

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Шестаков Сергей Алексеевич

**МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ И ПОДДЕРЖАНИЯ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ
СПУТНИКОВЫХ ФОРМАЦИЙ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
М.Ю. Овчинников

Москва – 2020

Оглавление

Введение	4
1 Описание тетраэдральной формации. Вспомогательные соотношения. Уравнения движения.....	16
1.1 Описание тетраэдральной формации	16
1.2 Обзор моделей движения	21
1.3 Бестопливные способы управления малыми спутниками	29
2 Общий метод построения тетраэдральной формации спутников	32
2.1 Качество тетраэдра	33
2.2 Относительное движение спутников в группе.....	35
2.3 Условия сохранения качества в линейной модели движения .	37
2.4 Движения, сохраняющие качество	45
2.5 Параметризация решений.....	47
2.6 Максимизация постоянного качества.....	51
2.7 Выводы по главе 2	52
3 Построение орбит для тетраэдральной формации	54
3.1 Существование решений при различных амплитудах.....	54
3.2 Две равные амплитуды	59
3.3 Учёт эффектов второго порядка	72
3.4 Минимизация скорости деградации качества	75
3.5 Влияние ошибок вывода	78
3.6 Выводы по главе 3	80
4 Построение управления тетраэдральной формацией	82
4.1 Криволинейные координаты.....	82

4.2	Переход к новым переменным.....	83
4.3	Выбор исполнительных элементов управления.....	86
4.4	Синтез управления на основе прямого метода Ляпунова	87
4.5	Последовательное обеспечение геометрических характеристик опорной орбиты.....	93
4.6	Реализация управления.....	95
4.7	Результаты численного моделирования	98
4.8	Выводы по главе 4	120
	Заключение	122
	Список литературы	124
	Приложения.....	140

*«Смотри, перед нами Земля, ... но не вечный
и единственный приют человечества, а всего лишь его
колыбель, отправная точка бесконечного приключения.»
Айзек Азимов, «Конец Вечности»*

Введение

Концепция четырёх спутников, обращающихся вокруг Земли на близких орбитах, а потому имеющих возможность при подходящем фазировании формировать тетраэдр относительно небольшого размера, полезна для исследования характеристик динамического поля (к примеру, магнитного и электрического полей Земли). Причина этому следующая: физические параметры поля – напряжённость, индуктивность и прочие характеристики поля, а также плотность движущихся в поле частиц – меняются в пространстве и во времени. Несколько последовательных измерений, проведённых одним спутником, не позволяют отличить пространственное изменение параметров поля от временного. Два спутника, проводя одновременные измерения в разных точках орбиты, позволяют вычислить градиент напряжённости, однако лишь вдоль направления, соединяющего эти спутники. При этом отделение пространственных и временных изменений поля – весьма нетривиальная задача [1]. По аналогии с этим, три спутника позволяют вычислить градиент по любому направлению в плоскости, проходящей через эти спутники, но не по направлению, ортогональному этой плоскости. Следовательно, минимальное число спутников, необходимое для получения непрерывных измерений, позволяющих вычислить пространственные динамические характеристики электромагнитного поля, равно четырём [2]. Вследствие этого разработка и запуск миссии по изучению, например, геомагнитного поля, плотности ионизированных частиц в атмосфере Земли и т.п. неизбежно сталкивается с необходимостью развертывания, построения, поддержания и управления тетраэдральной формацией спутников. В настоящее время публикации по

изучению тетраэдральных спутниковых формаций, включая задачи построения, поддержания и управления их движением, пока ещё можно объять и условно разделить на три группы: публикации, связанные с миссией Cluster/ClusterII, публикации, связанные с миссией Magnetospheric MultiScale, и прочие публикации.

Приведём краткий обзор существующих подходов к проектированию и разработке двух миссий вместе с их кратким описанием. В дальнейшем мы будем использовать слова «группа», «формация», «конфигурация» и «тетраэдр» для описания спутников, совместно движущихся по орбите.

Начнём с миссии Cluster (проект ESA), которая была предложена в конце 1982 года [3]. К 1985 году было выполнено научно-техническое обоснование, подтверждающее научную полезность и осуществимость миссии. Запуск миссии был назначен на 1996 год. Вследствие аварии при запуске [4–6] миссия была отложена: запуск следующей версии – Cluster II произведен в 2000 году [7,8]. Четыре спутника обращаются вокруг Земли на высокоэллиптических полярных орбитах (перигей-апогей: 20-120 тыс. км). Масса каждого спутника 1200 кг, из них 650 кг занимает топливо, необходимое для вывода группировки на опорную орбиту, дальнейшей реконфигурации и корректировки орбиты. Спутники образуют тетраэдр в своём движении, средний размер тетраэдра варьируется на протяжении миссии от 200 до 18000 км [9]. Основная цель миссии – детальное исследование плазмы магнитосферы Земли, в частности: исследование солнечного ветра и формирования головной ударной волны, исследование магнитопаузы, исследование полярных каспов, полярных сияний и т.д. [10–13].

Поскольку явное описание тетраэдра с помощью 12 переменных (координат вершин) неудобно для анализа и управления, при проектировании миссии использовался иной подход. Была изучена возможность описания формы тетраэдра с помощью одной или нескольких скалярных функций

[14,15], исследованы влияние формы тетраэдра на возможность проведения необходимых измерений [16,17] и зависимости между формой тетраэдральной конфигурации и возникающими при измерениях ошибками [18]. По результатам исследований, в миссии Cluster/Cluster II для описания тетраэдра использовалось несколько специально выбранных скалярных функций, отражающих форму тетраэдра.

Основные аналитические и численные результаты, полученные при подготовке миссии, наряду с разработанными методиками представлены в научно-техническом отчёте [19]. Описание миссии вместе с полным списком релевантных публикаций (2814 публикаций на конец 2019 года), а также результаты, полученные в ходе миссии, представлены на веб-сайте ESA Cluster mission [20].

Концепция миссии Magnetospheric MultiScale (MMS) (проект NASA) изложена изначально в [21], обзор основных научных задач, подлежащих решению в рамках этой миссии, представлен в [22]. Миссия была запущена в 2015 году, масса каждого из четырёх спутников 1250 кг (из них 360 кг занимает топливо), формация обращается вокруг Земли по высокоэллиптической (перигей-апогей на первом этапе 7.5-77 тыс. км, на втором – 7.5-160 тыс. км.) орбите, наклонение 28 градусов.

Рабочей группой миссии MMS был выпущен цикл работ по построению тетраэдральной формации, пригодной для реализации этой миссии. Приведены как общие сведения о построении тетраэдра [23,24], так и более детальное моделирование тетраэдральной конфигурации и требований, предъявляемых к относительным орбитам [25,26]. Как и в миссии Cluster, в миссии MMS для определения и оптимизации формы тетраэдра вводилась специфическая скалярная функция, отражающая форму тетраэдра [27]. Основные публикации по научным целям, способам планирования и управления группой, а также вопросам проведения и обработки измерений миссии MMS собраны на веб-сайтах [28,29].

Прочие работы по исследованию тетраэдральных конфигураций включают в себя построение тетраэдров, охватывающих Землю [30,31], а потому не представляющих группу, и изучению свойств задержки сигнала для спутников глобального позиционирования [32]. Рассматривается поддержание тетраэдральной формации с помощью солнечного паруса [33]. Решена задача вывода и поддержания тетраэдральной формации малых космических аппаратов на высокоэллиптической орбите с помощью полуаналитических и численных методов [34]. Отдельного внимания заслуживает публикация, связанная с не доведённой до запуска миссией The Auroral Lites [35].

На настоящий момент автору не известно об осуществлении миссии, использующей четыре спутника для изучения ионосферы (т.е. верхней части атмосферы) Земли. Для изучения самой ионосферы разработано и реализовано достаточно много миссий. В их числе – AEROS [36], CHAMP [37], Ørsted [38], Swarm [39], Чибис-М [40,41], Demeter [42], ICON [43]. Миссия DICE показала принципиальную возможность использования наноспутников типа CubeSat («кубсат» – микроспутник объёмом в один литр и массой порядка одного килограмма) для исследования ионосферы [44,45]. Проекты и разработки по исследованию ионосферы, в том числе с помощью малых аппаратов, можно найти в [46–50].

Интерес к исследованию ионосферы носит как теоретический, так и прикладной характер. Теоретическая значимость исследований атмосферы заключается в том, что атмосфера является нестационарной средой: процессы, протекающие в ней, зависят от состояния магнитосферы Земли, климата, движения атмосферы, времени года, активности Солнца и даже антропогенных факторов [51–53]. Изучение подобной неоднородной среды позволяет глубже понять физику происходящих в атмосфере явлений, а также оценивать и предсказывать влияние различных природных и техногенных факторов друг на друга.

Практическая значимость исследования заключается в том, что изучение разномасштабных вариаций ионосферы связано теснее всего с обеспечением радиосвязи. Неоднородная среда, которой является ионосфера, может приводить к снижению интенсивности передаваемого сигнала [52,54]. Помимо этого, неоднородность ионосферы снижает точность спутниковой навигации с помощью группировок GPS и GLONASS и вызывает задержку сигналов при обеспечении связи [55–57]. Из этого следует необходимость учёта влияния ионосферы и внесения поправок в теоретические и эмпирические модели распространения радиосигналов в ионосфере [58].

Использование тетраэдральной конфигурации возможно на разных орбитах и при различных размерах тетраэдра. Инерционные длины заряженных частиц плазмы (электронов и ионов) варьируются от десятков метров до десятков километров. Поэтому необходимо подбирать характерный размер тетраэдра [46]. На высотах от 250 до 800 км находится слой ионосферы, ответственный за обеспечение радиокommunikации. При этом высоты до 400 км содержат максимальную концентрацию заряженных частиц. Орбиты малого наклона проходят над экваториальной аномалией [59] и плазменными пузырями [60]. На широте 18° находится передатчик в Аресибо, Пуэрто-Рико, на 22° – радиопередатчик очень низкой частоты в Австралии, на 56° – нагревной стенд Сура, на 70° – нагревной стенд и радар EISCAT. Над подобными объектами могут наблюдаться интересные с теоретической точки зрения неоднородности ионосферы [61–63]. На полярной орбите интерес представляют авроральный овал, поляризационный джет, касп и прочие особенности высокоширотной ионосферы [64–66].

Краткое описание работы

Целью настоящей работы является создание методики построения тетраэдральной формации из четырёх спутников на низкой околокруговой околоземной орбите.

Для построения формации требуется решить следующие связанные между собой задачи. Первая – построение адекватной математической модели движения четырёх спутников на орбите. В такой модели движения необходимо описать эволюцию формации: размер, форму, прочие геометрические характеристики тетраэдра. Для проведения измерений тетраэдр должен оставаться невырожденным на всем протяжении миссии. Также, для улучшения качества проводимых измерений, необходимо, чтобы тетраэдр был близок по форме к правильному тетраэдру.

Вторая задача состоит в получении таких опорных орбит для каждого из спутников, чтобы тетраэдр во время пассивного движения спутников сохранял свою форму на протяжении времени проведения измерений.

Третья задача – разработка методики управления группой спутников для поддержания формы и размера тетраэдра заданными для увеличения продолжительности жизни миссии.

Научная новизна работы состоит в следующем.

- Найдены необходимые и достаточные условия на начальные данные спутников в группе для сохранения формы и размера тетраэдральной группировки в линейном приближении.
- Разработана методика построения управления спутников в группе на основе прямого метода Ляпунова и геометрических характеристик относительной опорной орбиты.
- Построен алгоритм управления тетраэдральной спутниковой конфигурацией с помощью сил аэродинамического сопротивления, поддерживающий форму и размер тетраэдра.

Используемые методы исследования включают методы теоретической механики, теории устойчивости, динамики космического полёта и численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность полученных научных положений, результатов и выводов обеспечивается соответствием выбранных моделей относительного движения спутников в группе общепринятым стандартам, проведением численного моделирования полученных аналитических результатов, сравнением полученных результатов с опубликованными ранее смежными результатами других авторов.

Практическая значимость работы состоит в том, что полученные результаты позволяют:

- на этапах проектирования миссии с использованием тетраэдральной спутниковой формации подобрать необходимые опорные орбиты;
- проводить трёхмерное исследование ионосферы Земли с помощью групп малых космических аппаратов;
- использовать представленную методику построения управления для поддержания относительных орбит при построении миссии с использованием спутниковых формаций.

Положения, выносимые на защиту

1) На основе анализа существующих подходов введено описание качества тетраэдра с помощью скалярной функции. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых введённое качество тетраэдра сохраняется в линеаризованной модели движения. Описаны семипараметрические семейства решений. Исследованы условия существования тетраэдральных конфигураций, сохраняющих качество, в зависимости от амплитуд колебаний спутников на относительных орбитах.

2) В частных случаях тетраэдра с равными амплитудами и формации вида leader-follower (ведущий-ведомый) проведена минимизация деградации формации с учётом возмущений от второй гармоники гравитационного поля Земли. Показано, что в пассивном движении время, в течение которого тетраэдр остаётся невырожденным, зависит от высоты орбиты и размеров

тетраэдра. Продемонстрировано, что на высоте 400 км при низкой солнечной активности для тетраэдра с характерным размером 1 км, это время составляет порядка недели. Исследована чувствительность формации к начальным данным движения спутников.

3) Разработана методика построения алгоритма управления относительным движением спутников в группе на основе прямого метода Ляпунова с использованием геометрических характеристик опорных орбит. Построен алгоритм управления тетраэдральной формацией, позволяющий поддерживать тетраэдр невырожденным, а качество тетраэдра – близким к необходимому. Проведена адаптация алгоритма с учётом особенностей исполнения при использовании сил аэродинамического сопротивления. Показано, что при различных наклонениях опорной орбиты, временах запуска, размерах тетраэдра и ошибок в начальных данных, построенное управление способно поддерживать тетраэдр на протяжении от одного до нескольких месяцев. Продемонстрирована возможность использования паруса на спутниках для увеличения времени жизни тетраэдральной формации.

Апробация результатов исследования

Результаты исследования докладывались и обсуждались на следующих отечественных и зарубежных конференциях:

- 1) XLIV Королёвские академические чтения по космонавтике. Москва, 28-31 января 2020
- 2) XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 19-24 августа 2019
- 3) 10th International Workshop on Satellite Constellation and Formation Flying, Glasgow, Scotland, 16-19 July 2019
- 4) 69 International Astronautical Congress, Bremen, 1-5 October 2018
- 5) XLII Королёвские академические чтения по космонавтике. Москва, 23-26 января 2018г

- 6) 3rd COSPAR Symposium "Small Satellites for Space Research", Jeju, Korea, 17-21 September 2017
- 7) 9th International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying, Boulder, Colorado, USA, 19-21 June 2017
- 8) 5-ая всероссийская научно-техническая конференция "Современные проблемы ориентации и навигации космических аппаратов", 2016, Таруса, 5-8 сентября 2016

а также на научных семинарах:

- 1) семинар «Динамические системы и механика», Московский авиационный институт, руководитель семинара д.ф.-м.н., профессор Б.С. Бардин, 23 апреля 2020 г.
- 2) семинар ИКИ РАН по механике, управлению и информатике, руководитель семинара д.ф.-м.н., профессор Р.Р. Назиров, 6 февраля 2020 г.
- 3) объединённый семинар отделов №№ 5 и 7 «Механика и управление движением» ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, руководители д.ф.-м.н., профессор Ю.Ф. Голубев и д.ф.-м.н., профессор М.Ю. Овчинников, 23 января 2020 г.
- 4) семинар им. В.А. Егорова по механике космического полета, руководители д.ф.-м.н., профессор В.В. Сазонов и к.ф.-м.н., доцент М.П. Заплетин, Московский государственный университет, 4 декабря 2019 г.
- 5) семинары отдела №7 «Ориентация и управление движением» ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, руководитель д.ф.-м.н., профессор М.Ю. Овчинников, 4 июля 2019 г., 3 декабря 2019 г.

Публикации автора по теме диссертации.

Основные положения и результаты диссертации были опубликованы в 8 изданиях, из них 5 включено в перечень рекомендованных ВАК РФ, 3

индексируются в базах данных Scopus и/или Web of Science, 2 – препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

- 1) Shestakov S., Ovchinnikov M., Mashtakov Y. Analytical Approach to Construction of Tetrahedral Satellite Formation // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2019. – Т. 42. – №. 12. – С. 2600-2614.
- 2) Smirnov G.V., Mashtakov Y.A., Ovchinnikov M.Yu., Shestakov S.A., Prado A.F.B.A. Tetrahedron formation of nanosatellites with single-input control // Astrophysics and Space Science. – 2018. – Т. 363. – №. 9. – С. 180.
- 3) Ovchinnikov M., Shestakov S., Mashtakov Y. Analytical approach to construction a reference motion for tetrahedral satellite formation// Proceedings of the 69th International Astronautical Congress, Bremen, Germany, 2018. Pp. 7668-7675
- 4) Маштаков Я.В., Шестаков С.А. Поддержание тетраэдральной конфигурации группы спутников при помощи одноосного управления // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. № 95. 27 с
- 5) Маштаков Я.В., Шестаков С.А. Построение некоторых опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. №84. 26 с.
- 6) Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков «Управление тетраэдральной группой спутников при помощи силы атмосферного сопротивления» // Тезисы XLIV Королёвских академических чтений по космонавтике. Москва, 28-31 января 2020г., М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, Т.1 с. 307-308
- 7) Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков «Исследование тетраэдральной формации спутников на низкой околоземной орбите» // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, г. Уфа, 19-24 августа 2019, с. 749-751
- 8) Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков. «Построение опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников» // Тезисы XLII

Королёвских академических чтений по космонавтике. Москва, 23-26 января 2018г., М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018, с. 87-88

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора и получены лично автором. Постановки задач и результаты исследований обсуждались с соавторами опубликованных работ и научным руководителем.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объём диссертации составляет 152 страницы. Работа включает в себя 41 рисунок и 2 таблицы. Список литературы содержит 158 наименований.

Во **введении** обосновывается актуальность и практическая значимость работы, а также проводится краткий обзор существующих подходов к решению поставленных задач.

В **первой главе** работы описывается тетраэдральная спутниковая формация, приводятся используемые системы координат, уравнения движения и вспомогательные соотношения.

Во **второй главе** работы рассматривается задача в линеаризованной модели движения. Вводится и обосновывается скалярная характеристика тетраэдра, описывающая его форму и используемая далее для оптимизации конфигурации. Приводятся необходимые и достаточные условия сохранения тетраэдральной конфигурации на орбите в соответствии с введёнными критериями.

В **третьей главе** работы аналитически и численно исследуются опорные тетраэдральные спутниковые конфигурации. Приводятся конкретные семейства опорных орбит для спутников. Исследуется чувствительность тетраэдральной конфигурации к ошибкам в начальных данных движения.

В четвёртой главе работы рассматривается методика построения управления тетраэдральной спутниковой формацией с помощью прямого метода Ляпунова. Основной задачей этого алгоритма является поддержание заданных геометрических характеристик относительных орбит космических аппаратов. Затем построенный алгоритм адаптирован к низким околоземным орбитам, где для реализации рассчитанных управляющих воздействий используется сила атмосферного сопротивления. Проведено численное моделирование динамики формации.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования.

Приложения содержат дополнительные и вспомогательные сведения, слишком громоздкие для основного текста работы.

1 Описание тетраэдральной формации.

Вспомогательные соотношения.

Уравнения движения.

Как уже было сказано ранее, описание тетраэдра с помощью 12 переменных (координат его вершин) неудобно с аналитической и непрактично с прикладной точек зрения. Координаты вершин определяют не только форму тетраэдра, но и его положение в пространстве. Если нас интересует тетраэдр только с точностью до сдвига и поворота его в пространстве (т.е. тетраэдр как твёрдое тело), то достаточно шести переменных для его полного описания. Тем не менее, даже шесть чисел часто избыточны для конкретной задачи: они не имеют ясного геометрического смысла, а оптимизация по шести параметрам может быть затруднительной. Более простым и естественным (как с точки зрения вычислительной сложности, так и с точки зрения геометрической наглядности) подходом является введение меньшего числа параметров, описывающих тетраэдр.

1.1 Описание тетраэдральной формации

Наиболее распространённым способом является введение одного параметра. В большинстве (но не во всех) случаях этот параметр подчиняется следующим естественным ограничениям.

- Однороден, т.е. не меняется при изменении объёма тетраэдра с сохранением подобия.
- Нормирован (чаще всего на единицу – т.е. равен единице на правильном тетраэдре).
- Монотонно изменяется при непрерывной деформации правильного тетраэдра в вырожденный – возрастает или убывает.
- На вырожденном тетраэдре обнуляется или обращается в бесконечность.

Точная формула для этого параметра, который в дальнейшем мы будем называть *качеством тетраэдра*, выбирается исходя из требований задачи или удобства для исследования.

Отметим, что помимо формы важно знать размер тетраэдра. Существует как минимум два естественных способа измерять размер: использовать для этого объём тетраэдра или среднюю длину ребра тетраэдра. В отличие от объёма, форма тетраэдра не имеет простого описания, так как (в отличие от треугольника), зная лишь длины сторон и объёмы двух тетраэдров, невозможно определить, тождественны ли они [67,68].

1.1.1 Описание тетраэдральной формации в миссии Cluster/ClusterII

При проектировании миссии Cluster/Cluster II были подробно исследованы использование векторного двухкомпонентного параметра для описания качества тетраэдра, и влияние формы тетраэдра на качество и точность измерений [69]. Введены параметры «растяжение» и «планарность», которые определяются на основе собственных значений тензора деформаций тетраэдра.

