скорости его центра масс, ось OX_3 – по радиус-вектору центра масс спутника относительно центра масс Земли, OX_2 дополняет систему до правой.

Ориентацию систем друг относительно друга будем определять тремя матрицами направляющих косинусов **Q, A, D**, записанными в виде таблиц соответственно

	L_1	L_2	L_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
Z_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	L_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	X_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}
Z_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}	L_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	X_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}
Z_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}	L_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	X_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}

Введем индексы Z, L, X, x для обозначения векторов, заданных, соответственно, в системах $O_a Z_1 Z_2 Z_3$, $OL_1 L_2 L_3$, $OX_1 X_2 X_3$ и $Ox_1 x_2 x_3$.

Для описания движения спутника будем использовать уравнения в переменных Белецкого-Черноуьско $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ [38], где L – модуль вектора

кинетического момента, углы ρ, σ определяют его ориентацию относительно инерциальной системы $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ (рис. 1.3.1). Ориентация осей системы $Ox_1 x_2 x_3$ относительно системы $OL_1 L_2 L_3$ задается углами Эйлера φ, ψ, θ . Подобные переменные были впервые введены Булгаковым [39] применительно к задаче движения гироскопа. Система уравнений для осесимметричного спутника была предложена В.В. Белецким [40], для спутника с трехосным эллипсоидом инерции – Ф.Л. Черноушко [41]. Уравнения невозмущенного движения твердого тела в переменных φ, ψ, θ были впервые получены Уиттекером [42], эволюционные уравнения им не рассматривались.

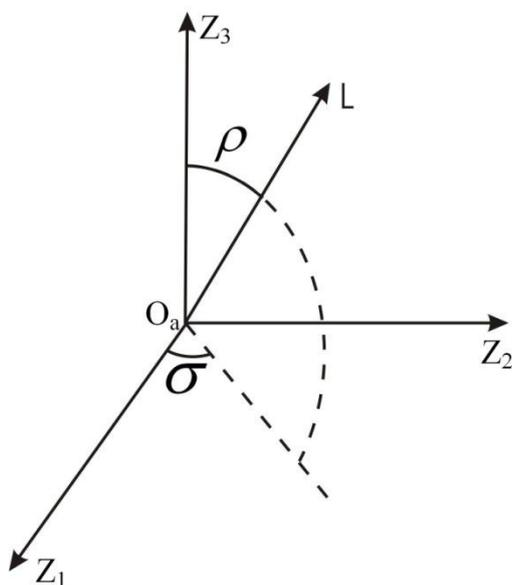


Рис. 1.3.1. Ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве

Матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{A} направляющих косинусов имеют соответственно вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}, \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.3.2)$$

Рассмотрим спутник с произвольными моментами инерции и введем его тензор инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, B, C)$. Считаем, что его центр масс движется по

круговой орбите. Движение такого спутника относительно центра масс описывается [41] системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L}M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L\sin\rho}M_{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= L\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) + \frac{1}{L}(M_{2L}\cos\psi - M_{1L}\sin\psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L\cos\theta\left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2\varphi}{A} - \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) + \frac{1}{L\sin\theta}(M_{1L}\cos\psi + M_{2L}\sin\psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= L\left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right) - \frac{1}{L}M_{1L}\cos\psi\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{L}M_{2L}(\operatorname{ctg}\rho + \sin\psi\operatorname{ctg}\theta),\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

где M_{1L}, M_{2L}, M_{3L} – компоненты вектора суммарного внешнего момента.

В диссертации будут использоваться эти же уравнения для осесимметричного спутника с тензором инерции $\mathbf{J}_x = \operatorname{diag}(A, A, C)$. В этом случае уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L}M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L\sin\rho}M_{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L}(M_{2L}\cos\psi - M_{1L}\sin\psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L\cos\theta\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \frac{1}{L\sin\theta}(M_{1L}\cos\psi + M_{2L}\sin\psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L}M_{1L}\cos\psi\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{L}M_{2L}(\operatorname{ctg}\rho + \sin\psi\operatorname{ctg}\theta),\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

Переменные Белецкого-Черноусько удобно использовать для анализа переходных процессов, когда основной интерес представляет величина угловой скорости спутника, фактически характеризуемая переменной L . Установившееся движение удобнее рассматривать при помощи уравнений Эйлера. В этом случае для описания динамики спутника рассматриваются переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma$. Здесь ω_i – компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе $Ox_1x_2x_3$ ($i=1,2,3$), самолетные углы α, β, γ

задают ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$. Матрица направляющих косинусов \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Уравнения движения спутника, с учетом гравитационного момента и момента, создаваемого взаимодействием МСО с геомагнитным полем, имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} &= (B - C)(\omega_2 \omega_3 - 3\omega_0^2 d_{32} d_{33}) + M_{1x}, \\ B \frac{d\omega_2}{dt} &= -(A - C)(\omega_1 \omega_3 - 3\omega_0^2 d_{31} d_{33}) + M_{2x}, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} &= -(B - A)(\omega_1 \omega_2 - 3\omega_0^2 d_{31} d_{32}) + M_{3x}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \gamma} (\omega_1 \sin \beta + \omega_2 \cos \beta) - \omega_0, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_3 + \operatorname{tg} \gamma (\omega_1 \sin \beta + \omega_2 \cos \beta), \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 \cos \beta - \omega_2 \sin \beta, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

где M_{1x}, M_{2x}, M_{3x} – компоненты вектора момента в системе $Ox_1x_2x_3$. Углы выбираются таким образом, чтобы исключить вырождение уравнений движения при их малых значениях.

1.4. Асимптотические методы

В диссертации в основном применяются два метода асимптотического анализа. При рассмотрении переходных процессов используется метод усреднения [38], при этом интерес представляют уравнения первого приближения. В этом случае для описания динамики аппарата удобно использовать переменные Белецкого-Черноуьско. Предположим, что момент, создаваемый взаимодействием МСО с геомагнитным полем, мал в смысле

малого изменения кинетического момента аппарата за один его оборот вокруг центра масс и за один виток по орбите по сравнению со значением кинетического момента. Тогда можно ввести малый параметр ε (его конкретное выражение для каждого алгоритма будет указано в соответствующих разделах) и представить уравнения (1.3.3) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1.4.1)$$

где $\mathbf{y} = (\varphi, \psi, u)$ – быстрые переменные, а $\mathbf{x} = (l, \rho, \sigma, \theta)$ – медленные переменные. Эти уравнения позволяют использовать метод осреднения для поиска эволюции медленных переменных. Однако, усреднение вдоль порождающего решения – движения Эйлера-Пуансо – приводит к громоздким уравнениям. Значительно упростить анализ позволяет рассмотрение осесимметричного спутника. Уравнения (1.3.4) тогда могут быть представлены в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (1.4.2)$$

Порождающим решением для уравнений (1.4.2) является регулярная прецессия. В этом случае среднее по времени совпадает с пространственным средним и для получения осредненных уравнений для медленных переменных достаточно независимо усреднить правые части уравнений по быстрым переменным при условии отсутствия резонанса. В результате на временном интервале порядка $1/\varepsilon$ решение может быть найдено с точностью порядка ε . Рассмотрение осесимметричного спутника и использование осредненной модели геомагнитного поля позволило в большинстве случаев получить достаточно простые эволюционные уравнения, решения которых могут быть найдены в квадратурах.

При анализе установившихся движений используется метод Пуанкаре [44] в предположении малого магнитного момента в смысле превалирования над ним других моментов – гравитационного, переносных сил инерции, гироскопических сил. Это позволяет найти отклонение от стационарного

решения, зачастую соответствующего требуемой ориентации спутника (например, гравитационная ориентация), вызванное действием МСО.

Оба метода кратко описываются в Приложении I.

Глава 2. Исследование алгоритма демпфирования «-Bdot»

В данной главе рассматривается алгоритм “-Bdot”, часто применяющийся на начальном этапе движения спутника. Этот алгоритм реализован на борту микроспутника «Чибис-М» и будет также использован на наноспутнике ТНС-0 №3/GRESAT.

2.1. Переходный процесс

Рассмотрим сначала переходный процесс – демпфирование кинетического момента спутника после отделения от ракеты-носителя. Алгоритм “-Bdot” часто используется для этой цели, даже если МСО не включена в контур управления на следующих этапах движения спутника. Это связано с простотой и надежностью алгоритма, большими точностью и быстродействием по сравнению с пассивными системами [45], а также использованием измерений всего одного датчика – магнитометра. Возможна модификация алгоритма, при которой используется информация других датчиков ориентации [46], [47]. Механический момент описывается выражением $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, где \mathbf{m} – дипольный магнитный момент спутника. Управление формируется алгоритмом “-Bdot”, согласно которому дипольный магнитный момент спутника задается [8] выражением

$$\mathbf{m}_x = -k_1 \frac{d\mathbf{B}_x}{dt}, \quad (2.1.1)$$

где k_1 – постоянный положительный коэффициент.

Вычислим производную вектора геомагнитной индукции в системе $Ox_1x_2x_3$ через его производную в инерциальной системе $O_aZ_1Z_2Z_3$ по следующей формуле [48]:

$$\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T \frac{d\mathbf{B}_z}{dt} - \boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x. \quad (2.1.2)$$

Рассмотрим теперь быстрые вращения спутника, при которых первым слагаемым, описывающим вращение вектора \mathbf{B} относительно инерциального

пространства, в правой части (2.1.2) можно пренебречь, то есть считаем, что угловая скорость спутника намного больше его орбитальной скорости ($L/A \gg \omega_0$, $L/C \gg \omega_0$). Такой режим может иметь место на начальном этапе движения спутника, когда он имеет большую угловую скорость, полученную при отделении от носителя. В этом случае использование магнитной системы позволяет демпфировать начальную угловую скорость, после чего управление движением спутника может быть организовано с использованием другого алгоритма или даже другой системы ориентации. Итак, будем рассматривать движение спутника под действием момента

$$\mathbf{M}_x = k_1(\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x) \times \mathbf{B}_x. \quad (2.1.3)$$

Выразим угловую скорость спутника через его кинетический момент: $\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{L}_x$. Поскольку известен вид кинетического момента $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)^T$ в системе $OL_1L_2L_3$, то можем пересчитать его в систему $Ox_1x_2x_3$ по формуле $\mathbf{L}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_L$, откуда $\mathbf{L}_x = L(a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$. Это позволяет записать выражение для угловой скорости в системе $Ox_1x_2x_3$ так: $\boldsymbol{\omega}_x = L \left(\frac{1}{A} a_{31}, \frac{1}{A} a_{32}, \frac{1}{C} a_{33} \right)^T$.

Будем рассматривать осесимметричный спутник, опираясь на уравнения (1.3.4). В уравнениях (1.3.4) присутствуют компоненты внешнего момента, которые необходимо задать в системе $OL_1L_2L_3$. Запишем его в этой системе, учитывая, что $\boldsymbol{\omega}_L = \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_x$ и $\mathbf{B}_L = \mathbf{Q}^T \mathbf{B}_Z$,

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} \omega_{3L} B_{1L} B_{3L} - \omega_{1L} B_{3L}^2 - \omega_{1L} B_{2L}^2 + \omega_{2L} B_{1L} B_{2L} \\ \omega_{1L} B_{1L} B_{2L} - \omega_{2L} B_{1L}^2 - \omega_{2L} B_{3L}^2 + \omega_{3L} B_{2L} B_{3L} \\ \omega_{2L} B_{2L} B_{3L} - \omega_{3L} B_{2L}^2 - \omega_{3L} B_{1L}^2 + \omega_{1L} B_{1L} B_{3L} \end{pmatrix}.$$

Вектор геомагнитной индукции, перенесенный в точку O_a , в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ имеет вид

$$\mathbf{B}_Z = B_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Запишем теперь уравнения движения спутника в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерный момент $\overline{\mathbf{M}}_L$, определяемый выражением

$$\mathbf{M}_L = \frac{k_1 B_0^2 L}{C} \overline{\mathbf{M}}_L. \quad (2.1.5)$$

Перейдем в (1.3.3) к дифференцированию по аргументу широты $u = \omega_0(t - t_0)$, где t_0 – некоторый начальный момент времени. Введем безразмерный кинетический момент l по формуле $L = L_0 l$, где L_0 – начальный кинетический момент спутника. Все это позволяет записать уравнения движения (1.3.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon l \overline{M}_{3L}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \overline{M}_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \overline{M}_{2L}, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon (\overline{M}_{2L} \cos \psi - \overline{M}_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\overline{M}_{1L} \cos \psi + \overline{M}_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_2 l - \varepsilon \overline{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \overline{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = \frac{k_1 B_0^2}{\omega_0 C}$, $\eta_1 = \frac{L_0}{\omega_0} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$, $\eta_2 = \frac{L_0}{A \omega_0}$. Параметр ε

имеет смысл отношения изменения вектора кинетического момента за виток вокруг Земли к его значению. В случае слабого магнитного момента параметр

ε и отношения $\frac{\varepsilon}{\eta_i} \sim \frac{k_1 B_0^2}{L_0}$ малы (если спутник не близок к сферически-

симметричному, не является вытянутым стержнем или диском). Эти отношения имеют смысл отношения изменения вектора кинетического момента за оборот спутника вокруг центра масс к его значению. В этом случае, как следует из вида уравнений (2.1.6), переменные φ, ψ, u можно считать быстрыми по сравнению с переменными l, ρ, σ, θ .

Разделение переменных на медленные и быстрые позволяет использовать известные методы асимптотического анализа [43]. Поскольку нас интересует, в первую очередь, эволюция медленных переменных, к которым относится модуль вектора кинетического момента, будем рассматривать первое приближение по степеням параметра ε . Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения. Порождающим решением является регулярная прецессия вокруг вектора кинетического момента. Поскольку при $\varepsilon = 0$ быстрые переменные изменяются равномерно, при усреднении временное и пространственное средние совпадают, поэтому достаточно усреднить правую часть уравнений для медленных переменных независимо по всем быстрым переменным. Для этого также будем считать, что моменты инерции A и C выбраны так, что η_1 , η_2 и 1 (скорость изменения u) рационально несоизмеримы. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u,\varphi,\psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$. Для усреднения (2.1.6) по u необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_i B_j du, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.1.7)$$

где B_i - компоненты безразмерного геомагнитного поля в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$, определяемые выражениями (2.1.4). В результате получаем

$$B_{11} = B_{22} = p = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta, \quad B_{33} = q = \cos^2 \Theta, \quad B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0.$$

Усредняя, получаем уравнения, описывающие эволюцию переменных l, ρ, σ, θ ,

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \left[(1 - q_{13}^2) B_{11} + (1 - q_{23}^2) B_{22} + (1 - q_{33}^2) B_{33} \right], \\
\frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \left[q_{11} q_{13} B_{11} + q_{21} q_{23} B_{22} + q_{31} q_{33} B_{33} \right], \\
\frac{d\sigma}{du} &= \varepsilon \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \frac{1}{\sin \rho} \left[q_{12} q_{13} B_{11} + q_{22} q_{23} B_{22} \right], \\
\frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta \left[B_{11} (1 + q_{13}^2) + B_{22} (1 + q_{23}^2) + B_{33} (1 + q_{33}^2) \right],
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C}{A} \right)$. Учитывая (1.3.1) и выражения для B_{ij} , получаем

окончательно

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\
\frac{d\rho}{du} &= \varepsilon (3p - 1) \sin \rho \cos \rho \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\
\frac{d\sigma}{du} &= 0, \\
\frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda \left[2(1 - p) + (3p - 1) \sin^2 \rho \right] \sin \theta \cos \theta.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Решение полученной системы уравнений удастся найти в квадратурах. Рассмотрим сначала два частных случая.

1. Сферически-симметричный спутник [49], то есть $A = B = C = J_0$. Тогда все рассуждения о разделении переменных остаются в силе (φ становится медленной переменной, но усреднение по ней не требуется), а усредненная система первого приближения для медленных переменных принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho \right], \\
\frac{d\rho}{du} &= \varepsilon (3p - 1) \sin \rho \cos \rho, \\
\frac{d\sigma}{du} &= 0, \quad \frac{d\theta}{du} = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Интегрируя эту систему и учитывая, что $l(0) = 1$, получаем

$$l = \exp \left[-2\varepsilon p u + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \exp(2\varepsilon(3p-1)u + 2c_0)}{1 + \exp 2c_0} \right) \right], \quad (2.1.11)$$

$$\rho = \operatorname{arctg} \left[\exp(\varepsilon(3p-1)u + c_0) \right],$$

$$\sigma = \sigma_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где $c_0 = \ln \operatorname{tg} \rho_0$. В результате имеем зависимость модуля вектора кинетического момента спутника от наклона орбиты i . На рисунке 2.1.1 представлено уменьшение модуля кинетического момента для разных наклонов орбиты.

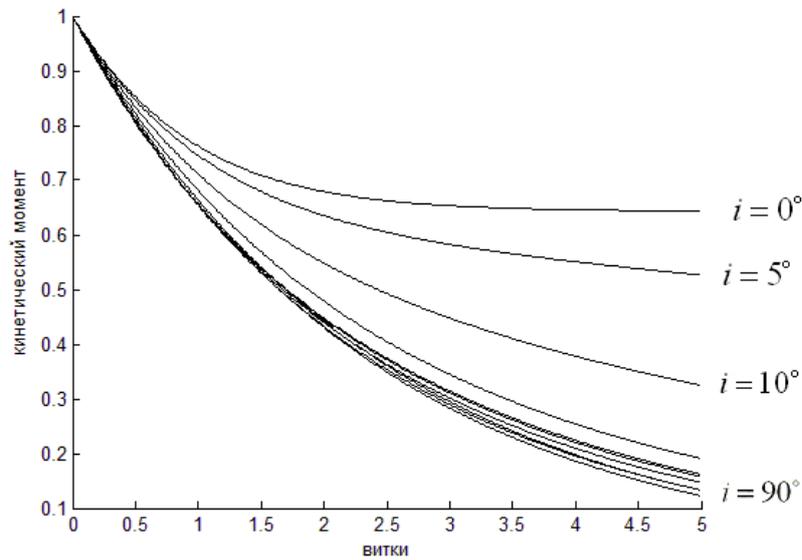


Рис. 2.1.1. Демпфирование в случае сферически-симметричного спутника

2. Случай $3p-1=0$, то есть $i = i_0 \approx 46^\circ$. При этом наклонении $B_{11} = B_{22} = B_{33}$. При меньших наклонениях проекция среднего вектора геомагнитной индукции на ось $O_a Z_3$ больше, чем на плоскость $O_a Z_1 Z_2$, при больших наклонениях – меньше. Уравнения движения принимают вид

$$\frac{dl}{du} = -\frac{2}{3} \varepsilon l \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\rho}{du} = 0, \quad \frac{d\sigma}{du} = 0, \quad (2.1.12)$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{4}{3} \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta.$$

Интегрируя последнее выражение в (2.1.12), получаем

$$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \theta| - c_0 = \frac{2}{3} \varepsilon \lambda u,$$

где $c_0 = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \theta_0|$. Отсюда $\operatorname{tg}^2 \theta = \exp\left(\frac{8}{3} \varepsilon \lambda u + 4c_0\right) = f(u)$ и для l получаем

уравнение

$$\frac{dl}{du} = -\frac{2}{3} \varepsilon l \frac{A + Cf(u)}{A + Af(u)},$$

откуда

$$l = \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\exp\left(\frac{8}{3} \varepsilon \lambda u + 4c_0\right) + 1}{\exp(4c_0) + 1} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon u \right]. \quad (2.1.13)$$

Рассмотрим теперь общий случай. Разделим в (2.1.9) первое уравнение на второе и сгруппируем одноименные переменные. Тогда получим уравнение

$$\frac{dl}{l} = -\frac{2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho.$$

Знаменатель в правой части не равен нулю (иначе, см выше случай 2).

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln l = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho| - c_0,$$

где $c_0 = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho_0 + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho_0|$. Таким образом, имеем первый интеграл

системы (2.1.9)

$$I_1(l, \rho) = \ln l - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho|.$$

Этот интеграл можно представить в виде

$$I_1(l, \rho) = (3p - 1) \ln l - \frac{1}{2} (3p - 1) \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + 2p \ln |\operatorname{tg} \rho|, \quad (2.1.14)$$

Тогда при $3p - 1 = 0$ получаем $\rho = \rho_0$ (случай 2).

Разделим теперь второе уравнение на третье из (2.1.9) и получим

$$\frac{2(1-p) + (3p-1)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho = \frac{1}{\lambda} \frac{\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta. \quad (2.1.15)$$

Знаменатели в выражениях слева и справа не равны нулю (иначе, см. случаи 2 и 1 соответственно). Интегрирование уравнения (2.1.15) дает еще один первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = \frac{\lambda}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \lambda \frac{2-2p}{3p-1} \ln|\operatorname{tg} \rho| - \ln|\sin \theta| + \frac{C}{A} \ln|\cos \theta|.$$

Аналогично интеграл представим в виде

$$I_2(\rho, \theta) = (3p-1) \left(\frac{\lambda}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \ln|\sin \theta| + \frac{C}{A} \ln|\cos \theta| \right) + \lambda(2-2p) \ln|\operatorname{tg} \rho| \quad (2.1.16)$$

и при $3p-1=0$ получаем $\rho = \rho_0$ (случай 2).

Интеграл $I_2(\rho, \theta)$ задает θ как неявную функцию ρ . Из (2.1.16) видно, что $I_2(\rho, \theta)$ на некоторых интервалах (например, $\theta \in (0, \pi/2)$) удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции [50] (существует производная по θ и первый интеграл непрерывен) и можно определить θ как функцию ρ . Аналогичные рассуждения можно применить к (2.1.14) и записать ρ как функцию l . Тем самым, решение уравнений (2.1.9) может быть найдено в квадратурах.

Кинетический момент является функцией трех параметров: $l = l(i, \rho_0, \theta_0)$. Таким образом, на быстроедействие алгоритма могут оказать влияние наклонение орбиты и начальные условия – угол между вектором кинетического момента и осью конуса осредненной модели и угол между осью симметрии спутника и вектором кинетического момента. На рис. 2.1.2 и рис. 2.1.3 показано влияние наклонения орбиты и ρ_0 .

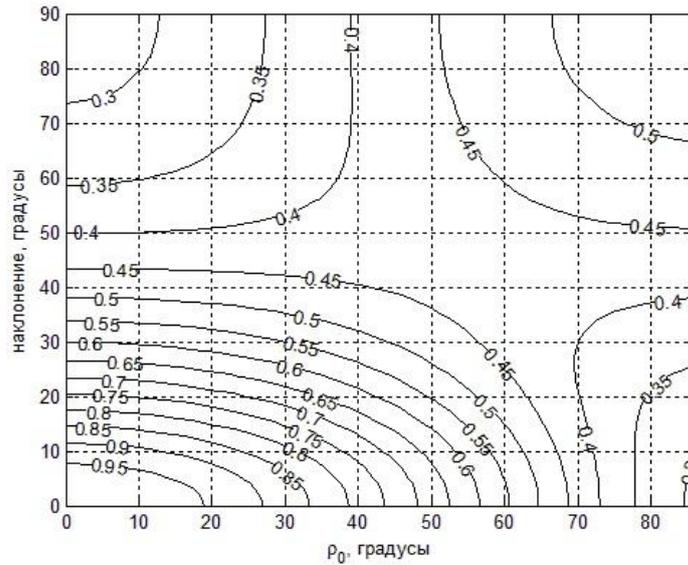


Рис. 2.1.2. Значение кинетического момента через 2 витка

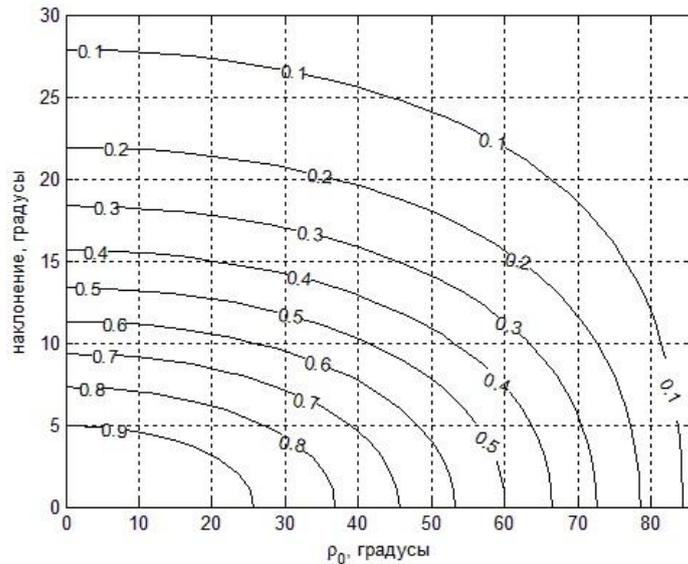


Рис. 2.1.3. Значение кинетического момента через 10 витков

На рис. 2.1.2 и рис. 2.1.3 представлены изолинии, соответствующие значению кинетического момента через 2 (рис. 2.1.2) и через 10 (рис. 2.1.3) витков в зависимости от наклона орбиты и ρ_0 (на изолиниях нанесены значения безразмерного кинетического момента). При этом учтено, что уравнения (2.1.9) симметричны относительно $\rho = 0$ и $\rho = \pi/2$. Рис. 2.1.2 и рис. 2.1.3 практически не изменяются при изменении θ_0 . Как видно из рис. 2.1.2, при ρ_0 , близких к 90° (отметим, что при $\rho = \pi/2$ уравнения (1.3.4) не имеют смысла, так как не имеет смысла угол σ), кинетический момент демпфируется

быстрее при меньших наклонениях. Однако рис. 2.1.3 позволяет заключить, что быстродействие алгоритма растет с увеличением наклонения. Для объяснения этого расхождения обратимся к соотношениям (2.1.11). При ρ_0 , близких к 90° , в течение некоторого небольшого времени (это время увеличивается с уменьшением наклонения) в показателе экспоненты превалирует второе слагаемое, зависящее от ρ_0 . Через некоторое время превалировать начинает первое слагаемое, которое монотонно убывает, тогда как второе либо ограничено (при $3p-1 < 0$), либо возрастает медленнее. Анализ уравнений показал, что влияние θ_0 аналогично влиянию ρ_0 . В течение некоторого времени также может наблюдаться большее быстродействие при меньшем наклонении орбиты (влияние первого слагаемого в (2.1.13)). В [16] было показано, что кинетический момент спутника под действием момента (2.1.3) стремится к определенному положению в инерциальном пространстве. Полученное решение позволяет найти это направление. Действительно, найдем наклонение i_0 , определяющее ориентацию вектора кинетического момента в инерциальном пространстве. Значение i_0 , как следует из (2.1.11), определяется из знака выражения $\varepsilon(3p-1)u$, то есть $i_0 \approx 46^\circ$. При наклонении меньшем, чем i_0 , кинетический момент спутника стремится ориентироваться вдоль оси конуса осредненной модели геомагнитного поля, при наклонении более i_0 — перпендикулярно ей. При $i = i_0$ направление вектора кинетического момента в инерциальном пространстве не изменяется (см. случай 2). Анализ общего случая подтверждает существование полученного “пограничного” значения i_0 .