Два различных скалярных качества тетраэдра рассмотрены и проанализированы в [15]. Параметр Глассмайера (Glassmeier) определяется формулой $Q_{GD} = \frac{\text{TrueVol}}{\text{IdealVol}} + \frac{\text{TrueSurf}}{\text{IdealSurf}} + 1$, где Vol означает объём, Surf – площадь поверхности, True – характеристика исследуемого тетраэдра, Ideal – характеристика правильного тетраэдра с ребром, равным среднему арифметическому длин рёбер исследуемого тетраэдра. Параметр Q_{GD} в некотором смысле отражает «размерность» тетраэдра: параметр равен единице, если четыре точки лежат на прямой, равен двум, если четыре точки лежат в плоскости (но не на прямой), равен трём для правильного тетраэдра. Параметр Роберта-Рукса (Robert/Roux) определяется формулой

$Q_{RR} = N \left(\frac{\text{TrueVol}}{\text{SphereVol}} \right)^{1/3}$, где SphereVol означает объём сферы, описанной вокруг тетраэдра, N – нормирующий множитель такой, чтобы на правильном тетраэдре Q_{RR} равнялся бы единице.

Научный отчёт о миссии Cluster [19] содержит подробный анализ связей между различными скалярными параметрами, определяющими качество тетраэдра. В отчёте проведена классификация наиболее часто встречающихся неправильных тетраэдров, для каждого типа подобран наилучший параметр, адекватно отражающий особенности его формы. Кроме того, в отчёте приводится подробное обоснование преимущества выбора качества на основе инвариантных геометрических характеристик тетраэдра (к примеру, тензора деформаций) по сравнению с произвольной комбинацией длин, площадей и объёмов. Делается вывод о том, что скалярные параметры могут быть использованы как аппроксимация формы тетраэдральной конфигурации спутников. Также в отчёте исчерпывающе обосновывается необходимость использования инвариантных геометрических характеристик тетраэдра – показана связь точности проводимых измерений с сохранением качества, определённого на основе тензора деформаций.

1.1.2 Тетраэдральная формация в миссии Magnetospheric MultiScale (MMS)

Предварительный анализ параметров, пригодных для описания качества тетраэдра в миссии MMS, сделан в [14,70]. Проводится анализ существующих подходов к описанию тетраэдра, особо рассматриваются способы описания качества, применяемые в миссии Cluster. Отдельное внимание снова уделяется полезности использования инвариантных геометрических характеристик тетраэдра. Качество тетраэдра адаптируется под цели миссии: используется сглаживающий полином и интегральный

коэффициент качества тетраэдра, оптимизация качества производится только при пролёте тетраэдра над регионом интереса.

Окончательное описание используемого качества приводится в [27,71]. В MMS качество тетраэдральной формации строится в несколько этапов.

1. Для исследуемого тетраэдра находится среднее арифметическое длин его рёбер L^* .
2. Вычисляется Q_v – отношение объёма исследуемого тетраэдра к объёму правильного тетраэдра с ребром L^* .
3. Вычисляется Q_s – определённого вида аппроксимирующая функция от средней длины ребра L^* . Она равна единице при размерах тетраэдра, практически идеальных для выполнения целей миссии (6-18 км.), нулю при слишком больших или слишком малых размерах (меньше 4 км или больше 25 км) и гладко связывает кусочно-определённую функцию полиномом четвёртого порядка. Точная формула приведена в [71], график Q_s представлен на рис. 1.

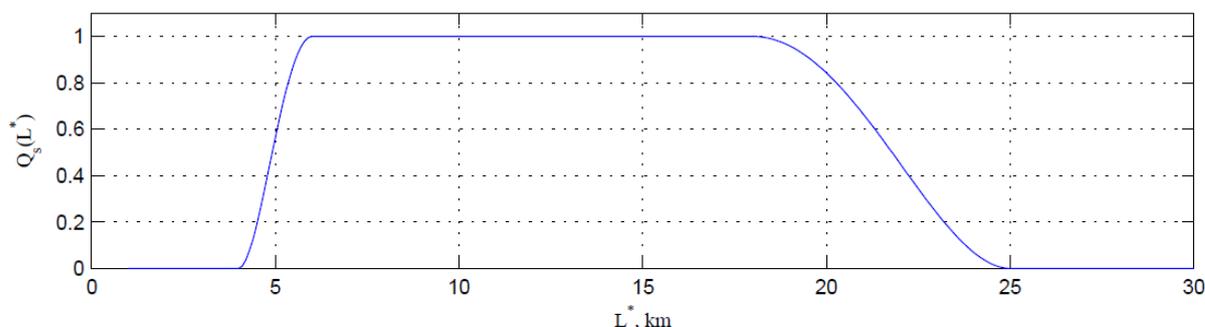


Рис. 1. График зависимости $Q_s(L^*)$. Адаптировано из [71].

4. Качество тетраэдра определяется как $Q_{MMS} = Q_s Q_v$.
5. Поскольку регионом интереса в миссии MMS является не вся орбита, а лишь некоторый её участок s , минимизации подвергается интегральная характеристика $J = \int_s (1 - Q_{MMS})^2 dt$.

1.1.3 Качество тетраэдра вне спутниковых миссий

Необходимо отметить, что задача нахождения способа описания качества тетраэдра возникает в различных областях науки, например, при построении аппроксимационных сеток [72], а также в задачах компьютерной графики [73,74].

Описание основных параметров, используемых при описании тетраэдра содержится в [75]. Большая часть параметров представляют собой алгебраические комбинации объёма тетраэдра, площадей его граней, длин рёбер, длин вписанной и описанной сферы и т.д. Проведённое в [75] численное исследование чувствительности различных мер качества при деформации тетраэдра изображено на рис. 2.

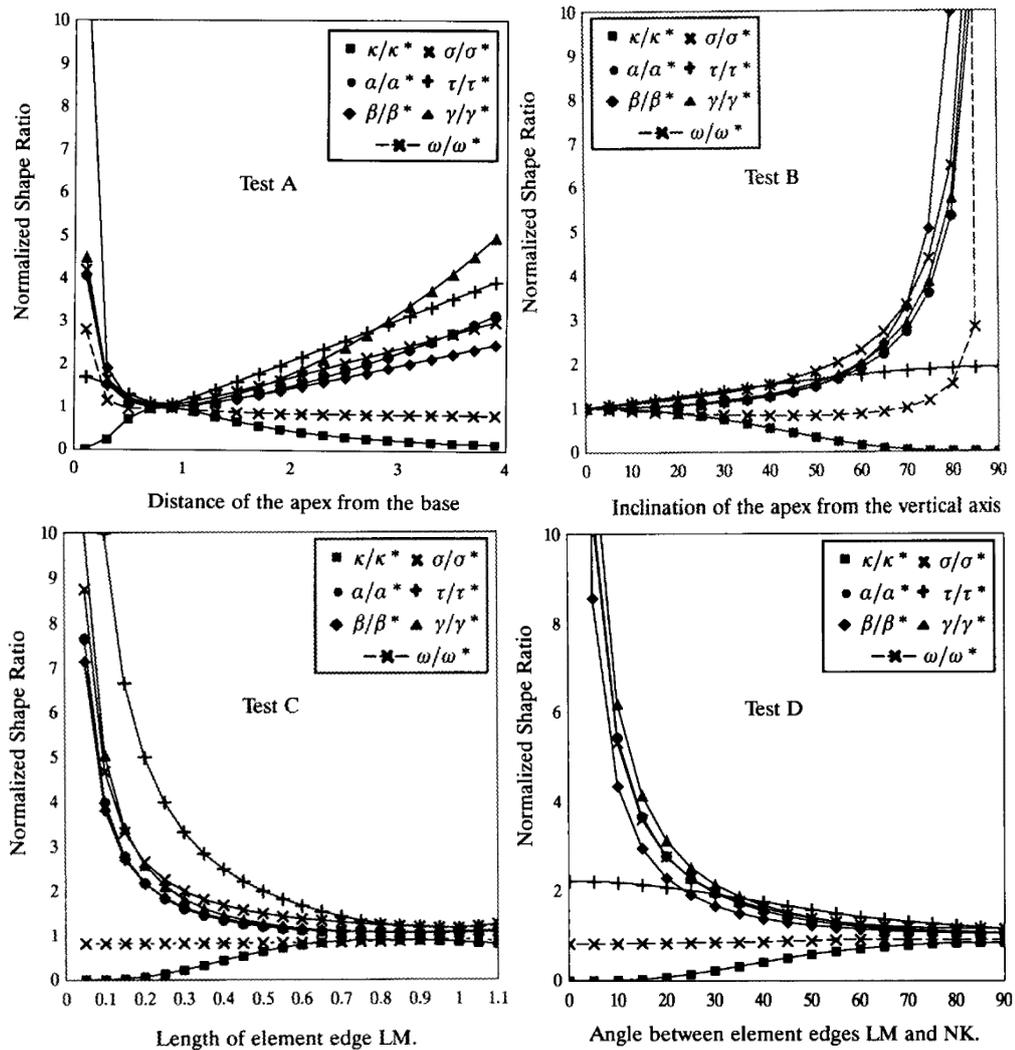


Рис. 2. Исследование мер качества тетраэдра. Адаптировано из [75].

Алгебраическое исследование различных способов задания качества тетраэдра проведено в [76].

1.2 Обзор моделей движения

Для описания движения в современных миссиях, использующих групповой полёт спутников, применяются различные модели. Моделирование движения каждого из спутников напрямую относительно Земли непрактично в случае группы близко летящих аппаратов (в том смысле, что расстояние между спутниками много меньше расстояния от спутников до центра Земли). Вместо этого принято описывать движение спутников друг относительно друга, либо же относительно некоторой фиктивной системы отсчёта. Каждая из подобных моделей относительного движения имеет свои области применения и ограничения, заключающиеся в основном в различных предположениях об эксцентриситете орбит, действующих на аппараты возмущений, а также различной вычислительной сложности самой модели. В настоящем разделе мы кратко рассмотрим основные типы моделей относительного движения спутников.

1.2.1 Системы координат

Для описания движения спутников в формации будем использовать следующие правые ортонормированные системы координат (СК):

- инерциальная система координат O_aXYZ (ИСК): центр O_a расположен в центре масс Земли, O_aZ направлен вдоль оси вращения Земли, O_aX направлен в заранее выбранную фиксированную точку (к примеру, в точку Весеннего равноденствия эпохи J2000);
- орбитальная система координат $Oxyz$ (ОСК): центр O совпадает с одним из спутников (опорным), ось Ox направлена вдоль радиус-вектора опорного спутника от центра Земли, ось Oz — по нормали к плоскости орбиты в направлении орбитального момента, ось Oy дополняет систему

до правой тройки. В англоязычной литературе такую систему также называют LVLH – система координат «локальная вертикаль – локальный горизонт». Следует отметить, что в различных источниках оси орбитальной системы координат могут определяться различным образом, что может повлечь с свою очередь циклическую замену переменных в соответствующих уравнениях.

1.2.2 Уравнения движения

Пусть имеется два спутника на близких орбитах и малом расстоянии друг от друга. Один из спутников назовём главным или ведущим («chief» в англоязычной литературе), а второй – ведомым («deputy» или «follower»). Орбитальную систему координат будем связывать с главным спутником, тем самым, движение ведомого спутника в ОСК есть движение ведомого спутника относительно главного.

В ОСК система уравнений, описывающих относительное движение двух спутников, имеет вид [77]

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - \dot{\theta}^2x &= -\frac{\mu(r_c + x)}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{\mu}{r_c^2} + f_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y &= -\frac{\mu y}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + f_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + f_z, \\ \ddot{r}_c &= r_c \dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c^2}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}_c \dot{\theta}}{r_c}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь f_x, f_y, f_z – проекции на оси ОСК сил, действующих на ведомый спутник, отличных от силы тяготения, формируемой центральным ньютоновским гравитационным потенциалом с гравитационным параметром μ , символом r_c обозначено расстояние от ведущего спутника до

притягивающего центра, $\dot{\theta}$ – угловая скорость орбитальной системы координат, точкой обозначено дифференцирование по времени.

Основная упрощённая модель движения, используемая в настоящей работе, получается из (1) при наличии следующих допущений и предположений:

- орбита главного спутника круговая;
- движение происходит только в центральном поле с ньютоновским гравитационным потенциалом;
- расстояние между спутниками мало по отношению к радиусу орбиты главного спутника – т.е. отношение r/r_c можно считать малым.

При этих предположениях модель движения упрощается, получающиеся линеаризованные уравнения называются системой уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира (ХКУ, или HCW, или CW) [78,79]. В ОСК система имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + n^2z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $n = \sqrt{\mu/r_c^3}$ – среднее движение. Поскольку это система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, её решение получается аналитически. Одно из уравнений системы (описывающее движение перпендикулярно плоскости орбиты) отделяется, что ещё более облегчает анализ.

Отметим дополнительное удобство линейной модели уравнений движения. Для построения относительного движения вовсе не обязательно предполагать наличие главного спутника, движущегося по круговой орбите. Тот же результат можно получить следующим рассуждением: зафиксируем некоторую орбиту (круговую в случае модели ХКУ), которую назовём опорной. При наличии главного спутника он будет двигаться по опорной

орбите. В общем же случае будем предполагать, что по этой орбите движется фиктивная точка, с которой свяжем ОСК, а положение и скорости ведомого спутника будем рассчитывать относительно этой ОСК. Такой подход удобен, поскольку опорную орбиту можно выбрать наиболее практичным способом. Затем, даже если решаемая задача предполагает расчёт движения двух спутников, можно сначала рассчитать движение каждого из спутников относительно опорной орбиты, а затем вычесть движения друг из друга (точнее, вычесть решения соответствующих уравнений), получив тем самым движение одного спутника относительно другого в линейном приближении.

Пусть поставлена задача Коши для системы (2) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение задачи (2),(3) есть

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{\dot{x}_0}{n} \cos nt_0 - \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \sin nt_0 \right] \sin nt \\ &\quad - \left[\frac{\dot{x}_0}{n} \sin nt_0 + \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \cos nt_0 \right] \cos nt + 2 \left(\frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0 \right), \\ y(t) &= \left[y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} + 3n \left(\frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0 \right) t_0 \right] - 3 \left(\frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0 \right) nt \\ &\quad + 2 \left[\frac{\dot{x}_0}{n} \cos nt_0 - \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \sin nt_0 \right] \cos nt \\ &\quad + 2 \left[\frac{\dot{x}_0}{n} \sin nt_0 + \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \cos nt_0 \right] \sin nt, \\ z(t) &= \left(z_0 \sin nt_0 + \frac{\dot{z}_0}{n} \cos nt_0 \right) \sin nt + \left(z_0 \cos nt_0 - \frac{\dot{z}_0}{n} \sin nt_0 \right) \cos nt. \end{aligned} \quad (4)$$

Стандартным методом придания компактного вида полученной системе является введение новых констант, которые являются функциями начальных условий движения,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0, \\
C_2 &= \frac{\dot{x}_0}{n} \cos nt_0 - \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \sin nt_0, \\
C_3 &= \frac{\dot{x}_0}{n} \sin nt_0 + \left(\frac{2\dot{y}_0}{n} + 3x_0 \right) \cos nt_0, \\
C_4 &= y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} + 3n \left(\frac{\dot{y}_0}{n} + 2x_0 \right) t_0, \\
C_5 &= z_0 \sin nt_0 + \frac{\dot{z}_0}{n} \cos nt_0, \\
C_6 &= z_0 \cos nt_0 - \frac{\dot{z}_0}{n} \sin nt_0.
\end{aligned} \tag{5}$$

С учётом (5) решение системы уравнений ХКУ (4) представляется в виде

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2C_1 + C_2 \sin nt - C_3 \cos nt, \\
y(t) &= 2C_2 \cos nt + 2C_3 \sin nt + C_4 - 3C_1 nt, \\
z(t) &= C_5 \sin nt + C_6 \cos nt.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из решения видно, что константа C_1 отвечает за сдвиг вдоль радиус-вектора и за постоянный линейный дрейф относительного положения спутника вдоль опорной орбиты. Константа C_4 отвечает за постоянный сдвиг вдоль направления движения по опорной орбите. Пары C_2, C_3 и C_5, C_6 отвечают за амплитуду и фазу колебаний спутника в плоскости опорной орбиты и перпендикулярно плоскости опорной орбиты соответственно. Движение в линейном приближении периодическое, если $C_1 = 0$ или $\dot{y}_0 = -2nx_0$, т.е. в линейном приближении на движение спутника накладывается одно ограничение.

Отметим также, что решение (6) может быть приведено к амплитудно-фазовому виду

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2C_1 + C_{xy} \sin(nt - \sigma_{xy}), \\
y(t) &= 2C_{xy} \cos(nt - \sigma_{xy}) + C_4 - 3C_1 nt, \\
z(t) &= C_z \sin(nt - \sigma_z).
\end{aligned} \tag{7}$$

Модель движения ХКУ корректно описывает относительное движение спутников лишь на малых промежутках времени вследствие нелинейности истинного движения и наличия неучтённых возмущений из-за негравитационных сил [80]. Несмотря на это, благодаря своему удобству, модель ХКУ часто используется при планировании и проектировании миссий [81–90].

В различных исследованиях рассматривается модель ХКУ в криволинейных координатах [91,92]. К примеру, вместо ортонормированной декартовой тройки x, y, z за независимые координаты принимаются сферические координаты ρ, φ, θ . При этом ρ есть разница длин радиус-векторов спутников в ИСК, координаты φ, θ суть углы двух последовательных поворотов (рис. 3). Линеаризованная система уравнений в криволинейных координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \rho - 2n \frac{d}{dt} (r_c \theta) - 3n^2 \rho &= 0, \\
\frac{d^2}{dt^2} (r_c \theta) + 2n \frac{d}{dt} \rho &= 0, \\
-\frac{d^2}{dt^2} (r_c \varphi) - n^2 (r_c \varphi) &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученная система уравнений после замены переменных $\rho \rightarrow x, r_c \theta \rightarrow y, -r_c \varphi \rightarrow z$ имеет тот же вид, что и исходная система уравнений ХКУ, а потому её решения аналогичны (6). Однако, вокруг Земли спутники движутся по дугам конических сечений, так что линейный рост угловой, а не декартовой переменной является более естественным. Вследствие этого решения в криволинейной модели ХКУ точнее описывают относительное движение спутников в направлении вдоль орбиты [91]. За

несколько часов пассивного движения спутников расхождение между реальным движением и предсказаниями криволинейной модели ХКУ на несколько порядков меньше расхождения между реальным движением и предсказаниями декартовой модели ХКУ. Современные примеры исследования относительного движения в криволинейных координатах представлены в [93,94].

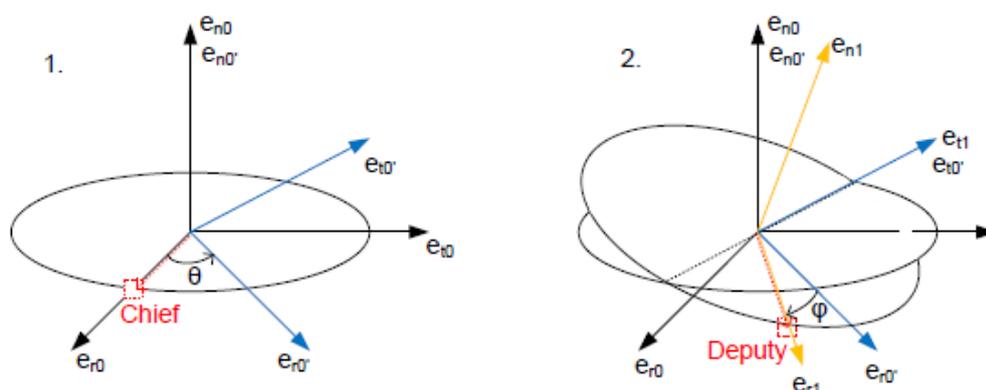


Рис. 3. Схематичное описание поворота от радиус-вектора главного спутника (chief) к радиус-вектору ведомого (deputy). Адаптировано из [91].

Модель ХКУ выводится и справедлива при движении главного спутника по круговой орбите в отсутствии возмущений и под действием только центральной гармоники гравитационного поля, так что для уточнения движения при других допущениях модель расширяют и усложняют. Уточнённая линейная модель относительного движения двух спутников, учитывающая вторую гармонику гравитационного поля Земли, исследуется в [95,96]. Особый класс J_2 -инвариантных относительных орбит исследуется в [97,98], выводятся условия и ограничения на начальные данные спутников, которые обеспечивают ограниченность относительного движения, приводятся связи между декартовыми относительными координатами и орбитальными элементами орбит спутников.

Модели движения, учитывающие ненулевой эксцентриситет опорной орбиты рассмотрены в [99–101], а различные решения соответствующих

моделей, переходы и связи между ними – в [102–106]. Изучение движения группы спутников по эллиптическим орбитам и построение алгоритмов управления представлено в [107–110]. Отдельно отмечены специфические эффекты движения спутников в группе, возникающие на высокоэллиптических орбитах [111]. Малость отношения r/r_c расстояния между спутниками к расстоянию от главного спутника до притягивающего центра используется в дальнейшем при разложении левых частей уравнения (1) до второго порядка по r/r_c в [112,113].