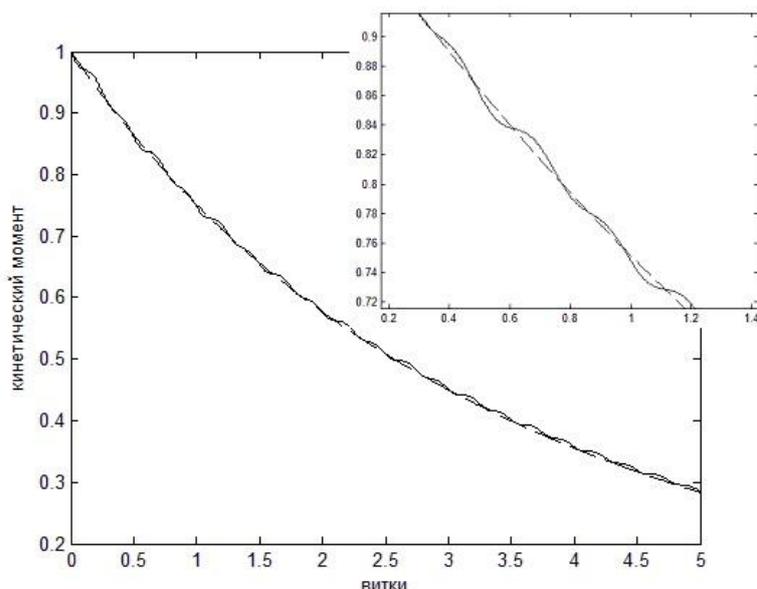


Рис. 2.1.4. Сравнение решения исходных и усредненных уравнений

На рис. 2.1.4 приведено сравнения результатов интегрирования системы (2.1.9) с контролем точности и интегрирования исходной системы (2.1.6) при $\varepsilon = 0.1$, $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 5$ (при таких параметрах η_1, η_2 , моментах инерции спутника $A = 3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, орбитальной скорости $\omega_0 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, угловая скорость спутника в начальный момент времени на порядок больше его орбитальной скорости), $\rho_0 = 1$, $\theta_0 = 1$, $i = 80^\circ$. Сплошная линия соответствует решению исходной системы, штриховая – решению усредненной. Как видно из рис. 2.1.4, решения исходных и усредненных уравнений совпадают с точностью порядка ε .

2.2. Установившееся движение

Рассмотрим, как влияет на движение осесимметричного спутника магнитный момент совместно с восстанавливающим гравитационным моментом в предположении, что гравитационный момент является определяющим в движении спутника, а магнитный момент – слабым [48]. Воспользуемся уравнениями движения спутника в форме (1.3.6) и перепишем их, перейдя к дифференцированию по аргументу широты,

$$\frac{d\bar{\omega}_1}{du} = (1-\nu)(\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 - 3d_{32}d_{33}) + \varepsilon M_{1x},$$

$$\frac{d\bar{\omega}_2}{du} = -(1-\nu)(\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3 - 3d_{31}d_{33}) + \varepsilon M_{2x},$$

$$\frac{d\bar{\omega}_3}{du} = \varepsilon \frac{1}{\nu} M_{3x},$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{\cos \gamma} (\bar{\omega}_1 \sin \beta + \bar{\omega}_2 \cos \beta) - 1,$$

$$\frac{d\beta}{du} = \bar{\omega}_3 + \operatorname{tg} \gamma (\bar{\omega}_1 \sin \beta + \bar{\omega}_2 \cos \beta),$$

$$\frac{d\gamma}{du} = \bar{\omega}_1 \cos \beta - \bar{\omega}_2 \sin \beta,$$

где $\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$, $\nu = \frac{C}{A}$, $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{A\omega_0}$ – новый малый параметр, так как по

предположению магнитный момент мал. Заметим, что $\nu < 1$, так как рассматривается устойчивая гравитационная ориентация спутника, для которой $A > C$ [38].

Введем полусвязанные оси Резаля, не участвующие в собственном вращении спутника. Обозначая проекции абсолютной угловой скорости на эти оси

$$\Omega_1 = \bar{\omega}_1 \cos \beta - \bar{\omega}_2 \sin \beta, \Omega_2 = \bar{\omega}_1 \sin \beta + \bar{\omega}_2 \cos \beta, \Omega_3 = \bar{\omega}_3,$$

запишем уравнения движения в полусвязанных осях в виде

$$\frac{d\Omega_1}{du} = -\Omega_2 (\nu\Omega_3 + \operatorname{tg} \gamma \Omega_2) - 3(1-\nu) \cos^2 \alpha \sin \gamma \cos \gamma + \varepsilon (M_{1x} \cos \beta - M_{2x} \sin \beta),$$

$$\frac{d\Omega_2}{du} = \Omega_1 (\nu\Omega_3 + \operatorname{tg} \gamma \Omega_2) - 3(1-\nu) \cos \alpha \sin \alpha \cos \gamma + \varepsilon (M_{1x} \sin \beta + M_{2x} \cos \beta), \quad (2.1.17)$$

$$\frac{d\Omega_3}{du} = \varepsilon \frac{1}{\nu} M_{3x},$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{\cos \gamma} \Omega_2 - 1, \frac{d\beta}{du} = \Omega_3 + \operatorname{tg} \gamma \Omega_2, \frac{d\gamma}{du} = \Omega_1,$$

Если на спутник действует только гравитационный момент ($\varepsilon = 0$), то система (2.1.17) допускает стационарное решение $\alpha = \gamma = 0, \beta = \beta_0, \Omega_1 = \Omega_3 = 0, \Omega_2 = 1$. Будем искать периодические решения, рождающиеся из него при действии слабого магнитного момента, используя метод Пуанкаре [44]. Представим уравнения движения (2.1.17) в виде $\frac{d\mathbf{x}}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$. Решение ищем в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + O(\varepsilon^2)$, где $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0, 0, \beta_0, 0)$ – стационарное решение, $\mathbf{x}_1 = (w_1, w_2, w_3, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ – добавка с искомыми компонентами. Тогда подставляем его в уравнение движения $\frac{d\mathbf{x}_0}{du} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2)$, где $F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Для исследуемой

системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 2\nu - 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Заметим, что стационарное решение \mathbf{x}_0 соответствует нулевой относительной скорости систем $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$ и повернутой на угол β_0 связанной системе относительно орбитальной. Полусвязанная система, не участвующая в собственном вращении спутника, совпадает с системой $Ox_1x_2x_3$, а значит, совпадают и производные вектора геомагнитной индукции в этих системах. Используем снова осредненную модель геомагнитного поля. В Приложении I показано, что хотя это не позволяет отследить колебания скорости спутника, тем не менее, можно достаточно точно оценить возникающее из-за использования МСО их отклонение от стационарного решения. Одновременно, использование осредненной модели позволяет найти

решение системы для \mathbf{x}_1 за счет значительного упрощения уравнений в силу постоянной величины вектора геомагнитной индукции.

Для осредненной модели вектор геомагнитной индукции в системе $OX_1X_2X_3$ имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0 \begin{pmatrix} \sin i \cos u \\ \cos i \\ -\sin i \sin u \end{pmatrix}.$$

Алгоритм “-Bdot”, как видно из (2.1.2), позволяет демпфировать угловую скорость до значения порядка орбитальной. Это значит, что ни одним из слагаемых нельзя пренебречь. Однако поскольку порождающее решение соответствует нулевой скорости вращения аппарата, необходимо учитывать только первое слагаемое в (2.1.2). Это слагаемое вынуждает спутник вращаться с орбитальной угловой скоростью, что и приводит к неточной ориентации. Заметим, что в случае использования алгоритма управления $\mathbf{m} = k_1(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})$ достигается точная гравитационная ориентация аппарата (при рассмотрении только гравитационного и магнитного моментов). После этих рассуждений получаем

$$\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \omega_0 \sin i (-\sin u, 0, -\cos u)^T$$

и

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \sin i \cos i (-\cos u, \operatorname{tg} i, \sin u, 0, 0, 0)^T.$$

Для определения компонент вектора \mathbf{x}_1 получаем систему

$$\frac{dw_1}{du} = -\nu(w_3 + \gamma_1) - 3(1-\nu)\gamma_1 - \sin i \cos i \cos u,$$

$$\frac{dw_2}{du} = -3(1-\nu)\alpha_1 + \sin i \cos i \operatorname{tg} i,$$

$$\frac{dw_3}{du} = \frac{1}{\nu} \sin i \cos i \sin u,$$

$$\frac{d\alpha_1}{du} = w_2, \quad \frac{d\beta_1}{du} = \gamma_1 + w_3, \quad \frac{d\gamma_1}{du} = w_1$$

с нулевыми начальными условиями. Уравнение для w_3 сразу интегрируется

$$w_3 = \frac{1}{\nu} \sin i \cos i (1 - \cos u).$$

Система для определения γ_1, w_1 отделяется:

$$\frac{dw_1}{du} = -\nu(w_3 + \gamma_1) - 3(1 - \nu)\gamma_1 - \sin i \cos i \cos u,$$

$$\frac{d\gamma_1}{du} = w_1.$$

Подставляя в нее полученное выражение для w_3 и представляя систему в виде одного уравнения, получаем

$$\frac{d^2\gamma_1}{du^2} + (3 - 2\nu)\gamma_1 = \sin i \cos i.$$

Запишем его общее решение в виде

$$\gamma_1 = A_1 \sin \sqrt{3 - 2\nu}u + A_2 \cos \sqrt{3 - 2\nu}u - \frac{\sin i \cos i}{3 - 2\nu}.$$

С учетом нулевых начальных условий

$$\gamma_1 = \frac{\sin i \cos i}{3 - 2\nu} (\cos \sqrt{3 - 2\nu}u - 1).$$

Для определения α_1 аналогично получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2\alpha_1}{du^2} + 3(1 - \nu)\alpha_1 = \sin i \cos i \operatorname{tgi}.$$

Его решение с учетом начальных условий имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2 i}{3\nu - 3} (\cos \sqrt{3 - 3\nu}u - 1).$$

Для определения β_1 получаем уравнение

$$\frac{d\beta_1}{du} = \sin i \cos i \left(\frac{1}{\nu} (1 - \cos u) + \frac{1}{3 - 2\nu} (\cos \sqrt{3 - 2\nu}u - 1) \right),$$

имеющее решение

$$\beta_1 = \sin i \cos i \left(\frac{3(1 - \nu)}{\nu(3 - 2\nu)} u - \frac{1}{\nu} \sin u + \frac{1}{(3 - 2\nu)\sqrt{3 - 2\nu}} \sin \sqrt{3 - 2\nu}u \right).$$

Таким образом, получено движение, рождающееся из стационарного решения \mathbf{x}_0 , в полусвязанной системе координат:

$$\alpha = \varepsilon \frac{\sin^2 i}{3\nu - 3} (\cos \sqrt{3 - 3\nu}u - 1),$$

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon \sin i \cos i \left(\frac{3(1-\nu)}{\nu(3-2\nu)}u - \frac{1}{\nu} \sin u + \frac{1}{(3-2\nu)\sqrt{3-2\nu}} \sin \sqrt{3-2\nu}u \right),$$

$$\gamma = \varepsilon \frac{\sin i \cos i}{3-2\nu} (\cos \sqrt{3-2\nu}u - 1),$$

$$\Omega_1 = \varepsilon \sin i \cos i \frac{\sqrt{3-2\nu}}{2\nu-3} \sin \sqrt{3-2\nu}u,$$

$$\Omega_2 = 1 + \varepsilon \sin i \cos i \frac{\sqrt{3-3\nu}}{3-3\nu} \sin \sqrt{3-3\nu}u,$$

$$\Omega_3 = \varepsilon \frac{1}{\nu} \sin i \cos i (1 - \cos u).$$

Получены выражения для малых колебаний оси симметрии спутника по углам α, γ , выражение для угла β , линейно возрастающего по времени, и выражения для угловой скорости под действием гравитационного и магнитного моментов. Наибольший интерес вызывает постоянное смещение по углам α и γ . Если орбита спутника – не приэкваториальная, то смещение в плоскости орбиты имеет величину

$$\alpha = \varepsilon \frac{\sin^2 i}{3\nu - 3}.$$

Отклонение зависит от моментов инерции, и чем больше их разница, тем меньше влияние МСО, так как $\nu < 1$. С возрастанием наклона орбиты отклонение также возрастает, что соответствует повышению эффективности работы МСО на высоких наклонениях. При $\nu = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ и наклонении 50° отклонение составляет около 2.3° .

Исследование алгоритма “-*Bdot*” опубликовано в [51].

Глава 3. Исследование алгоритмов ориентации спутника, стабилизированного собственным вращением

В этой главе исследуется набор алгоритмов, предназначенных для обеспечения одноосной ориентации в инерциальном пространстве спутника, стабилизируемого собственным вращением и планируемых к реализации на борту спутников ТНС-0 №3/GRESAT и ТНС-1 [52]. При этом сначала обсуждаются алгоритмы стандартной схемы последовательного управления скоростью вращения и положением оси симметрии (то есть с предварительным успокоением), а затем – два алгоритма переориентации, используемые без предварительного успокоения спутника.

3.1. Алгоритм гашения нутационных колебаний

Для реализации режима стабилизации собственным вращением необходимо иметь алгоритм, предназначенный для гашения нутационных колебаний. Использовать для этого “ $-B\dot{\theta}$ ” нецелесообразно, так как при этом происходит гашение всех компонент угловой скорости, в том числе – скорости закрутки вокруг оси симметрии. Тем не менее, поскольку алгоритм “ $-B\dot{\theta}$ ” обеспечивает падение кинетической энергии спутника, его можно использовать для гашения нутационных колебаний, активируя только катушку, расположенную на оси симметрии [21]. Очевидно, скорость закрутки при этом останется неизменной. Покажем, что такой подход обеспечивает гашение нутационных колебаний [53]. Дипольный магнитный момент спутника \mathbf{m}_x в этом случае имеет вид

$$\mathbf{m}_x = -k_2 \left(\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} \mathbf{e}_3 \right) \mathbf{e}_3, \quad (3.1.1)$$

где k_2 – положительный коэффициент, \mathbf{e}_3 – орт оси симметрии спутника. Будем снова рассматривать быстрые вращения спутника, при которых, как было показано в первой главе, первым слагаемым, описывающим вращение вектора \mathbf{B} относительно инерциального пространства, в правой части (2.1.2)

можно пренебречь. Такое предположение оправдывается тем, что гашение нутационных колебаний в первую очередь используется сразу после отделения от ракеты-носителя.

Угловая скорость в системе $Ox_1x_2x_3$ может быть записана так:

$$\boldsymbol{\omega}_x = L \left(\frac{1}{A} a_{31}, \frac{1}{A} a_{32}, \frac{1}{C} a_{33} \right)^T. \quad (3.1.2)$$

Третья компонента дипольного магнитного момента в связанной системе координат есть $m_{3x} = k_2 (\omega_{1x} B_{2x} - \omega_{2x} B_{1x})$.

Это позволяет записать ее через компоненты векторов в системе $OL_1L_2L_3$

$$m_{3x} = \frac{L}{A} k_2 [B_{1L} (a_{31} a_{12} - a_{32} a_{11}) + B_{2L} (a_{31} a_{22} - a_{32} a_{21})].$$

Дипольный момент в системе $OL_1L_2L_3$ имеет вид

$$\mathbf{m}_L = \mathbf{A} \mathbf{m}_x = m_{3x} (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T.$$

Тогда механический момент

$$\mathbf{M}_L = m \begin{pmatrix} a_{23} B_{3L} - a_{33} B_{2L} \\ a_{33} B_{1L} - a_{13} B_{3L} \\ a_{13} B_{2L} - a_{23} B_{1L} \end{pmatrix}.$$

Снова будем использовать безразмерные уравнения Белецкого-Черноуьско

(2.1.6), в которых введен новый малый параметр $\varepsilon = \frac{k_2 B_0^2}{\omega_0 A}$. Повторяя

рассуждения о разделении переменных, получаем осредненную систему

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= -\frac{1}{2} \varepsilon l [2p + (1-3p) \sin^2 \rho] \sin^2 \theta, \\ \frac{d\rho}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon (3p-1) \sin \rho \cos \rho \sin^2 \theta, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{1}{2} \varepsilon [2p + (1-3p) \sin^2 \rho] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где $p = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta$. Уравнения (3.1.3) допускают замену $\rho \rightarrow -\rho, \rho \rightarrow \pi - \rho$ и $\theta \rightarrow -\theta, \theta \rightarrow \pi - \theta$. Решение уравнений (3.1.3) удастся найти в квадратурах. Остановимся сначала на двух частных случаях. Тривиальное уравнение для σ , имеющее решение $\sigma = const$, отделяется и далее исследоваться не будет. Рассмотрим два стационарных решения для ρ .

1. Начальное значение ρ_0 близко к нулю (в нуле уравнения (1.3.4) не имеют смысла). Тогда при наклонении менее 46° уравнения (3.1.3) принимают вид (здесь и далее тривиальные уравнения опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= -\varepsilon pl \sin^2 \theta, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\varepsilon p \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Их решение

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg} \theta| &= \exp(-\varepsilon pu + c_0), \\ l &= \frac{1 + \exp(-2p\varepsilon u + 2c_0)}{1 + \exp(2c_0)}, \end{aligned}$$

где $c_0 = \ln |\operatorname{tg} \theta_0|$. Из этих выражений видно, что чем больше наклонение орбиты (а значит, и p), тем больше быстродействие алгоритма. Заметим, что при интегрировании (3.1.4) в выражении $\ln |\operatorname{tg} \theta|$ можно раскрыть модуль, так как θ монотонно стремится к нулю или π . Будем далее считать, что $\theta \in (0, \pi/2)$, что не приведет к потере общности в силу возможности замены $\theta \rightarrow -\theta, \theta \rightarrow \pi - \theta$ в уравнениях (3.1.3), так же поступим с переменной ρ . Границы интервала не рассматриваются, так как соответствуют частным случаям, не представляющим интереса (в частности, тривиальные уравнения при $\theta = 0$).

2. При $\rho_0 = \pi/2$. Уравнения аналогичны (3.1.4), их решение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \exp[-\varepsilon(1-p)u + c_0], \\ l &= \frac{1 + \exp[-2(1-p)\varepsilon u + 2c_0]}{1 + \exp(2c_0)}. \end{aligned}$$

В этом случае, напротив, быстродействие падает с ростом наклона орбиты.

Рассмотрим общий случай. Разделим первое уравнение (3.1.3) на третье, получим

$$\frac{dl}{l} = \operatorname{tg} \theta d\theta.$$

Интегрирование этого выражения приводит к

$$\ln l = \ln \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta},$$

откуда

$$l \cos \theta = \cos \theta_0.$$

Получен первый интеграл $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$, выражающий сохранение третьей компоненты угловой скорости в связанной системе координат (см. (3.1.2)).

Разделим второе уравнение (3.1.3) на третье, получим

$$-\frac{2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho = \operatorname{tg} \theta d\theta,$$

откуда определяем первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = \frac{1}{2}(3p - 1) \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - 2p \ln \operatorname{tg} \rho + (3p - 1) \ln \cos \theta.$$

Заметим, что случай $3p - 1 = 0$ может быть рассмотрен аналогично случаям 1 и 2. Найденные первые интегралы, удовлетворяющие условиям теоремы о неявной функции, позволяют получить решение системы (3.1.3) в квадратурах.

Для анализа системы (3.1.3) применялось численное интегрирование с контролем точности по первым интегралам [54]. На быстродействие системы оказывают влияние три параметра: i, ρ_0, θ_0 . Как и следовало ожидать, с ростом θ_0 быстродействие системы (время уменьшения угла θ , а значит, и экваториальной компоненты угловой скорости спутника $l \sin \theta / A$) падает. Влияние i и ρ_0 отражено на рис. 3.1.1 и рис. 3.1.2.

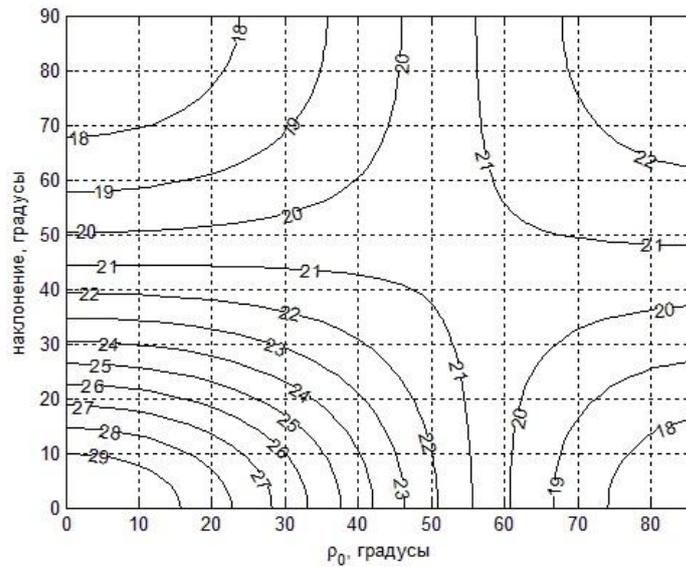


Рис. 3.1.1. Угол θ через 2 витка, $\theta_0 = 30^\circ$

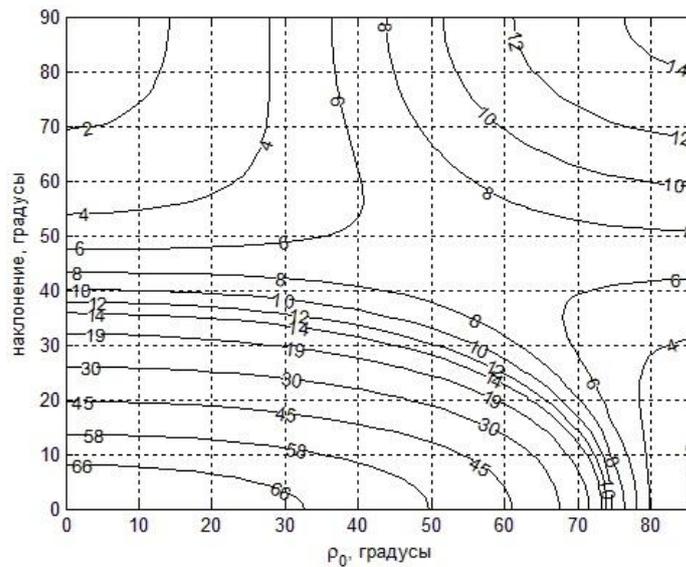


Рис. 3.1.2. Угол θ через 15 витков, $\theta_0 = 70^\circ$

На рис. 3.1.1 и рис. 3.1.2 представлено значение угла θ через 2 и 15 витков соответственно (приведено на изолиниях). Как видно из рис. 3.1.1, при величинах ρ_0 , меньших приблизительно 50° , быстродействие растет с ростом наклона орбиты, при больших – падает (см. частные случаи 1 и 2). Рис. 3.1.2 показывает, что при увеличении времени работы алгоритма появляется область, в которой большее быстродействие достигается при наклоне около 45° . Однако, как видно из рис. 3.1.2, при выборе большого наклона угол θ в худшем случае не превысит 14° , тогда как при выборе малого наклона он

может практически не измениться. Таким образом, для работы алгоритма гашения нутационных колебаний представляется предпочтительной орбита с большим наклоном.

Рассмотренный алгоритм имеет более общее применение. Фактически, было показано, что использование одной токовой катушки позволяет демпфировать компоненту угловой скорости, перпендикулярную ей. Использование двух взаимно перпендикулярных катушек, таким образом, позволяет полностью демпфировать угловую скорость (в рамках осредненной модели магнитного поля – кроме экваториальной орбиты). Для использования алгоритма “-Bdot” достаточно иметь две, а не три токовые катушки. Этот вывод для спутника с произвольным тензором инерции подтверждается результатами численного моделирования. На рис. 3.1.3 представлено демпфирование угловой скорости спутника с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(1.02, 1.51, 1.73)$ кг·м². Орбита спутника – круговая с радиусом 6850 километров и наклонение 51.7°. Дипольный момент катушек – 3.2 А·м² (параметры микроспутника «Чибис-М»), катушка, расположенная на третьей оси, не используется.

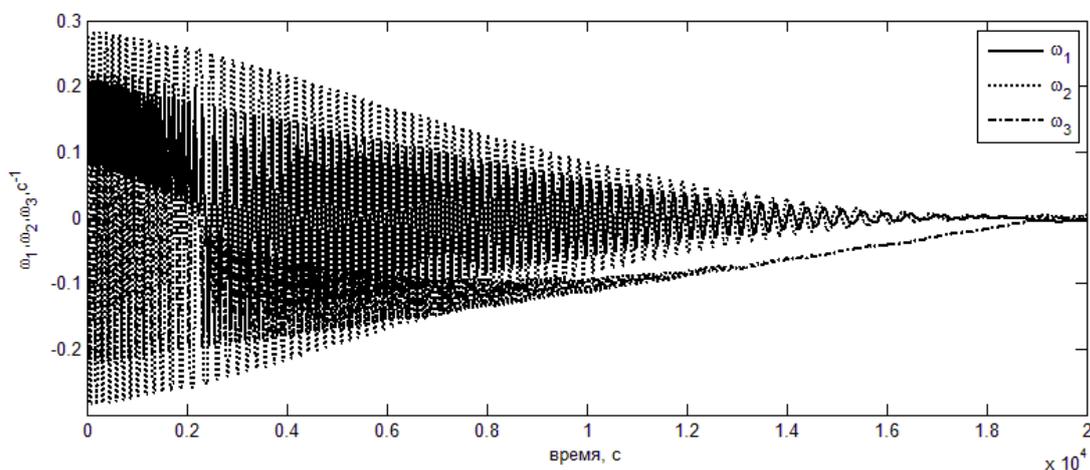


Рис. 3.1.3. Отключена третья катушка, дипольный момент катушек 3.2 А·м².

$$\text{Начальные условия } \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10 \text{ } \frac{\circ}{\text{с}}$$

Результаты численного моделирования показывают, что быстроедействие алгоритма может снизиться (одна из компонент угловой скорости

демпфируется медленнее). Тем не менее, в случае отказа одной из токовых катушек демпфирование угловой скорости все еще возможно [42].

3.2. Алгоритм раскрутки вокруг оси симметрии

Несмотря на то, что алгоритм гашения нутационных колебаний не изменяет скорости закрутки спутника вокруг оси симметрии, необходимо иметь алгоритм, позволяющий закрутить спутник. Для этого используется закон управления [56]

$$\mathbf{m} = k_3 (B_{2x}, -B_{1x}, 0)^T. \quad (3.2.1)$$

Момент, действующий на спутник, в этом случае задается выражением

$$\mathbf{M}_x = k_3 \begin{pmatrix} -B_{x1} B_{x3} \\ -B_{x2} B_{x3} \\ B_{x1}^2 + B_{x2}^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, третья компонента угловой скорости, направленная по оси симметрии, заведомо возрастает, так как соответствующая компонента механического момента положительна. Другие две компоненты могут принимать разные знаки.

Проведем исследование динамики спутника при помощи переменных Белецкого-Черноуьско, как это было сделано в предыдущем разделе. Для этого перепишем дипольный момент (3.2.1) в виде

$$\mathbf{m}_x = -k_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}_x,$$

где \mathbf{e}_3 – орт оси симметрии спутника. Тогда механический момент в связанной системе задается выражением

$$\mathbf{M}_x = k_3 [B_0^2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{B}_x (\mathbf{B}_x \mathbf{e}_3)].$$

Учитывая, что $\mathbf{B}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_L$, получаем выражение для момента в системе $OL_1L_2L_3$

$$\mathbf{M}_L = k_3 \begin{pmatrix} a_{13} B_0^2 - a_{13} B_{1L}^2 - a_{23} B_{1L} B_{2L} - a_{33} B_{1L} B_{3L} \\ a_{23} B_0^2 - a_{13} B_{1L} B_{2L} - a_{23} B_{2L}^2 - a_{33} B_{2L} B_{3L} \\ a_{33} B_0^2 - a_{13} B_{1L} B_{3L} - a_{23} B_{2L} B_{3L} - a_{33} B_{3L}^2 \end{pmatrix}.$$

Предположим опять, что механический момент, создаваемый при помощи магнитной системы ориентации, мал. Тогда сохраняются в силе рассуждения о разделении переменных, приведенные в предыдущем разделе. Усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= \varepsilon [2p + (1 - 3p)\sin^2 \rho] \cos \theta, \\ \frac{d\rho}{du} &= -\varepsilon \frac{1}{l} (3p - 1) \sin \rho \cos \rho \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{1}{2l} \varepsilon [2 - 2p - (1 - 3p)\sin^2 \rho] \sin \theta, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0,\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

где $\varepsilon = \frac{k_3 B_0^2}{\omega_0 L_0}$ – новый малый параметр. Поскольку алгоритм гашения нутационных колебаний не затрагивает скорости вращения вокруг оси симметрии, кинетический момент в уравнениях (3.2.2) не мал и правые части не оказываются большими величинами (в этом случае переменные ρ, σ не будут медленными). Заметим, что при выводе уравнений (3.2.2) не использовалось предположение малости угла θ . Предположим теперь, что в результате работы алгоритма гашения нутационных колебаний угол θ мал. Тогда уравнения (3.2.2) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= \varepsilon [2p + (1 - 3p)\sin^2 \rho], \\ \frac{d\rho}{du} &= -\varepsilon \frac{1}{l} (3p - 1) \sin \rho \cos \rho, \\ \frac{d\theta}{du} &= -\frac{1}{2l} \varepsilon [2 - 2p - (1 - 3p)\sin^2 \rho] \theta.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Если же в результате работы алгоритма гашения нутационных колебаний угол θ близок к π , то необходимо проводить раскрутку в другую сторону, так как $\omega_3(0) < 0$. В этом случае правые части уравнений (3.2.2) поменяют знак,

первые два уравнения (3.2.3) останутся в силе. Уравнение для θ отделяется. Разделив первое уравнение (3.2.3) на второе, получим

$$\frac{dl}{l} = -\frac{2p + (1-3p)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho,$$

откуда находим первый интеграл

$$I_1(l, \rho) = (3p-1)\ln l - \frac{1}{2}(3p-1)\ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + 2p \ln \operatorname{tg} \rho.$$

Заметим, что в случае $3p-1=0$ последнее дифференциальное уравнение легко интегрируется и дает $l = \frac{2}{3}\varepsilon u$, $\rho = \rho_0$. Аналогично предыдущему разделу считаем, что $\rho \in (0, \pi/2)$. Рассмотрим также два частных случая.

1. Если ρ_0 близко к нулю, то на всем движении $l = 2\varepsilon r u$ при наклонении орбиты более 46° и быстродействие алгоритма растет с увеличением наклонения орбиты.

2. Если $\rho_0 = \pi/2$, то аналогично $l = \varepsilon(1-p)u$ и быстродействие алгоритма падает с увеличением наклонения орбиты.

Первый интеграл позволяет найти решение первых двух уравнений (3.2.3) в квадратурах, после чего третье уравнение также интегрируется.

Влияние ρ_0 и i на быстродействие алгоритма раскрутки аналогично их влиянию на быстродействие алгоритма гашения нутаций (рис. 3.2.1).

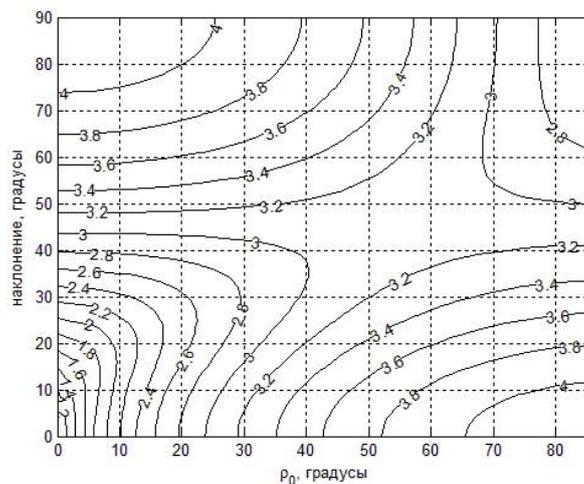


Рис. 3.2.1. Увеличение кинетического момента в результате раскрутки спутника

На рис. 3.2.1 представлено значение кинетического момента спутника через 5 витков при $\varepsilon = 0.1$, $\theta_0 = 1^\circ$. При небольших ρ_0 увеличение наклона приводит к увеличению быстродействия (частный случай 1), при ρ_0 , близких к 90° , быстродействие падает с увеличением наклона (частный случай 2). Однако, при больших наклонах орбиты низкое быстродействие наблюдается при большом отклонении вектора кинетического момента от требуемого направления в инерциальном пространстве. Поскольку в результате работы одного из алгоритмов грубой переориентации этот угол на самом деле мал, такой режим не реализуем. Напротив, в случае малого наклона орбиты спутник попадает в область с низким быстродействием. При малых ρ быстродействие растет с ростом наклона орбиты.

Экваториальная компонента угловой скорости не возрастает. Ее производная имеет вид

$$\frac{d(l \sin \theta)}{du} = \varepsilon [-2 + 2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho] \sin \theta \cos \theta.$$

Поскольку угол θ близок к нулю, в ходе раскрутки экваториальная компонента скорости уменьшается. Заметим, что одновременно с алгоритмом раскрутки может работать алгоритм гашения нутационных колебаний.

3.3. Алгоритм точной переориентации

Дипольный магнитный момент $\mathbf{m}_x = (0, 0, m)^T$, создаваемый катушками, имеет вид

$$\mathbf{m}_x = (0, 0, k_4 (\Delta \mathbf{L} \cdot [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}]))^T, \quad (3.3.1)$$

где $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}$, \mathbf{L}_f – требуемое конечное значение кинетического момента (зачастую это – направление на Солнце [57]), k_4 – положительная размерная постоянная [23]. В данном случае спутник считается быстро вращающимся вокруг оси симметрии.

Динамику спутника опишем при помощи переменных Белецкого-Чернуосько. Для этого необходимо задать механический момент в системе $OL_1L_2L_3$. Определим в этой системе все необходимые выражения. Требуемое значение кинетического момента $\mathbf{L}_f = \mathbf{Q}^T (L_1, L_2, L_3)^T$, где компоненты L_i задают конечное положение вектора кинетического момента в инерциальном пространстве; $\mathbf{e}_{3L} = (0, 0, 1)^T$, так как спутник закручен вдоль оси симметрии, то есть $A|\omega_i| \ll C|\omega_3|$, ($i=1, 2$); $\mathbf{L}_L = L_0(0, 0, l)^T$, где L_0 – модуль кинетического момента в начальный момент времени, l – безразмерный кинетический момент, определяемый по формуле $L = L_0 l$; $\mathbf{B}_L = B_0(B_{1L}, B_{2L}, B_{3L})$.

Поскольку спутник закручен вокруг оси симметрии и дипольный момент в системе $Ox_1x_2x_3$ имеет вид $(0, 0, m)^T$, то в системе $OL_1L_2L_3$ момент \mathbf{m}_L практически тот же вид. Отсюда

$$\mathbf{M}_L = B_0 \begin{pmatrix} -B_{2L}m \\ B_{1L}m \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $m = k_4 (\Delta \mathbf{L} [\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}]) = k_4 L_0 B_0 (L_{2L} B_{1L} - L_{1L} B_{2L})$.

Проведя разделение переменных, запишем снова уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных, в предположении слабого механического момента

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= 0, \\ \frac{d\rho}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta \frac{1}{l} (L_1 \cos \rho \cos \sigma + L_2 \cos \rho \sin \sigma - L_3 \sin \rho), \\ \frac{d\sigma}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta \frac{1}{l \sin \rho} (-L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma), \\ \frac{d\theta}{du} &= 0, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

где $\varepsilon = \frac{k_4 B_0^2}{\omega_0}$ – малый параметр. Уравнения (3.3.2) удается проинтегрировать,

если $L_1 = L_2 = 0$, то есть ось симметрии спутника требуется выставить вдоль оси конуса осредненной модели геомагнитного поля. В этом случае уравнения принимают вид (тривиальные уравнения для l , σ и θ опускаем)

$$\frac{d\rho}{du} = -\eta \sin \rho,$$

где $\eta = \frac{1}{2} \varepsilon L_3 \sin^2 \Theta$, так как из первого уравнения (3.3.2) следует, что $l \equiv 1$.

Решение этого уравнения получается в виде конечной формулы

$$\rho = 2 \operatorname{arctg} [c_0 \exp(-\eta u)],$$

где $c_0 = \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2}$. На рис. 3.3.1 представлен график изменения угла ρ для различных наклонений орбиты в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

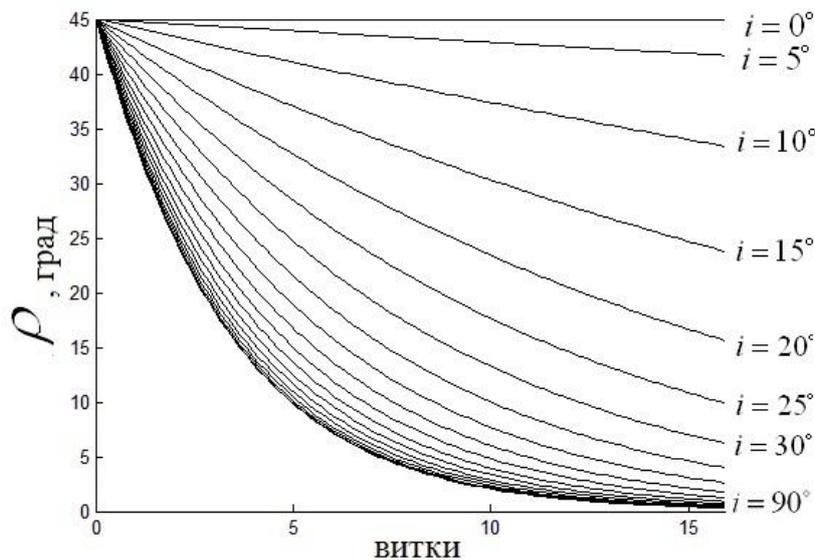


Рис. 3.3.1. Изменение угла ρ при разных наклонениях

Видно, что быстродействие алгоритма, то есть скорость переориентации спутника в необходимом направлении, возрастает с ростом наклона орбиты. Таким образом, угол ρ стремится к нулю, что асимптотически соответствует требуемой ориентации $\mathbf{L}_f = (0, 0, L_3)^T$. График построен для $\varepsilon = 0.1$.

Вообще, $\frac{d\rho}{du} \sim \sin^2 \Theta$, $\frac{d\sigma}{du} \sim \sin^2 \Theta$ (если ρ не мало). Поскольку разница

между i и Θ составляет не более 11° , можно считать, что $\frac{d\rho}{du} \sim \sin^2 i$,

$\frac{d\sigma}{du} \sim \sin^2 i$, и тогда скорость изменения углов растет с увеличением

наклонения, значит, и быстродействие алгоритма переориентации оси симметрии растет с увеличением наклонения.

В случае $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ то есть когда требуемое направление совпадает с направлением в восходящий узел орбиты, удастся найти первый интеграл системы (3.3.2). Разделим второе уравнение (3.3.2) на третье

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{\sin \rho (L_1 \cos \rho \cos \sigma + L_2 \cos \rho \sin \sigma - L_3 \sin \rho)}{-L_1 \sin \sigma + L_2 \cos \sigma}.$$

Для выбранного направления в инерциальном пространстве

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = -\frac{\sin \rho \cos \rho \cos \sigma}{\sin \sigma},$$

откуда, после интегрирования, имеем

$$\ln |\operatorname{tg} \rho / \operatorname{tg} \rho_0| = \ln |\sin \sigma_0 / \sin \sigma|,$$

Окончательно получаем первый интеграл

$$I_0 = \operatorname{tg} \rho \sin \sigma. \quad (3.3.3)$$

Наличие этого первого интеграла позволяет проинтегрировать систему

(3.3.2). Обозначая $f(\rho, I_0) = \sqrt{1 - I_0^2 \operatorname{ctg}^2 \rho}$, из (3.3.2) получаем

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho, I_0) \cos \rho} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta u \quad \text{при } \sigma = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\int \frac{d\rho}{f(\rho, I_0) \cos \rho} = -\frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \Theta u \quad \text{при } \sigma = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right],$$

что совместно с (3.3.3) позволяет найти решение системы (3.3.2) в квадратурах.

Приведем здесь результаты численного моделирования динамики спутника с последовательным использованием трех рассмотренных алгоритмов.

Численное моделирование проводилось при учете влияния на спутник как магнитного, так и гравитационного моментов. Управление дипольным магнитным моментом катушек формировалось на основе моделирования показаний датчиков спутника, имеющих определенную погрешность. Вместо непрерывного закона управления током катушек использовался дискретный, который зачастую и реализуется на борту. То есть, вместо закона вида \mathbf{m} использовался закон $m_0 \text{sign}(\mathbf{m})$. При численном моделировании были приняты следующие предположения:

- спутник оснащен магнитометром и солнечным датчиком. Максимальная ошибка определения направления на Солнце составляет 1° , ошибка определения – 0.5° ;

- тензор инерции спутника $\mathbf{J} = \text{diag}(0.011, 0.011, 0.02)$ кг·м²;

- дипольные моменты катушек, применяемых для гашения нутаций – $0.8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, для раскрутки – $0.1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, для ориентации оси симметрии – $0.8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, для гашения нутаций во время раскрутки – $0.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$;

- требуемое положение оси симметрии в системе $O_a Y_1 Y_2 Y_3 - (1, 1, 0)^T$;

- вектор начальной угловой скорости спутника имеет компоненты $(0.1, 0.1, 0.01)^T \text{ с}^{-1}$;

- наклонение орбиты – 60° ;

- модель геомагнитного поля – прямой диполь.

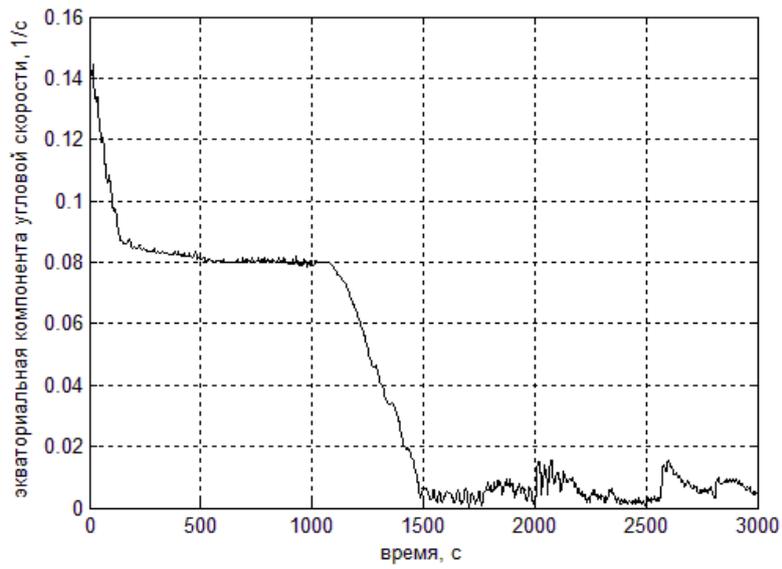


Рис. 3.3.2. Гашение нутационных колебаний

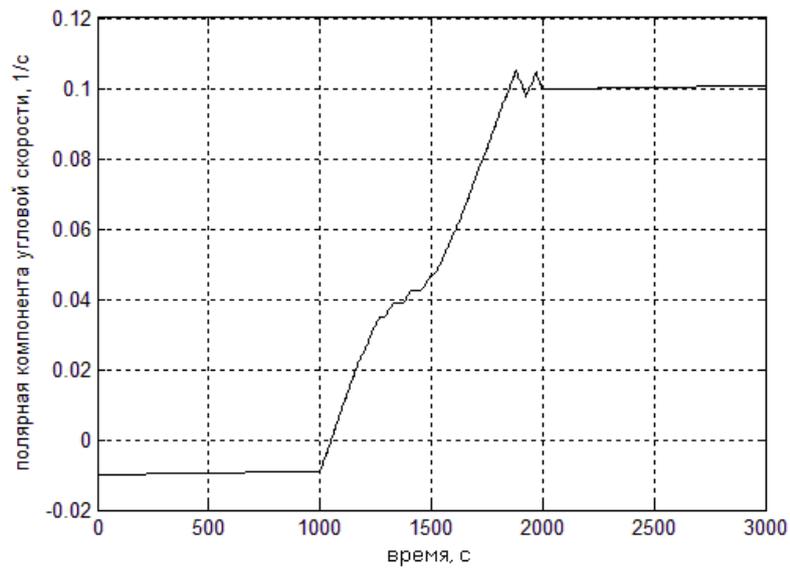


Рис. 3.3.3. Раскрутка вокруг оси симметрии

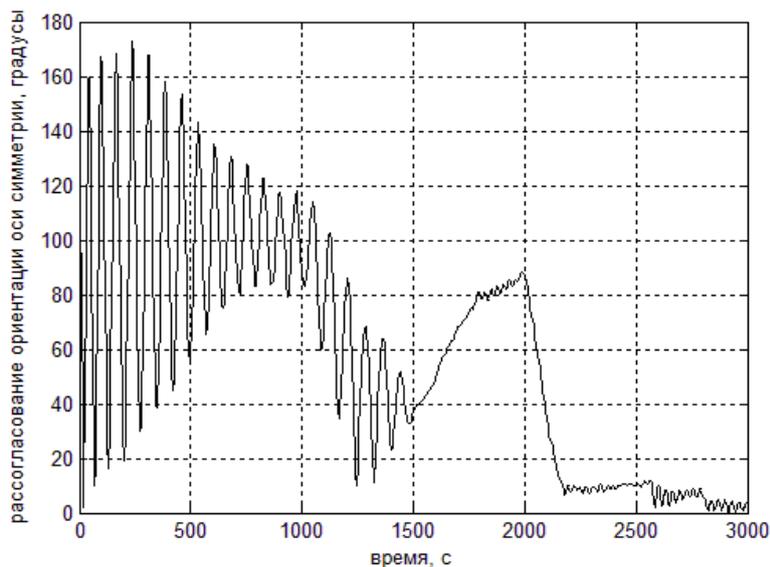


Рис. 3.3.4. Переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве

Результаты численного моделирования (три этапа движения представлены соответственно на рис. 3.3.2, рис. 3.3.3 и рис. 3.3.4) показывают, что при выбранных параметрах гашение нутационных колебаний происходит примерно за 1500с, раскрутка за 1000с и переориентация оси симметрии за 1000с. Приведем результаты расчетов в теми же параметрами и начальными данными, но при наклонении орбиты 10° .

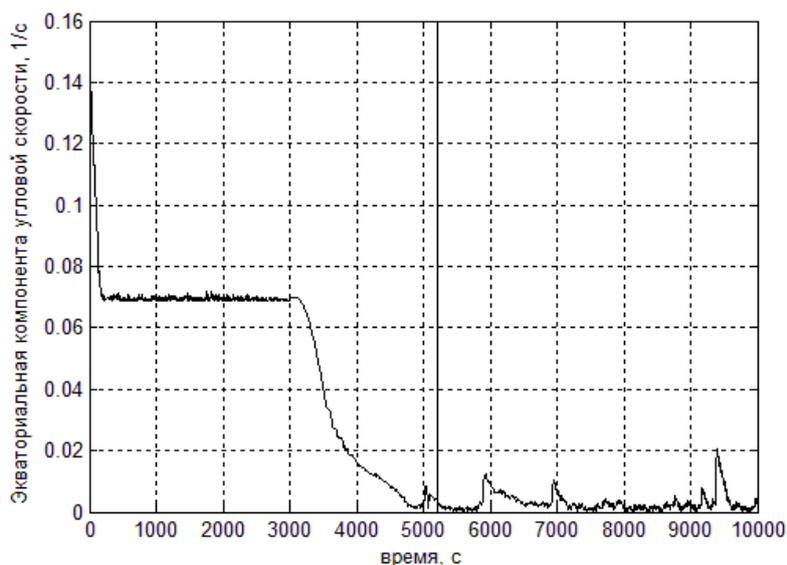


Рис. 3.3.5. Гашение нутационных колебаний

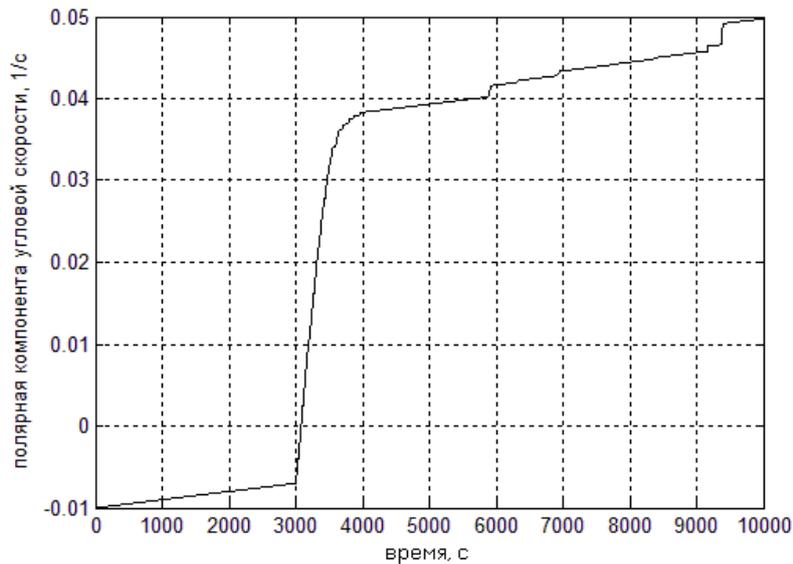


Рис. 3.3.6. Раскрутка вокруг оси симметрии

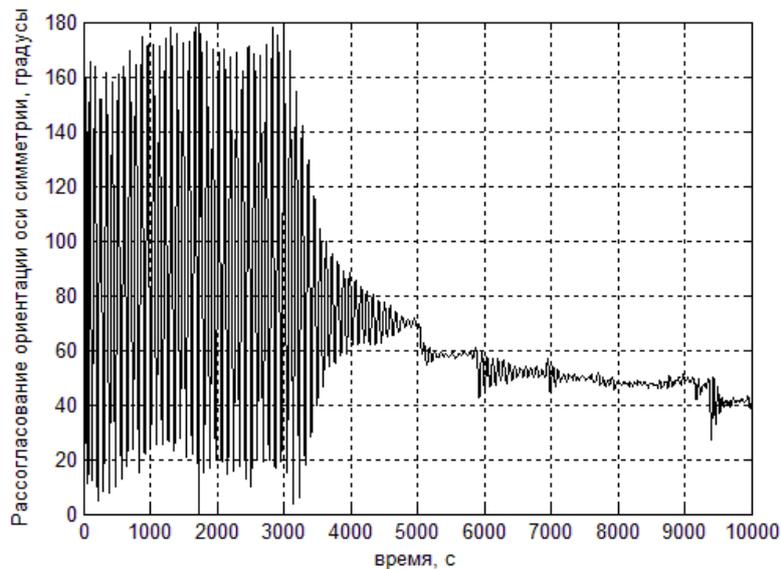


Рис. 3.3.7. Переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве

Из рис. 3.3.5, рис. 3.3.6 и рис. 3.3.7) видно, что гашение нутационных колебаний происходит примерно за 5000с, раскрутка – практически полностью за 1000с, переориентация оси симметрии происходит очень медленно. Результаты численного моделирования полностью согласуются со сделанными ранее выводами о том, что алгоритм раскрутки мало чувствителен к наклонению орбиты (хотя лучше работает на орбитах с высоким наклонением), алгоритм гашения нутационных колебаний имеет заметно большее

быстродействие на орбитах с высоким наклоном, а алгоритм переориентации практически не работает на приэкваториальных орбитах.

Исследование алгоритмов (3.1.1), (3.2.1) и (3.3.1) опубликовано в [58] и [59].

3.4. Первый алгоритм предварительной переориентации

Обычно одноосная ориентация осуществляется последовательно. Вначале происходит гашение нутационных колебаний (при необходимости – гашение всех компонент угловой скорости), затем раскрутка спутника (если требуется) и только после этого – переориентация оси симметрии в инерциальном пространстве. Эта схема была рассмотрена в трех предыдущих разделах. Теперь рассмотрим два алгоритма предварительной переориентации, которые могут использоваться сразу после отделения от ракеты-носителя [60]. Несмотря на то, что спутник еще не является быстро закрученным вокруг оси симметрии, их использование позволяет перевести ее в необходимое направление одновременно с гашением нутационных колебаний.