Иногда для описания относительного движения спутников в группе вместо декартовых координат используются орбитальные элементы спутников и разницы между ними [114–117]. Такое представление зарекомендовало себя точностью и удобством применения [118]. Различные модели, включающие влияние атмосферы на движение спутников, рассмотрены в [119,120]. Отдельный интерес представляет обзор, содержащий описание основных моделей относительного движения спутников и переходов между ними [121].

Отметим, что относительное движение спутников при реальном обращении группы вокруг Земли не может быть финитным вследствие невозможности точного знания истинной величины сил, действующей на спутники, и неустранимых ошибок в обеспечении начальных данных спутников формации. Поэтому, использование управления их относительным движением неизбежно и разработка алгоритмов управления спутниками в группе приобретает большое значение.

Одним из распространенных способов управления формацией является использование реактивных двигателей. В частности, именно этот подход использовался в вышеупомянутых миссиях Cluster и MMS [11,27]. Ещё один пример современной миссии, использующей реактивные двигатели для управления относительным движением, – миссия HawkEye Pathfinder [122]. Задача маневрирования спутниками на околокруговых орбитах с

использованием двигателей в том числе для поддержания необходимого относительного движения подробно исследована в [123]. Отметим тем не менее, что использование невозобновляемого ресурса для поддержания относительного движения ограничивает время жизни спутниковой группировки, усложняет конструкцию спутников и удорожает миссию. Рассмотрим потому альтернативные – бестопливные методы управления спутниками в группе.

1.3 Бестопливные способы управления малыми спутниками

Управление групповым полётом спутников может быть осуществлено без расхода рабочего тела, что особенно целесообразно при рассмотрении группового полёта малых спутников в связи с естественными ограничениями на массу служебных систем и запас топлива на таких аппаратах. Спутник массой порядка 10 кг вряд ли может быть оснащён реактивной установкой и достаточным запасом рабочего тела для осуществления полноценного маневрирования во время выполнения научной или прикладной задачи.

На текущий момент существуют как успешно запущенные [44], так и разрабатываемые [47] миссии по исследованию ионосферы Земли, использующие наноспутники типа CubeSat. Поскольку масса стандартного 3U CubeSat не превышает 4 кг, для таких спутников обеспечение бестопливного управления особенно актуально.

Рассмотрим наиболее распространённые способы бестопливного управления относительным движением группы спутников. Использование сил электростатического взаимодействия для управления формацией подразумевает, что каждый из спутников способен накапливать электростатический заряд на своей поверхности [124,125]. Возможность накопления заряда на спутниках исследована в миссии SCATHA [126]. Силы и моменты, возникающие вследствие электростатического взаимодействия спутников, предлагается использовать для обеспечения стыковки аппаратов и

увода космического мусора с орбиты [127,128]. На заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца. Эту силу можно использовать для управления заряженным спутником, движущимся в геомагнитном поле. Возможность такого управления применительно к задачам поддержания формации на орбите исследована в [129–133].

Заметное число научных исследований направлено на рассмотрение возможности управления формацией с помощью силы светового давления. Использование солнечного паруса (и силы светового давления) для построения управления спутниками в миссии по изучению геомагнитного поля предлагается в [134]. Формирование группы из двух, трёх и четырёх спутников с помощью солнечного паруса рассмотрено в [33,135,136]. Концепция миссии GEOSAIL специально разработана для изучения геомагнитного поля, для управления относительным движением спутников используется исключительно сила светового давления [137].

Отдельный пласт работ посвящён алгоритмам и довольно экзотическому способу управления относительным движением, основанному на обмене массой между спутниками формации. Одна из первых статей, рассматривающих такой способ управления [138], включает, помимо прочего, рассмотрение сложных геометрических конструкций из спутников на орбите. Подход развит далее в [139]. Похожий подход к управлению на основе обмена массой с помощью капель жидкости, непрерывно или дискретно передаваемых между спутниками, описывается в [140,141]. В работах [142,143] рассматривается возможность поддержания группы из двух спутников с помощью обмена между ними пассивным твёрдым телом.

Для низкоорбитальных формаций, состоящих из малых спутников, естественный способ бестопливного управления может основываться на эффекте торможения космического аппарата в атмосфере. Управляя соответствующим образом ориентацией каждого из спутников, можно добиться, чтобы на спутники действовали различные силы сопротивления.

Это позволяет осуществлять управление относительным движением спутников в группе. Идея такого управления была высказана и рассмотрена в [144]. В дальнейшем были детально проанализированы возможности применения такого подхода в задачах стыковки, а также предложены различные законы управления спутниковой формацией [145–148].

2 Общий метод построения тетраэдральной формации спутников

В этой главе мы будем рассматривать задачу в следующей постановке. Четыре аппарата движутся пассивно по близким околокруговым кеплеровым орбитам на небольшом расстоянии друг от друга. Объектом исследования будет образуемая ими тетраэдральная формация. Основная цель – подбор таких начальных данных для спутников, чтобы тетраэдр сохранял свою форму во время обращения спутников по орбите. Исследовать задачу в этой главе мы будем в линейном приближении. Форма тетраэдра требует строгого математического описания. Поскольку ошибки измерений, проводимых тетраэдральной группой на орбите пропорциональны «неправильности» тетраэдра [19], потребуем постоянства формы тетраэдра для получения согласованных измерений в процессе движения, а также максимальной приближенности тетраэдра к правильному для уменьшения ошибок измерения. Помимо формы, размер тетраэдра также важен, поскольку от него зависит, какие именно измерения группа может проводить в космосе. Итак, в этой главе необходимо выполнить следующее.

1. Описать форму тетраэдра, образуемого четырьмя спутниками, с помощью скалярного параметра.
2. Задать начальные условия для спутников, чтобы тетраэдр, образуемый ими, со временем сохранял свою форму, по крайней мере, в линейном приближении.
3. Обеспечить невырожденность тетраэдра в любой момент времени.
4. При выполнении условий 2 и 3 обеспечить максимальную близость тетраэдра к правильному тетраэдру того же объёма.

5. Исследовать изменение объёма тетраэдра при сохранении его качества. Получить такие начальные условия движения спутников, чтобы тетраэдр сохранял и свою форму, и свой объём.

2.1 Качество тетраэдра

Выбор функции, описывающей форму тетраэдра, (далее эту функцию мы будем называть *качеством тетраэдра*) необходимо произвести с учётом следующих условий и факторов:

- согласно [19], качество тетраэдра должно опираться на инвариантные геометрические характеристики тетраэдра,
- необходимо учесть опыт разработки миссии MMS и выбор качества тетраэдра в этой миссии [71],
- согласно исследованию [75] некоторые функции чувствительнее других реагируют на нежелательные изменения формы тетраэдра,
- работа [76] приводит алгебраические условия, которым должно удовлетворять качество тетраэдра.

Синтезируя указанные требования и условия и принимая во внимание [149], определим качество тетраэдра \mathbb{Q} следующим образом:

$$\mathbb{Q} = 12 \frac{(3\mathbb{V})^{2/3}}{\mathbb{L}}. \quad (9)$$

Здесь \mathbb{V} – объём тетраэдра, \mathbb{L} – сумма квадратов длин его рёбер. Числовой коэффициент подобран для нормировки – качество равняется единице на правильном тетраэдре.

Инвариантный смысл введённого качества обоснуем следующими рассуждениями, следуя [150]. Пусть $\hat{T}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ – произвольный тетраэдр, а $\mathcal{T} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 \quad \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0)$ – матрица, ассоциированная с этим тетраэдром (\mathbf{r}_i предполагаются вектор-столбцами). Для любых двух тетраэдров \hat{T}_1 и \hat{T}_2

определим аффинный оператор, переводящий \hat{T}_1 в \hat{T}_2 . Такой оператор состоит из сдвига и линейного преобразования трёхмерного векторного пространства – матрица этого преобразования есть $M(\hat{T}_1, \hat{T}_2) = T_2 T_1^{-1}$. Пусть далее $A(\hat{T}_1, \hat{T}_2) = M^T M$ – матрица соответствующей квадратичной формы.

Определим качество произвольного тетраэдра \hat{T}

$$\mathbb{Q}(\hat{T}) = \frac{3\sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \quad (10)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа матрицы $A(\mathcal{R}, \mathcal{T})$, а $\hat{\mathcal{R}}$ – правильный тетраэдр того же объёма, что и \hat{T} .

Введённое подобным образом качество (10) совпадает с (9) [150]. Подробно анализируется геометрический смысл такого качества: при преобразовании тетраэдра вписанная сфера переходит во вписанный эллипсоид, а собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ напрямую связаны с длинами полуосей вписанного в тетраэдр \hat{T} эллипсоида.

Отметим, что полученное качество несёт инвариантный геометрический смысл, чувствительно к нежелательным изменениям формы тетраэдра [75] и выражается через сингулярные числа матрицы преобразования [76].

Несколько тетраэдров с указанным качеством для лучшей визуализации введённой функции представлены на рис. 4. Отметим, что значение $\mathbb{Q} = 0$ отвечает вырожденному тетраэдру, то есть такому, у которого все четыре его вершины лежат в одной плоскости.

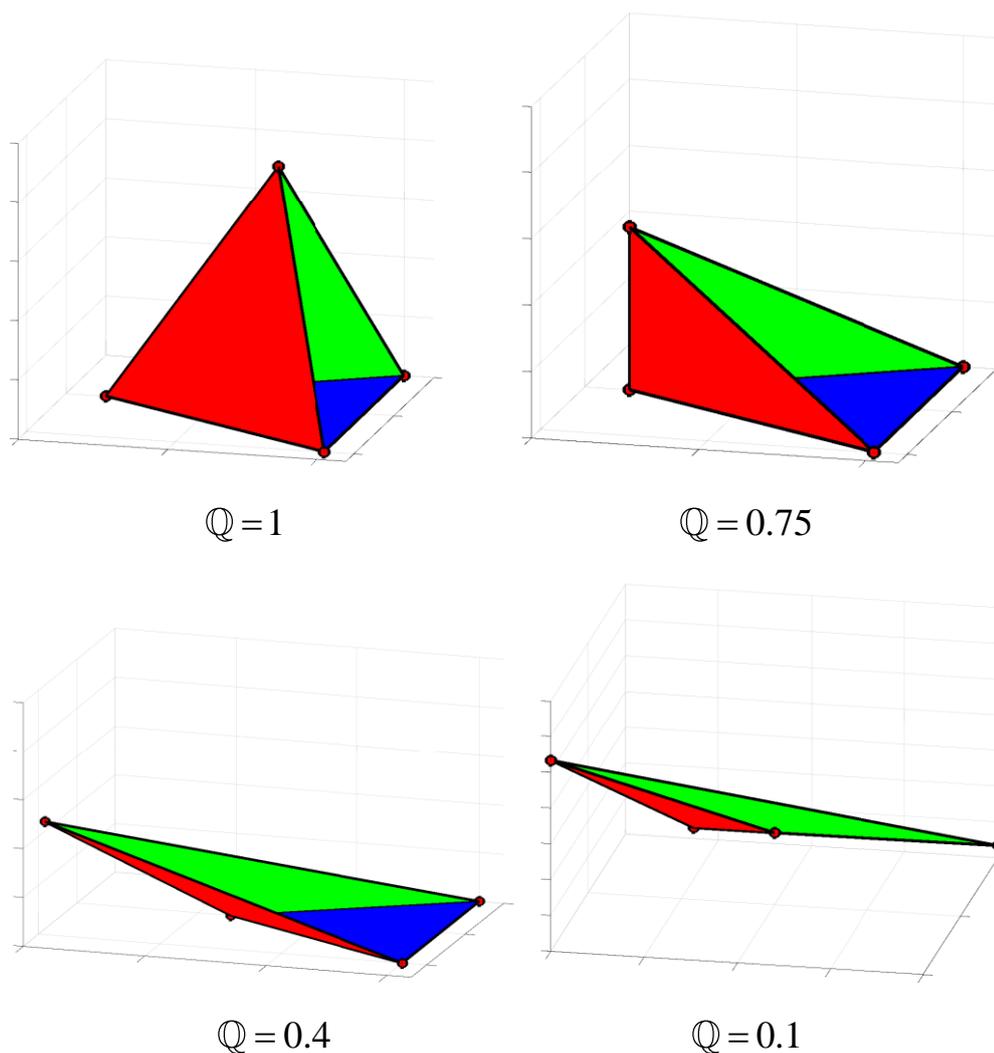


Рис. 4. Примеры тетраэдров с указанным качеством.

2.2 Относительное движение спутников в группе

Поскольку спутники движутся по близким околокруговым орбитам на небольшом расстоянии друг от друга, возможно введение фиктивной точки, движущейся по круговой орбите, так что расстояние между каждым из спутников и фиктивной точкой также является небольшим. С этой фиктивной точкой свяжем ОСК, и движение тетраэдральной формации будем описывать в этой ОСК. Кроме того, спутники движутся по близким орбитам, поэтому движение спутников в ОСК описывается ранее введёнными уравнениями Хилла–Клохесси–Уилтшира (2)

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x &= 0, \\
\ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0, \\
\ddot{z} + n^2z &= 0,
\end{aligned}
\tag{11}$$

где $n = \sqrt{\mu/r_0^3}$ – среднее движение, r_0 – радиус опорной орбиты, с которой связана ОСК. В нашем случае $r_0 = R$ – радиусу круговой орбиты фиктивной точки.

Поскольку система уравнений (11) линейная и однородная, разность любых двух решений также является решением. Это позволяет сделать следующую замену: решения системы (11) представляются в виде (6), где константы C_i суть функции начальных данных относительно ОСК – фиктивной системы координат. У каждого из четырёх спутников начальные данные движения в группе порождают свой набор $C_i^j, j = \overline{1..4}$. Поскольку C_i линейны относительно начальных данных (5), выберем произвольно один из четырёх спутников (далее без ограничения общности это четвёртый спутник), вычтем из каждого из движений трёх спутников движение четвертого спутника (вычтем соответствующие решения). Получившееся движение также является решением системы (11), а разности функций $C_i^j - C_i^4, j = \overline{1..3}$ представляют собой константы движения трёх спутников относительно четвёртого. Всё вышесказанное позволяет сделать следующее полезное

утверждение 1: при рассмотрении движения тетраэдральной формации в модели (11) без ограничения общности можно предполагать один из спутников покоящимся в начале ОСК.

Тогда относительное движение спутников в ОСК представляется в виде

$$\begin{aligned}
x_i &= A_i \sin \nu + B_i \cos \nu + 2C_{\text{дрейф}}, \\
y_i &= 2A_i \cos \nu - 2B_i \sin \nu + C_i - 3C_{\text{дрейф}} \nu, \quad (i = \overline{1..4}), \\
z_i &= D_i \sin \nu + E_i \cos \nu.
\end{aligned}
\tag{12}$$

По сравнению с (6) постоянные движения переименованы здесь для удобства дальнейшего изложения. Круглыми скобками $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ обозначим радиус-вектор спутника номер i в ОСК. Так как ОСК связана с четвёртым спутником, то для него выполнено $\mathbf{r}_4(t) = (x_4(t), y_4(t), z_4(t)) \equiv (0, 0, 0)$. Для краткости записи здесь и далее введём обозначение $\nu = nt$.

2.3 Условия сохранения качества в линейной модели движения

В этом разделе получим необходимые и достаточные условия того, чтобы качество тетраэдра $\mathbb{Q} = 12 \frac{(3V)^{2/3}}{\mathbb{L}}$ оставалось ненулевым и постоянным на всём движении спутников по орбите в линейной модели движения. Докажем набор утверждений, которые вместе решают поставленную задачу. Доказательства некоторых утверждений достаточно громоздки, в таком случае в разделе приводится лишь формулировка утверждения и/или описывается основная идея доказательства, а все вычисления выносятся в приложения.

Для решения задачи в качестве модели движения четырёх спутников на орбите используются уравнения ХКУ (11) и их решения (12) с учётом *утверждения 1*.

2.3.1 Необходимость ограниченности движения

Для сохранения качества необходимо финитное движение спутников в линейной модели, поскольку в противном случае спутники не совершают периодического относительного движения, а их траектории неограниченны в ОСК, и тогда спутники перестают образовывать группу относительно небольшого размера. Это утверждение позволяет упростить используемую модель, положив $C_{\text{дрейф}} = 0$ в решении (12) для каждого из спутников, так что дрейф по оси Oy и сдвиг по оси Ox отсутствуют. Движение спутников выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x_i &= A_i \sin \nu + B_i \cos \nu, \\
 y_i &= 2A_i \cos \nu - 2B_i \sin \nu + C_i, \quad (i=1\dots 4), \\
 z_i &= D_i \sin \nu + E_i \cos \nu.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

В оставшейся части главы именно движение (13) является главным объектом изучения.

2.3.2 Выражения для объёма и суммы квадратов длин рёбер

Пусть радиус-векторы спутников суть $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, где $i=1\dots 4$, тогда выражение для объёма тетраэдра имеет вид

$$\mathbb{V} = \frac{1}{6} \det \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4\|.
 \tag{14}$$

В общем случае детерминант матрицы третьего порядка – это полином третьей степени от элементов матрицы, но в случае объёма тетраэдра – это полином второй степени, что проверяется прямой подстановкой (13) в (14). Вычисления приведены в Приложении А.

Следовательно, объём \mathbb{V} есть тригонометрический полином второго порядка от ν .

Выражение для \mathbb{L} имеет вид

$$\mathbb{L} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2.
 \tag{15}$$

Раскрывая скобки и заменяя $\cos^2 \nu = \frac{1 + \cos 2\nu}{2}$, $\sin^2 \nu = \frac{1 - \cos 2\nu}{2}$,

получаем тригонометрический полином степени не выше второй.

Следовательно, сумма квадратов длин рёбер тетраэдра есть также тригонометрический полином второго порядка от ν .

2.3.3 Основная теорема

Теорема 1: Пусть движения четырёх спутников подчиняются уравнению (13). Пусть также один из спутников покоится в начале системы отсчёта (в соответствии с *утверждением 1*). Пусть начальные данные

подобраны так, что \mathbb{Q} сохраняется и остаётся ненулевым на протяжении движения в линейной модели.

Тогда сохраняются и остаются ненулевыми по отдельности \mathbb{V} и \mathbb{L} .

Идея доказательства: Пусть на всём протяжении движения выполняется $\mathbb{Q} = \text{const}$ или, что то же самое,

$$\mathbb{V}^2 = k \cdot \mathbb{L}^3. \quad (16)$$

Слева в равенстве стоит квадрат тригонометрического полинома второй степени (пункт 2.3.2), т.е. в общем случае тригонометрический полином не выше четвертой степени. Справа в равенстве (16) стоит куб тригонометрического полинома второй степени – в общем случае тригонометрический полином шестой степени. Степени не совпадают, а значит, коэффициенты при пятой и шестой степенях \mathbb{L}^3 обнуляются. Если коэффициенты при старших степенях \mathbb{L}^3 равны нулю, то \mathbb{L} не может быть тригонометрическим полиномом степени выше первой, а его куб – тригонометрическим полиномом степени выше третьей. Степени слева и справа в (16) снова не совпадают, применяем такое же рассуждение уже для \mathbb{V}^2 . Повторяя рассуждение достаточное количество раз, приходим к выводу, что с обеих сторон равенства (16) стоят тригонометрические полиномы степени не выше нулевой, т.е. константы.

Строгое доказательство приведено в Приложении Б. В частности, показано, что возведение тригонометрических полиномов в степень не приводит к вырождению старших коэффициентов, даются точные формулы для вычислений.

Из физических соображений $\mathbb{L} \neq 0$ (четыре спутника не могут находиться в одной точке), тогда $\mathbb{Q} = 0$ влечёт $\mathbb{V} = 0$.

2.3.4 Условия сохранения объёма

Поскольку сохранение качества влечёт сохранение объёма, получим вначале условия **сохранения объёма тетраэдральной формации.**

Как было указано ранее, объём представляет собой тригонометрический полином второй степени от ν вида

$$\mathbb{V}(\nu) = P_{\mathbb{V}} + Q_{\mathbb{V}} \sin \nu + R_{\mathbb{V}} \cos \nu + T_{\mathbb{V}} \sin 2\nu + U_{\mathbb{V}} \cos 2\nu. \quad (17)$$

В пункте 2.3.3 и Приложении Б было получено, что необходимым и достаточным условием сохранения объёма являются равенства $Q_{\mathbb{V}} = R_{\mathbb{V}} = T_{\mathbb{V}} = U_{\mathbb{V}} = 0$. Для того, чтобы объём был ненулевым, требуется выполнение неравенства $P_{\mathbb{V}} \neq 0$. Для получения окончательных соотношений, которым должны удовлетворять начальные данные траекторий спутников, введём удобную нотацию. Обозначим $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3)$, $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$. В этом случае (Приложение А)

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{V}} &= \frac{1}{12} (\langle \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle) \neq 0, \\ Q_{\mathbb{V}} &= \frac{1}{3} \langle \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{D} \rangle = 0, \\ R_{\mathbb{V}} &= \frac{1}{3} \langle \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{E} \rangle = 0, \\ T_{\mathbb{V}} &= \frac{1}{12} (\langle \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rangle) = 0, \\ U_{\mathbb{V}} &= \frac{1}{12} (\langle \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{C} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle) = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где угловые скобки $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ обозначают смешанное произведение трёх векторов. Для получения условий сохранения объёма требуется разрешить систему (18) относительно начальных данных. С другой стороны, система (18) описывает необходимые и достаточные условия сохранения ненулевого объёма тетраэдральной формации. Последующие подпункты этого раздела доказываются в предположении выполнения утверждений системы (18), т.е. также являются необходимыми условиями. Далее по очереди доказываются леммы, приводящие к более простым условиям сохранения ненулевого

объёма, равносильным системе (18). Все леммы доказываются в предположении сохранения качества тетраэдра.