Рассмотрим первый алгоритм предварительной переориентации, задаваемый соотношением [22]

$$\mathbf{m} = k_5 \left(\mathbf{e}_3 \left[\mathbf{B} \times \mathbf{L}_f \right] \right) \mathbf{e}_3. \quad (3.4.1)$$

Как и при гашении нутационных колебаний, используется одна катушка, установленная на оси симметрии. Это позволяет сохранить неизменной скорость закрутки спутника вокруг этой оси. Анализ динамики спутника под управлением алгоритма (3.4.1) аналитически удастся провести лишь для одного выделенного направления в инерциальном пространстве, $\mathbf{L}_{fZ} = (0, 0, 1)^T$. Это соответствует совпадению требуемого направления с осью конуса в осредненной модели геомагнитного поля. В системе $OL_1L_2L_3$ этот вектор имеет вид $\mathbf{L}_{fL} = (q_{31}, q_{32}, q_{33})^T$. Вектор геомагнитной индукции –

$$\mathbf{B}_L = \begin{pmatrix} q_{11}B_{1Z} + q_{21}B_{2Z} + q_{31}B_{3Z} \\ q_{12}B_{1Z} + q_{22}B_{2Z} + q_{32}B_{3Z} \\ q_{13}B_{1Z} + q_{23}B_{2Z} + q_{33}B_{3Z} \end{pmatrix},$$

ось симметрии –

$$\mathbf{e}_{3L} = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Введем вектор $\mathbf{p} = \mathbf{B} \times \mathbf{L}_f$ для упрощения записи. Тогда механический момент задается выражением

$$\mathbf{M}_L = k_5 B_0^2 \begin{pmatrix} p_1 B_{3Z} a_{13} a_{23} + p_2 B_{3Z} a_{23}^2 + p_3 B_{3Z} a_{33} a_{323} - p_1 B_{2Z} a_{13} a_{33} - p_2 B_{2Z} a_{23} a_{33} - p_3 B_{2Z} a_{33}^2 \\ p_1 B_{1Z} a_{13} a_{33} + p_3 B_{1Z} a_{33}^2 + p_2 B_{1Z} a_{33} a_{23} - p_2 B_{3Z} a_{13} a_{23} - p_3 B_{3Z} a_{13} a_{33} - p_1 B_{3Z} a_{13}^2 \\ p_2 B_{2Z} a_{13} a_{23} + p_1 B_{2Z} a_{13}^2 + p_3 B_{2Z} a_{33} a_{13} - p_1 B_{1Z} a_{13} a_{23} - p_3 B_{1Z} a_{23} a_{33} - p_2 B_{1Z} a_{23}^2 \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

Для усреднения снова необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{\varphi, \psi, u}$, $\langle M_{1L} \cos \psi \rangle_{\varphi, \psi, u}$, $\langle M_{2L} \sin \psi \rangle_{\varphi, \psi, u}$. Выражения M_{iL} не содержат φ . В (3.4.2) только выражения $a_{ij} a_{kl}$ содержат ψ , тогда как выражения $B_i B_j$ содержат u . Таким образом, только $a_{ij} a_{kl}$ должны быть усреднены по ψ , а выражения $B_i B_j$ – по u . Напомним, что $B_{11} = B_{22} = 0.5 \sin^2 \Theta = p$, $B_{33} = \cos^2 \Theta = q$. После усреднения получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon p \sin^2 \theta \cos \rho, \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon p (0.5 \sin^2 \theta - 1) \sin \rho / l, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon p \sin \theta \cos \theta \cos \rho / l, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

где $\varepsilon = \frac{k_5 B_0^2}{L_0 \omega_0}$. Уравнения (3.4.3) сразу дают первый интеграл $\sigma = const$

(уравнение для σ далее не рассматриваем). Разделив первое уравнение (3.4.3) на последнее, получим,

$$\frac{dl}{l} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta.$$

Отсюда получаем первый интеграл $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$, выражающий постоянство скорости закрутки вокруг оси симметрии. Таким образом, при использовании алгоритма (3.4.1) не возникает опасности гашения закрутки или, наоборот, ее возрастания выше необходимого значения. О нутационных колебаниях при этом ничего сказать нельзя и они требуют рассмотрения. Для того чтобы получить еще один первый интеграл, разделим второе уравнение в (3.4.3) на последнее,

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\sin \rho}{\cos \rho} \frac{0.5 \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta}.$$

В результате получаем

$$I_2(\rho, \theta) = 0.25 \ln(\operatorname{tg}^2 \theta + 1) - \ln|\operatorname{tg} \theta| - \ln|\sin \rho|.$$

Два первых интеграла дают решения уравнения (3.4.3) в квадратурах.

Уравнения (3.4.3) имеют два положения равновесия, $(\theta = 0, \rho = 0 \text{ или } \pi)$ и $(\theta = \pi/2, \rho = 0 \text{ or } \pi)$, уравнение для величины кинетического момента отделяется. Устойчивым положением равновесия является только $(\theta = \pi/2, \rho = 0)$, то есть угол ρ стремится к нулю. Величина модуля кинетического момента растет. Возрастание угла θ говорит о росте экваториальной компоненты угловой скорости, так как полярная компонента сохраняется. Поведение угла ρ может быть использовано для определения быстродействия алгоритма. Обратимся в виду дипольного магнитного момента (3.4.1). Действие МСО, реализующей такой момент, приводит спутник в одно из двух положений, определяемых выражением $[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{V}] = 0$, что соответствует ориентации оси симметрии по вектору индукции геомагнитного поля, или $\mathbf{e}_3 [\mathbf{V} \times \mathbf{L}_f] = 0$, что соответствует приведению оси симметрии в плоскость $(\mathbf{V}, \mathbf{L}_f)$. Положение $[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{V}] = 0$ при этом является лишь частным случаем положения оси симметрии в плоскости $(\mathbf{V}, \mathbf{L}_f)$. В рассматриваемом случае вектор \mathbf{L}_f совпадает с осью конуса в осредненной модели геомагнитного поля.

Поскольку применение алгоритма (3.4.1), а также поскольку он используется при произвольной начальной скорости аппарата, сопровождается гашением нутационных колебаний. Подбирая токи в катушках так, чтобы гашение нутаций превалировало над «разбалтыванием», вызываемым алгоритмом (3.4.1), можно добиться выхода на требуемый режим ориентации, когда нутационные колебания малы, а ось симметрии близка к требуемому направлению. Фактически, чтобы не допустить уменьшения быстродействия системы, алгоритм грубой переориентации должен реализовываться меньшими токами в катушках, так как главная задача на начальном этапе движения – обеспечение стабилизации собственным вращением. Применение алгоритма гашения нутационных колебаний приводит к совпадению кинетического момента и оси симметрии спутника. Поэтому совпадение вектора кинетического момента с осью конуса, что соответствует $\rho = 0$, означает совпадение оси симметрии аппарата с требуемым направлением. Таким образом, скорость уменьшения угла ρ может рассматриваться как мера эффективности работы алгоритма.

На рис. 3.4.1 представлено влияние на быстродействие наклона орбиты и угла θ_0 .

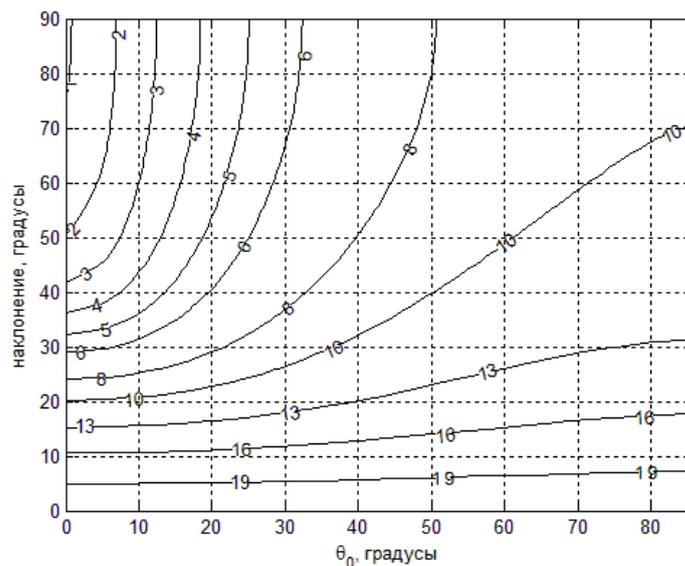


Рис. 3.4.1. Угол ρ через 10 витков, $\rho_0 = 20^\circ$

Из рис. 3.4.1 видно, что повышение наклона увеличивает быстродействие алгоритма. На околоэкваториальной орбите алгоритм практически не работает.

Рис. 3.4.1 также показывает, что чем меньше угол θ_0 (спутник “ближе” к состоянию вращения вокруг оси симметрии), тем лучше работает алгоритм. Тем не менее, даже если спутник практически не имеет закрутки, но характеризуется значительными нутационными колебаниями, алгоритм позволяет «приблизить» аппарат к требуемой ориентации в случае не околэкваториальной орбиты. На рис. 3.4.2 представлен график изменения угла ρ для нескольких наклонений орбиты.

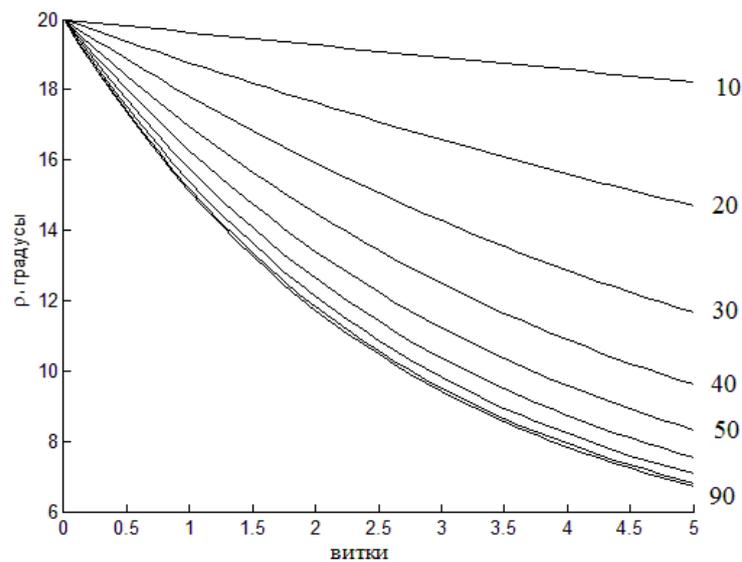


Рис. 3.4.2. Изменение угла ρ при разных наклонениях

Численное моделирование общего случая подтверждает справедливость сделанных выводов.

На рис. 3.4.3 и 3.4.4 представлены результаты численного моделирования совместной работы алгоритмов (3.4.1) и (3.1.1).

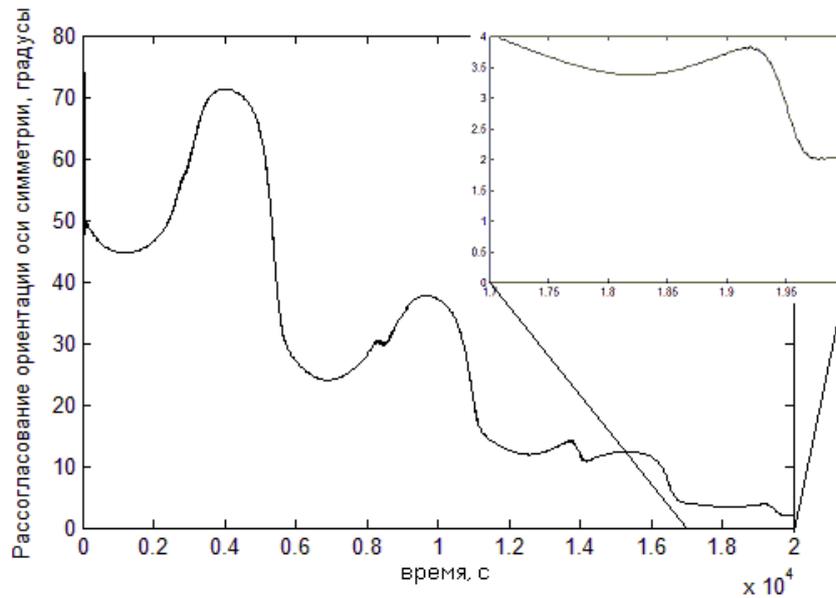


Рис. 3.4.3. Эволюция угла между осью симметрии спутника и требуемым направлением в инерциальном пространстве

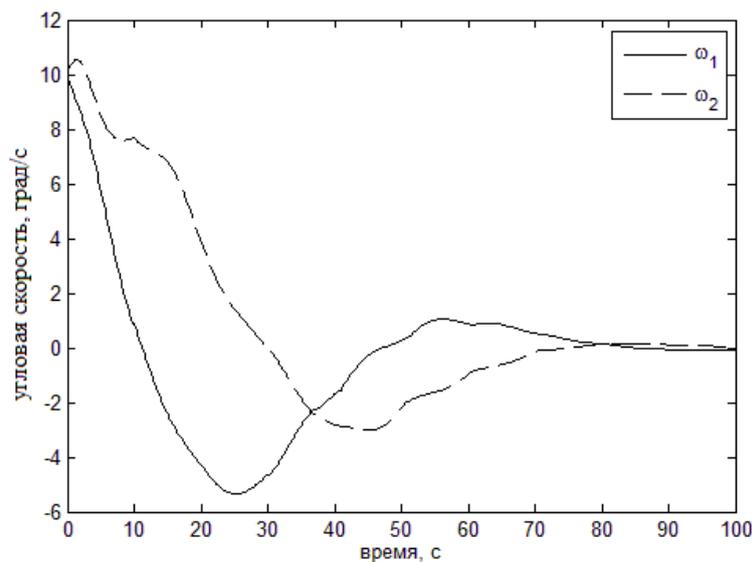


Рис. 3.4.4. Гашение нутационных колебаний совместно с переориентацией

При построении рис. 3.4.3 и рис. 3.4.4 использовалась модель IGRF (разложение потенциала поля в ряд Гаусса, эмпирические коэффициенты 2010 года на период 2010-2015), начальное отклонение от требуемой ориентации составляет 12° , начальные угловые скорости $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10^\circ / c$, коэффициенты усиления $k_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / T^2 \cdot s$, $k_5 = 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / T^2 \cdot s^2$.

3.5. Второй алгоритм предварительной переориентации

Раздел 3.3 содержит исследование динамики закрученного вокруг оси симметрии спутника под управлением МСО, реализующей дипольный момент

$$\mathbf{m} = k_4 \left(0, 0, (\mathbf{L}_f - \mathbf{L})(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) \right). \quad (3.5.1)$$

В разделе 3.3 спутник считается быстро вращающимся вокруг оси симметрии. Если кинетический момент спутника и его ось симметрии практически совпадают, (3.3.1) можно переписать так:

$$\mathbf{m} \approx k_4 \left(0, 0, (\mathbf{L}_f - \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) \right).$$

Принимая во внимание $\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B}) = 0$, получаем закон управления (3.4.1).

Таким образом, для закрученного вокруг оси симметрии спутника оба алгоритма предварительной переориентации становятся идентичный алгоритму точной переориентации. Поэтому полученные для него результаты верны для любого алгоритма.

Рассмотрим здесь использование алгоритма (3.5.1) в качестве предварительной алгоритма переориентации, применяемого для произвольно вращающегося аппарата [61]. Дипольный момент третьей катушки задается выражением

$$m_3 = k_4 B_0 \left[L_1 (a_{23} B_3 - a_{33} B_2) + (L_3 - 1) (a_{13} B_2 - a_{23} B_1) \right],$$

где L_i – компоненты вектора требуемой ориентации оси симметрии в системе $OL_1L_2L_3$. При этом снова рассматривается частный случай $\mathbf{L}_{fZ} = (0, 0, 1)^T$.

Механический момент, действующий на аппарат, задается выражением

$$\mathbf{M} = k_4 B_0^2 \begin{pmatrix} L_1 (a_{23}^2 B_3^2 - 2a_{23} a_{33} B_2 B_3 + a_{33}^2 B_2^2) + (L_3 - 1) (a_{23} a_{13} B_2 B_3 - a_{23}^2 B_1 B_3 + a_{23} a_{33} B_2 B_1 - a_{33} a_{13} B_2^2) \\ L_1 (a_{23} a_{33} B_1 B_3 - a_{33}^2 B_1 B_2 + a_{13} a_{33} B_2 B_3 - a_{23} a_{13} B_3^2) + (L_3 - 1) (a_{33} a_{13} B_2 B_1 - a_{13}^2 B_2 B_3 + a_{13} a_{23} B_3 B_1 - a_{33} a_{23} B_1^2) \\ L_1 (a_{23} a_{13} B_2 B_3 - a_{23}^2 B_1 B_3 + a_{23} a_{33} B_2 B_1 - a_{33} a_{13} B_2^2) + (L_3 - 1) (a_{13}^2 B_2^2 - 2a_{23} a_{13} B_2 B_1 + a_{23}^2 B_1^2) \end{pmatrix}$$

Момент снова не зависит от φ . Усредняя $a_{ij} a_{kl}$ по ψ , а $B_i B_j$ – по u , получаем усредненные уравнения

$$\frac{dl}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \theta [2p(\cos \rho - 1) + (3p - 1) \sin^2 \rho],$$

$$\frac{d\rho}{du} = -\varepsilon p \sin \rho / l + \frac{1}{2} \varepsilon \sin^2 \theta [p \sin \rho + (3p - 1) \sin \rho \cos \rho] / l,$$

$$\frac{d\sigma}{du} = 0,$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \sin \theta \cos \theta [2p(\cos \rho - 1) + (3p - 1) \sin^2 \rho] / l,$$

(3.5.2)

где $\varepsilon = \frac{k_4 B_0^2}{\omega_0}$. Уравнения снова имеют первый интеграл $I_1(l, \theta) = l \cos \theta$. Других

первых интегралов найти не удастся. Тем не менее, уравнения (3.5.2) удобнее для численного решения, чем исходные уравнения, так как все переменные имеют скорость изменения одного порядка. Это значительно ускоряет численное моделирование, а первый интеграл может использоваться для контроля точности. Скорость уменьшения угла ρ будем снова рассматривать как меру быстродействия алгоритма. Рис. 3.5.1 показывает падение величины этого угла для различных наклонений и начальных значений угла θ .

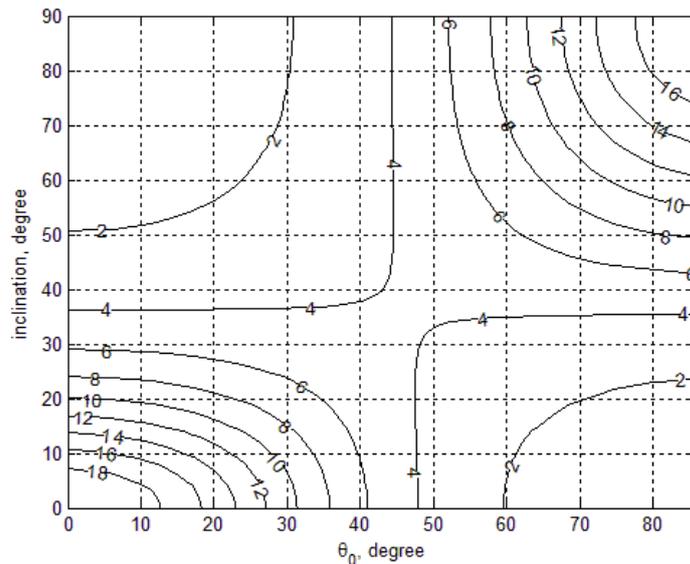


Рис. 3.5.1. Угол ρ через 10 витков, $\rho_0 = 20^\circ$

Время расчета и начальное значение угла ρ те же, что были выбраны при анализе первого алгоритма грубой переориентации. Это позволяет сравнить их

работу. Как видно из рис. 3.5.1, при $\theta_0 > 45^\circ$ низкое наклонение орбиты предпочтительно. Все другие алгоритмы показывают большее быстроедействие при высоких наклонениях, так что высокое быстроедействие этого алгоритма на приэкваториальной орбите при значительной величине нутационных колебаний не представляет интереса. В случае высокого наклонения для работы алгоритма предпочтительна ситуация $\theta_0 < 45^\circ$, при этом быстроедействие оказывается выше, чем у первого алгоритма грубой переориентации. Поэтому если спутник изначально “далек” от вращающегося вокруг оси симметрии ($\theta_0 > 45^\circ$), желательно использовать алгоритм (3.4.1). По мере гашения нутационных колебаний следует переключиться на алгоритм (3.5.1).

В отличие от первого алгоритма грубой переориентации, алгоритм (3.5.1) приводит к гашению нутационных колебаний. Это отражено на рис. 3.5.2.

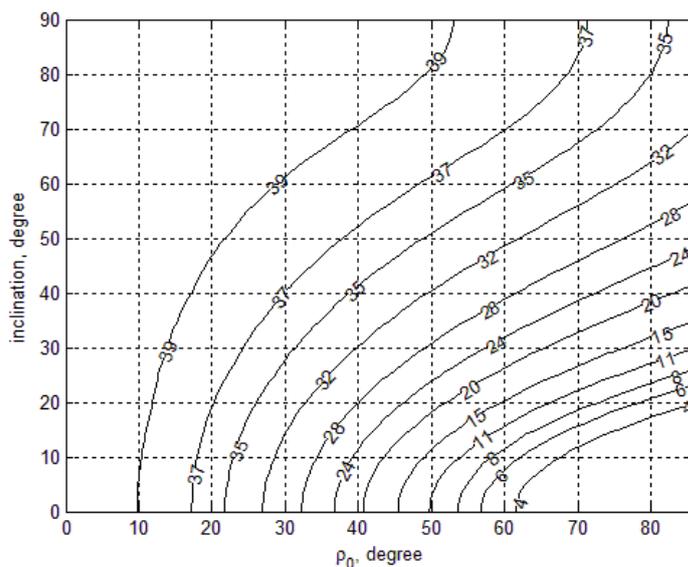


Рис. 3.5.2. Угол θ через 10 витков, $\theta_0 = 40^\circ$

На рис. 3.5.2 представлена величина угла θ через 10 витков. Видно, что для высоких наклонений эффект гашения нутационных колебаний пренебрежимо мал. Гашение нутационных колебаний алгоритмом (3.5.1) следует принимать во внимание только на околоэкваториальных орбитах при большом угле между вектором кинетического момента и требуемым направлением в инерциальном пространстве. Этот выделенный случай обычно

не представляет интереса, так как конечное положение вектора кинетического момента соответствует его совпадению с требуемым направлением в инерциальном пространстве. На основе рассмотренных алгоритмов можно предложить схему управления как для приэкваториальной орбиты, так и для орбиты с умеренным и высоким наклонением (Таблица 3.5.1).

Низкое наклонение	Второй алгоритм предварительной переориентации + гашение нутационных колебаний → раскрутка → переориентация
Умеренное, высокое наклонение	Первый алгоритм предварительной переориентации + гашение нутационных колебаний → гашение нутационных колебаний → раскрутка → переориентация

Таблица 3.5.1. Схема управления

Рассмотренная схема переориентации спутника без начального гашения нутационных колебаний и закрутки опубликована в [62].

3.6. Численное моделирование

Проведем численное моделирование, позволяющее сравнить работу стандартной (гашение нутационных колебаний – раскрутка – переориентация) и предложенной в работе (гашение нутационных колебаний и предварительная переориентация – раскрутка – переориентация) схемы переориентации, а также оценить достижимую точность ориентации. При моделировании учитывались следующие факторы.

- Гравитационное поле
- Несимметричность тензора инерции. Использовался тензор инерции

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.49 & 0.054 & 0.0442 \\ 0.054 & 1.51 & 0 \\ 0.0442 & 0 & 1.56 \end{pmatrix} \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

Относящийся к аппарату UniSat-5, разрабатываемому в GAUSS Srl. Чтобы подчеркнуть малый вклад недиагональности, тензор инерции можно переписать в виде

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.56 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 5.4 & 4.42 \\ 5.4 & 1 & 0 \\ 4.42 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

где $\mu = 0.01$. Масса аппарата – около 30 кг.

- Аэродинамический момент.

Орбита спутника – эллиптическая (перицентр около 300 км, апоцентр – 450 км), наклонение – 50° , модель геомагнитного поля – IGRF. В этом случае все возмущения создают механический момент примерно на порядок меньше, чем управляющий (дипольный момент катушек – $1 \text{ А}\cdot\text{м}^2$). Начальные данные:

- ошибка ориентации оси симметрии 19.6° ;
- угловые скорости $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 6^\circ / \text{с}$, требуемая скорость закрутки $\omega_3 = 10^\circ / \text{с}$;
- коэффициенты усиления $k_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 / \text{Тл}\cdot\text{с}$, $k_4 = k_5 = 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 / \text{Тл}\cdot\text{с}^2$, $k_3 = 5 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 / \text{Тл}\cdot\text{с}^2$.

На рис. 3.5.3 и рис. 3.5.4 представлены результаты моделирования для стандартной и предложенной в работе схем управления.

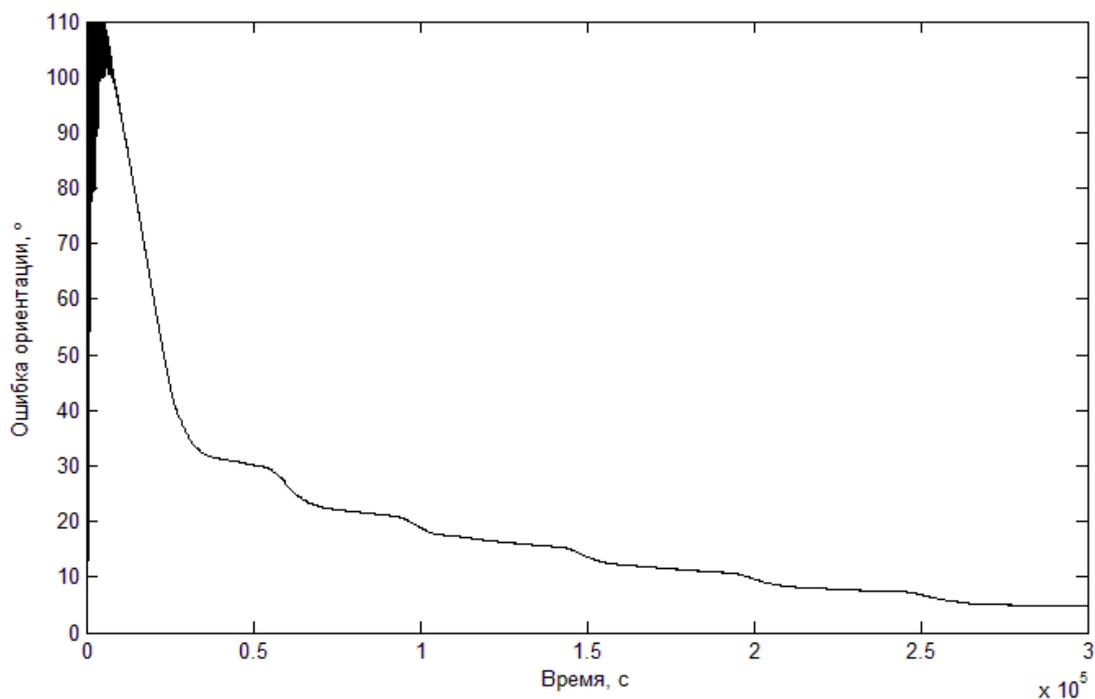


Рис. 3.5.3. Стандартная схема переориентации

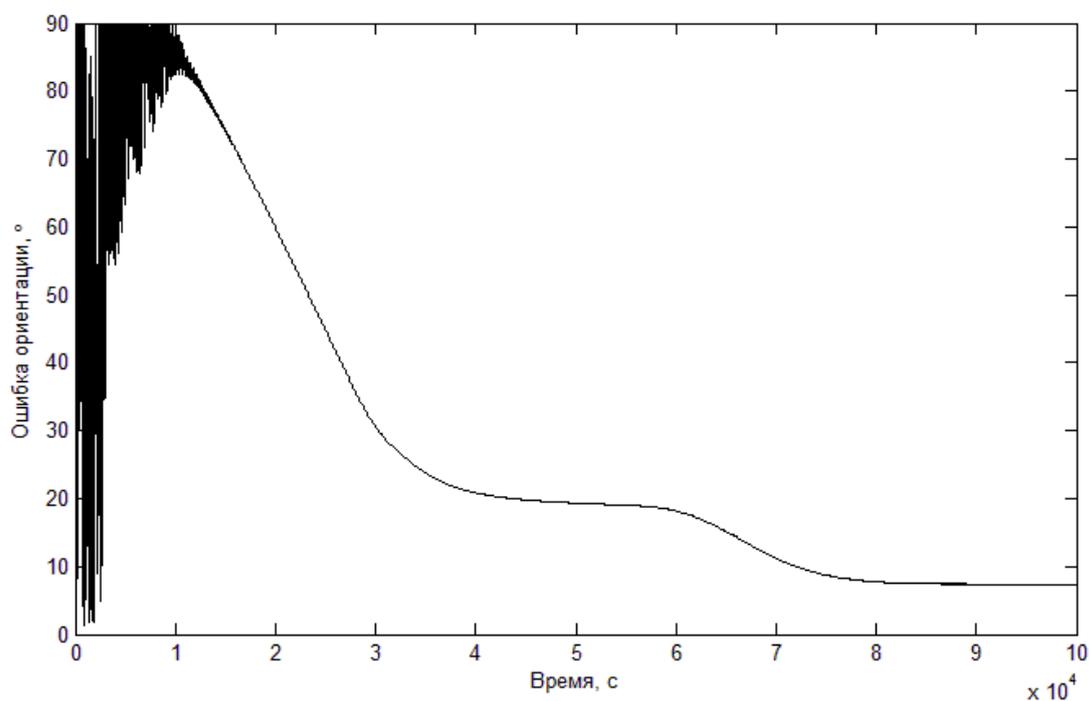


Рис. 3.5.4. Схема переориентации с предварительным алгоритмом

Из рис. 3.5.3 и рис. 3.5.4 видно, что в предложенной схеме переориентации время, требуемое для ее достижения с некоторой точностью, меньше, чем в стандартной схеме. После завершения работы алгоритмов гашения нутационных колебаний и раскрутки вокруг оси симметрии, начальная ошибка

ориентации без предварительного успокоения составляет около 106° , тогда как при использовании предварительного алгоритма переориентации эта ошибка составляет около 85° . Фактически, на последнем этапе необходимо парировать меньшее рассогласование по углу ориентации, за счет чего возникает выигрыш в быстродействии всей схемы. Достижимая точность ориентации – несколько градусов.

Таким образом, получена зависимость быстродействия пяти алгоритмов ориентации спутника, стабилизируемого собственным вращением, от наклона орбиты. В некоторых случаях может быть выгоднее иметь орбиту с низким наклоном. Однако, представляются предпочтительными орбиты с высоким наклоном, так как для них нет опасности необоснованно низкого быстродействия, а для части алгоритмов быстродействие заведомо выше, чем для орбит с низким наклоном. Показан выигрыш предложенной схемы управления по сравнению со стандартной.

Исследование алгоритмов (3.4.1) и (3.5.1) опубликовано в [62] и [63].

Глава 4. Трехосная магнитная ориентация спутника в инерциальном пространстве

В главе рассматривается задача обеспечения трехосной ориентации спутника в инерциальном пространстве. Предложенный алгоритм планируется использовать на аппаратах «TabletSat».

4.1. Конструирование алгоритма ориентации

Рассмотрим модельную задачу движения твердого тела вокруг неподвижной оси под действием механического момента. Поворот тела относительно некоторого заданного положения описывается углом φ , уравнения движения такого тела

$$\ddot{\varphi} = M.$$

Необходимо найти механический момент, обеспечивающий асимптотическую устойчивость положения $\varphi = 0$. Чтобы сделать это, используем следующую цепь рассуждений. Используем невязку

$$\Delta = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi),$$

описывающую отклонение тела от требуемого положения и его скорость. Будем искать управление, обеспечивающее стремление этой невязки к нулю, что будет соответствовать требуемой ориентации. Выделим в ней позиционную и дифференциальную части Δ_2 и Δ_1 и найдем их вариации:

$$\delta\Delta_1 = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\delta t, \quad \delta\Delta_2 = \sin \varphi \dot{\varphi} \delta t.$$

Дифференциальная часть невязки может быть минимизирована, так как ее вариация содержит $\ddot{\varphi}$. Фактически, это означает, что ее величиной можно управлять. Для второй невязки это неверно. Поэтому выпишем разложение невязки в ряд по степеням приращения времени,

$$\Delta(t + \delta t) = \Delta(t) + \frac{d\Delta(t)}{dt} \delta t + \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2} \delta t^2 + \dots$$

Заметим теперь, что за счет минимизации невязки Δ_1 первая вариация невязки Δ_2 стремится к нулю, что позволяет переписать последнее выражение в виде

$$\Delta(t + \delta t) - \Delta(t) = \delta\Delta_1 + \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2}\delta t^2 + \dots$$

Поэтому для учета второй части невязки приходится рассматривать ее вторую вариацию,

$$\delta^2\Delta_2 = \frac{1}{2}(\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi})\delta t^2.$$

Первое слагаемое второй невязки снова мало. В результате на поведение невязки Δ_2 начиная с какого-то момента, когда $\dot{\varphi}$ уже мало, влияние оказывает в основном выражение $\sin\varphi\ddot{\varphi}$, которым можно управлять:

$$\Delta(t + \delta t) - \Delta(t) = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\delta t + \frac{1}{2}\sin\varphi\ddot{\varphi}\delta t^2 + \dots$$

В результате для минимизации невязки Δ механический момент должен подбираться, исходя из одновременно выполняемых условий

$$\dot{\varphi}M < 0, \quad \sin\varphi M < 0. \quad (4.1.1)$$

Момент выберем как сумму моментов, удовлетворяющих каждый одному из этих условий,

$$M = -k_a \sin\varphi - k_\omega \dot{\varphi},$$

где k_a и k_ω – положительные коэффициенты. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\varphi} + k_\omega \dot{\varphi} + k_a \sin\varphi = 0 \quad (4.1.2)$$

и представляют собой уравнения затухающих колебаний.

Перенесем теперь эти рассуждения на случай твердого тела, вращающегося вокруг центра масс. Для компонент невязки имеем

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\left[(d_{11} - 1)^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2 + d_{21}^2 + (d_{22} - 1)^2 + d_{23}^2 + d_{31}^2 + d_{32}^2 + (d_{33} - 1)^2\right].$$

Нетрудно показать, что

$$\Delta_2 = 3 - d_{11} - d_{22} - d_{33}.$$

Уравнения движения будем использовать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}_{\text{упр}} - \mathbf{M}_{\text{гир}} = \mathbf{M}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{D}\mathbf{W}, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \delta\Delta_1 = \sum \omega_i \dot{\omega}_i \delta t = \boldsymbol{\omega} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} \delta t.$$

Первая часть невязки снова оказывается управляемой. Для второй - позиционной - части невязки, имеем

$$\delta\Delta_2 = -\sum \dot{d}_{ii} \delta t = \left[\omega_1 (d_{23} - d_{32}) + \omega_2 (d_{31} - d_{13}) + \omega_3 (d_{12} - d_{21}) \right] \delta t.$$

Вводя вектор $\mathbf{S} = (d_{23} - d_{32}, d_{31} - d_{13}, d_{12} - d_{21})^T$, перепишем последнее выражение в виде $\delta\Delta_2 = \boldsymbol{\omega} \mathbf{S} \delta t$.

Вторая часть невязки не может быть минимизирована напрямую, однако мы можем воспользоваться рассуждениями, примененными для модельной задачи и считать, что за счет минимизации Δ_1 угловая скорость падает, а потому следует рассмотреть вторую вариацию второй компоненты невязки,

$$\delta^2 \Delta_2 = (\mathbf{S} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} + \dot{\mathbf{S}} \boldsymbol{\omega}) \delta t^2.$$

Снова отбрасываем слагаемое, содержащее угловую скорость, и для минимизации невязки Δ получаем условия

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} < 0, \quad \mathbf{S} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} < 0, \tag{4.1.4}$$

аналогичные (4.1.1). Опять обращаемся к возможности демпфирования угловой скорости и в механическом моменте \mathbf{M} отбрасываем гироскопическую компоненту, опускаем также «весовую» матрицу \mathbf{J}^{-1} . Наконец, принимая во внимание, что $\mathbf{M}_{\text{упр}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ и делая циклическую перестановку в (4.1.4), получаем

$$\mathbf{m}(\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}) < 0, \quad \mathbf{m}(\mathbf{B} \times \mathbf{S}) < 0,$$

что приводит, по аналогии с модельной задачей, к дипольному управляющему моменту

$$\mathbf{m} = -k_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}. \quad (4.1.5)$$

Отметим, что построение закона управления (4.1.5) имеет аналогии с построением ПД-регулятора. В этом случае управление можно построить следующим образом. Используем функцию – кандидат в функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + k_a \sum_{i=1}^3 (1 - d_{ii}).$$

Очевидно, положению равновесия соответствует $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{D} = \text{diag}(1,1,1)$, то есть совпадение осей инерциальной и связанной систем. Найдем производную этой функции

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}) - k_a \sum_{i=1}^3 \dot{d}_{ii}.$$

Несложно видеть, что производная V в силу уравнений движения (4.1.3) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{M}_{\text{упр}} + \mathbf{M}_{\text{зур}} + k_a \mathbf{S}). \quad (4.1.6)$$

Потребуем отрицательность производной функции везде кроме положения равновесия, $\frac{dV}{dt} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Отсюда имеем

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega},$$

так как $\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_{\text{зур}} = 0$. В результате получаем выражение для управляющего момента

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{S}. \quad (4.1.7)$$

Выражение (4.1.7) имеет ту же структуру, что и (4.1.5), однако задает механический, а не дипольный момент. Стандартная схема получения дипольного момента на основе (4.1.7) – реализация только перпендикулярной локальному вектору геомагнитной индукции компоненты. То есть, вместо

управляющего момента, определяемого выражением (4.1.7), используется момент

$$\mathbf{M}'_{упр} = (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{B}_0,$$

где вектор геомагнитной индукции имеет единичную длину (направление вектора геомагнитной индукции). Подставляя дипольный момент (4.1.5) в выражение для производной кандидата в функцию Ляпунова, можно получить выражение

$$\frac{dV}{dt} = -k_\omega (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_0)^2 + k_a |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{S}| \cos(\mathbf{B}_0, \boldsymbol{\omega}) \cos(\mathbf{B}_0, \mathbf{S}),$$

которое можно использовать для определения, когда следует применять управление – второе слагаемое должно быть отрицательным. Численное моделирование, однако, показало, что при таком подходе не наблюдается выигрыша в быстродействии алгоритма по сравнению с его непрерывной реализацией, поэтому введение дополнительных условий в алгоритм управления представляется нецелесообразным.

Рассуждения, приведенные при выводе дипольного момента (4.1.5) и рассуждения, касающиеся аналогии такого управления с ПД-регулятором, не могут рассматриваться как строгое обоснование работоспособности алгоритма. Покажем теперь, что предложенный закон управления, тем не менее, позволяет добиться трехосной ориентации спутника в инерциальном пространстве и найдем ограничения, позволяющие его реализовать.

4.2. Исследование переходных процессов

Перейдем к аналитическому исследованию динамики спутника под управлением магнитной системы ориентации, реализующей закон управления (4.1.5). Получить аналитические результаты в общем случае движения аппарата представляется затруднительным, поэтому выделим несколько режимов движения и основных допущений, которые позволят получить представление о работе алгоритма (4.1.5) на всем цикле управления.

Во-первых, рассмотрим быстрое вращение аппарата. Перепишем закон управления (4.1.5) в виде

$$\mathbf{m} = -k'_\omega \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega} - k'_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}, \quad (4.2.1)$$

где $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{\Omega}$. Вектор геомагнитной индукции здесь и далее считаем единичным (его величина постоянна в рамках осредненной модели). Предположим теперь, что коэффициенты k'_ω и k'_a имеют один порядок (их безразмерное отношение имеет порядок единицы, размерность обоих коэффициентов Н·м/Тл²). Вопрос наилучшего выбора этих коэффициентов будет рассмотрен далее. При таких предположениях при быстрых вращениях демпфирующая компонента момента превалирует над позиционной, так как $|\boldsymbol{\Omega}| \gg 1$. Момент тогда приближенно можно представить в виде

$$\mathbf{m} = -k'_\omega \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Однако в этом случае имеем дело с движением аппарата под управлением известного алгоритма «-Vdot». Динамика спутника в этом случае и работа алгоритма были ранее рассмотрены во второй главе. Перейдем поэтому к следующему выделенному этапу движения аппарата.

Основываясь на результатах, полученных во второй главе, можно утверждать гашение угловой скорости аппарата до величины порядка орбитальной ($|\boldsymbol{\Omega}| = O(1)$). В этом случае пренебрегать позиционной частью механического момента будет некорректно. Поэтому рассмотрим движение спутника с законом управления (4.1.5), но будем предполагать, что создаваемый при этом механический момент мал в том смысле, что изменение кинетического момента (как величины, так и направления) за оборот спутника по орбите и оборот вокруг центра масс мало по сравнению с его значением. В этом случае можно провести рассуждения, аналогичные проведенным во второй главе.

Для исследования динамики спутника будем использовать уравнения Белецкого-Черноуьско, а сам спутник будем считать осесимметричным. Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль

порождающего решения. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u,\varphi,\psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$. Однако момент представляет собой сумму позиционной и демпфирующей компонент. Результат осреднения демпфирующей компоненты был получен во второй главе. Покажем, что позиционная компонента не оказывает эволюционного влияния на демпфирование угловой скорости аппарата, то есть

$$\langle (\mathbf{S} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{\psi,\varphi} = 0.$$

Очевидно, $\mathbf{S}_L = \mathbf{A}\mathbf{S}_x$, причем матрица перехода между инерциальной и связанной системой задается выражением $\mathbf{D} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T$. Это приводит к усреднению выражений вида $a_{ij}a_{kl}$ по быстрым углам ψ и φ . Для первой компоненты \mathbf{S}_L имеем

$$\begin{aligned} S_{1L} = & a_{11}a_{12}q_{31} + a_{11}a_{22}q_{32} + a_{11}a_{32}q_{33} - a_{11}a_{13}q_{21} - a_{11}a_{23}q_{22} - a_{11}a_{33}q_{23} + \\ & + a_{12}a_{13}q_{11} + a_{12}a_{23}q_{12} + a_{12}a_{33}q_{13} - a_{12}a_{11}q_{31} - a_{12}a_{21}q_{32} - a_{12}a_{31}q_{33} + \\ & + a_{13}a_{11}q_{21} + a_{13}a_{21}q_{22} + a_{13}a_{31}q_{23} - a_{13}a_{12}q_{11} - a_{13}a_{22}q_{12} - a_{13}a_{32}q_{13}. \end{aligned}$$

Группируя члены при q_{ij} , получаем

$$\begin{aligned} S_{1L} = & q_{32}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + q_{33}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + q_{22}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + \\ & + q_{23}(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + q_{12}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + q_{13}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}). \end{aligned}$$

Учитывая выражения для a_{ij} (1.3.2) и для q_{ij} (1.3.1), после усреднения по ψ получаем $\langle S_{1L} \rangle_{\psi} = q_{12} \sin \varphi \sin \theta$ и окончательно $\langle S_{1L} \rangle_{\psi,\varphi} = 0$. Аналогичные выкладки нетрудно провести для S_{2L} и S_{3L} .

В результате получаем нулевое эволюционное влияние позиционной части механического момента, то есть он не оказывает воздействия на демпфирование угловой скорости. Это позволяет перейти к следующему режиму движения спутника и исследованию устойчивости.

4.3. Исследование устойчивости

В предыдущем разделе было показано, что закон управления (4.1.5) приводит к демпфированию угловой скорости спутника, при этом величина эго кинетического момента стремится к нулю по экспоненциальному закону [17], [51]. Коэффициенты k'_o и k'_a теперь могут быть разного порядка, $|\mathbf{\Omega}| = o(1)$, а спутник обладает трехосным тензором инерции. Запишем уравнения движения (1.3.6) в безразмерном виде, перейдя к дифференцированию по аргументу широты и безразмерному моменту,

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{du} &= \frac{(B-C)}{A} \Omega_2 \Omega_3 + \varepsilon_1 \overline{M}_{1x}, \\ \frac{d\Omega_2}{du} &= -\frac{(A-C)}{B} \Omega_1 \Omega_3 + \varepsilon_1 \frac{A}{B} \overline{M}_{2x}, \\ \frac{d\Omega_3}{du} &= -\frac{(B-A)}{C} \Omega_1 \Omega_2 + \varepsilon_1 \frac{A}{C} \overline{M}_{3x}, \\ \frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\Omega_3 \sin \gamma + \Omega_2 \cos \gamma), \\ \frac{d\beta}{du} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{du} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{k'_a B_0^2}{A}$ – малый параметр. Для того чтобы сделать уравнения (4.3.1)

удобными для анализа методами осреднения, приведем все переменные к одному порядку величины (углы имеют порядок единицы, тогда как угловые скорости малы), введя соотношение $\mathbf{\Omega} = \varepsilon_2 \mathbf{w}$, где $\varepsilon_2 = |\mathbf{\Omega}(0)|$. Далее, вводя

вектор $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2, w_3)$, запишем уравнения (4.3.1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_2 \mathbf{X}(\mathbf{x}, u, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu). \tag{4.3.2}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \beta} (-w_3 \sin \gamma + w_2 \cos \gamma) \\ w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma \\ w_1 - \operatorname{tg} \beta (w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma) \\ \frac{(B-C)}{A} w_2 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \overline{M}_{1x} \\ -\frac{(A-C)}{B} w_1 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{B} \overline{M}_{2x} \\ -\frac{(B-A)}{C} w_1 w_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{C} \overline{M}_{3x} \end{pmatrix}.$$

Предположим пока, что $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} = \kappa = O(1)$. Вид уравнения (4.3.2) позволяет

использовать для его анализа формальную процедуру усреднения по явно входящему аргументу широты [64]. Однако в силу того, что усредненные уравнения затем линеаризуются для исследования устойчивости, целесообразно сначала провести линеаризацию, и только потом проводить усреднение.

Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{du} &= \varepsilon_2 \kappa \left(-(B_2^2 + B_3^2) \chi w_1 + B_1 B_2 \chi w_2 + B_1 B_3 \chi w_3 + \right. \\ &\left. + 2B_1 B_2 \alpha + 2B_1 B_3 \beta - 2(B_2^2 + B_3^2) \gamma \right), \\ \frac{dw_2}{du} &= \varepsilon_2 \kappa \frac{A}{B} \left(B_1 B_2 \chi w_1 - (B_1^2 + B_3^2) \chi w_2 + B_2 B_3 \chi w_3 - \right. \\ &\left. - 2(B_1^2 + B_3^2) \alpha + 2B_2 B_3 \beta + 2B_1 B_2 \gamma \right), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_3}{du} &= \varepsilon_2 \kappa \frac{A}{C} \left(B_1 B_3 \chi w_1 + B_2 B_3 \chi w_2 - (B_1^2 + B_2^2) \chi w_3 + \right. \\ &\left. + 2B_2 B_3 \alpha - 2(B_1^2 + B_2^2) \beta + 2B_1 B_3 \gamma \right), \end{aligned}$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \varepsilon_2 w_2, \quad \frac{d\beta}{du} = \varepsilon_2 w_3, \quad \frac{d\gamma}{du} = \varepsilon_2 w_1,$$

где $\chi = k'_\omega / k'_a$. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\ddot{\gamma} + \varepsilon_1 \chi (p+q) \dot{\gamma} + 2\varepsilon_1 (p+q) \gamma = 0,$$

$$\ddot{\alpha} + \varepsilon_1 \chi (p+q) \frac{A}{B} \dot{\alpha} + 2\varepsilon_1 (p+q) \frac{A}{B} \alpha = 0, \quad (4.3.4)$$

$$\ddot{\beta} + 2\varepsilon_1 \chi p \frac{A}{C} \dot{\beta} + 4\varepsilon_1 p \frac{A}{C} \beta = 0.$$

где $p = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta$, $q = \cos^2 \Theta$. Решение уравнений (4.3.4) приводит по каждому углу к затухающим колебаниям. Таким образом, по каждому углу получаем линеаризованные уравнения модельной задачи (4.1.2). Из (4.3.4) видно, что если k_a мало (χ велико), то степень устойчивости уменьшается – один из корней характеристического уравнения приближается к мнимой оси. Аналогично, если k_ω мало (χ мало), то степень устойчивости мала – оба корня близки к мнимой оси. Выпишем корни характеристического многочлена для всех трех уравнений,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 \chi (p+q) \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \chi^2 (p+q)^2 - 8\varepsilon_1 (p+q)} \right),$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 \chi (p+q) \frac{A}{B} \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \chi^2 (p+q)^2 \left(\frac{A}{B} \right)^2 - 8\varepsilon_1 (p+q) \frac{A}{B}} \right),$$

$$\lambda_{5,6} = -\varepsilon_1 \chi p \frac{A}{C} \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \chi^2 p^2 \left(\frac{A}{C} \right)^2 - 4\varepsilon_1 p \frac{A}{C}}.$$

Введем параметры

$$\theta_1 = B/A, \quad \theta_2 = C(p+q)/2pA$$

и новые коэффициенты усиления при помощи выражений

$$K_\omega = \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p+q) k'_\omega, \quad K_a = \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p+q) k'_a.$$

Тогда, учитывая выражения для ε_1 и χ , корни характеристического многочлена можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-K_\omega \pm \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a} \right) \\
\lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{K_\omega}{\theta_1} \pm \frac{1}{\theta_1^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a} \right) \\
\lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{K_\omega}{\theta_2} \pm \frac{1}{\theta_2^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Выберем моменты инерции аппарата так, чтобы $C > B > A$. В этом случае $\theta_1 > 1$. Рассмотрим далее три варианта.

I. $\theta_2 > \theta_1 > 1$. Этот случай имеет место для орбит с низким наклоном, когда q велико, а p мало. Коэффициенты усиления могут попасть в одну из трех областей.

1. $8K_a > K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения в (4.3.5) отрицательны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \min \left(\frac{1}{2} K_\omega, \frac{1}{2\theta_1} K_\omega, \frac{1}{2\theta_2} K_\omega \right).$$

Отсюда в силу условия, задаваемого случаем I, получаем

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_2} K_\omega.$$

2. $8\theta_2 K_a < K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \frac{1}{2} \min \left(K_\omega - \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a}, \frac{K_\omega}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_1^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a}, \frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2^2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right).$$

Можно показать, что

$$\xi_2 = K_\omega - \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a}.$$

3. $8K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$. В этом случае одно или два подкоренных выражения в (4.3.5) положительны, и степень устойчивости может быть равна либо ξ_1 , либо ξ_2 .

Однако, наибольший интерес представляет случай, когда $\xi_1 = \xi_2$, что дает

$$K_{\omega}^2 = \frac{8\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} K_a,$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$k'_a = \frac{2\theta_2 - 1}{8\theta_2^2} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k'_{\omega}{}^2. \quad (4.3.6)$$

На рис. 4.3.1 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(1, 2, 1.5)$ кг·м², находящегося на орбите наклонением 30° и высотой 350 км и парабола (4.3.6).

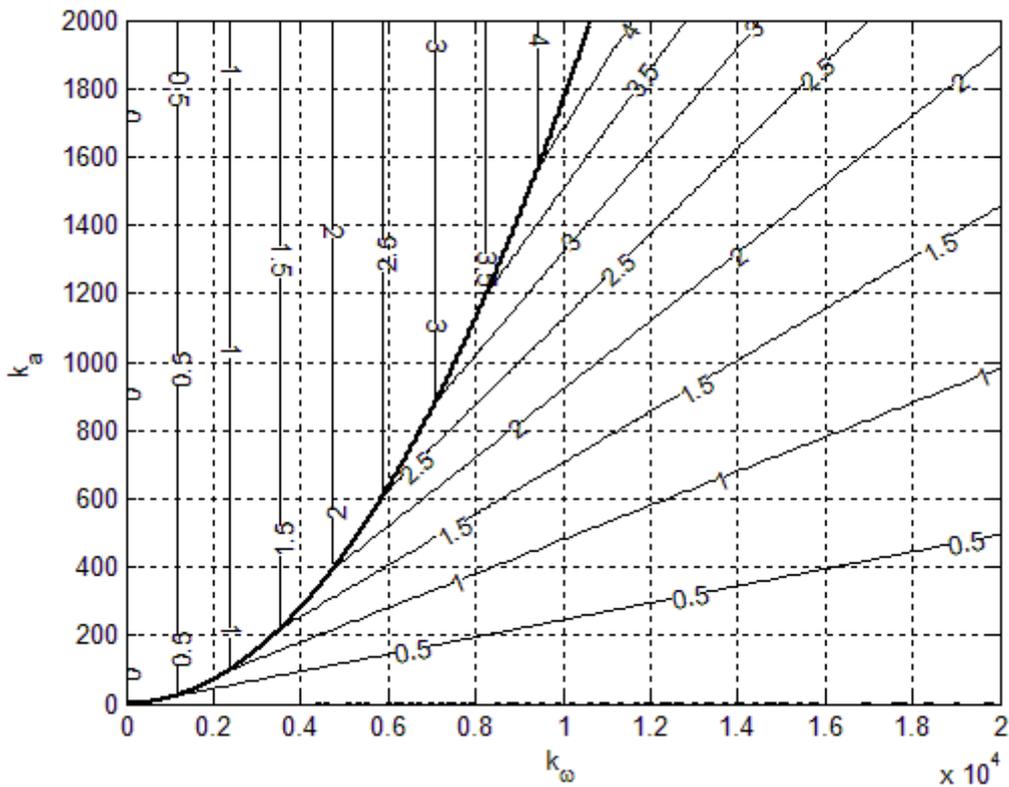


Рис. 4.3.1. Выбор оптимальных коэффициентов усиления.

Рис. 4.3.1 раскрывает смысл параболы (4.3.6) – она указывает на оптимальное соотношение параметров k'_a и k'_{ω} . Выбирая значения коэффициентов на параболе и задаваясь ограничением на величину дипольного момента катушек, можно определить степень устойчивости. Перейдем к рассмотрению других вариантов.

II. $\theta_1 > \theta_2 > 1$. В этом случае рассуждения, очевидно, принципиально не изменятся, оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{2\theta_1 - 1}{8\theta_1^2} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k'_\omega{}^2 \quad (4.3.7)$$

III. $\theta_1 > 1 > \theta_2$. Такое соотношение верно для орбит с высоким наклонением.

Проведем рассуждения, аналогичные варианту I.

1. $8\theta_2 K_a > K_\omega^2$. Все подкоренные выражения в (4.3.5) отрицательны, степень устойчивости

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_1} K_\omega.$$

2. $8\theta_1 K_a < K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости

$$\xi_2 = \frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a}.$$

3. $8\theta_1 K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$. В этом случае одно или два подкоренных выражения в (4.3.5) положительны, и степень устойчивости может быть равна либо ξ_1 , либо ξ_2 . Оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{1}{8\theta_1} \left(2 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k'_\omega{}^2. \quad (4.3.8)$$

На рис. 4.3.2 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тем же тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(1, 2, 1.5)$ кг·м², но находящегося на орбите наклонением 70°.