Лемма 1. Ни один из векторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ не является нулевым.

Если вектор \mathbf{C} нулевой, то обнуляется P_V , а вместе с ним и объём.

Если \mathbf{A} или \mathbf{D} нулевые, то в силу последнего уравнения из (18) должно обнуляться смешанное произведение $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle$, что также влечёт обнуление коэффициента P_V .

Аналогичное верно при равенстве нулю \mathbf{B} или \mathbf{E} .

Лемма 2. Векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} линейно независимы.

Предположим, что векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} коллинеарные, тогда с учётом леммы 1 $\mathbf{A} = \kappa \mathbf{B}$, откуда получим подстановкой в четвертое и пятое уравнения из системы (18)

$$\kappa \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rangle = 0,$$

$$\kappa \langle \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle = 0.$$

Подставляем выражение для $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle$ из второго уравнения в первое, применяем свойство смешанного произведения векторов, получаем

$$(\kappa^2 + 1) \langle \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C} \rangle = 0.$$

Следовательно, или $\kappa^2 = -1$, или $\langle \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C} \rangle = 0$. Первое невозможно, а второе влечёт $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E} \rangle = 0$ и $P_V = 0$, что неудовлетворительно. Следовательно, предположение неверно, векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} линейно независимы.

Лемма 3. Векторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ компланарны, вектор \mathbf{C} не компланарен им.

С учётом леммы 2 первое утверждение следует из второго и третьего уравнений системы (18). Поскольку $P_V \neq 0$, выполняется второе утверждение.

Лемма 4. Векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} раскладываются по векторам \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Выведем уравнения, связывающие векторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$, при которых объём тетраэдральной формации сохраняется ненулевым.

Поскольку \mathbf{A} и \mathbf{B} линейно независимы, они образуют базис в плоскости, являющейся линейной оболочкой этих векторов, а компланарные им векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} раскладываются по \mathbf{A} и \mathbf{B} с некоторыми коэффициентами. Запишем разложения с неопределёнными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \\ \mathbf{E} &= p_1\mathbf{A} + q_1\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Из четвертого и пятого уравнений системы (18) получим

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}, \mathbf{C}, p_1\mathbf{A} + q_1\mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, p\mathbf{A} + q\mathbf{B} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{A}, p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, p_1\mathbf{A} + q_1\mathbf{B} \rangle &= 0,\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}-q_1\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle + p\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle &= 0, \\ q\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle + p_1\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle &= 0,\end{aligned}$$

поскольку $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle \neq 0$, значит, $p = q_1$, $q = -p_1$. Итого, получив неколлинеарные векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} , векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} можно найти по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \\ \mathbf{E} &= -q\mathbf{A} + p\mathbf{B},\end{aligned}\tag{19}$$

где p и q – произвольные коэффициенты.

Лемма 5. Для невырожденности тетраэдральной формации необходимо, чтобы выполнялось $q \neq 0$.

Прямая подстановка условий (19) в формулу для объёма (17) даёт

$$\mathbb{V} = P_{\mathbb{V}} = \frac{q}{6}\langle \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B} \rangle,\tag{20}$$

так что должно выполняться $q \neq 0$.

Выражения (19) при произвольных значениях p и $q \neq 0$ вместе с условием леммы 3 дают необходимые и достаточные условия того, чтобы объём тетраэдра сохранялся постоянным и ненулевым при движении (13).

2.3.5 Сохранение суммы квадратов длин рёбер

Получим условия сохранения суммы квадратов длин рёбер.

Аналогично выражению для объёма для суммы квадратов длин рёбер было получено

$$\mathbb{L}(\nu) = P_{\mathbb{L}} + Q_{\mathbb{L}} \sin \nu + R_{\mathbb{L}} \cos \nu + T_{\mathbb{L}} \sin 2\nu + U_{\mathbb{L}} \cos 2\nu. \quad (21)$$

Для сохранения суммы квадратов длин рёбер выполняется $Q_{\mathbb{L}} = R_{\mathbb{L}} = T_{\mathbb{L}} = U_{\mathbb{L}} = 0 \neq P_{\mathbb{L}}$. Точные формулы для коэффициентов приведены в Приложении В. Для более компактного представления коэффициентов в этом тригонометрическом полиноме введём обозначение: пусть $\mathbf{R}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ и $\mathbf{R}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ – два вектора, тогда

$$f(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) - (x_1y_2 + x_2y_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + y_1z_2 + y_2z_1). \quad (22)$$

С учётом обозначения (22), коэффициенты выражения (21) представляются в виде

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{L}} &= f(\mathbf{C}, \mathbf{C}) + \frac{5f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) + 5f(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + f(\mathbf{D}, \mathbf{D}) + f(\mathbf{E}, \mathbf{E})}{2} \neq 0, \\ Q_{\mathbb{L}} &= -4f(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = 0, \\ R_{\mathbb{L}} &= 4f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 0, \\ T_{\mathbb{L}} &= -3f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + f(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = 0, \\ U_{\mathbb{L}} &= \frac{3f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - 3f(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + f(\mathbf{E}, \mathbf{E}) - f(\mathbf{D}, \mathbf{D})}{2} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично пункту 2.3.4, условия (23) представляют собой необходимые и достаточные условия сохранения суммы квадратов длин рёбер тетраэдральной формации.

Лемма 6. Если объём тетраэдра ненулевой, то $P_{\mathbb{L}} \neq 0$.

Функция f есть симметричная положительно определённая билинейная функция,

$$f(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathbf{R}_1^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^T F \mathbf{R}_2.$$

Функция $f(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ представляет собой квадратичную форму. Вследствие критерия Сильвестра эта квадратичная форма положительно определённая. Значит, с учётом леммы 1 условие $P_{\mathbb{L}} \neq 0$ выполняется автоматически.

Лемма 7. Для сохранения качества тетраэдра необходимо выполнение условий $f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = f(\mathbf{B}, \mathbf{B})$.

Используем постоянство объёма тетраэдра, тогда все последующие выкладки верны в предположении условий (19). Из свойства билинейности получим

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{D}, \mathbf{E}) &= f(p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, -q\mathbf{A} + p\mathbf{B}) \\
 &= pq \cdot (f(\mathbf{B}, \mathbf{B}) - f(\mathbf{A}, \mathbf{A})) + (p^2 - q^2) \cdot f(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \\
 f(\mathbf{D}, \mathbf{D}) &= f(p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, p\mathbf{A} + q\mathbf{B}) \\
 &= p^2 \cdot f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) + 2pq \cdot f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + q^2 \cdot f(\mathbf{B}, \mathbf{B}), \\
 f(\mathbf{E}, \mathbf{E}) &= f(-q\mathbf{A} + p\mathbf{B}, -q\mathbf{A} + p\mathbf{B}) \\
 &= q^2 \cdot f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - 2pq \cdot f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) + p^2 \cdot f(\mathbf{B}, \mathbf{B}).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Из равенств $T_{\mathbb{L}} = U_{\mathbb{L}} = 0$ следует

$$\begin{aligned}
 (p^2 - q^2 - 3)f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) - pq(f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - f(\mathbf{B}, \mathbf{B})) &= 0, \\
 -(p^2 - q^2 - 3)(f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - f(\mathbf{B}, \mathbf{B})) - 4pq \cdot f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Рассмотрим систему (25) как систему линейных уравнений относительно двух неизвестных: $p^2 - q^2 - 3$ и pq . Она имеет тривиальное нулевое решение $p^2 - q^2 - 3 = pq = 0$. Из леммы 5 следует, что $q \neq 0$, а значит $p = 0$ и $q^2 = -3$, что невозможно. Следовательно, система уравнений (25) должна иметь решение, отличное от тривиального, а для этого детерминант этой системы должен быть равен нулю, т.е. необходимо, чтобы выполнялось

$$4(f(\mathbf{A}, \mathbf{B}))^2 + (f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - f(\mathbf{B}, \mathbf{B}))^2 = 0,$$

а значит, система $T_{\mathbb{L}} = U_{\mathbb{L}} = 0$ эквивалентна тому, что

$$f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0, \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = f(\mathbf{B}, \mathbf{B}).$$

Вместе с остальными уравнениями системы (23) необходимые и достаточные условия для сохранения \mathbb{L} имеют вид

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) &= 0, \\
f(\mathbf{B}, \mathbf{C}) &= 0, \\
f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= 0, \\
f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) &= f(\mathbf{B}, \mathbf{B}).
\end{aligned} \tag{26}$$

Соотношения (19) и (26) совместно с неравенствами $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle \neq 0$ и $q \neq 0$ представляют собой необходимые и достаточные условия, при которых качество тетраэдра остаётся постоянным и ненулевым с течением времени (кроме того, по доказанной лемме сохраняется объём тетраэдра).

Окончательно, результаты пункта 2.3 обобщаются в следующую теорему.

Теорема 2. При движении (13) с учётом *утверждения 1* качество (9) сохраняется постоянным и ненулевым в течение всего движения тогда и только тогда, когда выполняются условия (19), (26) при дополнительных ограничениях $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle \neq 0$ и $q \neq 0$.

2.4 Движения, сохраняющие качество

Для полного описания конфигураций, сохраняющих форму и размер, необходимо решить систему уравнений (19) и (26) относительно неизвестных векторов $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$. Система (19) разрешена относительно \mathbf{D} и \mathbf{E} , решение параметризуется двумя параметрами p и q . Система (26) – это система из 4 скалярных уравнений относительно 9 скалярных неизвестных, поэтому ожидается, что её решения распадаются на пятипараметрические семейства, которые мы и будем искать. Вместе все решения задачи образуют семипараметрические семейства.

Для решения системы (26) диагонализуем матрицу F квадратичной формы:

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = SJS^{-1}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

и найдём канонический базис билинейной функции f (из-за кратности собственных чисел F таких базисов существует множество, выберем один из них):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Разложим векторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ по этому базису с неопределёнными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{B} &= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{C} &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{27}$$

тогда в каноническом базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ система (26) имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Первые три уравнения этой системы означают, что векторы, составленные из компонент a_i, b_i, c_i , попарно ортогональны, а последнее уравнение – что векторы, составленные из компонент a_i и b_i , равны между собой по модулю.

Полученный результат позволяет полностью параметризовать решения системы (26). Мы выбираем в трёхмерном пространстве три попарно ортогональных вектора таких, что модули двух из них совпадают: пусть без ограничения общности выбраны $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3)$, при этом $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Каждая такая тройка векторов порождает решение системы (26), получаемое по формуле (27). Тройка векторов задаётся пятью параметрами: три задают ориентацию ортогональной тройки и два фиксируют длины векторов.

2.5 Параметризация решений

В этом разделе рассмотрим геометрический смысл параметров, описывающих семейства решений (19) и (26).

2.5.1 Коэффициенты p и q

Рассмотрим вначале движение каждого спутника по формулам (13), вычислим скалярное произведение с учётом формул (19) и (26)

$$\begin{pmatrix} p & -\frac{q}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i - C_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -\frac{q}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i \sin \nu + B_i \cos \nu \\ 2A_i \cos \nu - 2B_i \sin \nu \\ (pA_i + qB_i) \sin \nu + (pB_i - qA_i) \cos \nu \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку p и q одни и те же для каждого спутника группы, то верно следующее:

- каждый спутник всё время движется в одной и той же плоскости,
- все эти плоскости параллельны друг другу, нормальный вектор к каждой из них равен $\begin{pmatrix} p & -\frac{q}{2} & -1 \end{pmatrix}$,
- плоскость, в которой движется спутник с номером i , сдвинута вдоль вектора скорости спутника на C_i .

Заметим, что для четвёртого спутника (а также, возможно, для других) условия выполняются в том смысле, что соответствующая плоскость для спутника существует.

Преобразуем теперь систему (19) к виду

$$\mathbf{D} = \sqrt{p^2 + q^2} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \mathbf{A} + \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \mathbf{B} \right) = \sqrt{p^2 + q^2} (\mathbf{A} \cos \chi - \mathbf{B} \sin \chi),$$

$$\mathbf{E} = \sqrt{p^2 + q^2} \left(\frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \mathbf{A} + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \mathbf{B} \right) = \sqrt{p^2 + q^2} (\mathbf{A} \sin \chi + \mathbf{B} \cos \chi).$$

Векторы **D** и **E** получаются из векторов **A** и **B** путём поворота на угол

$$\chi : \cos \chi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \sin \chi = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{и растяжения с коэффициентом}$$

$\sqrt{p^2 + q^2}$. Подстановкой в движение (13) получаем

$$\begin{aligned} x_i &= \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \sin(\nu + \zeta_i), \\ y_i &= 2\sqrt{A_i^2 + B_i^2} \cos(\nu + \zeta_i) + C_i, \\ z_i &= \sqrt{p^2 + q^2} \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \sin(\nu + \zeta_i + \chi). \end{aligned} \quad (29)$$

Следовательно, амплитуда колебаний вдоль направления Oz отличается от амплитуды колебаний в плоскости Oxy в $\sqrt{p^2 + q^2}$ раз. Следовательно, параметры p и q отвечают за ориентацию плоскостей, в которых обращаются спутники в ОСК, и за разницу в амплитудах колебаний в и вне плоскости орбиты.

2.5.2 Параметризация решений системы (26)

Несмотря на то, что формулы (27), (28) полностью описывают параметризацию решений системы уравнений (26), геометрический смысл параметров остаётся неясным. Получим более удобное с геометрической точки зрения представление системы (26). Заметим сперва, что при заданных **A** и **B** фиксация длины (и направления) вектора **C** решает систему однозначно. Поэтому длина вектора **C** (со знаком, соответствующим ориентации тройки векторов **A, B, C**) является параметром системы.

Уравнения, содержащие только **A** и **B**, выпишем явно:

$$3A_1B_1 + 3A_2B_2 + 3A_3B_3 - A_1B_2 - A_1B_3 - A_2B_1 - A_2B_3 - A_3B_1 - A_3B_2 = 0,$$

$$3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2) = 2(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 - B_1B_2 - B_1B_3 - B_2B_3).$$

Перейдём к амплитудно-фазовому представлению системы, сделав замену переменных

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha \cos \varphi, & B_1 &= \alpha \sin \varphi, \\
A_2 &= \beta \cos \psi, & B_2 &= \beta \sin \psi, \\
A_3 &= \gamma \cos \theta, & B_3 &= \gamma \sin \theta,
\end{aligned} \tag{30}$$

где α, β, γ – амплитуды колебаний соответственно первого, второго и третьего спутников в ОСК, а углы φ, ψ, θ – их начальные фазы. Получим систему

$$\begin{aligned}
2(\alpha\beta \cos(\varphi + \psi) + \alpha\gamma \cos(\varphi + \theta) + \beta\gamma \cos(\psi + \theta)) &= \\
&= 3(\alpha^2 \cos 2\varphi + \beta^2 \cos 2\psi + \gamma^2 \cos 2\theta), \\
2(\alpha\beta \sin(\varphi + \psi) + \alpha\gamma \sin(\varphi + \theta) + \beta\gamma \sin(\psi + \theta)) & \\
&= 3(\alpha^2 \sin 2\varphi + \beta^2 \sin 2\psi + \gamma^2 \sin 2\theta).
\end{aligned} \tag{31}$$

Заметим, что система инвариантна относительно каждой из замен

$$\begin{aligned}
\alpha &\rightarrow N \cdot \alpha, & \beta &\rightarrow N \cdot \beta, & \gamma &\rightarrow N \cdot \gamma, \\
\varphi &\rightarrow \varphi + \xi, & \theta &\rightarrow \theta + \xi, & \psi &\rightarrow \psi + \xi.
\end{aligned} \tag{32}$$

Следовательно, двумя параметрами решений системы (31) являются

- произвольный мультипликативный параметр N , отвечающий за размер тетраэдра в целом – множитель, отвечающий одновременно за длины векторов **A** и **B**
- произвольная аддитивная константа ξ , отвечающая за фазу вращения тетраэдра – во время движения по орбите тетраэдр вращается, выбор начального момента времени равносильен выбору начальной фазы ξ .

Из трёх амплитуд α, β, γ по крайней мере две не равны нулю – иначе три спутника из четырёх лежали бы на одной прямой во время движения, делая тетраэдр вырожденным. Без ограничения общности $\alpha \neq 0$. Выберем тогда $N = \frac{1}{\alpha}$, $\xi = -\varphi$, произведём замены (32) в системе (31) (т.е. выберем нормировку и начальную фазу так, что $\alpha = 1, \varphi = 0$). В преобразованной системе неизвестные амплитуды и фазы будем обозначать теми же буквами, что и ранее для упрощения записи. Получим систему

$$\begin{aligned} 2(\beta \cos \psi + \gamma \cos \theta + \beta \gamma \cos(\psi + \theta)) &= 3(1 + \beta^2 \cos 2\psi + \gamma^2 \cos 2\theta), \\ 2(\beta \sin \psi + \gamma \sin \theta + \beta \gamma \sin(\psi + \theta)) &= 3(\beta^2 \sin 2\psi + \gamma^2 \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (33)$$

При известных значениях амплитуд β, γ эту систему можно разрешить относительно неизвестных фаз θ, ψ . Полученное решение вместе с подстановкой произвольных параметров из (32) полностью решает систему (31). При этом решения – это параметрические семейства, у которых N, ξ, β, γ являются независимыми параметрами.

Заметим также, что при замене (32) уравнения системы (26), содержащие вектор \mathbf{C} , записываются в виде

$$\begin{aligned} C_1(3\alpha \cos \varphi - \beta \cos \psi - \gamma \cos \theta) + C_2(3\beta \cos \psi - \alpha \cos \varphi - \gamma \cos \theta) \\ + C_3(3\gamma \cos \theta - \alpha \cos \varphi - \beta \cos \psi) = 0, \\ C_1(3\alpha \sin \varphi - \beta \sin \psi - \gamma \sin \theta) + C_2(3\beta \sin \psi - \alpha \sin \varphi - \gamma \sin \theta) \\ + C_3(3\gamma \sin \theta - \alpha \sin \varphi - \beta \sin \psi) = 0. \end{aligned}$$

Окончательно, решения системы (19) и (26) распадаются на семипараметрические семейства решений, где параметрами являются

- два параметра – пара (p, q) , либо, что эквивалентно, пара $(\sqrt{p^2 + q^2}, \chi)$, отвечающие за ориентацию плоскости движения спутника в ОСК и за связь между (\mathbf{D}, \mathbf{E}) и (\mathbf{A}, \mathbf{B})
- длина вектора \mathbf{C} со знаком, отвечающая за сдвиг плоскости движения спутника в ОСК вдоль скорости и за «протяжённость» тетраэдра вдоль орбиты
- фаза ξ , отвечающая за выбор начального момента времени или начального положения тетраэдра на орбите
- три параметра – α, β, γ , либо, что эквивалентно, общий множитель при амплитудах N и два отношения $\beta/\alpha, \gamma/\alpha$, отвечающие за амплитуду колебаний спутников в ОСК.

Отдельно заметим, что перенумерация спутников не влияет на описание движения, так что мы будем относить два разных решения, получаемых друг из друга перенумерацией спутников, к одному семейству решений.

2.6 Максимизация постоянного качества

Соотношения (19) и (26) совместно являются необходимым и достаточным условием сохранения постоянного ненулевого качества тетраэдра. Определим, чему равно это постоянное качество.

Согласно (20) с учётом разложения по каноническому базису (27)

$$\text{abs}(\mathbb{V}) = \text{abs}\left(\frac{q}{6}\langle \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B} \rangle\right) = \text{abs}\left(\frac{q}{6} \cdot \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\right).$$

Прямыми вычислениями получаем, что $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 1/4$. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ попарно ортогональны, поэтому параллелепипед, построенный на этих векторах, прямоугольный. Кроме того, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Окончательно получаем, что

$$\text{abs}(\mathbb{V}) = \frac{|q|}{24} |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{c}|.$$

При тех же условиях с учётом формул (24)

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= f(\mathbf{C}, \mathbf{C}) + \frac{5f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) + 5f(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + f(\mathbf{D}, \mathbf{D}) + f(\mathbf{E}, \mathbf{E})}{2} = \\ &= f(\mathbf{C}, \mathbf{C}) + (5 + p^2 + q^2) \frac{f(\mathbf{A}, \mathbf{A}) + f(\mathbf{B}, \mathbf{B})}{2} = \\ &= |\mathbf{c}|^2 + (5 + p^2 + q^2) |\mathbf{a}|^2. \end{aligned}$$

Окончательная формула для постоянного качества тетраэдра имеет вид

$$\mathbb{Q} = 12 \frac{(3\mathbb{V})^{2/3}}{\mathbb{L}} = 3 \cdot \frac{|q|^{2/3} |\mathbf{a}|^{4/3} |\mathbf{c}|^{2/3}}{|\mathbf{c}|^2 + (5 + p^2 + q^2) |\mathbf{a}|^2}. \quad (34)$$

Поскольку числитель выражения (34) не зависит от p , а все слагаемые знаменателя неотрицательны, для максимизации качества необходимо положить $p = 0$.

Далее, применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $(x + y + z) / 3 \geq \sqrt[3]{xyz}$, получаем

$$\mathbb{Q} = 3 \cdot \frac{|q|^{2/3} |\mathbf{a}|^{4/3} |\mathbf{c}|^{2/3}}{|\mathbf{c}|^2 + 5|\mathbf{a}|^2 + q^2 |\mathbf{a}|^2} \leq \frac{|q|^{2/3} |\mathbf{a}|^{4/3} |\mathbf{c}|^{2/3}}{\sqrt[3]{|\mathbf{c}|^2 \cdot 5|\mathbf{a}|^2 \cdot q^2 |\mathbf{a}|^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}.$$

Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда $q^2 |\mathbf{a}|^2 = 5|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{c}|^2$.

Следовательно, доказана

Теорема 3: пусть начальные данные при движении (13) выбраны так, что качество (9) постоянно во время движения тетраэдральной формации. Тогда максимально возможное значение этого качества равно

$$\mathbb{Q}_{\max} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \approx 0.5848,$$

причём максимум достигается при значениях параметров

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ q &= \pm\sqrt{5}, \\ |\mathbf{c}| &= \sqrt{5} |\mathbf{a}|. \end{aligned} \tag{35}$$

2.7 Выводы по главе 2

Во второй главе работы рассмотрен общий геометрический подход к построению тетраэдральной формации, т.е. к поиску таких начальных данных для четвёрки спутников, при которых тетраэдр сохраняет свои геометрические характеристики хотя бы в линейной модели движения.

Обоснован выбор качества тетраэдра – скалярной функции, описывающей форму тетраэдра в среднем. Для введённого качества полностью решена задача нахождения таких орбит четырёх спутников в

линейном приближении, что качество тетраэдра не изменяется с течением времени.

Найдены решения соответствующих систем уравнений, решения разбиты на семипараметрические семейства. Проанализирован геометрический смысл параметров. Аналитически найдено максимальное значение постоянного качества.

3 Построение орбит для тетраэдральной формации

В этой главе основное внимание уделяется нахождению пригодных для размещения тетраэдральной спутниковой формации опорных орбит. Исследуются различные конфигурации тетраэдра на орбите. Полученные в первой главе результаты уточняются аналитически и численно в рамках нелинейной модели движения.

3.1 Существование решений при различных амплитудах

Из результатов первой главы следует, что для описания конкретной тетраэдральной конфигурации необходимо разрешить систему (31) относительно неизвестных фаз при заданных амплитудах колебаний. Естественный интерес поэтому представляет вопрос о существовании решений системы (31). Поскольку одним из параметров является общий множитель всех амплитуд, без ограничения общности можно положить одну из амплитуд равной единице, т.е. перейти к системе (33), тогда амплитуды β, γ становятся безразмерными величинами.

Исследуем систему (33) численно: выберем сетку по амплитудам β, γ , для каждого значения и построим соответствующее семейство решений.

На рис. 5 изображены решения уравнений системы (33) на плоскости фаз θ, ψ при различных фиксированных значениях амплитуд β, γ . Синяя линия – множество решений первого, а красная линия – множество решений второго уравнений системы (33).

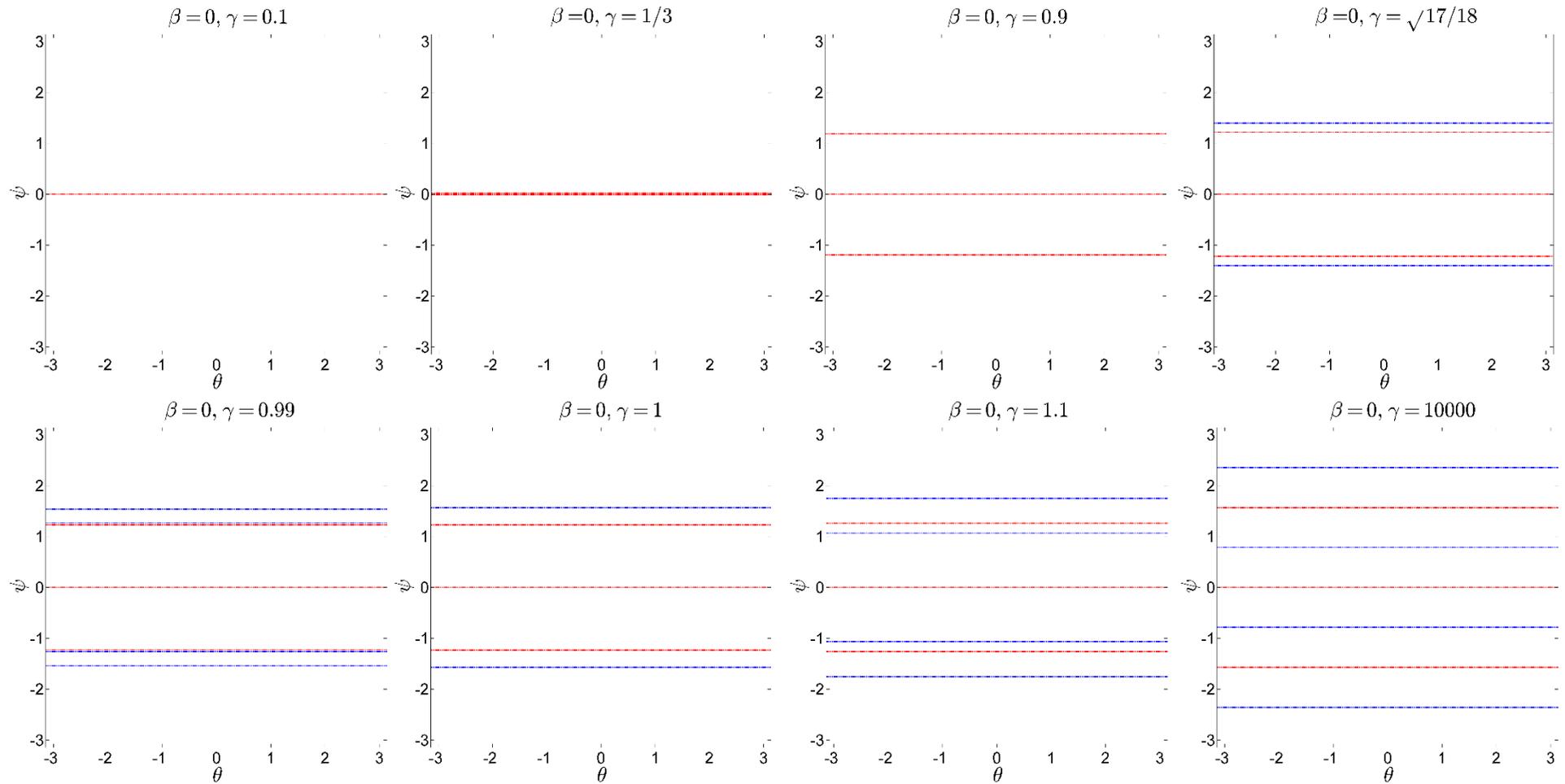
При нулевом значении одного из параметров ($\beta = 0$) слева направо сверху вниз:

1. всегда существует решение второго уравнения $\sin \theta = 0$,
2. при значении $\gamma > 1/3$ появляются дополнительные решения второго уравнения,
3. расстояние между фазовыми кривыми увеличивается с увеличением γ ,

4. при значении $\gamma = \sqrt{17/18}$ появляется решение первого уравнения системы,
5. решений несколько, они симметричны относительно $\pi/2$ и $-\pi/2$, расстояние между решениями первого и второго уравнений уменьшается с увеличением γ ,
6. при $\gamma = 1$ существует решение системы (33),
7. при дальнейшем увеличении γ расстояние между решениями увеличивается,
8. при стремлении $\gamma \rightarrow +\infty$ решений системы (33) не существует, корни первого и второго уравнений находятся на расстоянии $\pi/4$.

Заметим, что результаты для случая $\beta = 0$ могут быть получены аналитически (подробнее см. Приложение Г), в то время как в случае ненулевых амплитуд получить решение в общем виде не удаётся.

В общем случае фазовые кривые для двух уравнений системы представляют собой кривые сложной формы, в некоторых случаях порождающие, а в некоторых случаях не порождающие решения системы (33) (рис. 5).



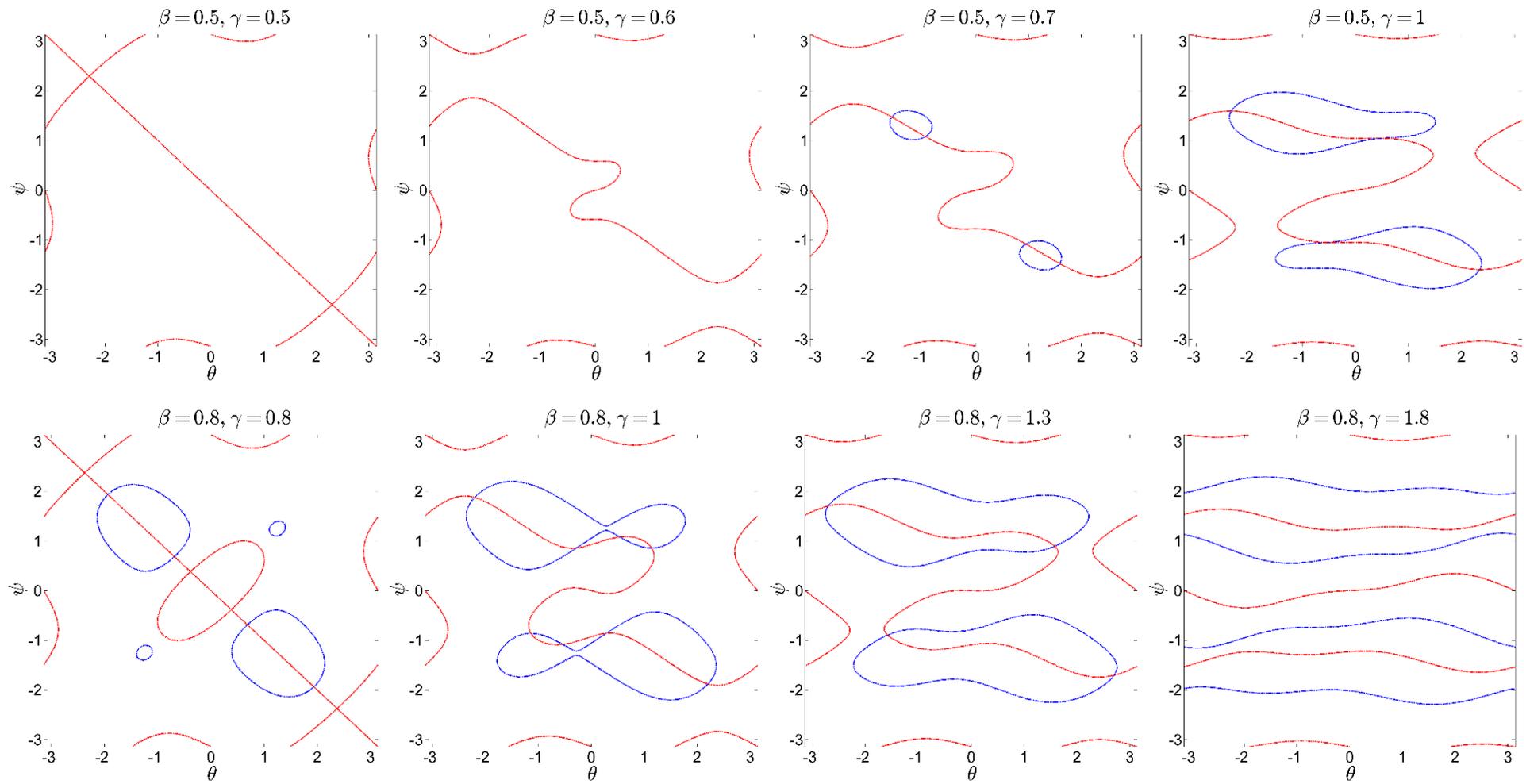


Рис. 5. Фазовый портрет системы (33) при различных значениях амплитуд.

На рис. 6 изображены результаты численного исследования: для безразмерных параметров β, γ была выбрана сетка от 0 до 5 с шагом 0.01, для каждой пары (β, γ) решалась численно система (33). Если решение удавалось найти, соответствующая точка окрашивалась на рисунке в синий цвет, в противном случае – в красный. Для решения системы использовался алгоритм Trust-Region Dogleg [151], в качестве начальных приближений бралась сетка по β, γ с шагом $\pi/4$. Расчёт производился в среде MATLAB (функция `fsolve` для решения нелинейной системы).

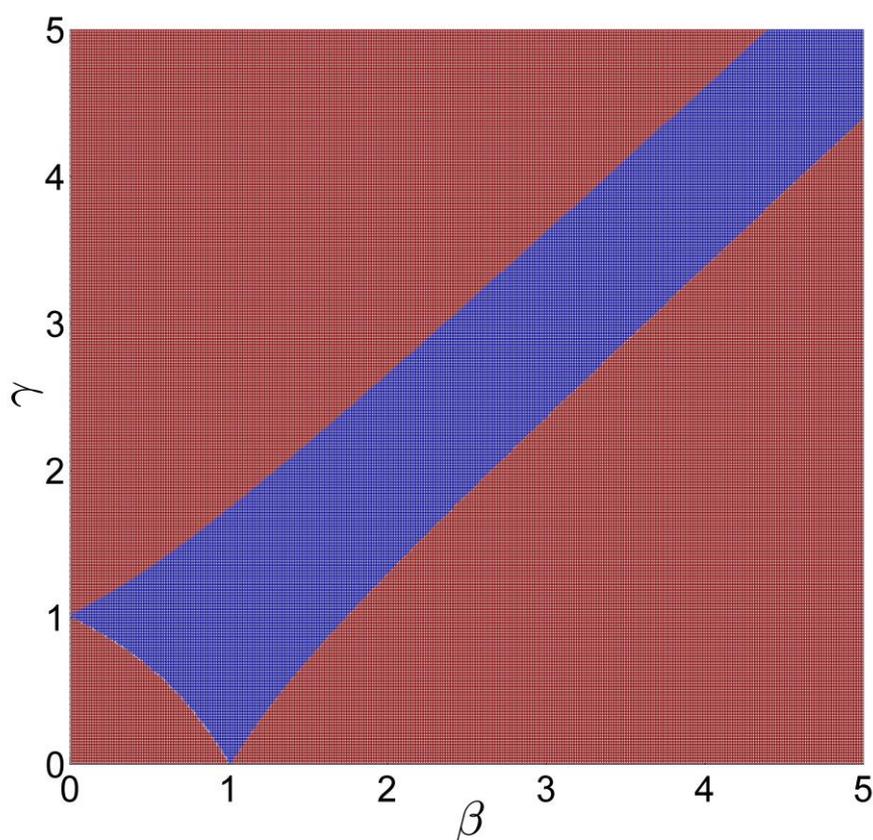


Рис. 6. Область существования решений системы (33) – синим цветом обозначены значения параметров, при которых решения существуют.

Из рис. 6 видно, что решения системы существуют при достаточно близких друг к другу значениях амплитуд различных спутников тетраэдральной группы.

3.2 Две равные амплитуды

Сделаем теперь основное упрощающее предположение: пусть две из амплитуд колебаний четырёх спутников не просто близки, а точно равны между собой. Тогда различные спутники в группе во время своего обращения по орбите находятся на одинаковых средних расстояниях друг от друга, что позволяет производить совместные одномасштабные измерения. Одна из амплитуд колебаний спутников равна нулю по построению ОСК, поэтому возможны два случая:

- амплитуда колебаний одного из трёх оставшихся спутников равна нулю, а две оставшиеся произвольные и ненулевые (иначе тетраэдр вырождается),
- амплитуды колебаний двух из трёх оставшихся спутников равны между собой (и ненулевые).

На рис. 7 представлен контур области существования решений из рис. 6. Поскольку оба рисунка построены при нормирующем предположении $\alpha = 1$, рассмотренный выше случай равенства двух амплитуд схематично отображён на рис. 7 в виде трёх прямых: $\beta = 1, \gamma = 1, \beta = \gamma$. По смыслу построения понятно, что эти три прямые на самом деле представляют одно и то же семейство решений системы (31), меняется лишь то, какой из спутников считать «первым». Отдельно заметим, что случай одной нулевой амплитуды обозначен на рисунке точками A_1 и A_2 .

Исходя из результатов численного моделирования, мы будем ожидать единственное (с точностью до переобозначения спутников) решение. Далее получим решения системы (31) в случае двух равных амплитуд аналитически, не опираясь на численное моделирование.

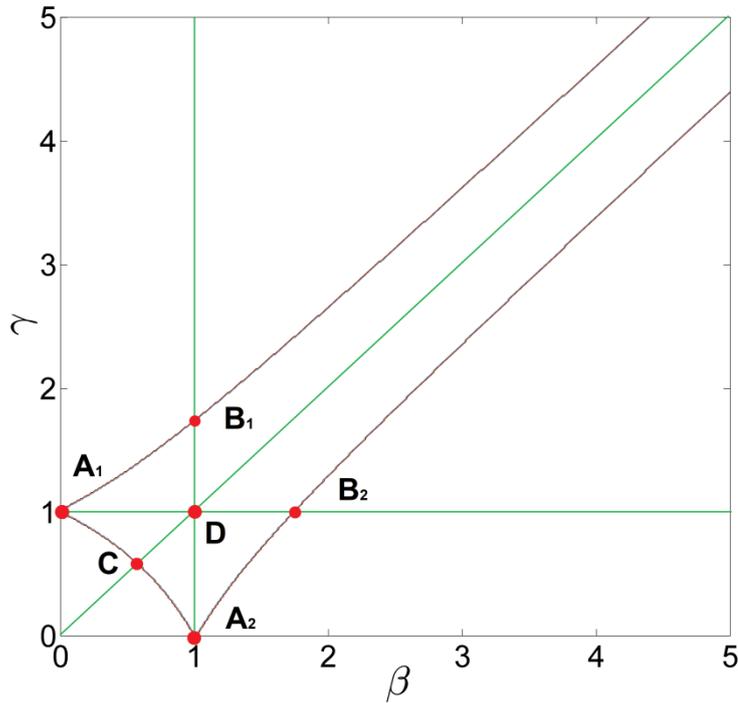


Рис. 7. Область существования решений системы (33).

3.2.1 Одна нулевая амплитуда колебаний

Рассмотрим систему (31) до проведения нормирующего преобразования. Пусть одна из амплитуд колебаний спутников равна нулю, прочие амплитуды ненулевые. Без ограничения общности положим $\alpha = 0$, тогда система (31) переходит в

$$\begin{aligned} 2\beta\gamma \cos(\psi + \theta) &= 3(\beta^2 \cos 2\psi + \gamma^2 \cos 2\theta), \\ 2\beta\gamma \sin(\psi + \theta) &= 3(\beta^2 \sin 2\psi + \gamma^2 \sin 2\theta), \end{aligned} \quad (36)$$

при этом симметрия (32) ещё не была использована для упрощения уравнений. В формуле (32) положим $N = \frac{1}{\beta}$, $\xi = -\frac{\psi + \theta}{2}$, получим систему

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2} + 1\right) \cos(\psi - \theta) &= 2\frac{\gamma}{\beta}, \\ 3\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2} - 1\right) \sin(\psi - \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Эта система имеет единственное (с учётом неотрицательности γ / β) решение

$$\gamma = \beta, \quad \cos(\psi - \theta) = \frac{1}{3}. \quad (38)$$

Возвращаясь к системе (36), получаем общее решение

$$\begin{aligned} |\theta - \psi| &= \arccos \frac{1}{3}, \\ \alpha &= 0, \quad \beta = \gamma = K. \end{aligned} \quad (39)$$

Следовательно, помимо пары спутников с нулевой амплитудой, оставшаяся пара спутников также обладает одной и той же амплитудой колебаний в ОСК.

Далее для получения явных уравнений движения в линейной системе вернёмся к замене (30), тогда

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Здесь K – произвольный масштабный параметр, отвечающий за размер тетраэдра, φ – произвольная начальная фаза. Уравнения $f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = 0$, $f(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = 0$ записываются тогда в явном виде

$$\begin{aligned} C_1(-\cos \psi - \cos \theta) + C_2(3\cos \psi - \cos \theta) + C_3(3\cos \theta - \cos \psi) &= 0, \\ C_1(-\sin \psi - \sin \theta) + C_2(3\sin \psi - \sin \theta) + C_3(3\sin \theta - \sin \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Ранг соответствующей матрицы равен двум, так что пространство решений одномерное. Явной проверкой можно убедиться, что любой вектор вида

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является решением. Оставшиеся условия задаются системой (19).

С учётом условий оптимальности качества (35) получаем двухпараметрическое семейство тетраэдров

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \varphi + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \pm K \sqrt{\frac{5}{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Указанная конфигурация представляет собой обобщение формации типа leader-follower для двух спутников. В данном случае два спутника обращаются вокруг Земли по одной орбите с постоянным фазовым сдвигом, а два оставшихся спутника обращаются вокруг них в ОСК.