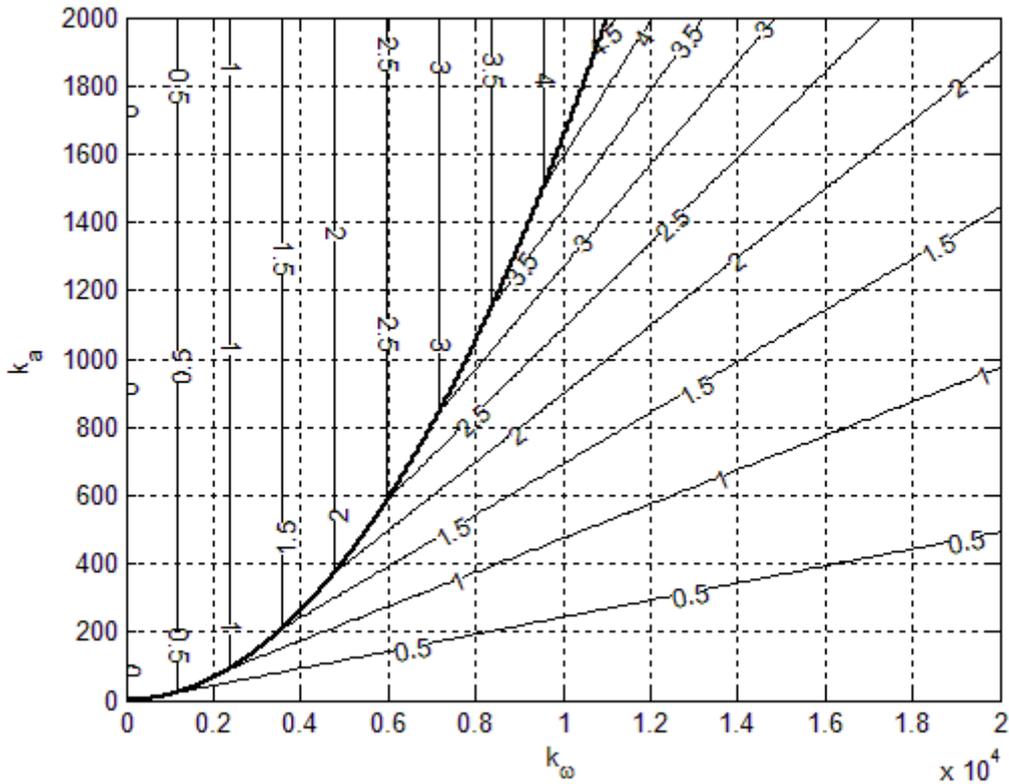


Рис. 4.3.2. Оптимальная парабола для орбиты с высоким наклонением.

Рис. 4.3.1 и рис. 4.3.2 схожи, из них видно, что на орбитах с высоким наклонением следует несколько увеличить долю демпфирующей компоненты в управлении. В целом, соотношения (4.3.6) и (4.3.8) позволяют в зависимости от тензора инерции аппарата и наклонения его орбиты выбирать оптимальные коэффициенты усиления.

Вернемся теперь к уравнениям (4.3.2). Приведенные выше рассуждения касались случая $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} = \kappa = O(1)$. Предположим теперь, что это соотношение не выполняется, вместо него имеет место $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^n$, причем n может быть как больше 2, так и меньше. Обозначая $\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \gamma)$, запишем уравнения (4.3.2) в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \varepsilon_2 \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon_2^{n-1} \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}),$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon_2 \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}).$$

Если $n > 2$, то уравнения, полученные формальным усреднением, верны с точностью ε_2 на интервале времени $u \sim 1/\varepsilon_2$, если же $n < 2$, то усреднение верно на интервале времени $u \sim 1/\varepsilon_2^{n-1}$. В первом случае на характерном интервале времени успевают заметно (на величину порядка 1) измениться только углы (в силу незначительного влияния управляющего момента), во втором случае – только скорости. При $n = 2$ углы и скорости меняются одинаково, что и было рассмотрено выше. Однако усреднение можно провести в любом случае, и полученная система имеет положение равновесия и оказывается асимптотически устойчивой. Тогда [65] для исходной системы существует предельный цикл (также асимптотически устойчивый), и ее движение не отклоняется от положения равновесия усредненной системы более, чем на ε_2^k , где $k = \min(1, n-1)$. Но это позволяет использовать формальное усреднение на бесконечном интервале времени и распространить полученный выше результат на любое значение n .

4.4. Численное моделирование

Полученные в предыдущем разделе результаты верны, если параметры k'_a и k'_ω невелики и соизмеримы. В результате удается показать асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия и найти оптимальное соотношение между параметрами управления за счет простых формул (4.3.6), (4.3.7) или (4.3.8). Распространим эти результаты на общий случай, пользуясь теорией Флоке [66]. Сначала построим численно изолинии характеристических показателей системы (4.3.3) для тех же параметров системы, которые были использованы при построении рис. 4.3.1.

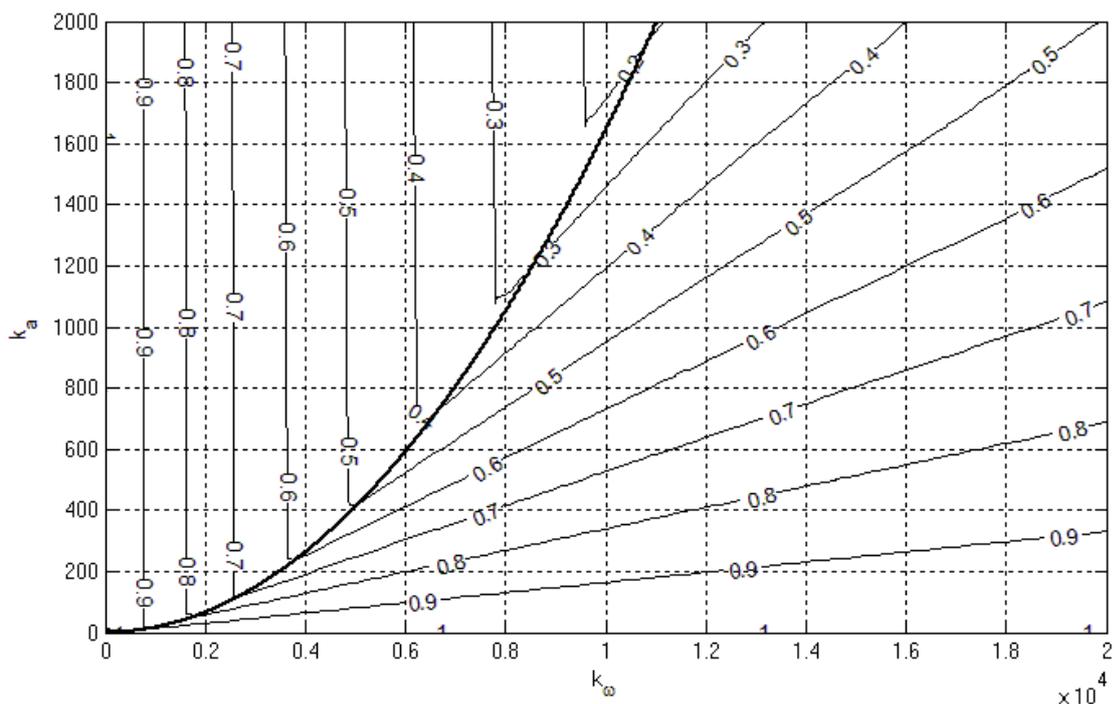


Рис. 4.4.1. Сравнение численных и аналитических результатов

Из рис. 4.4.1 видно, что с увеличением коэффициентов усиления наблюдается все увеличивающееся расхождение численных и аналитических результатов. Это объясняется тем, что по мере роста этих коэффициентов усиливается управляющий механический момент, что противоречит предположению о малом моменте.

На рис. 4.4.2 представлены характеристические показатели для превалирования позиционной части момента.

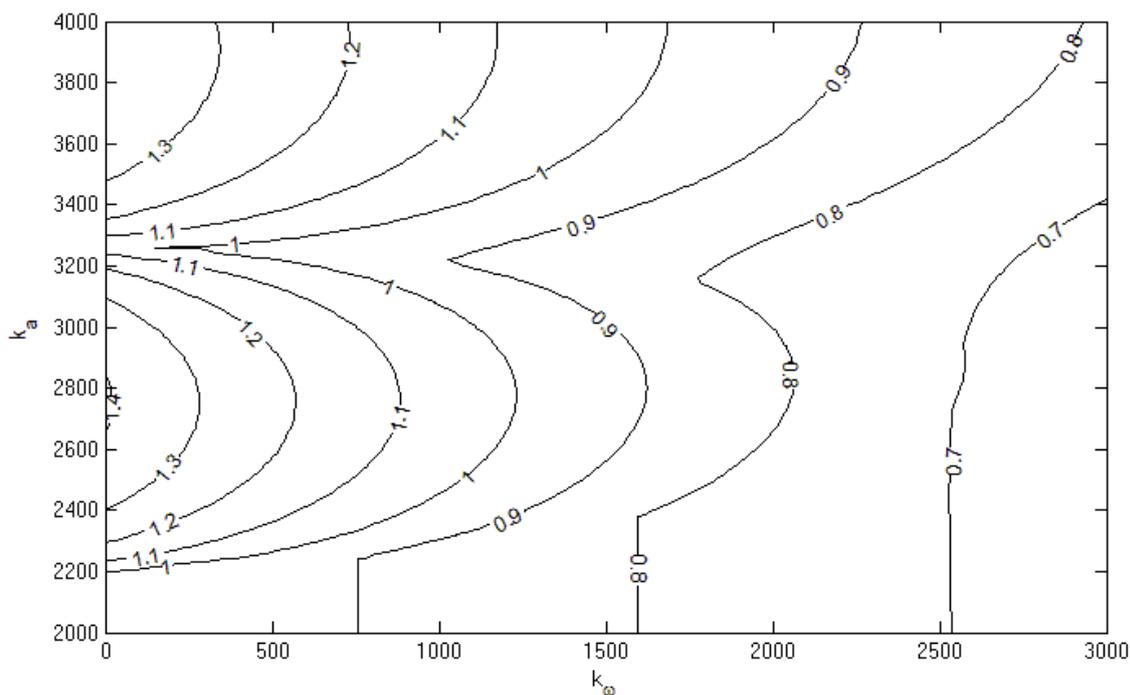


Рис. 4.4.2. Устойчивость при сильном позиционном моменте

Из рис. 4.4.2 видно, что существует область неустойчивости, которой нет в аналитических результатах. Это обусловлено тем, что численно можно рассматривать превалирование одной из компонент момента, тогда как аналитические результаты получены для примерно равных коэффициентов усиления. Неустойчивость вызвана “разбалтыванием” аппарата позиционным моментом: скорость, получаемая им на каждом этапе цикла управления, настолько велика, что демпфирующая компонента момента оказывается неспособна ее парировать. Впрочем, из рис. 4.3.1 также видно, что не следует допускать превалирования одной из компонент момента. Хотя согласно аналитическим результатам устойчивость сохраняется, но степень устойчивости падает. Отметим, что ограничение на величину механического момента имеет важное значение для успешности применения управления (рис. 4.4.2) и не является искусственным ограничением, необходимым для проведения аналитического исследования (введение малого параметра). Это накладывает ограничение на достижимую точность. В частности, для спутника с рассмотренными выше параметрами управляющий механический момент должен быть не более $5 \cdot 10^{-6}$ Нм. Этот момент оказывается лишь в несколько раз

больше возмущающего гравитационного, в результате точность ориентации оказывается немногим лучше 10° . Для спутников других конфигураций, в частности, для Кубсатов, точность может быть выше, до нескольких градусов. Однако для аппарата малой массы величина управляющего момента также должна быть меньше чтобы сохранялось условие малого изменения кинетического момента по сравнению с его величиной. Для разрешения этой проблемы необходима модификация закона управления (4.1.5) – например, введение «весовой» матрицы \mathbf{J}^{-1} или другой или применение переменных коэффициентов усиления (в этом случае с падением рассогласования по скорости и положению величина управляющего момента не будет уменьшаться) [67].

На рис. 4.4.3 приведен результат численного моделирования движения спутника. Коэффициенты усиления выбраны при помощи соотношения (4.3.6) следующими: $k'_\omega = 20$, $k'_a = 1510$. Наклонение орбиты – 70° .

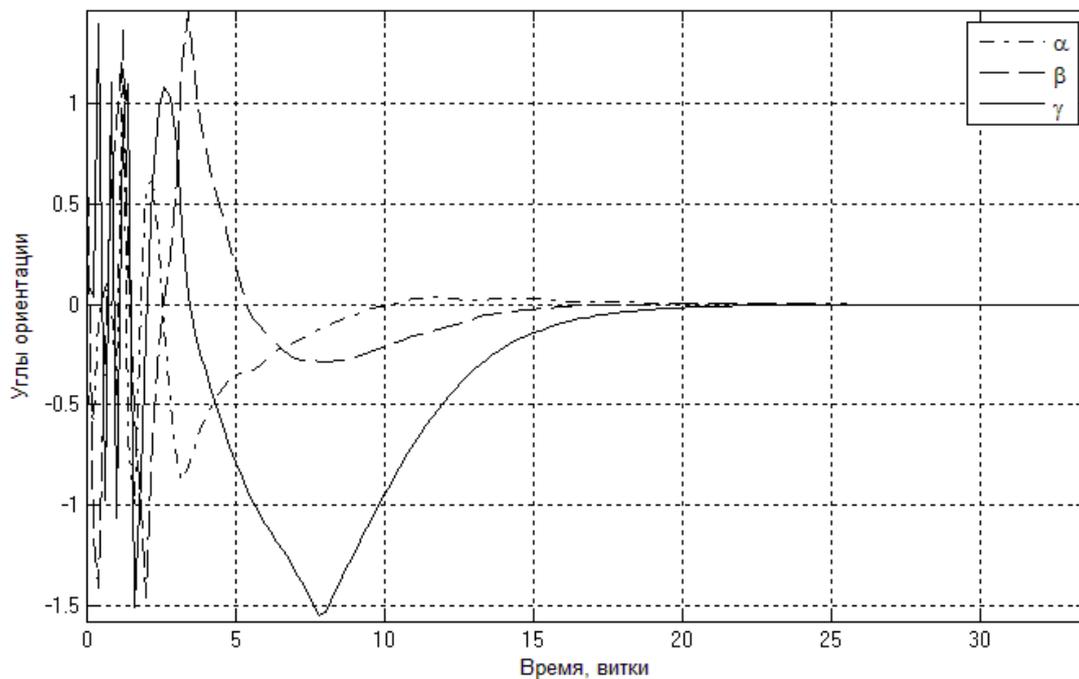


Рис. 4.4.3. Углы ориентации спутника

Таким образом, было аналитически показано демпфирование угловой скорости спутника до нуля, при помощи методов усреднения показана асимптотическая устойчивость требуемой ориентации. Построены кривые

зависимости степени устойчивости от параметров алгоритма, представлен способ выбора оптимальных параметров управления.

Глава 5. Численные, полунатурные и летные испытания алгоритмов

5.1. Численное исследование динамики спутника при использовании различных моделей геомагнитного поля

Сравним динамику спутника при использовании различных моделей геомагнитного поля. Модели, основанные на разложении (IGRF, International Geomagnetic Reference Field и WMM, World Magnetic Model), используются при ресурсоемком численном моделировании и в бортовых машинах крупных спутников. Для определения и формирования ориентации малых спутников данная модель используется крайне редко. Рассмотрим поэтому три последовательных упрощения этой модели, описанные в разделе 1.2.

При учете трех первых слагаемых в разложении потенциала получается модель наклонного диполя. Данная модель описывает поле диполя, наклоненного под углом $168^{\circ}26'$ к оси вращения Земли. Поскольку вклад дипольной части в разложение составляет около 90%, такое допущение вполне оправдано. Оно позволяет учесть два основных эффекта, вызывающих изменение геомагнитного поля в точке нахождения спутника – его движение по орбите и суточное вращение Земли. Не учитываются нерегулярные эффекты, например, пролет спутника над горным массивом с большим содержанием железной руды, что приводит к увеличению индукции геомагнитного поля в этой точке по сравнению с дипольным приближением. Вектор индукции в инерциальной системе координат $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ в модели наклонного диполя задается выражением [15]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin \lambda_2 \sin \delta_1 - 3\xi \cos u \\ -\cos \lambda_2 \sin \delta_1 + 3\xi \cos i \sin u \\ \cos \delta_1 - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}$$

Здесь μ_e – постоянная земного магнетизма, r – радиус-вектор точки, в которой вычисляется индукция. Углы λ_2, δ_1 показывают ориентацию диполя относительно системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$. Угол $\lambda_2 = \omega_E t + \lambda_{20}$, где ω_E – угловая скорость

вращения Земли, показывает вращение диполя относительно $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ вместе с Землей, $\xi = \cos u \sin \delta_1 \sin \lambda_2 - \sin u \cos i \sin \delta_1 \cos \lambda_2 + \sin u \cos \delta_1 \sin i$, $\delta_1 = 11^\circ 34'$, i – наклонение орбиты.

В дальнейшем упрощении – модели прямого диполя – геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. Выражение для вектора геомагнитной индукции в системе $O_a Y_1 Y_2 Y_3$

$$\mathbf{B} = B_{0incl} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \sin i \sin 2u \\ -\frac{3}{2} \sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix}$$

где $B_{0incl} = \frac{\mu_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}$.

Тогда как модель наклонного диполя позволяет учесть как движение спутника по орбите, так и вращение Земли в инерциальном пространстве, модель прямого диполя не учитывает вращения Земли. При этом вектор геомагнитной индукции движется практически равномерно по поверхности почти кругового конуса при движении спутника по орбите. Поэтому вводится дальнейшее упрощение – осредненная модель, в которой вектор геомагнитной индукции движется равномерно по поверхности кругового конуса. Эта модель не позволяет учесть вращение Земли и неравномерность вращения вектора геомагнитной индукции, но значительно упрощает его запись и позволяет во многих случаях найти решение уравнений. В системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ вектор индукции задается простым выражением (2.1.4)

$$\mathbf{B}_Z = B_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $B_{0incl} \neq B_0$. Для сравнения динамики спутника постоянная величина B_0 должна быть приведена в соответствие с переменным модулем

вектора индукции B_{0incl} . Для этого можно использовать простое среднее между минимальным и максимальным значением B_{0incl} , тогда

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i} \right)$$

или интегральное среднее за виток по орбите,

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_e}{2\pi r^3} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2 i \sin^2 u} du$$

В дальнейшем используется интегральное среднее.

Далее приводятся результаты численного моделирования динамики спутника под управлением алгоритма “-Bdot”. При моделировании были приняты следующие параметры:

- Орбита спутника – круговая.
- Тензор инерции спутника $\mathbf{J} = \text{diag}(3.0, 3.1, 3.2)$ кг·м².
- Модуль вектора геомагнитной индукции $B_0 = 2.656 \cdot 10^{-5}$ Тл соответствует радиусу орбиты 6730 км (примерный радиус орбиты МКС).
- Орбитальная скорость $\omega_0 = 0.001$ с⁻¹ также примерно соответствует орбитальной скорости МКС.
- Коэффициент демпфирования $k_1 = 4.5362 \cdot 10^3$ м²·с·А.
- Наклонение $i = 62^\circ$.
- Начальные условия $\rho = \sigma = 0.1$, $\varphi = \psi = \theta = 1$, $L = 1$ (модуль кинетического момента заменяется на безразмерный, то есть отнесенный к начальному значению)

Результаты моделирования переходного процесса приведены на рисунке 5.1.1.

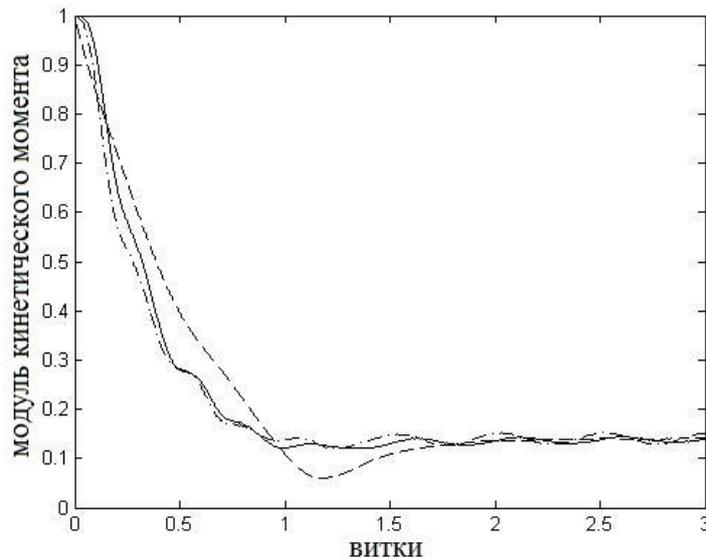


Рис. 5.1.1. Сравнение результатов численного моделирования переходного процесса

На рис. 5.1.1. сплошная линия соответствует модели наклонного диполя, штрихпунктирная – модели прямого диполя, штриховая – осредненной модели. Модели прямого диполя и наклонного диполя показывают хорошее совпадение на всем интервале интегрирования, который составляет 3 витка. Однако, при этом вращение Земли, которое учитывается в модели наклонного диполя, не может дать существенного вклада. Вместе с тем, как видно из рис. 5.1.1., скорость демпфируется до примерно стационарного значения за несколько витков. Поэтому использование модели наклонного диполя в переходном режиме не имеет смысла, достаточно использовать модель прямого диполя. Незначительное расхождение графиков несущественно, так как в переходном режиме наибольший интерес представляет время демпфирования угловой скорости спутника, а не точная зависимость модуля кинетического момента от времени. Рассуждая аналогично, можно заключить, что модель прямого диполя вполне можно заменить осредненной моделью при рассмотрении переходного режима. Как видно из рис. 5.1.1., закон изменения модуля кинетического момента при использовании этих двух моделей заметно отличается. Вместе с тем, время демпфирования практически совпадает (около 2 витков). В случае использования осредненной модели модуль кинетического в течение

некоторого времени (примерно полвитка) меньше стационарного значения, на которое он выходит при использовании всех трех моделей МПЗ. Это происходит оттого, что направления угловой и орбитальной скоростей спутника совпадают. В результате производная вектора геомагнитной индукции в связанной системе координат, складывающаяся из его изменения в инерциальном пространстве (с удвоенной орбитальной скоростью) и вращения связанной системы относительно инерциального пространства (с угловой скоростью спутника), возрастает. Когда это совпадение направлений скоростей нарушается, угловая скорость спутника демпфируется до примерно стационарного значения, как и в случае использования моделей прямого и наклонного диполей. При использовании этих моделей такого эффекта не наблюдается из-за неравномерности вращения вектора геомагнитной индукции. Таким образом, выбор модели МПЗ не оказывает заметного влияния на время переходного процесса.

При рассмотрении установившегося режима выбор модели магнитного поля может иметь значение. На Рис. 5.1.2. представлен модуль кинетического момента спутника в установившемся режиме.

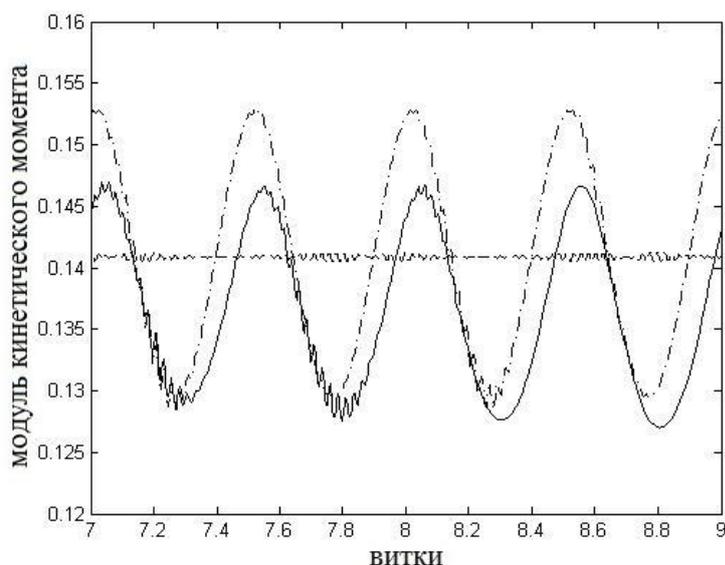


Рис. 5.1.2. Модуль кинетического момента в установившемся режиме

При использовании осредненной модели угловая скорость спутника выходит на стационарное значение, равное удвоенной орбитальной скорости.

Спутник увлекается во вращение вектором геомагнитной индукции, так как других моментов на него не действует. Так как этот вектор вращается равномерно, угловая скорость спутника относительно магнитной системы координат (связанной с вектором геомагнитной индукции) демпфируется практически до нуля. Если же используются модели прямого или наклонного диполя, поведение модуля кинетического момента качественно отличается от описанного выше. Происходят колебания около стационарного значения, соответствующего орбитальной скорости. Спутник также увлекается во вращение вектором геомагнитной индукции, но из-за неравномерности его вращения происходят колебания, заметные на рис. 5.1.1. При этом значение, вокруг которого происходят колебания, немного отличается в случае использования модели наклонного диполя. Это вызвано учетом вращения Земли, поэтому средняя скорость изменения вектора геомагнитной индукции не равна удвоенной орбитальной, как в случае прямого диполя. Таким образом, если необходимо определить средние значения скоростей или углов ориентации, которые будет иметь спутник в стационарном режиме, предпочтительно использовать модель наклонного диполя. Однако, поскольку отличие мало (несколько сотых начального значения кинетического момента), можно использовать модель прямого диполя. Его, в свою очередь, можно заменить полем в осредненной модели. При этом будут потеряны малые колебания около малого смещения, что не может заметно сказаться на результате.

Таким образом, все три модели МПЗ приводят к практически одному результату при использовании их при исследовании динамики спутника и формировании закона управления МСО. В переходном режиме использование более сложных моделей наклонного или прямого диполя нецелесообразно, так как время переходного режима в случае использования осредненной модели практически не отличается. В установившемся режиме использование осредненной модели может привести к потере малозаметных в переходном режиме эффектов, связанных с неравномерностью вращения вектора

геомагнитной индукции и вращением. Однако, в некоторых случаях также можно использовать осредненную модель. Модель наклонного диполя приводит к количественно иному результату, нежели модель прямого диполя, однако, качественно динамика спутника в установившемся режиме сохраняется.

5.2. Стендовые испытания

В этом разделе представлены результаты лабораторных испытаний алгоритма управления “*-Bdot*”, используемого на спутнике «Чибис-М». Испытания алгоритмов управления ориентацией спутника проводились на лабораторном стенде, разработанном в ИТЦ «СканЭкс» [68], [69]. В состав стенда входит макет системы ориентации, датчики и исполнительные органы которого идентичны тем, что используются на спутнике «Чибис-М».

Состав системы ориентации и стабилизации микроспутника «Чибис-М» удобно показать на примере его макета, использованного при лабораторных испытаниях ее работы. Состав системы ориентации макета и самого аппарата идентичен, в них используются одинаковые исполнительные элементы, датчики ориентации и бортовой компьютер [70]. Краткое описание стенда приведено в приложении II.

На стенде были проведены испытания работы закона управления (2.1.1) [71]. Магнитное поле создавалось при помощи колец Гельмгольца и поддерживалось постоянным во время проведения эксперимента. Это означает, что законы управления (2.1.1) и (2.1.3) идентичны, поскольку производная вектора \mathbf{B} в инерциальной системе координат практически равна нулю. На самом деле, поле неподвижно в лабораторной системе координат, вращающейся вместе с Землей. Поэтому, если выбрать инерциальную систему связанной с направлением на точку весеннего равноденствия, то характерная скорость вращения вектора магнитной индукции в инерциальной системе будет равна скорости вращения Земли, которой можно пренебречь по сравнению с угловой скоростью макета. Индукция поля, создаваемого при помощи стенда,

составляет порядка 10^5 нТл, то есть примерно в десять раз превышает величину индукции геомагнитного поля. Кроме геомагнитного поля на точность формирования магнитного поля влияют и другие возмущения, в частности, токи в аппаратуре и проводах стенда. Результаты испытаний показали, что во время их проведения ошибка формирования магнитного поля составила не более 10%. На рис. 5.2.1 представлен результат одного из испытаний.