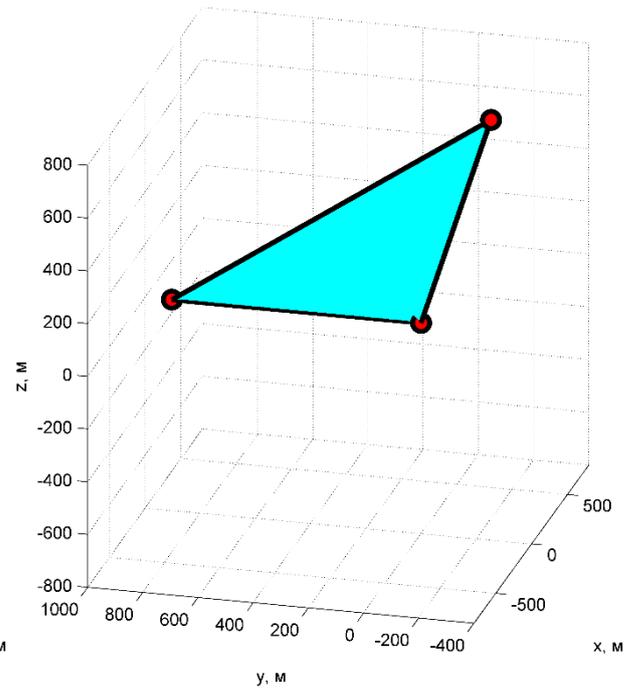
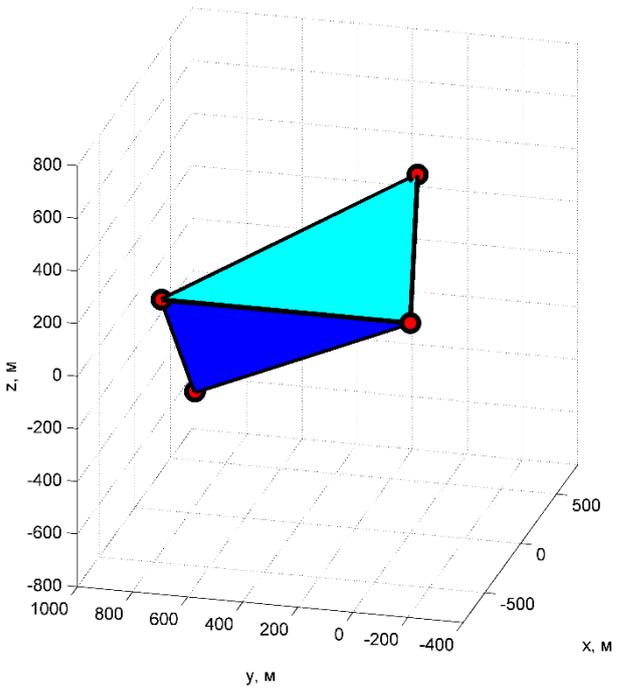
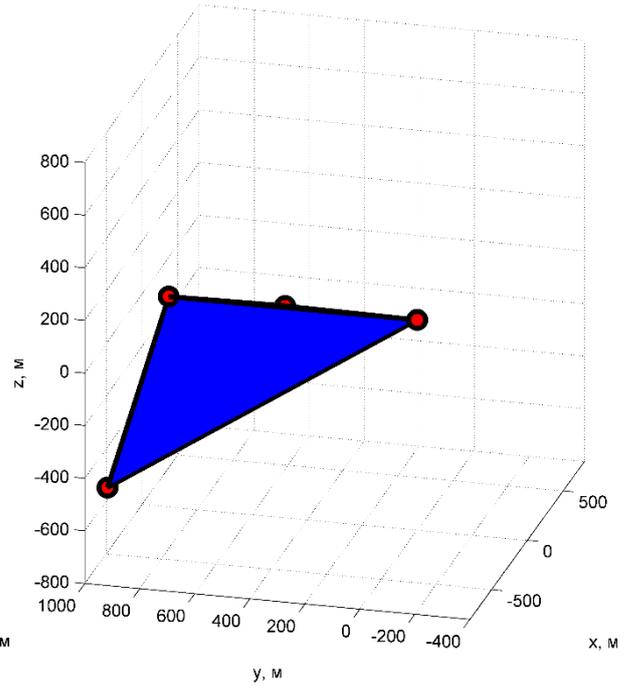
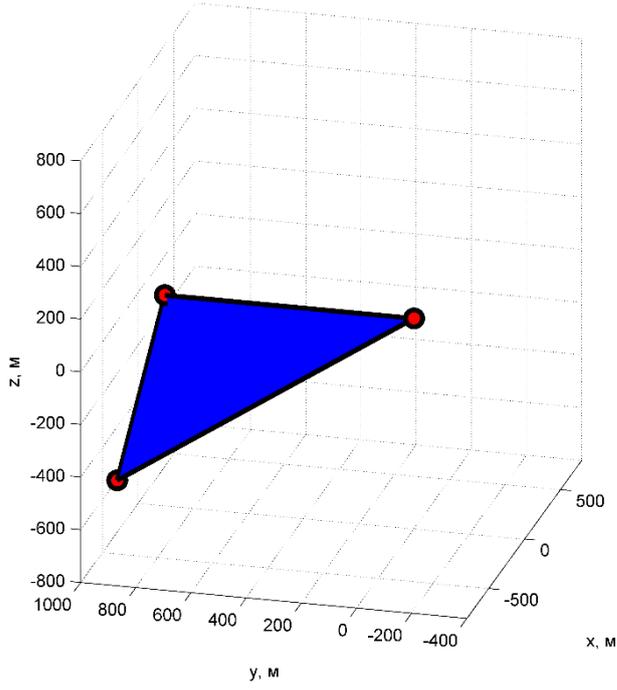
В амплитудно-фазовой форме (29) оптимальная по качеству конфигурация представляется системой

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{A}_i \sin(nt + \zeta_i), \\ y_i &= 2\bar{A}_i \cos(nt + \zeta_i) + C_i, \\ z_i &= \sqrt{5}\bar{A}_i \sin(nt + \zeta_i + \chi), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \\ K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = Kc \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi - \xi \\ \varphi + \xi \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \cos \xi &= \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ \sin \xi &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}, \quad \chi = \pm \frac{\pi}{2}, c = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Здесь K и φ произвольные параметры, знаки параметров χ и c также выбираются произвольно (они влияют на ориентацию тетраэдра в пространстве). На рис. 8 представлен вид такой тетраэдральной формации, различные подрисунки отвечают различным моментам времени.



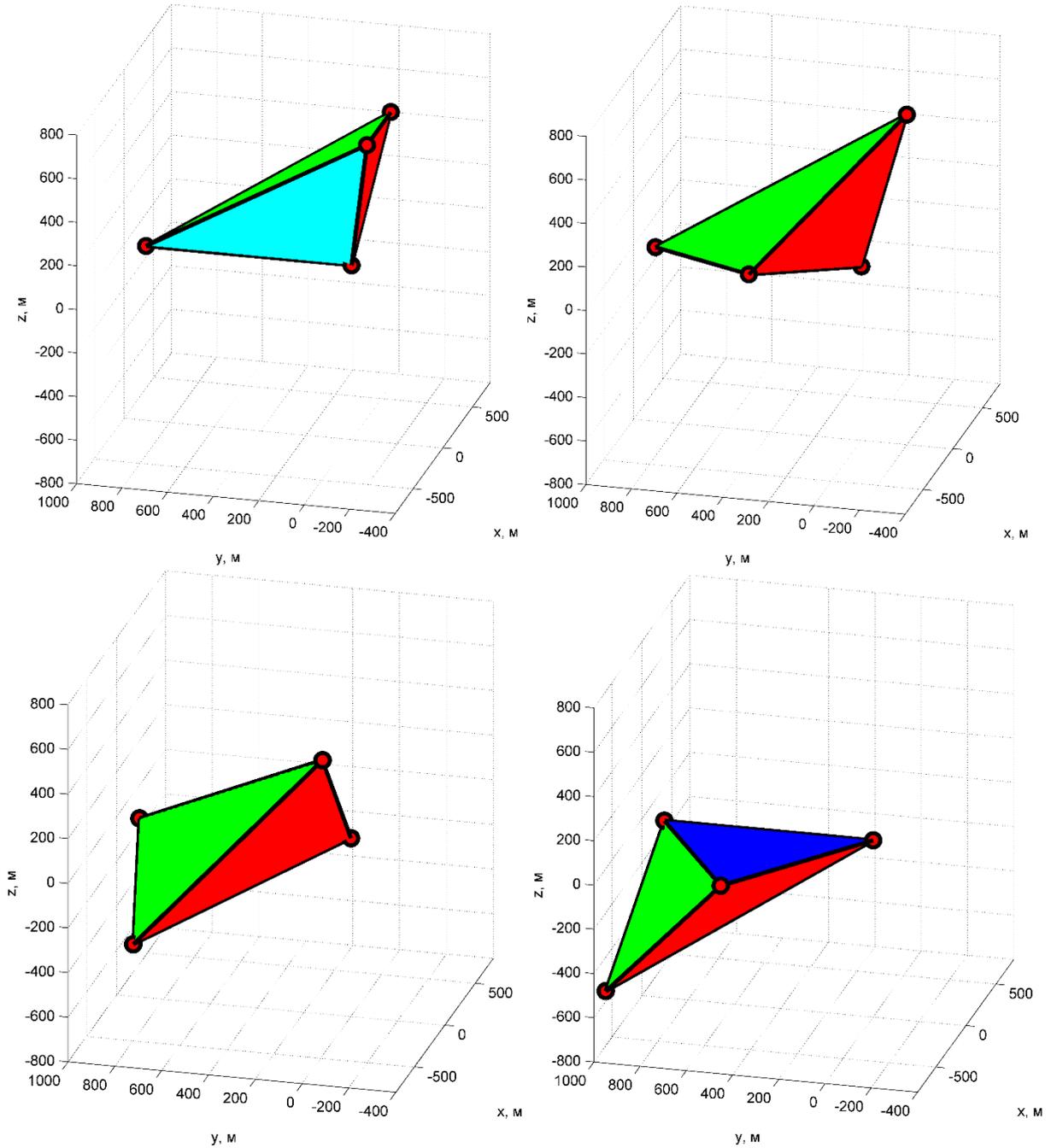


Рис. 8. Эволюция формации с течением времени.

3.2.2 Две равные ненулевые амплитуды

Предположим, что

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma} = s \neq 0,$$

также используем условие (32), тогда система (33) приходит к виду

$$\begin{aligned} 2(s \cos \psi + s \cos \theta + \cos(\psi + \theta)) &= 3(s^2 + \cos 2\psi + \cos 2\theta), \\ 2(s \sin \psi + s \sin \theta + \sin(\psi + \theta)) &= 3(\sin 2\psi + \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (42)$$

После перехода к половинному углу и упрощений система (42) переходит в

$$\begin{aligned} 4 \cos \frac{\psi + \theta}{2} \left(s \cos \frac{\psi - \theta}{2} + 4 \cos \frac{\psi + \theta}{2} - 6 \cos \frac{\psi + \theta}{2} \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} \right) + \\ + 12 \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} - 8 - 3s^2 = 0, \\ 4 \sin \frac{\psi + \theta}{2} \left(s \cos \frac{\psi - \theta}{2} + 4 \cos \frac{\psi + \theta}{2} - 6 \cos \frac{\psi + \theta}{2} \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку второе уравнение разложено на множители, возможны два случая, которые будут рассмотрены по отдельности.

Случай 1: $\sin \frac{\psi + \theta}{2} = 0$.

Здесь $\psi = -\theta$. Система (43) приобретает вид

$$\begin{aligned} 4(s \cos \theta + 4 - 6 \cos^2 \theta) + 12 \cos^2 \theta - 8 - 3s^2 = 0, \\ \psi = -\theta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\cos \theta = \frac{s \pm 2\sqrt{6 - 2s^2}}{6}.$$

Это уравнение имеет решения при $s \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Поскольку амплитуда не может быть отрицательной, то и s не может быть отрицательным, а значит, $s \in [0, \sqrt{3}]$ и два семейства решений при этих значениях имеют вид

$$\begin{aligned} \psi &= -\arccos \frac{s \pm 2\sqrt{6 - 2s^2}}{6}, \\ \theta &= \arccos \frac{s \pm 2\sqrt{6 - 2s^2}}{6}. \end{aligned} \quad (44)$$

Тогда $\sin \psi = -\sin \theta$, $\cos \psi = \cos \theta$. Если $s = \sqrt{3}$, то два семейства решений будут совпадать.

Случай 2: $\sin \frac{\psi + \theta}{2} \neq 0$.

Здесь система (43) переписывается в виде

$$\begin{aligned} 12 \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} - 8 - 3s^2 &= 0, \\ s \cos \frac{\psi - \theta}{2} + 4 \cos \frac{\psi + \theta}{2} - 6 \cos \frac{\psi + \theta}{2} \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} &= 0. \end{aligned}$$

После упрощений получим

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} &= \frac{8 + 3s^2}{12}, \\ s \cos \frac{\psi - \theta}{2} &= \frac{3s^2}{2} \cos \frac{\psi + \theta}{2}. \end{aligned} \tag{45}$$

Поскольку $s \neq 0$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\psi - \theta}{2} &= \frac{8 + 3s^2}{12}, \\ \cos \frac{\psi + \theta}{2} &= \frac{2}{3s} \cos \frac{\psi - \theta}{2}. \end{aligned}$$

Для существования решений требуется, чтобы $s \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$. Получаем

$$\begin{aligned} \psi &= \pm \arccos \frac{\frac{4}{s} + \frac{3s}{2} - \sqrt{6 - 2\left(\frac{2}{s} - 3s\right)^2}}{9}, \quad s \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right], \\ \theta &= \pm \arccos \frac{\frac{4}{s} + \frac{3s}{2} + \sqrt{6 - 2\left(\frac{2}{s} - 3s\right)^2}}{9}, \quad s \in \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right], \\ \theta &= \mp \arccos \frac{\frac{4}{s} + \frac{3s}{2} + \sqrt{6 - 2\left(\frac{2}{s} - 3s\right)^2}}{9}, \quad s \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3} \right]. \end{aligned} \tag{46}$$

Эти семейства решений отличаются от семейств для первого случая, если только не выполняется

$$\frac{s \pm 2\sqrt{6-2s^2}}{6} = \frac{\frac{4}{s} + \frac{3s}{2} \pm \sqrt{6-2\left(\frac{2}{s}-3s\right)^2}}{9},$$

то есть, когда $s=1$ или $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Получившееся решение при произвольном корректном выборе параметра s порождает пятёрку векторов **A, B, C, D, E**.

3.2.3 Три равные амплитуды

Естественным продолжением рассматриваемого подхода является рассмотрение тетраэдра, у которого амплитуды колебаний трёх спутников равны между собой. Для такого тетраэдра масштаб по всем измерениям одинаков, а ошибки согласованы. Этот случай получается из предыдущего рассмотрением $s=1$. Уравнения $f(\mathbf{A}, \mathbf{C})=0$, $f(\mathbf{B}, \mathbf{C})=0$ переходят в

$$\begin{aligned} C_1(3 - \cos \psi - \cos \theta) + C_2(3 \cos \psi - \cos \theta - 1) + C_3(3 \cos \theta - \cos \psi - 1) &= 0, \\ C_1(-\sin \psi - \sin \theta) + C_2(3 \sin \psi - \sin \theta) + C_3(3 \sin \theta - \sin \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Порождаются два различных набора решений

$$\begin{aligned} \psi &= -\arccos \frac{1 \pm 4}{6}, \\ \theta &= \arccos \frac{1 \pm 4}{6}. \end{aligned}$$

Возвращаясь, согласно (32), к параметризации с произвольным дополнительным углом, получаем два семейства решений.

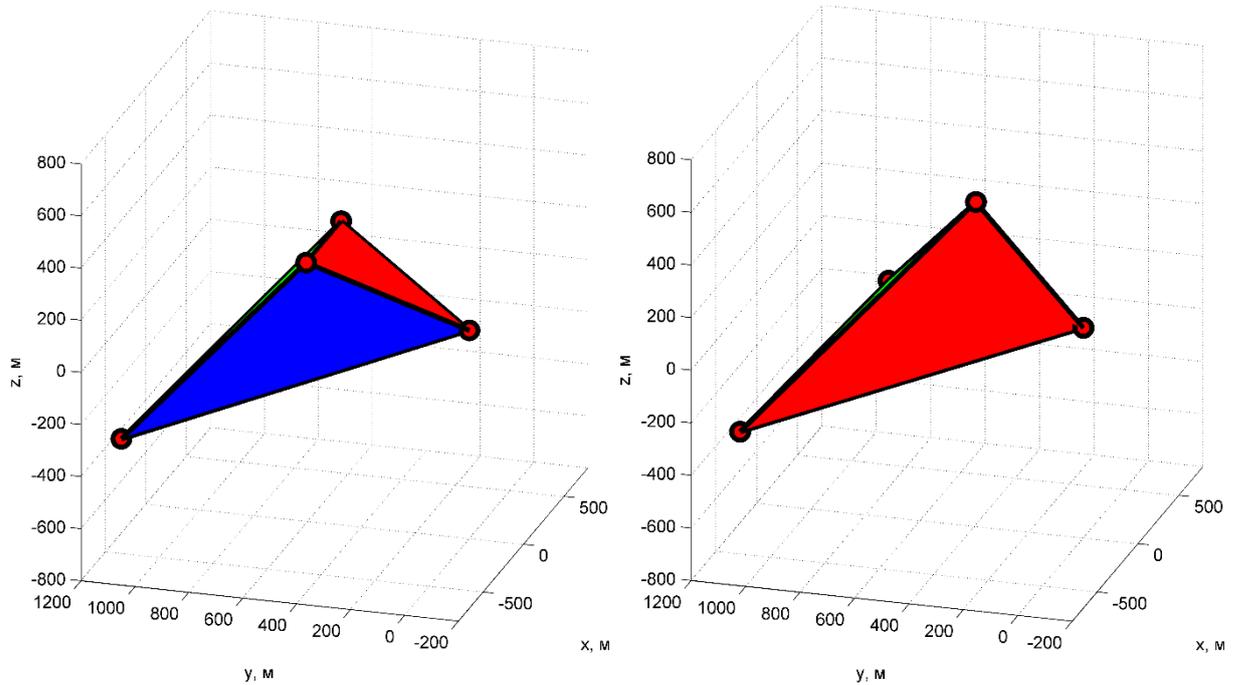
$$\underline{\text{Семейство 1}} (\varphi, \psi, \theta) = \left(\varphi, \frac{4\pi}{3} + \varphi, \frac{2\pi}{3} + \varphi \right)$$

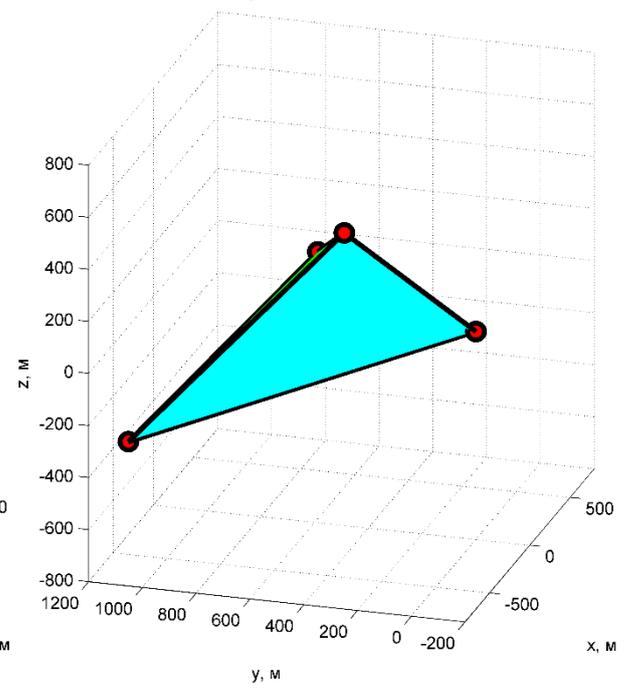
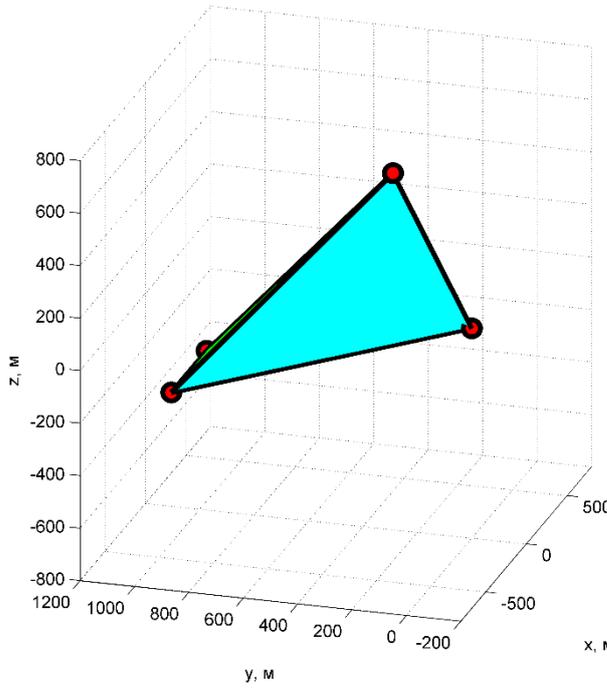
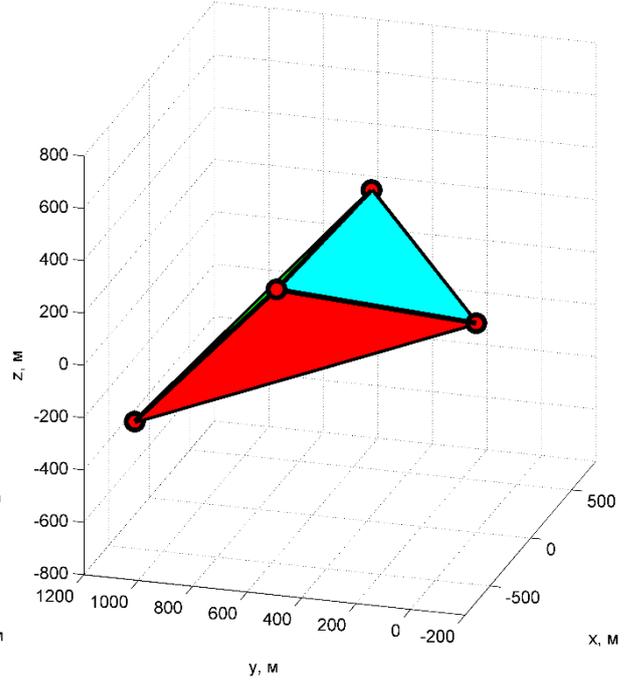
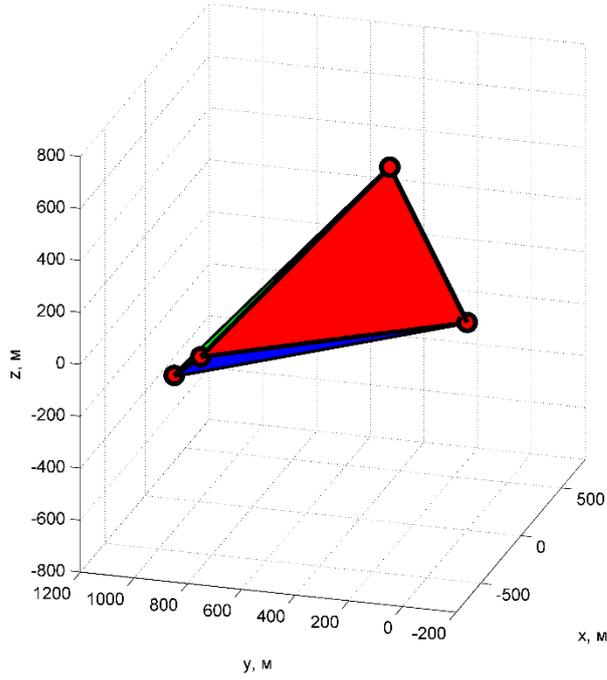
В этом случае фазы спутников равномерно распределены по окружности. Подставляя выражения (30) и производя дальнейшие упрощения с учётом условий (35), получаем

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \\ -\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \pm K \sqrt{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

На рис. 9 представлен вид такой тетраэдральной формации, различные подрисунки отвечают различным моментам времени.





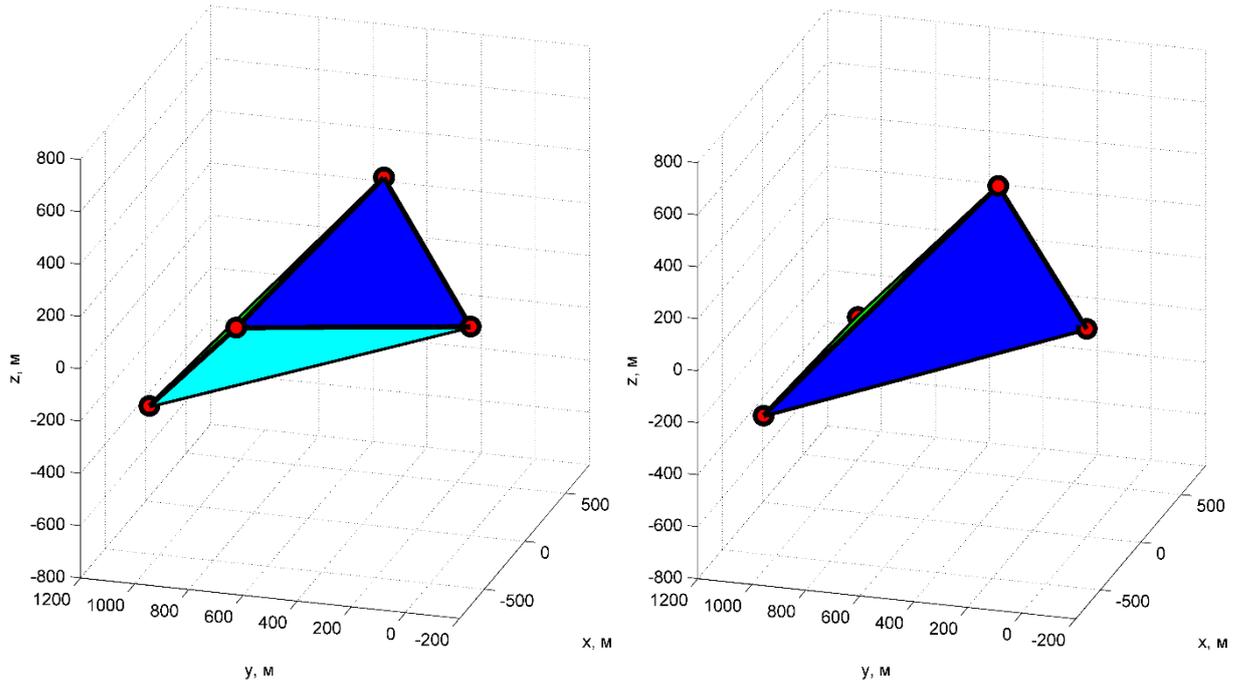


Рис. 9. Эволюция тетраэдральной формации.

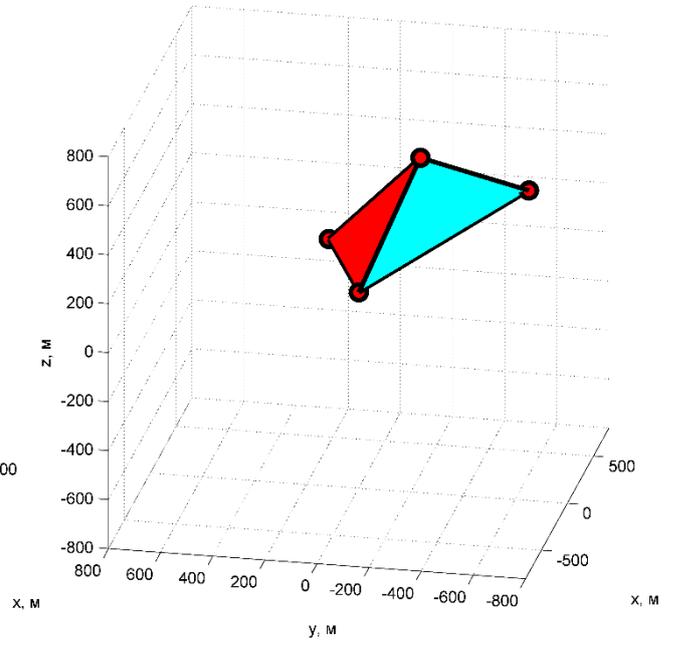
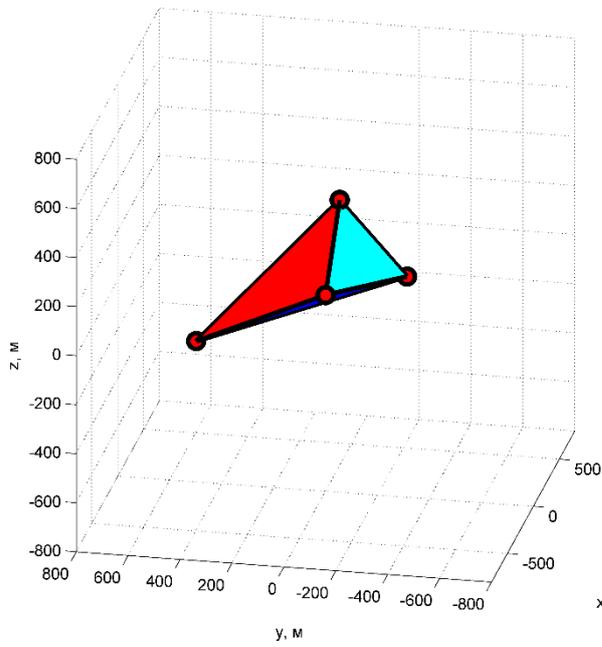
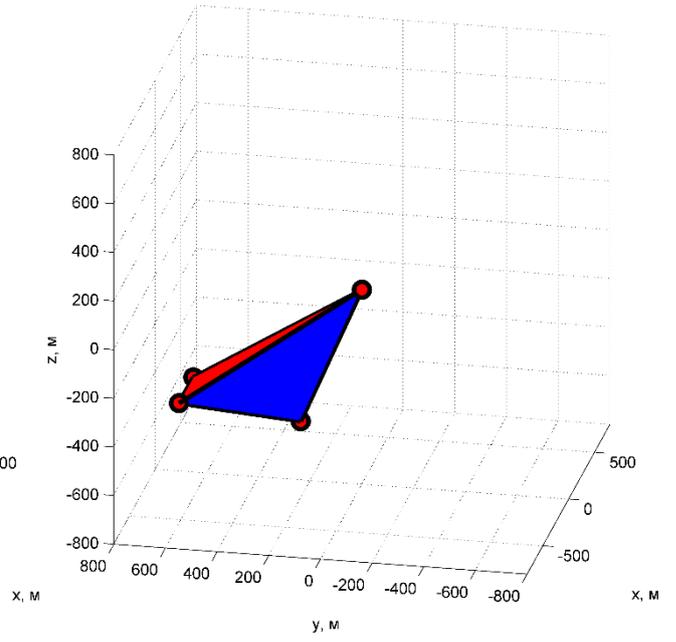
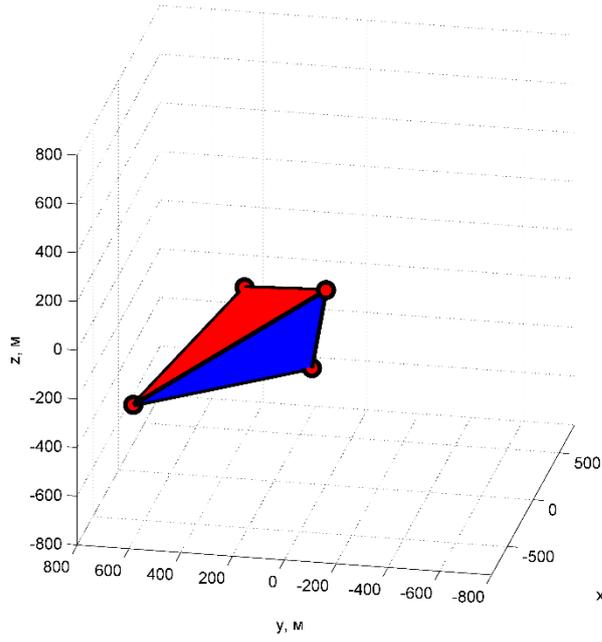
$$\underline{\text{Семейство 2}} (\varphi, \psi, \theta) = \left(\varphi, -\arccos \frac{5}{6} + \varphi, \arccos \frac{5}{6} + \varphi \right)$$

В этом случае сдвиг фаз неравномерен, полный набор начальных условий задаётся выражениями

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \frac{5}{6} \cos \varphi + \frac{\sqrt{11}}{6} \sin \varphi \\ \frac{5}{6} \cos \varphi - \frac{\sqrt{11}}{6} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\frac{\sqrt{11}}{6} \cos \varphi + \frac{5}{6} \sin \varphi \\ \frac{\sqrt{11}}{6} \cos \varphi + \frac{5}{6} \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \pm K \frac{\sqrt{10}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

На рис. 10 представлен вид такой тетраэдральной формации, различные подрисунки отвечают различным моментам времени.



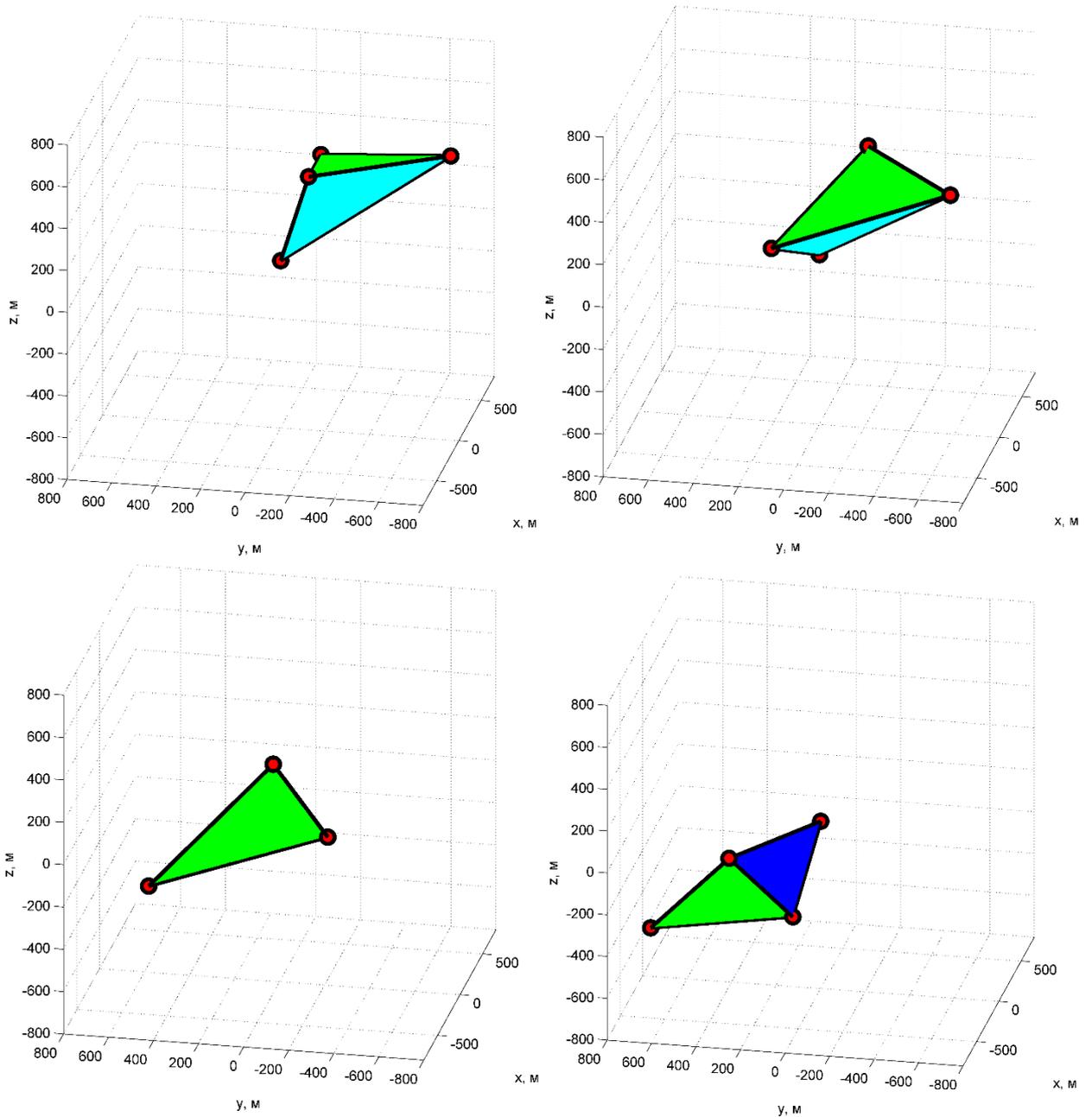


Рис. 10. Эволюция тетраэдральной формации.

3.3 Учёт эффектов второго порядка

Все полученные ранее в работе результаты опираются на линейную модель движения спутников в группе. Реальное движение же вносит в картину эволюции тетраэдра возмущения, в основном возникающие из-за нелинейности гравитационного поля Земли, дополнительных гармоник гравитационного поля вследствие несферичности Земли, ненулевого эксцентриситета опорной орбиты, неучтённых возмущений и т.п. Поскольку

при движении формации отношение расстояния между спутниками к радиусу опорной орбиты мало, это отношение r/r_c можно считать малым параметром.

Для учёта членов второго порядка малости по малому параметру разложим движение спутников в ОСК (1) по формуле Тейлора до второго порядка, получим в результате возмущённые уравнения ХКУ [112].

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= 2n^2x - \frac{3n^2}{r_c} \left(x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right), \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= -n^2y + \frac{n^2}{r_c} (3xy), \\ \ddot{z} &= -n^2z + \frac{n^2}{r_c} (3xz).\end{aligned}\tag{49}$$

Обезразмерим переменные и явно выделим малый параметр. Пусть K – характерный размер тетраэдральной формации согласно (40), (47), (48). Пусть также

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{K}{r_c}, \\ X &= \frac{x}{K}, Y = \frac{y}{K}, Z = \frac{z}{K}, \\ \nu &= nt, \quad \frac{d}{d\nu}(\cdot) = (\cdot)'.\end{aligned}$$

Тогда система уравнений (49) переходит в

$$\begin{aligned}X'' - 2Y' - 3X &= \varepsilon \left(-3X^2 + \frac{3}{2}Y^2 + \frac{3}{2}Z^2 \right), \\ Y'' + 2X' &= \varepsilon (3XY), \\ Z'' + Z &= \varepsilon (3XZ).\end{aligned}\tag{50}$$

Систему уравнений (50) разрешим с точностью до первого порядка по малому параметру ε . Для этого предположим, что решение представляется в виде

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{R}_1 + \dots,$$

где многоточием обозначены все члены разложения решения второго и выше порядков по ε . Следуя статье [113], подставим решение в уравнение (50) и, приравнявая члены при одинаковых степенях параметра ε , последовательно получаем слагаемые искомого решения. Член, не содержащий ε , удовлетворяет уравнениям ХКУ, следовательно, $\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ в соответствии с (6) имеет вид

$$\begin{aligned} X &= 2C_1 + C_2 \sin \nu - C_3 \cos \nu, \\ Y &= 2C_2 \cos \nu + 2C_3 \sin \nu + C_4 - 3C_1 \nu, \\ Z &= C_5 \sin \nu + C_6 \cos \nu. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в систему (50) и выделяя слагаемые, содержащие параметр ε в первой степени, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X_1'' - 2Y_1' - 3X_1 &= -3X_0^2 + \frac{3}{2}Y_0^2 + \frac{3}{2}Z_0^2, \\ Y_1'' + 2X_1' &= 3X_0Y_0, \\ Z_1'' + Z_1 &= 3X_0Z_0. \end{aligned} \quad (51)$$

Это система неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, так что решение системы \mathbf{R}_1 может быть найдено аналитически. Сумма $\mathbf{R}_0 + \varepsilon\mathbf{R}_1$ есть следующее по порядку после ХКУ-решения приближение к движению системы в центральном поле. Явные формулы для решения системы (51) приведены в Приложении Д.

При движении $\mathbf{R}_0 + \varepsilon\mathbf{R}_1$ с начальными данными, задаваемыми одним из выражений (40), (47), (48), качество \mathbb{Q} уже не будет постоянным. Явное вычисление качества возможно путём прямой подстановки движения в формулу (9).

Исследуем предельное поведение качества. Как видно из результатов численного моделирования, с течением времени \mathbb{Q} осциллирует между двумя огибающими. Введём обозначения для верхней и нижней огибающих соответственно объёма тетраэдра и суммы квадратов длин рёбер тетраэдра:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{V}}(\nu) &= \mathbb{V}(0) + \nu \limsup_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{V}(\nu) - \mathbb{V}(0)}{\nu - 0}, & \underline{\mathbb{V}}(\nu) &= \mathbb{V}(0) + \nu \liminf_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{V}(\nu) - \mathbb{V}(0)}{\nu - 0}, \\ \overline{\mathbb{L}}(\nu) &= \mathbb{L}(0) + \nu \limsup_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}(\nu) - \mathbb{L}(0)}{\nu - 0}, & \underline{\mathbb{L}}(\nu) &= \mathbb{L}(0) + \nu \liminf_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{L}(\nu) - \mathbb{L}(0)}{\nu - 0}.\end{aligned}\quad (52)$$

Уравнения верхней и нижней огибающих – это уравнения прямых, угловые коэффициенты которых характеризуют скорость распада формации – ухода максимальных и минимальных значений \mathbb{V} и \mathbb{L} от необходимого постоянного значения.

3.4 Минимизация скорости деградации качества

3.4.1 Формации с двумя равными амплитудами

Для формации типа leader-follower (40) прямым вычислением получим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\nu) &= \frac{10\sqrt{6}}{27} K^3 - \varepsilon K^3 \frac{20\sqrt{10}}{9} \nu + \varepsilon K^3 V_{2\pi\text{periodic}}, \\ \mathbb{L}(\nu) &= 40K^2 - \varepsilon K^2 \frac{160\sqrt{15}}{3} \nu + \varepsilon K^2 L_{2\pi\text{periodic}} + \\ &+ 4\sqrt{6}\varepsilon K^2 \nu \left(3\cos(3\varphi + \nu) - \frac{22}{3}\cos(\varphi + \nu) - 8\sqrt{\frac{5}{2}}\cos\nu - 5\cos(\varphi - \nu) \right).\end{aligned}\quad (53)$$

Здесь символами $V_{2\pi\text{periodic}}$ и $L_{2\pi\text{periodic}}$ обозначены 2π -периодические члены с нулевым средним, явный вид которых нас в данном случае не интересует.

Отметим, что в случае формации (40)

$$\overline{\mathbb{V}}(\nu) = \underline{\mathbb{V}}(\nu) = \frac{10\sqrt{6}}{27} K^3 - \varepsilon K^3 \frac{20\sqrt{10}}{9} \nu,$$

а верхняя и нижняя огибающие \mathbb{L} зависят от значения начальной фазы φ . В линейной постановке задачи параметр φ не влиял на геометрию и поведение формации в целом, однако в нелинейной постановке становится возможным использовать дополнительную степень свободы при выборе φ для уменьшения скорости деградации формации.