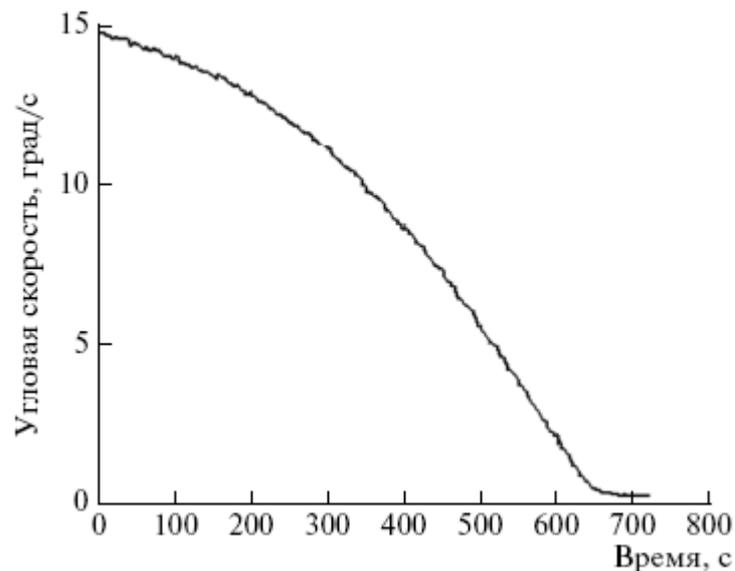


Рис. 5.2.1. Демпфирование угловой скорости

В начальный момент времени угловая скорость составляет $15 \text{ }^\circ/\text{с}$, причем вектор скорости направлен практически вертикально (макет закручен вокруг направления местной вертикали) [72]. Демпфирование происходит примерно за 700 с при использовании токовых катушек с дипольным магнитным моментом 3.2 Ам^2 . Однако, угловая скорость выходит на ненулевое значение, составляющее около $0.6 \text{ }^\circ/\text{с}$. На рис. 5.2.2 представлена величина дипольного магнитного момента всех трех катушек.

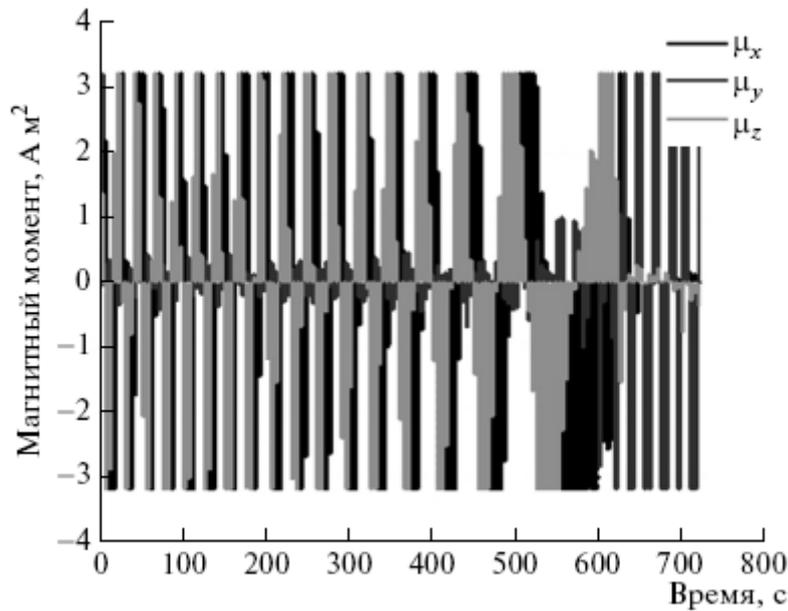


Рис. 5.2.2. Токи катушек

Темно-серый цвет соответствует катушке, расположенной изначально практически вертикально. Черный и светло-серый соответствуют катушкам, расположенным в горизонтальной плоскости. Как видно из рис. 5.2.2, до момента выхода угловой скорости на примерно постоянное значение, работали в основном горизонтальные катушки. С их помощью создавался момент, направленный вертикально (так как магнитное поле направлено горизонтально, как и катушки). Это позволило демпфировать начальную закрутку вокруг местной вертикали [73]. Также из рис. 5.2.2 видно, что с уменьшением угловой скорости спутника уменьшается и частота изменения тока катушек. Включение вертикальной катушки говорит о том, что началось демпфирование колебаний вне горизонтальной плоскости. Их возникновение вызвано тем, что центр вращения макета не совпадает с его центром масс. В результате макет испытывает воздействие возмущающего гравитационного момента. Возникающую при этом скорость (фактически, скорость, с которой макет «валится» на бок) и пытается демпфировать катушка, расположенная вертикально. Кроме возмущающего момента, работе магнитных катушек мешают токи, возникающие в макете, из-за которых показания магнитометра оказываются неточными. Все это и приводит к тому, что скорость удаётся

демпфировать не до нулевого значения. Однако достигнутые точность и быстродействие вполне можно считать достаточными для этапа гашения начальной скорости. Если в лабораторных условиях, где магнитное поле превышает примерно в 10 раз магнитное поле Земли на круговой орбите высотой 500 км, начальная угловая скорость 15 град/с демпфируется за 10 мин, то на орбите с учетом того, что моменты инерции макета и спутника отличаются примерно в 4 раза, аппарат будет демпфировать ту же угловую скорость примерно 400 мин (около четырех витков).

5.3. Летные испытания на борту малого спутника «Чибис-М»

Алгоритм демпфирования угловой скорости “*-Bdot*” был реализован на борту малого спутника «Чибис-М», запущенного 25 января 2012 года [74]. Этот алгоритм использовался на начальном этапе движения спутника для гашения угловой скорости аппарата после отделения, а также и при дальнейшем движении в случае возникновения такой необходимости. Основными исполнительными элементами аппарата являются маховики, поддерживающие его в орбитальной ориентации, основываясь на показаниях магнитометра и солнечных датчиков, обрабатываемых с помощью локального метода и фильтра Калмана [75] (а также датчиков угловой скорости при использовании фильтра Калмана). Солнечные панели, установленные на спутнике, могут также использоваться при выходе из строя солнечных датчиков [76]. На теневой стороне орбиты данные солнечных датчиков недоступны, поэтому спутник переходит в неконтролируемый режим движения, после выхода из которого может потребоваться демпфирование угловой скорости. Аналогичная ситуация может возникнуть после использования экспериментального алгоритма ориентации на Солнце при помощи токовых катушек, названного “*Sdot*” [77] по аналогии с “*-Bdot*”.

Для наглядности полученных данных был проведен сеанс демпфирования угловой скорости при помощи алгоритма “*-Bdot*” после того, как спутник был намеренно раскручен (первый месяц работы аппарата отводился на

тестирование системы ориентации и стабилизации и проверку алгоритмов и научного оборудования). Данные были получены 4 марта 2012 года в период времени с 14:31:47 до 15:32:05 по московскому времени, при этом примерно с 14:33:00 до 15:09:00 аппарат находился в тени. На каждом этапе управления в течение 6 секунд проводились и обрабатывались измерения, затем в течение 3 секунд реализовывалось управляющее воздействие. Скважность сбора данных – около 30 секунд (30-32 секунды). Из телеметрических данных были удалены две точки, в которых магнитометр или датчик угловой скорости дали сбой. В таблице 5.3.1 приведен пример телеметрических данных для датчика угловой скорости.

Таблица 5.3.1

01:58:39.000	14:33:50.000	0.1738	0.2119	0.0803
01:58:39.000	14:34:21.000	0.1706	0.2464	0.0752
01:58:39.000	14:34:52.000	0.1784	0.2454	0.0151
01:58:39.000	14:35:23.000	0.1812	0.2275	0.0084
01:58:39.000	14:35:55.000	0.1931	0.2216	-0.0121
01:58:39.000	14:36:25.000	0.2390	0.1969	-0.0178
01:58:39.000	14:36:56.000	0.1373	0.2031	-0.0357

В этих данных указываются время получения в пункте связи, время получения данных с датчика и их записи в долговременную память бортового компьютера, и три компоненты угловой скорости. Для формирования управляющего момента используются данные магнитометра, приведенные на рис. 5.3.1.

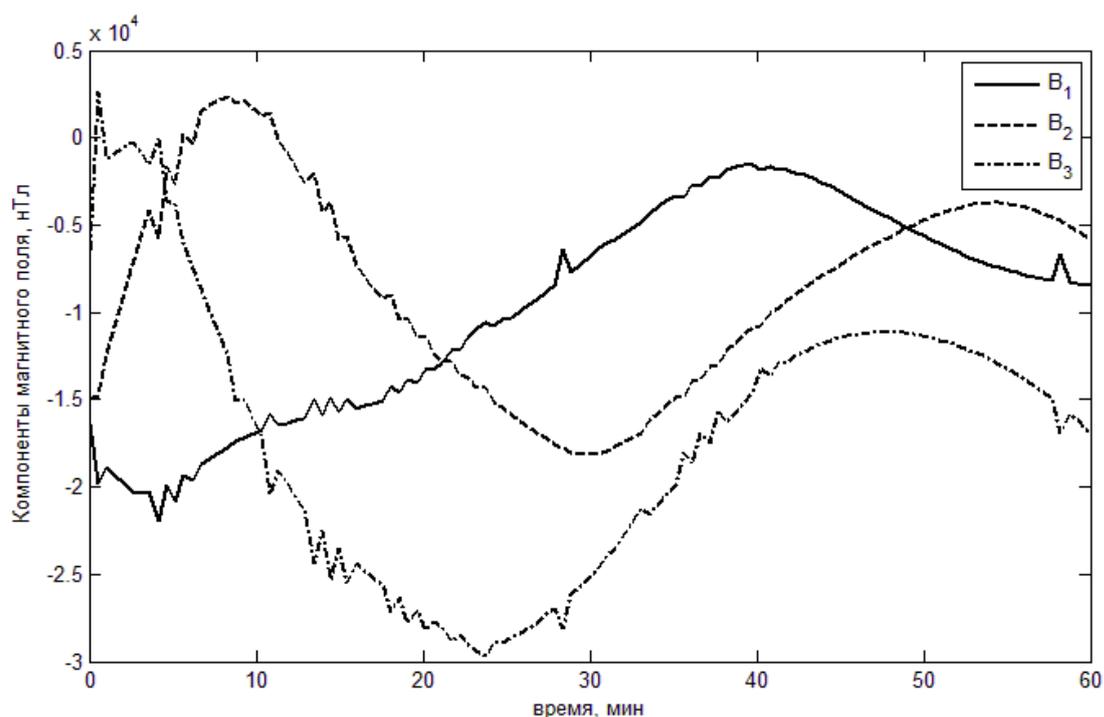


Рис. 5.3.1. Показания магнитометра

Контроль точности полученных данных мощно провести при помощи информации о положении центра масс спутника, что для каждой точки измерений магнитного поля на борту позволяет вычислить вектор напряженности магнитного поля при помощи модели IGRF. В таблице 5.3.2 представлены двустрочные элементы спутника «Чибис-М», соответствующие времени сбора рассматриваемых телеметрических данных.

Таблица 5.3.2

CHIBIS-M

```

1 38051U 11062C 12058.91450162 .00007227 00000-0 32146-3 0 1024
2 38051 51.6521 324.5583 0011559 6.4829 88.0894 15.22465494 5160

```

Поскольку для оценки точности измерения компонент магнитного поля необходимо знать трехосную ориентацию спутника, контроль точности может быть осуществлен только по величине измеряемого вектора. На рис. 5.3.2 представлена разница между измеренной и вычисленной величиной модуля вектора геомагнитного поля.

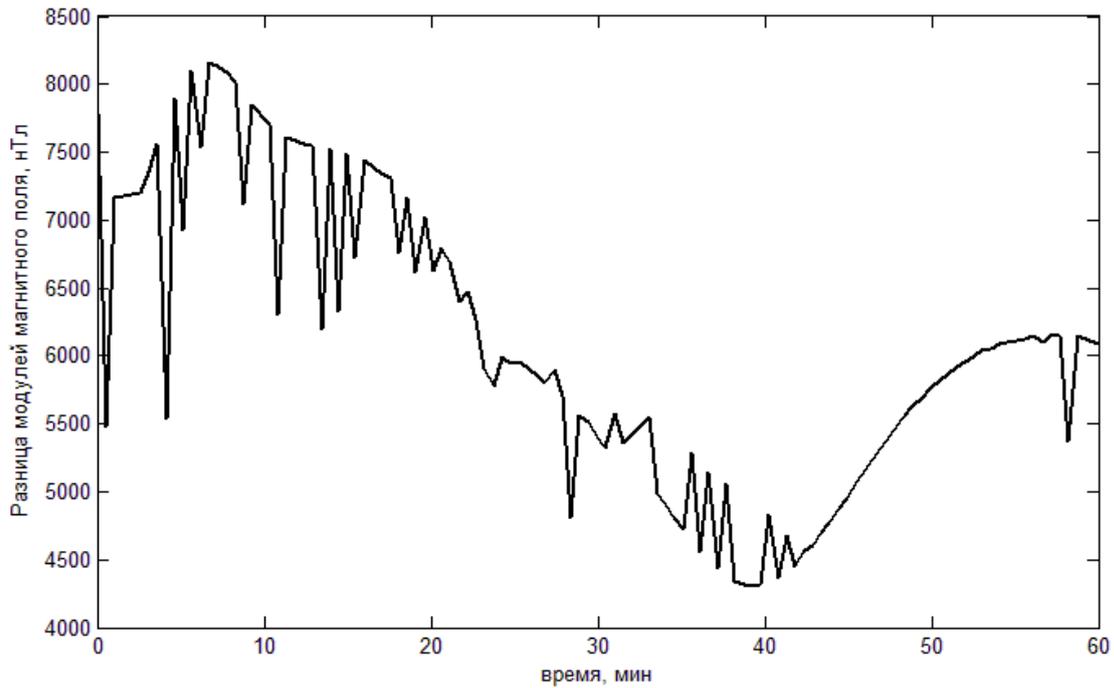


Рис. 5.3.2. Разница модуля вектора геомагнитной индукции, измеренного при помощи магнитометра, и вычисленного с использованием модели IGRF

Можно видеть, что в показаниях магнитометра присутствует сдвиг нуля. Однако в силу способа построения алгоритма “*-Bdot*” этот сдвиг не играет роли. На каждом шаге измерений вычисляется разность измерений на текущем и на предыдущем шаге, в результате сдвиг нуля не оказывает влияния на управляющий дипольный момент. Для оценки точности магнитометра, тем не менее, удобнее использовать метод наименьших квадратов, при помощи которого можно найти примерное смещение нуля, имевшее место в ходе измерений. Результат корректировки показаний магнитометра с учетом постоянного смещения нуля по каждому каналу приведен на рис. 5.3.3.

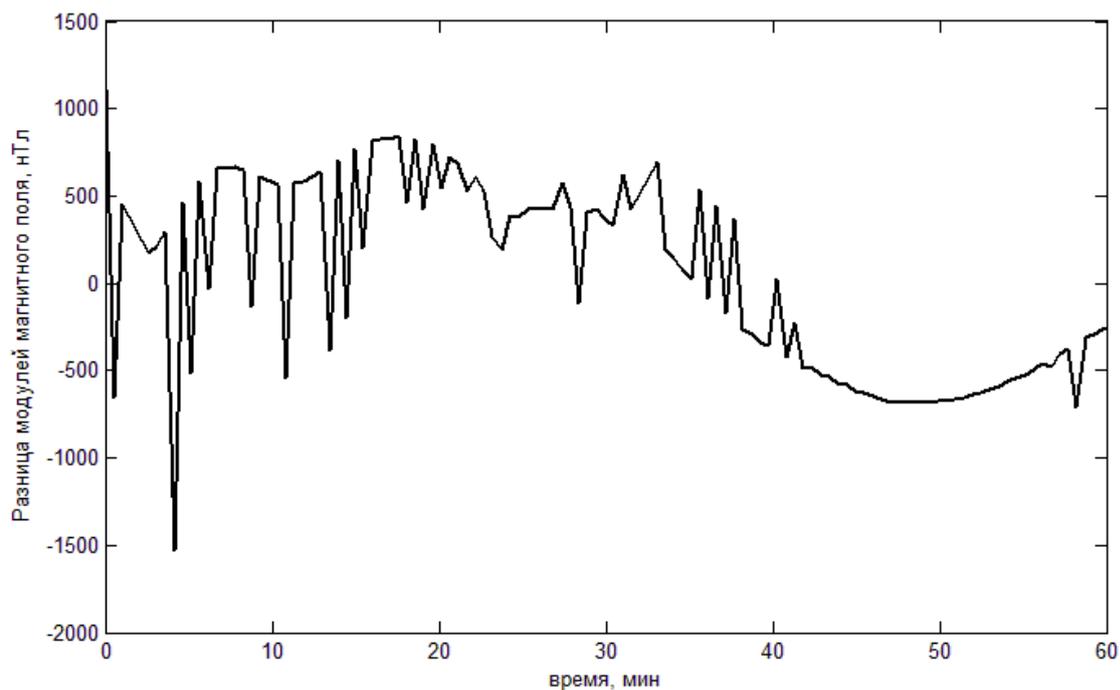


Рис. 5.3.3. Разница модулей вектор магнитной индукции после определения смещении нуля по методу наименьших квадратов

Из рис. 5.3.3 видно, что магнитометр имеет ошибку около 1500 нТл, причем в основном она не превышает 1000 нТл. При характерной величине вектора индукции геомагнитного поля около 40000 нТл это хорошая точность. На рис. 5.3.4 приведены компоненты угловой скорости аппарата, определенные при помощи датчиков угловой скорости.

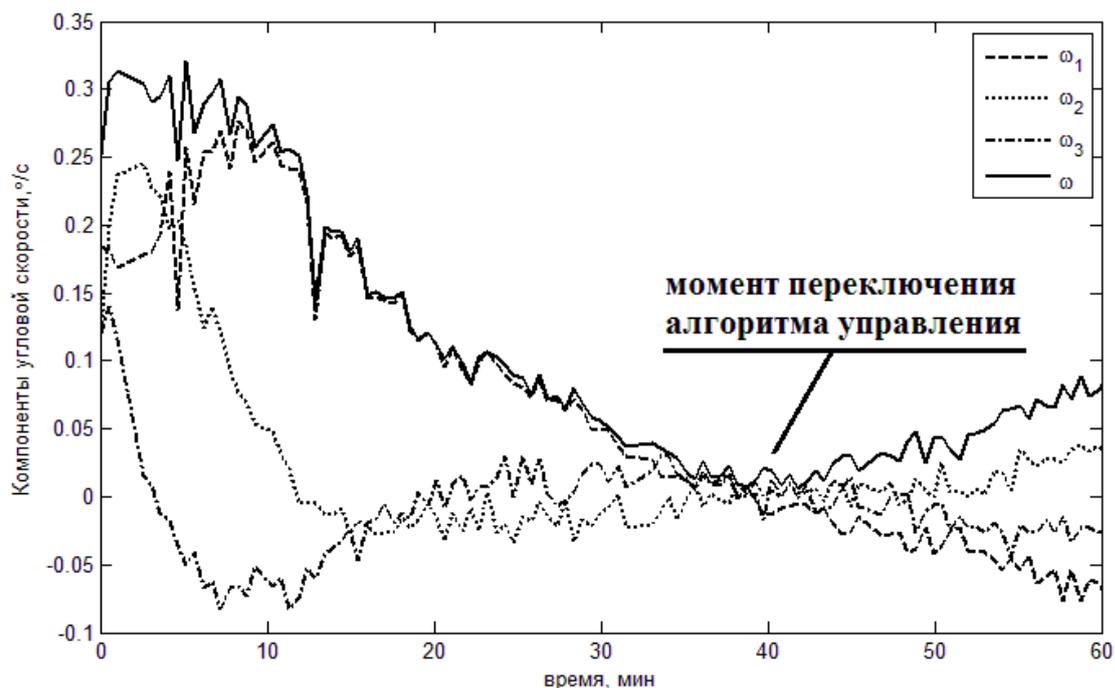


Рис. 5.3.4. Гашение угловой скорости аппарата

Рис. 5.3.4 показывает эффективное гашение угловой скорости спутника. Скорость упала примерно в пять раз за 30 минут. Примерно через 40 минут скорость начала возрастать из-за перехода аппарата в другой режим ориентации. Это связано с двумя факторами. Во-первых, аппарат достиг значения угловой скорости, приемлемого для переключения на другой режим – обеспечения номинальной ориентации. Во-вторых, спутник вышел из зоны тени, в результате начали работу солнечные датчики, что позволило запустить алгоритм определения ориентации TRIAD и маховики. По достижении точности ориентации в 10° алгоритм определения ориентации изменяется на фильтр Калмана. Оба используемых алгоритма описаны в [78].

Рассмотрим теперь работу алгоритма “-Bdot” в рамках штатного функционирования системы ориентации и стабилизации спутника «Чибис-М». На рис. 5.3.5 представлен результат демпфирования угловой скорости спутника

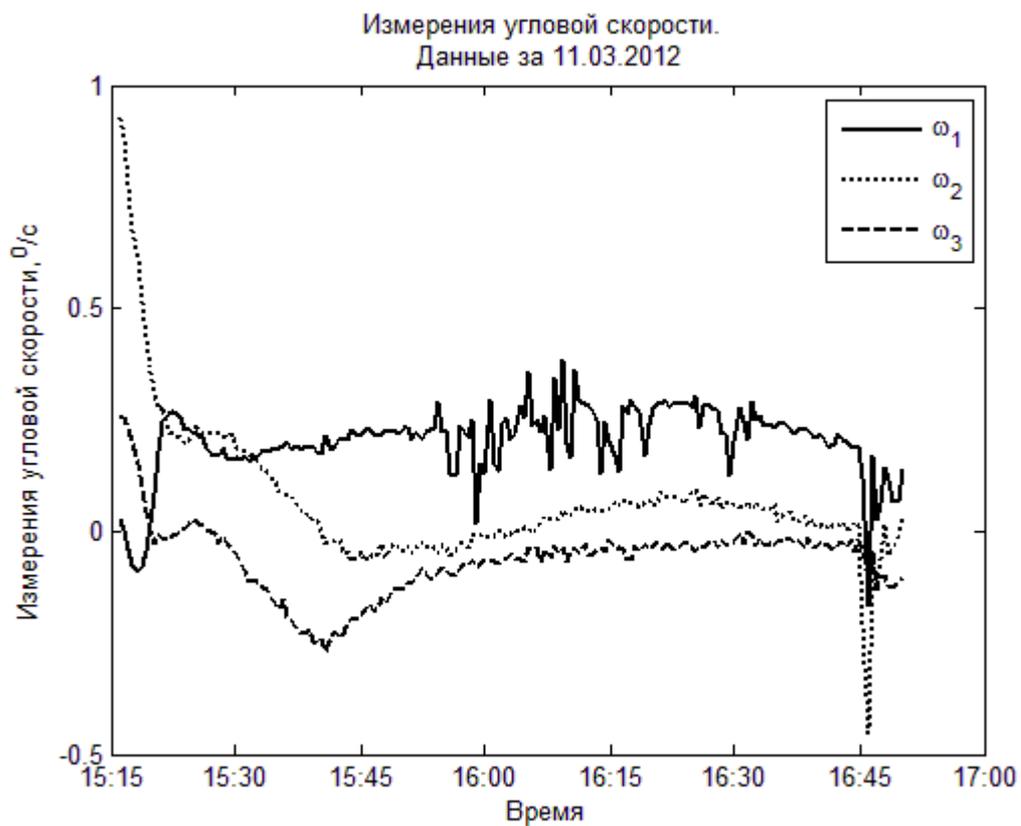


Рис. 5.3.5. Показания датчиков угловой скорости

Из рис. 5.3.5 видно, что после включения алгоритма “-Bdot” скорость быстро (около 5 минут) падает до значения, близкого к орбитальному, но все же несколько превышающего его.

Результаты лабораторных и летных испытаний опубликованы в [78].

Заключение

В диссертации предложен способ анализа динамики осесимметричного спутника, оснащенного магнитными катушками в качестве исполнительных элементов. За счет использования асимптотических методов и простой, но вместе с тем достаточно достоверной модели магнитного поля удалось довести решение задачи демпфирования начальных колебаний, одноосной ориентации спутника, стабилизируемого собственным вращением, и трехосной ориентации спутника до конечных формул. Полученные результаты могут найти применение при разработке систем управления миниатюрными аппаратами. Основными претендентами на использование рассмотренных алгоритмов являются микро- и наноспутники технологического назначения, требующие упрощенной конструкции исполнительных органов. Внедрение результатов возможно при создании систем ориентации спутников, начиная с этапа проработки облика системы и заканчивая реализацией алгоритмов управления на бортовом компьютере, при этом результаты работы позволяют упростить процесс разработки аппарата на этапе проработки и ускорить процесс реализации за счет замены сложных в изготовлении исполнительных элементов (маховики, двигательная установка) простыми и дешевыми магнитными катушками.

Выносимые на защиту результаты и положения:

В рамках исследования быстрых вращений спутника проведен анализ быстродействия алгоритма гашения угловой скорости аппарата. Получен полный набор независимых автономных первых интегралов осредненных уравнений движения. Уточнена зависимость быстродействия системы от наклона орбиты и найдено направление в инерциальном пространстве, к которому стремится вектор кинетического момента, что позволяет быстро оценить время, которое потребуется для успокоения спутника после отделения от ракеты-носителя.

Для спутника, стабилизируемого собственным вращением, предложена схема обеспечения одноосной ориентации, не требующая предварительного успокоения и раскрутки вокруг оси симметрии и обеспечивающая выигрыш в быстродействии, выработаны рекомендации по применению алгоритмов ориентации. Для всех используемых алгоритмов получены полные наборы независимых автономных первых интегралов осредненных уравнений движения, найдена зависимость быстродействия алгоритмов от наклона орбиты и начальных условий, что позволяет быстро подбирать параметры системы ориентации на этапе разработки облика системы и спутника.

Исследован алгоритм трехосной магнитной системы ориентации, обеспечивающий любое наперед заданное положение в инерциальном пространстве. Получены конечные соотношения между параметрами системы ориентации, спутника и орбиты, обеспечивающие устойчивость требуемой ориентации и максимальную величину степени устойчивости.

Для алгоритма демпфирования начальных колебаний проведено полунатурное моделирование в составе испытательного стенда и летные испытания на борту микроспутника «Чибис-М».

Литература

1. Alfriend K.T., A Magnetic Control System for Attitude Acquisition // Ithaco, Inc., report N 90345, 1972.
2. Овчинников М.Ю., Карпенко С.О., Куприянова Н.В., Ролдугин Д.С., Алгоритмы ориентации наноспутников серии ТНС-0 // Актуальные проблемы российской космонавтики, Материалы XXXIII Академических Чтений по космонавтике, секция “Проектная баллистика и управление полетом космических аппаратов”. Январь – февраль, 2009, М: ИИЕТ РАН, с. 351–352.
3. Биндель Д., Овчинников М.Ю., Селиванов А.С., Тайль Ш., Хромов О.Е., Наноспутник GRESAT. Общее описание // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009, № 21, 35 с.
4. Куприянова Н.В., Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Результаты разработки магнитной системы ориентации и системы определения ориентации наноспутника ТНС-0 №2 // Сборник аннотаций докладов на VII Научно-практической конференции "Микротехнологии в авиации и космонавтике, Москва, 2009, 1 с.
5. Карпенко С.О., Куприянова Н.В., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Селиванов А.С., Магнитные системы ориентации и методы определения ориентации наноспутников серии ТНС-0 // Труды конференции “Современные проблемы определения ориентации и навигации космических аппаратов”, Таруса, 2008, 20 с.
6. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Active magnetic attitude control system of a satellite equipped with a flywheel // Preprint of KIAM RAS, 2011, № 21, 28 p.
7. Fortescue P., Stark J., Swinerd G., Spacecraft systems engineering, John Wiley & Sons, 2003, 768 p.
8. Stickler A.C., Alfriend K.T., Elementary Magnetic Attitude Control System // Journal of Spacecraft and Rockets, 1976, V. 13, № 5, pp. 282–287.
9. Alfriend K.T., Magnetic attitude control system for dual-spin satellites // AIAA Journal, 1975, V. 13, № 6, pp. 817–822.
10. Guelman M., Waller R., Shiryaev A., Psiaki M., Design and testing of magnetic controllers for Satellite stabilization // Acta Astronautica, 2005, V. 56, № 1-2, pp. 231–239.

11. Leonard S.B., NPSAT1 magnetic attitude control system // Proc. of the 16th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Utah, 2002, 7 p.
12. Meng T., Wang H., Jin Z., Han K., Attitude stabilization of a pico-satellite by momentum wheel and magnetic coils // Journal of Zhejiang University, 2009, V. 10, № 11, pp. 1617–1623.
13. Jung J., Kuzuya N., Alvarez J., The design of the OPAL attitude control system // 10th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Utah, 1969, 6 p.
14. Flatley T.W., Morgenstern W., Reth A., Bauer F., A B-dot acquisition controller for the RADARSAT spacecraft // Flight Mechanics Symposium, Greenbelt, 1997, pp. 79–89.
15. Белецкий В.В., Хентов А.А., Вращательное движение намагниченного спутника, Москва: Наука, 1985, 288 с.
16. Белецкий В.В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, Москва: Наука, 1965, 414 с.
17. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника // Космические исследования, 1982, Т. 20, № 2, с. 297–300.
18. Сазонов В.В., Сарычев В.А., Влияние диссипативного магнитного момента на вращение спутника относительно центра масс // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, 1983, № 2, с. 3–12.
19. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Управление космическим летательным аппаратом, Москва: Машиностроение, 1964, 402 с.
20. Likins P.W., Attitude stability criteria for dual spin spacecraft // Journal of Spacecraft and Rockets, 1967, V. 4, № 12, pp. 1638–1643.
21. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И., Ориентирование спутника-гироскопа магнитной системой управления в инерциальном пространстве // Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2010, № 27, 27 с.
22. Grahn S., An On-Board Algorithm for Automatic Sun-Pointing of a Spinning Satellite // Swedish patent application n. 9702333-7.
23. Shigehara M., Geomagnetic attitude control of an axisymmetric spinning satellite // Journal of Spacecraft and Rockets, 1972, V. 9, № 6, pp. 391–398.
24. Renard M.L., Command laws for magnetic attitude control of spin-stabilized earth satellites // Journal of Spacecraft and Rockets, 1967, V. 4, № 2, pp. 156–163.

25. Ferreira L.D., Cruz J.J., Yocum J.F., Attitude and Spin Rate Control of a Spinning Satellite Using Geomagnetic Field // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, V. 14, № 1, pp. 216–218.
26. Hur P.S., Melton R.G., Spencer D.B., Meeting Science Requirements for Attitude Determination and Control in a Low-power, Spinning satellite // *Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications*, 2008, V. 1, № 1, pp. 25–33.
27. Junkins J.L., Carrington C.K., Williams C.E., Time-optimal Magnetic Attitude Maneuvers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1981, V. 4, № 4, pp. 363–368.
28. Артюхин Ю.П., Каргу Л.И., Симаев В.Л., Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением, Москва: Наука, 1979, 295 с.
29. Shrivastava S.K., Modi V.J., Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques – a brief survey // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1983, V. 6, № 6, pp. 461–471.
30. Smirnov G., Ovchinnikov M., Miranda F., On the magnetic attitude control for spacecraft via the epsilon-strategies method // *Acta Astronautica*, 2008, V. 63, № 5-6, pp. 690–694.
31. Ткаченко А.И., Магнитная стабилизация космического аппарата и эффект компенсации информационных ошибок // *Космические исследования*, 2012, Т. 50, № 1, с. 79–89.
32. Wang P., Shtessel Y., Wang Y.-q., Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*, Morgantown, West Virginia, 1998, pp. 500–504.
33. Wisniewski R., Linear time varying approach to satellite attitude control using only electromagnetic actuation // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2000, V. 23, № 4, pp. 640–647.
34. Jafarboland M., Momeni H., Sadati N., Baclou H., Controlling the attitude of linear time-varying model LEO satellite using only electromagnetic actuation // *IEEE Aerospace Conference Proceedings, Big Sky, Montana*, 2002, pp. 2221–2229.
35. Guelman M., Ortenberg F., Shiryaev A., Waler R., The Gurwin-Techsat Microsatellite: Six Years Successful Operation in Space // *4th Symposium: Small Satellites, Systems and Services*, La Rochelle, 62 p.
36. Справочник по теории автоматического управления, под ред. Красовского А.А., Москва: Наука, 1987, 712 с.

37. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б., Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // *Астрономический журнал*, 1973, Т. 50, № 2, с. 327–335.
38. Белецкий В.В., Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле, Москва: Изд-во Московского университета, 1975, 308 с.
39. Булгаков Б.В., Прикладная теория гироскопов, Москва: Гостехиздат, 1939, 258 с.
40. Белецкий В.В., Эволюция вращения динамически-симметричного спутника // *Космические исследования*, 1963, Т. 1, № 3, с. 339–385.
41. Черноушко Ф.Л., О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // *Прикладная математика и механика*, 1963, Т. 27, № 3, с. 473–483.
42. Уиттекер Е.Т., Аналитическая динамика, Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1937, 586 с.
43. Гребеников Е.А., Метод усреднения в прикладных задачах, Москва: Наука, 1986, 256 с.
44. Моисеев Н.Н., Асимптотические методы нелинейной механики, Москва: Наука, 1969, 379 с.
45. Куприянова Н.В., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И., Повышение эффективности работы магнитной системы ориентации наноспутника ТНС-0 // *Актуальные проблемы российской космонавтики, Материалы XXXIV Академических Чтений по космонавтике, секция “Прикладная небесная механика и управление движением”*. Январь 2010, М: ИИЕТ РАН, с. 131–132.
46. Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Демпфирование угловой скорости спутника с использованием токовых катушек и солнечного датчика ориентации // *Механика, управление и информатика*, 2011, № 2, с. 111–117.
47. Карпенко С.О., Ролдугин Д.С., Демпфирование угловой скорости спутника при помощи токовых катушек с использованием солнечного датчика // *Тезисы 2 всероссийской научно-технической конференции “Современные проблемы ориентации и навигации космических аппаратов*, Таруса, 2010, с. 21–22.
48. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН*, 2010, № 16, 30 с.

49. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Hao-Chi Chang, Study of the effectiveness of “-Bdot” algorithm for satellite attitude control // Proceedings of Taiwan-Russian bilateral symposium on problems in advanced mechanics, Moscow, 2010, pp. 181–187.
50. Тер-Крикоров А.М., Курс математического анализа: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. и инж.-физ. специальностей вузов, Москва: МФТИ, 2000, 716 с.
51. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Пеньков В.И., Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // Космические исследования, 2012, Т. 50, № 2, с. 176–183.
52. Карпенко С.О., Куприянова Н.В., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Селиванов А.С., Магнитные системы ориентации и методы определения ориентации наноспутников серии ТНС-0 // Аннотации докладов на VI Научно-практической конференции “Микротехнологии в авиации и космонавтике”, Москва, 2008, с. 34–35.
53. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I., Analytical study of a three-stage magnetic attitude control to change a single-axis orientation // 62th IAC Congress, paper IAC-11.C1.5.6, Cape Town, 2011, 11 p.
54. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Исследование связки трех алгоритмов активного магнитного управления угловой скоростью и ориентацией спутника, стабилизируемого вращением // Актуальные проблемы российской космонавтики, Материалы XXXV Академических Чтений по космонавтике, секция “Прикладная небесная механика и управление движением”. Январь 2011, М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, с. 136–137.
55. Боевкин В.И., Гуревич Ю.Г., Павлов Ю.Н., Толстоусов Г.Н., Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях, Москва: Наука, 1976, 304 с.
56. Ovchinnikov M.Y., Pen'kov V.I., Roldugin D.S., Spin-stabilized satellite with three-stage active magnetic attitude control system // Preprint of KIAM RAS, 2011, № 6, 32 p.
57. Karpenko S.O., Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Synthesis and analysis of geomagnetic control using attitude sensor data. Case of sun sensor and magnetometer use // Preprint of KIAM RAS, 2011, № 26, 30 p.
58. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И., Исследование связки трех алгоритмов магнитного управления угловой скоростью и ориентацией

спутника, стабилизируемого вращением // Космические исследования, 2012, Т. 50, № 4, с. 326–334.

59. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I., Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation // *Acta Astronautica*, 2012, V. 77, pp. 48–60.
60. Roldugin D.S., Testani P., Axisymmetrical satellite reorientation without initial detumbling // *Материалы XXXVI Академических Чтений по космонавтике, секция “Прикладная небесная механика и управление движением”*. Январь 2012, М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, <http://www.ihst.ru/~akm/36t5.htm>.
61. Roldugin D.S., Testani P., Spin-stabilized satellite magnetic attitude control scheme without initial detumbling // *Acta Astronautica*, 2013 (в печати, DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.011>).
62. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Testani P., Spin-stabilized satellite with Sun-pointing active magnetic attitude control system // *Preprint of KIAM RAS*, 2012, № 4, 31 с.
63. Roldugin D.S., Testani P., Active magnetic attitude control system for sun-pointing of a spin-stabilized satellite without initial detumbling // *Advances in the Astronautical Sciences*, 2012, V. 145, pp. 669–688.
64. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958, 408 с.
65. Арнольд В.И., Нейштадт А.И., Козлов В.В., Динамические системы-3, Москва: ВИНТИ, 1985, 303 с.
66. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, Москва: Едиториал УРСС, 2004, 432 с.
67. Lovera M., Astolfi A., Global Magnetic Attitude Control of Spacecraft in the Presence of Gravity Gradient // *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, 2006, V. 42, № 3, pp. 796–805.
68. Овчинников М.Ю., Иванов Д.С., Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Моделирование и лабораторные испытания системы ориентации МКА “Чибиc-М” // *Труды XXXV Академических Чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королёва*, январь 2011, г. Москва, с. 63.
69. Иванов Д.С., Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Трофимов С.П., Нуждин Д.О., Карпенко С.О., Аналитическое, численное и полунатурное исследование

алгоритмов управление ориентацией микроспутников // Сборник тезисов докладов Второй всероссийской школы молодых ученых-механиков “Актуальные проблемы механики” в рамках X всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Н. Новгород, 24-30 августа 2011 г., с. 45–46.

70. Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Ivlev N.A., Karpenko S.O., Roldugin D.S., Tkachev S.S., Complex Investigation, Laboratory and Flight Testing of the Magneto-Gyroscopic ACS for the Microsatellite // 63th International Astronautical Congress, Naples, Italy, 2012, paper IAC-12-C1.9.12, p. 15.
71. Ovchinnikov M.Y., Ivanov D.S., Tkachev S.S., Roldugin D.S., Karpenko S.O., Simulation and laboratory testing of microsatellite “Chibis-M” attitude control system // Proceedings of the 1st IAA Conference on University Satellites Missions and CubeSat Winter Workshop, Roma, 2011, p. 88.
72. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Лабораторные испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника «Чибиc-M» // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2011, № 40, 31 с.
73. Иванов Д.С., Ткачев С.С., Ролдугин Д.С., Трофимов С.П., Нуждин Д.О., Карпенко С.О., Аналитическое, численное и полунатурное исследование алгоритмов управление ориентацией микроспутников // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, № 4 (2), с. 152–154.
74. Иванов Д.С., Ивлев Н.А., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С., Летные испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибиc-M” // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2012, № 58, 32 с.
75. Овчинников М.Ю., Иванов Д.С., Ролдугин Д.С., Реализация локального метода определения ориентации наноспутника // Труды XLIV чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского, Калуга, 2009, с. 122–131.
76. Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Результаты определения углового движения наноспутника Munin по токосъему солнечных батарей // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2009, № 13, 31 с.
77. Karpenko S.O., Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Magnetic attitude control algorithms employing measurements from a direction attitude sensor // 6th international workshop and advanced school “Spaceflight dynamics and control”, Covilha, 28-30 march, 2011, 1 p.

78. Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С.,
Испытания алгоритмов управления ориентацией микроспутника “Чибиc-М”
на лабораторном стенде // Известия РАН. Теория и системы управления,
2012, № 1, с. 118–137.

Приложение I. Асимптотические методы

Опишем метод осреднения [43], который используется в диссертации для анализа переходных процессов. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= y_0(x, y) + \varepsilon Y(x, y),\end{aligned}\tag{I.1}$$

Параметр ε считается малым. Тогда переменные разделяются на быстрые y и медленные x , которые являются векторами. Функции X и Y 2π -периодичны по y . Будем искать замену переменных

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}), y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}),\tag{I.2}$$

приводящую (I.1) к системе вида

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon A_1(\bar{x}), \frac{d\bar{y}}{dt} = y_0(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon B_1(\bar{x}).\tag{I.3}$$

Это общий путь асимптотических методов для анализа систем вида (I.1) [44]. В общем случае замена (I.2) содержит слагаемые большего порядка малости. В этом случае анализ усложняется, если y действительно является вектором (в системе несколько быстрых переменных). Ниже мы покажем, что достаточно учитывать только слагаемые первого порядка. Функции u_1, v_1 конечны. Подставляя (I.2) в (I.1) и учитывая (I.3), получаем уравнения для определения u_1

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial u_1}{\partial y_i} y_{0i}(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}),\tag{I.4}$$

где k – число быстрых переменных. Так как функция X периодична, то ее можно разложить в ряд Фурье

$$X(\bar{x}, \bar{y}) = \sum a_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) \exp i \left(\sum n_j \bar{y}_j \right).$$

Поэтому будем искать u_1 в виде

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum b_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) \exp i \left(\sum n_j \bar{y}_j \right) + \sum c_j(\bar{x}) \bar{y}_j.$$

Учитывая (I.4), получаем

$$b_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x}) = \frac{a_{n_1, \dots, n_k}(\bar{x})}{i \sum n_j y_j},$$

$$\sum c_j(\bar{x}) y_{0j}(\bar{x}) = a_{0, \dots, 0}(\bar{x}) - A_1(\bar{x}).$$

Так как u_1 конечна, все c_j должны быть равны нулю, иначе при росте \bar{y} функция u_1 может неограниченно возрасти. Следовательно,

$$a_{0, \dots, 0}(\bar{x}) = A_1(\bar{x}),$$

но так $a_{0, \dots, 0}(\bar{x})$ является средним значением X , то

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int \dots \int_k X(\bar{x}, \bar{y}) dy_1 \dots dy_k = \bar{X}(\bar{x}).$$

Иными словами, A_1 – усредненная по быстрым переменным функция X .

Принимая во внимание только первый порядок малости, для эволюции медленных переменных получаем систему

$$\dot{x} = \bar{x}, \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon \bar{X}(\bar{x}),$$

и на временном интервале $t \sim 1/\varepsilon$ точность определения медленных переменных $|x - \bar{x}| \sim \varepsilon$. Фактически, уравнения для эволюции медленных переменных получаются осреднением правых частей уравнения по быстрым переменным.

При анализе установившегося движения используется метод Пуанкаре [44]. Представим уравнения движения (1.3.6) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$, \mathbf{f} – момент переносных, гравитационных и, возможно, гироскопических сил, дополненный нулевыми компонентами для кинематических соотношений, $\varepsilon \mathbf{g}$ – момент сил, создаваемых за счет действия

МСО, ε – малый параметр. Таким образом, рассматривается действие слабого магнитного момента на движение системы. Решение ищем в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + O(\varepsilon^2)$, где \mathbf{x}_0 – стационарное решение невозмущенной системы.

Тогда $\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2)$, где $F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Для вклада

магнитной системы в решение получаем уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0). \quad (I.5)$$

Решение (I.5) позволяет определить точность достижения стационарного решения невозмущенной задачи (требуемой ориентации) при использовании МСО.

Приложение II. Краткое описание лабораторного стенда

В состав стенда входят:

- Макет системы ориентации;
- Имитатор магнитного поля;
- Имитатор Солнца;
- Аэродинамический подвес.

Кроме системы ориентации и стабилизации, макет микроспутника «Чибис-М» состоит из одноплатного компьютера с беспроводным каналом связи, аккумуляторов, системы балансировки платформы, на которой установлены все системы (рис. II.1).

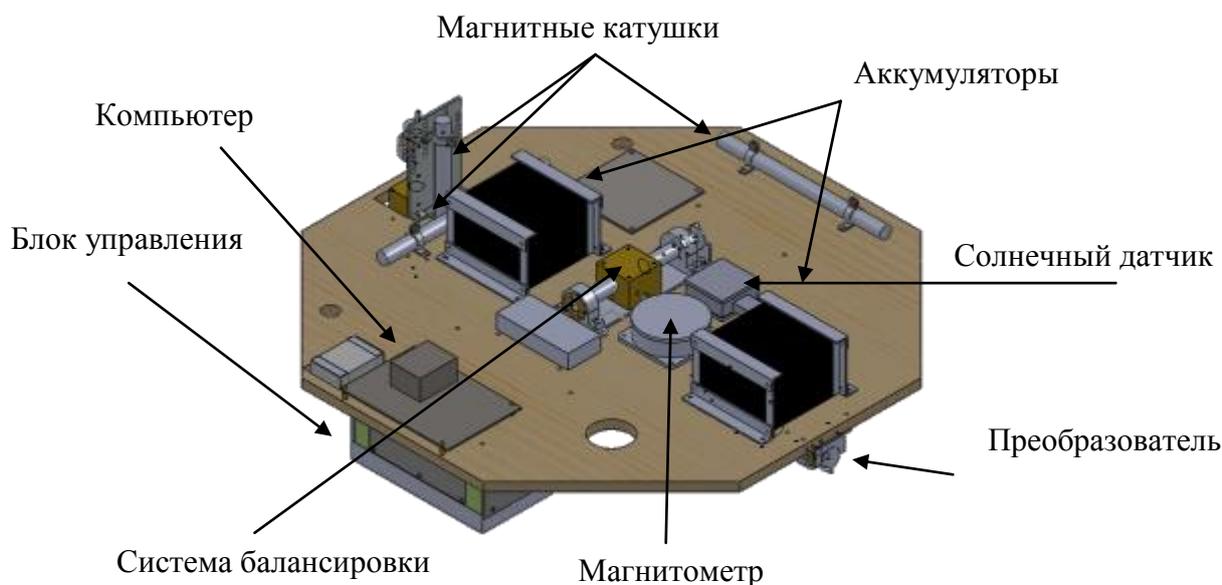


Рис. II.1. Макет МКА в базовой конфигурации

Система ориентации и стабилизации состоит из датчиков определения ориентации, исполнительных органов и блока управления системой ориентации.

В качестве датчиков определения ориентации в составе СОС используются магнитометр HMR 2300R (рис. II.2), солнечный датчик DSS3 (рис. II.3) и датчики угловой скорости ADIS 16130 (рис. II.4). Основные характеристики измерений датчиков приведены в таблице II.1.



Рис. II.2. Магнитометр HMR 2300R

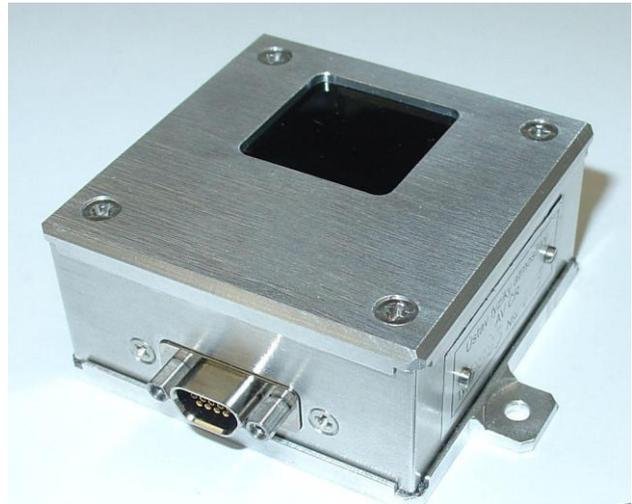


Рис. II.3. Солнечный датчик DSS3



Рис. II.4. Датчик угловой скорости ADIS 16130

Таблица II.1. Измерительные характеристики датчиков

Характеристика \ датчик	Магнитометр	Солнечный датчик	Датчик угловой скорости
Диапазон измерения	$\pm 200\ 000$ нТл	$\pm 45^\circ$	± 250 °/с
Случайное отклонение (шум)	50 нТл	0.1°	0.01 °/с

В качестве исполнительных элементов системы управления ориентацией на макете используются электромагнитные катушки (рис. II.5) и управляющие двигатели-маховики (рис. II.6).



Рис. II.5. Токовая катушка

Токовые катушки индуцируют управляемый магнитный момент, который при взаимодействии с внешним магнитным полем создаёт управляющий механический момент. Катушки представляют собой соленоид с обмоткой из медной проволоки и пермалловым сердечником. Максимальный магнитный момент катушек составляет $3.2 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Двигатели-маховики выполнены на основе бесконтактного двигателя постоянного тока с управляемым моментом и предназначены для использования в качестве исполнительного органа в системах ориентации и стабилизации малых космических аппаратов. Электродвигатель обеспечивает вращение ротора-маховика, его торможение. Величина создаваемого им вращающего (управляющего) момента может плавно меняться в заданном диапазоне в соответствии с сигналом управления, подаваемым на вход двигателя-маховика. Механический момент от управляющих двигателей маховиков создаётся при изменении скорости их вращения и изменяется в диапазоне $[-0.40, +0.40] \text{ мН} \cdot \text{м}$ в лабораторных условиях. Скорость вращения маховиков при этом изменяется в диапазоне $[-20000, +20000] \text{ об/мин}$ в лабораторных условиях.



Рис. II.6. Управляющие двигатели-маховики

Блок управления системой ориентации и стабилизации является связующим элементом между датчиками и органами управления, а также между системой ориентации и стабилизации и внешними устройствами управления (рис. II.7). Основными функциями блока являются сбор и обработка показаний датчиков системы с помощью алгоритмов определения ориентации, выработка с помощью алгоритмов управления команд для элементов системы стабилизации, приём команд от внешнего бортового контроллера управления МКА, передача данных в каналы телеметрии спутника. Основной составной частью является бортовой компьютер, который основан на плате LPC1114, содержащей процессор, внешнюю ОЗУ размером 1 Мб, энергонезависимую флэш-память емкостью 4 Мб.



Рис. II.7. Внешний вид блока управления системой ориентации

Для имитации магнитного поля в составе стенда (рис. II.8) используется система из трёх пар квадратных катушек установленных взаимно перпендикулярно (кольца Гельмгольца). Стороны квадратов пар катушек – 2м, 1,9м, 1,8м. Данная система способна создавать практически однородное магнитное поле в заданной области, которая представляет собой шар с диаметром 650 мм.

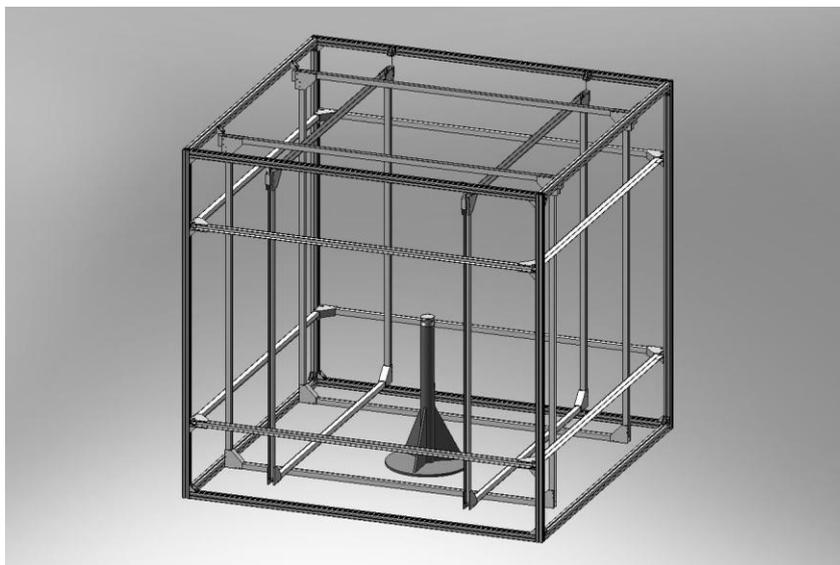


Рис. II.8. Имитатор геомагнитного поля

Имитатор солнца создает постоянный параллельный световой поток на расстоянии до 1.5 м, мощностью не менее 80000 лк. В качестве имитатора

Солнца был выбран прожектор PAR-64 с лампой Philips 1000W230V PAR64 CP61 EXD NSP (рис. П.9).



Рис. П.9. Имитатор Солнца

Аэродинамический подвес обеспечивает движению макета 3 степени свободы, а именно вращение вокруг трёх осей с минимальным трением. По вертикальной оси существует возможность поворота на 360° , по двум горизонтальным – на $\pm 30^\circ$. Максимальная грузоподъемность подвеса – 25 кг.

Аэродинамический подвес состоит из пьедестала (рис. П.10) и подшипника в виде полусферы (рис. П.11). Подшипник крепится к макету МКА.



Рис. П.10. Аэродинамический подвес



Рис. П.11. Подшипник и чаша

Суммарная максимальная погрешность определения положения макета составляет до $\pm 5^{\circ}$. Однако, когда все приборы на макете работают непрерывно (именно при включении и выключении они могут создавать возмущения магнитного поля), нет магнитных бурь, то вектор магнитного поля определяется с точностью до $\pm 0.1-0.2^{\circ}$. А при стабилизации макета, когда солнечный датчик практически не перемещается по конусу луча имитатора Солнца, точность определения доходит до $\pm 0.1^{\circ}$. И, таким образом, в режиме стабилизации, например, может достигаться точность определения ориентации до $\pm 0.1^{\circ}-0.2^{\circ}$.

В таблице П.1 сведены оценки всех возмущающих моментов, действующих на макет. Следует отметить, что оценка возмущающих моментов производилась сверху, то есть рассматривался худший случай: из возможных значений параметров макета (угловая скорость, отражающие свойства, нежелательный магнитный момент и т.д.) выбирались те, которые дадут наибольшее значение возмущающего момента.

Таблица II.1. Возмущающие моменты

Источник возмущающего момента	Значение максимального момента, Н·м
Вязкость при движении подшипника	$3 \cdot 10^{-7}$
Неидеальность поверхностей чаши и подшипника	$3 \cdot 10^{-5}$
Вязкость при движении платформы макета	$1 \cdot 10^{-6}$
Лобовое сопротивление элементов макета о воздух	$2 \cdot 10^{-6}$
Возмущающий магнитный момент на макете	$2 \cdot 10^{-5}$
Давление потока света от имитатора Солнца	$2 \cdot 10^{-8}$
Влияние вращения Земли (гироскопический момент)	$6 \cdot 10^{-6}$
Несбалансированность макета	$4 \cdot 10^{-4}$
Нагрев элементов макета, вызывающий разбалансировку	$4 \cdot 10^{-4}$