Рассмотрим выражение в скобках из формулы (53)

$$3\cos(3\varphi + \nu) - \frac{22}{3}\cos(\varphi + \nu) - 8\sqrt{\frac{5}{2}}\cos\nu - 5\cos(\varphi - \nu). \quad (54)$$

Пусть m_φ и M_φ – соответственно минимум и максимум этого выражения при фиксированном значении параметра φ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{L}}(\nu) &= 40K^2 + \varepsilon\nu K^2 \left(-\frac{160\sqrt{15}}{3} + 4\sqrt{6}M_\varphi \right), \\ \underline{\mathbb{L}}(\nu) &= 40K^2 + \varepsilon\nu K^2 \left(-\frac{160\sqrt{15}}{3} + 4\sqrt{6}m_\varphi \right). \end{aligned}$$

Разница между угловыми коэффициентами верхней и нижней огибающей соответствует «размаху» \mathbb{L} – скорости роста амплитуды колебаний. Минимальной разнице между угловыми коэффициентами соответствует минимум выражения $M_\varphi - m_\varphi$. Значение угла φ_{\min} , доставляющее минимум выражения, может быть найдено численно. Подробные вычисления приведены в приложении Е.

Аналогичные результаты могут быть получены для других типов формаций. Явные выражения для огибающих в случаях тетраэдров вида (47), (48) приведены в приложении Ж. Минимизация выражения $M_\varphi - m_\varphi$ проводится аналитически или численно.

3.4.2 Влияние оптимизации начальной фазы

Выбор φ_{\min} в качестве начальной фазы позволяет уменьшить скорость роста разницы между локальными максимумами и локальными минимумами качества при эволюции тетраэдра. На рис. 11 приведено сравнение деградации качества тетраэдра (40) в двух случаях: при начале движения из неоптимизированного и оптимизированного значений начальной фазы. Движение моделировалось в центральном гравитационном поле Земли.

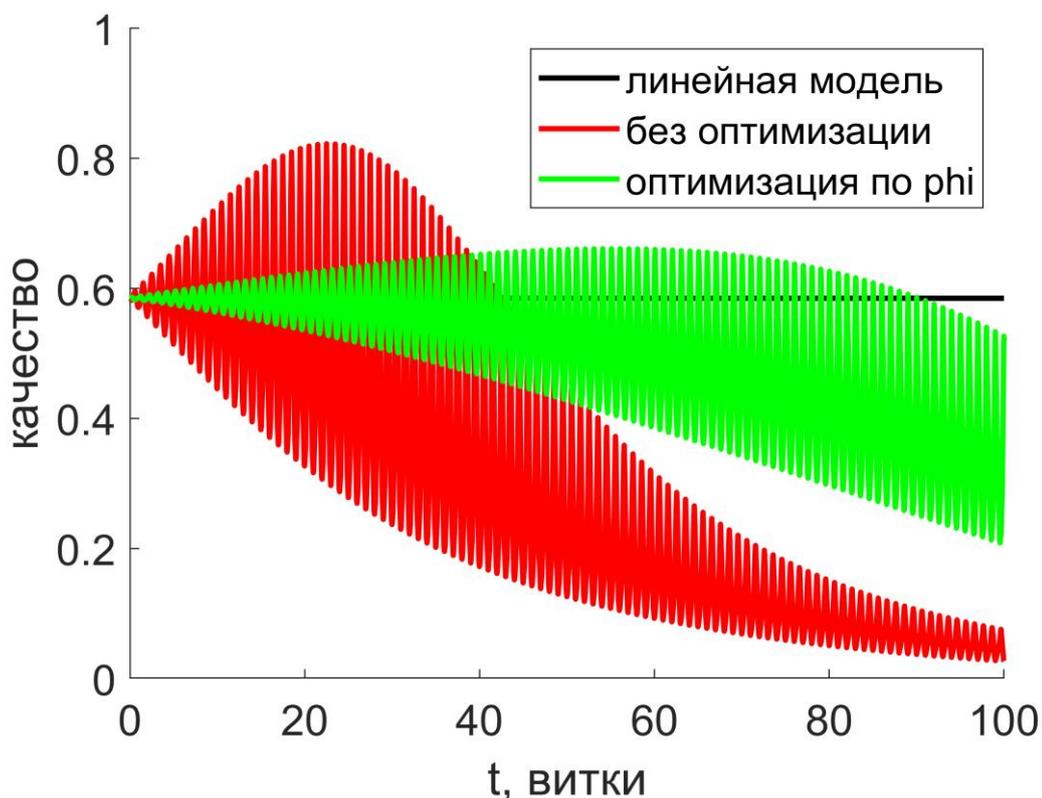


Рис. 11. Влияние оптимизации начальной фазы на качество тетраэдра.

Учёт прочих нелинейных возмущений может быть произведён численно: полученное на предыдущем шаге аналитическое решение (с учётом численной оптимизации по φ) используется как начальное приближение. Продемонстрируем возможность учёта второй зональной гармоники гравитационного поля Земли для построения опорной орбиты (рис. 12). Оптимизация производилась с помощью алгоритма внутренней точки [152], процедура `fmincon` в среде MATLAB. Переменными являлись начальные координаты и скорости спутников формации, целевой функцией – разность между начальным значением качества и минимумом качества на всем протяжении интегрирования. Промежуток интегрирования последовательно увеличивался, в качестве начального приближения бралось решение оптимизационной задачи на предыдущем этапе.

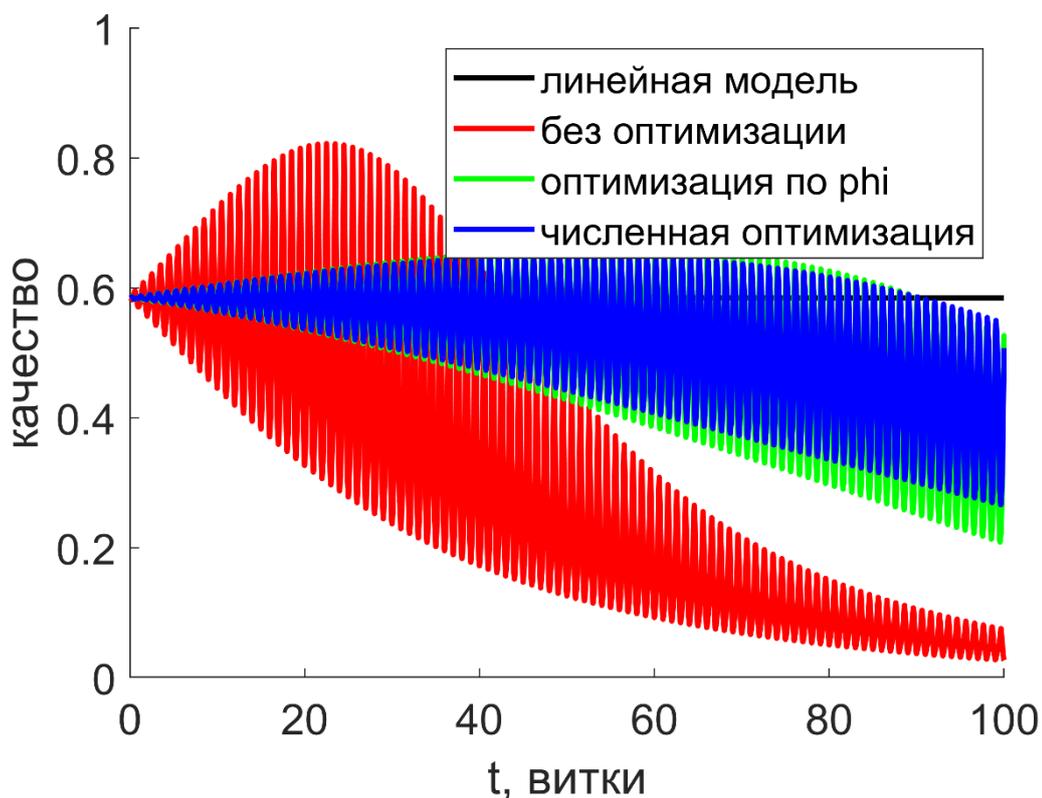


Рис. 12. Влияние оптимизации начальной фазы на качество тетраэдра с учётом второй гармоники гравитационного поля Земли.

3.5 Влияние ошибок вывода

Отметим, что, несмотря на теоретическую возможность учёта в численном оптимизационном алгоритме дальнейших поправок к движению спутников, на практике подобные вычисления малополезны. Дело в том, что наряду со значительным количеством возмущений, учесть которые затруднительно, но возможно (влияние гармоник гравитационного поля Земли более высокого порядка, и гравитации прочих тел Солнечной системы), существуют принципиально неучитываемые в аналитической модели возмущения. Для некоторых подобных возмущений не существует высокоточной аналитической или полуаналитической модели, пригодной для встраивания в алгоритм оптимизации (например, влияние атмосферы Земли). Помимо этого, гораздо более важными и разрушительными с точки зрения качества формации могут оказаться возмущения, связанные с начальными

ошибками исполнения, а именно отклонением спутников в начальный момент времени от опорного движения.

Проведём численное исследование того, насколько отклонение начальных положений и скоростей спутников от заданных влияет на динамику тетраэдральной формации и деградацию качества. Ошибки исполнения моделируются нормально распределёнными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием. Результаты моделирования пассивного движения формации на протяжении 50 витков (около трёх суток) приведены на рис. 13. График построен с помощью функции `boxplot` MATLAB на случайной выборке начальных данных, состоящей из 100 элементов. По оси абсцисс отложены пары (среднеквадратичное отклонение положения в метрах; среднеквадратичное отклонение скорости в сантиметрах в секунду). Прямоугольник отмечает уровень между 25 и 75 персентилями, красная полоса – медиана получившегося распределения. Как можно видеть из результатов моделирования, даже малая ошибка, вносимая в начальные данные, приводит к чрезвычайно быстрому разрушению тетраэдральной формации. При точных начальных значениях скорости ошибка в 5 м по положению приводит к практически полной деградации формации за 50 витков. То же наблюдается при точных начальных значениях положения и ошибках в скорости в 1 см/с.

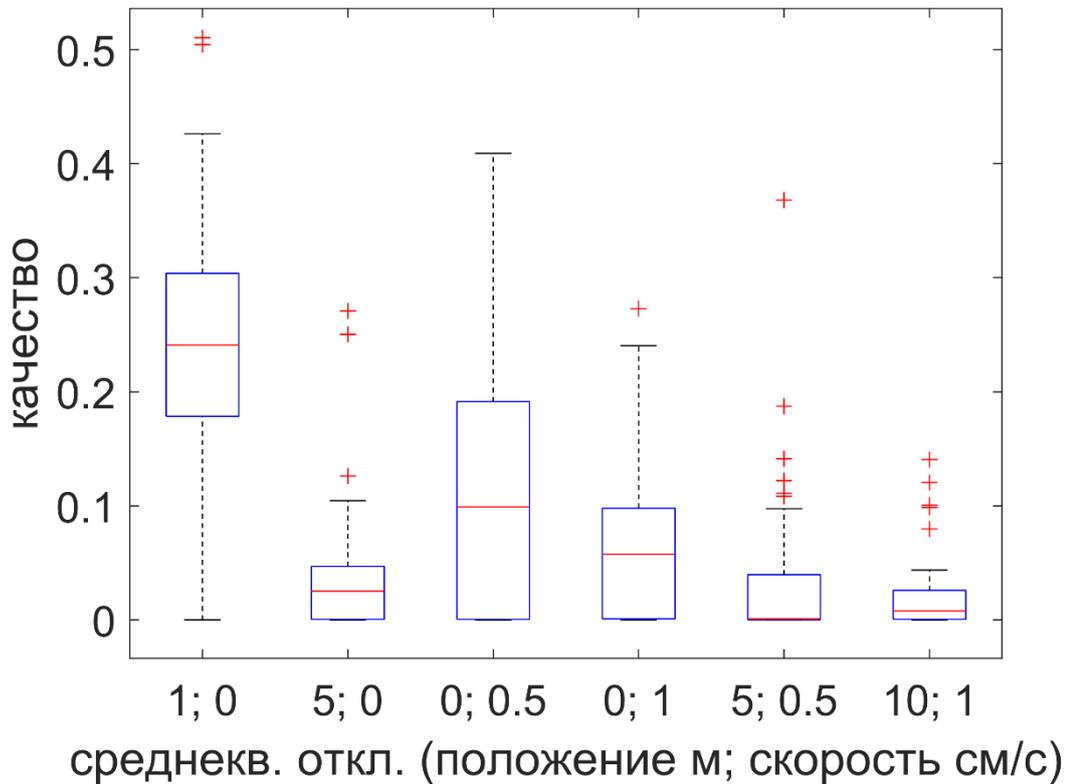


Рис. 13. Влияние ошибок исполнения на качество формации в пассивном движении.

Приведённые результаты показывают, что дальнейшая численная оптимизация начальной траектории малоэффективна, поскольку при реальном выводе космических аппаратов на орбиту ошибки в обеспечении начальных данных принципиально неустранимы.

3.6 Выводы по главе 3

Численно исследованы необходимые и достаточные условия сохранения качества тетраэдра в линейной модели движения. Найдена область допустимых амплитуд колебаний спутников в ОСК, обеспечивающая существование решений. Получены явные двухпараметрические решения в случае, когда амплитуды колебаний двух из четырёх спутников равны между собой, доказано, что других решений такого типа не существует. Особо

выделены три симметричных семейства решений – семейство вида leader-follower и два семейства с тремя равными амплитудами.

Предложена схема аналитического уточнения решения, основанная на разложении движения по малому параметру до второго порядка. Показано, что аналитическая оптимизация позволяет улучшить поведение формации на орбите.

Дальнейшая численная оптимизации опорной орбиты показала себя малополезной. Дополнительные численные расчёты модифицируют начальные данные так, что промежуток времени, в течение которого тетраэдр остаётся невырожденным, увеличивается лишь незначительно. Кроме того, проведённое моделирование движения спутников с учётом ошибки в начальных данных показывает плохие с точки зрения сохранения качества тетраэдра результаты. Исключительная чувствительность формации в пассивном движении к начальным данным не позволяет напрямую использовать полученные опорные орбиты в реальной миссии: для поддержания группировки требуется наличие управления спутниками группы.

4 Построение управления тетраэдральной формацией

В этой главе разрабатывается методика построения управления спутниковой формацией, которая затем адаптируется для решения задачи поддержания тетраэдральной формации на орбите. Для обеспечения необходимого управления используется сила аэродинамического сопротивления.

4.1 Криволинейные координаты

Построение управления для тетраэдральной формации будет производиться с помощью линейной модели движения. Однако, для повышения точности управления вместо декартовых координат мы будем использовать криволинейные координаты. Уравнения ХКУ в криволинейных координатах с учётом управления, согласно [91], имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \rho - 2n \frac{d}{dt} (r_c \theta) - 3n^2 \rho &= u_x, \\ \frac{d^2}{dt^2} (r_c \theta) + 2n \frac{d}{dt} \rho &= u_y, \\ \frac{d^2}{dt^2} (r_c \varphi) + n^2 (r_c \varphi) &= u_z. \end{aligned} \quad (55)$$

Выражение криволинейных координат и их скоростей через координаты спутников в ИСО приведены в Приложении 3. Решение системы при отсутствии управления имеет вид

$$\begin{aligned} \rho &= 2C_{\text{drift}} + C_{\text{inplane}} \sin(nt - \sigma_{\text{inplane}}), \\ r_c \theta &= 2C_{\text{inplane}} \cos(nt - \sigma_{\text{inplane}}) + C_{\text{shift}} - 3C_{\text{drift}} nt, \\ r_c \varphi &= C_{\text{outplane}} \sin(nt - \sigma_{\text{outplane}}). \end{aligned} \quad (56)$$

Как и ранее в декартовых координатах, величины $C_{\text{inplane}}, C_{\text{outplane}}$ имеют смысл амплитуд колебаний спутника в плоскости и вне плоскости орбиты соответственно, C_{drift} – дрейф спутника относительно ОСК вдоль

трансверсали, C_{shift} – постоянный сдвиг, $\sigma_{\text{inplane}}, \sigma_{\text{outplane}}$ – фазы относительного движения в плоскости и вне плоскости орбиты соответственно.

Будем строить управление для поддержания конкретной тетраэдральной конфигурации – типа leader-follower, описываемой уравнениями (40). При переходе к криволинейным координатам геометрический смысл констант решения (56) изменяется по сравнению с (7), в частности, сдвиг происходит не вдоль прямой линии, касательной к орбите, а вдоль самой орбиты. Однако, при малых размерах тетраэдральной формации (по сравнению с радиусом опорной орбиты) это не вносит значительных изменений в качество тетраэдра, привнося взамен лучшую точность описания реального движения спутников линейной моделью.

4.2 Переход к новым переменным

При движении из начальных условий (40) в линейной модели движения тетраэдр сохраняет своё качество, из формулы (41) следует, что также сохраняются:

- амплитуды колебаний в и вне плоскости орбиты,
- сдвиг каждого спутника вдоль орбиты,
- дрейф (он всегда равен нулю),
- для каждого спутника разность фаз колебаний в и вне плоскости орбиты (согласно (41) она равна χ).
- разность фазы колебаний двух разных спутников $\zeta_3 - \zeta_2 = 2\xi$.

При движении в нелинейной модели ни один из вышеперечисленных параметров в общем случае не является постоянным. Однако, если управление построено таким образом, что поддерживает все параметры постоянными (и равными начальным), то общий вид тетраэдра (41) и его качество будут оставаться неизменными. В самом деле, амплитуды, сдвиги и дрейфы фиксированы, а фазы определены с точностью до произвольного аддитивного угла, что не меняет форму тетраэдра.

При пассивном движении в нелинейной модели вышеперечисленные параметры изменяются, однако на малых промежутках времени можно ожидать, что они изменяются медленно (кроме фаз). Перейдём потому к медленным переменным, сохранение которых постоянными мы будем обеспечивать в дальнейшем с помощью управления.

Сделаем замену

$$\begin{aligned}
 \rho &= A \sin \eta + 2C, \\
 \frac{d}{dt} \rho &= A n \cos \eta, \\
 r_c \theta &= 2A \cos \eta + D, \\
 \frac{d}{dt} (r_c \theta) &= -2A n \sin \eta - 3Cn, \\
 r_c \varphi &= B \sin \lambda, \\
 \frac{d}{dt} (r_c \varphi) &= B n \cos \lambda.
 \end{aligned} \tag{57}$$

Новыми переменными, описывающими относительное движение, являются $A, B, C, D, \eta, \lambda$. Для каждого из спутников тетраэдральной формации (40) величины A, B, C, D должны оставаться постоянными, а η, λ линейно расти со скоростью n . Найдём теперь производные новых переменных в силу уравнений движения (55), включающих управление.

Из первого и четвёртого уравнений системы получаем

$$C = 2\rho + \frac{1}{n} \frac{d}{dt} (r_c \theta).$$

Дифференцируя это выражение по времени и используя закон движения (55), получаем

$$\dot{C} = \frac{u_y}{n}.$$

Аналогично из второго и третьего уравнений системы получаются выражения

$$D = -\frac{2\dot{\rho}}{n} + r_c \theta, \quad \dot{D} = -\frac{2}{n} u_x - 3nC.$$

Дифференцируя первое и второе уравнения, используя закон движения (55), замену переменных (57) и выражение для \dot{C} , получим

$$\begin{aligned}\dot{A} \sin \eta + A \cos \eta \cdot \dot{\eta} &= A n \cos \eta - 2 \frac{u_y}{n}, \\ \dot{A} n \cos \eta - A n \sin \eta \cdot \dot{\eta} &= u_x - A n^2 \sin \eta.\end{aligned}$$

По аналогии пятое и шестое уравнения дают

$$\begin{aligned}\dot{B} \sin \lambda + B \cos \lambda \cdot \dot{\lambda} &= B n \cos \lambda, \\ \dot{B} n \cos \lambda - B n \sin \lambda \cdot \dot{\lambda} &= u_z - B n^2 \sin \lambda.\end{aligned}$$

Две последние системы можно разрешить относительно производных новых переменных. Окончательно, получим следующую систему для первых производных новых переменных в силу уравнений движения

$$\begin{aligned}\dot{C} &= \frac{1}{n} u_y, \\ \dot{D} &= -\frac{2}{n} u_x - 3Cn, \\ \dot{A} &= \frac{1}{n} (\cos \eta \cdot u_x - 2 \sin \eta \cdot u_y), \\ \dot{\eta} &= n - \frac{1}{nA} (\sin \eta \cdot u_x + 2 \cos \eta \cdot u_y), \\ \dot{B} &= \frac{1}{n} \cos \lambda \cdot u_z, \\ \dot{\lambda} &= n - \frac{1}{nB} \sin \lambda \cdot u_z.\end{aligned}\tag{58}$$

Для тетраэдральной формации (40) относительно главного (четвёртого) спутника должно выполняться следующее:

- у главного спутника

$$A_{ref} = 0, \quad B_{ref} = 0, \quad C_{ref} = 0, \quad D_{ref} = 0.$$

- у спутника, находящегося на орбите главного в ИСК,

$$A_{ref} = 0, \quad B_{ref} = 0, \quad C_{ref} = 0, \quad D_{ref} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}K.$$

На фазы этой пары спутников ограничения не накладываемся (вследствие нулевых амплитуд);

- у двух оставшихся спутников

$$A_{ref} = K, \quad B_{ref} = \sqrt{5}K, \quad C_{ref} = 0, \quad D_{ref} = \sqrt{\frac{5}{3}}K.$$

На фазы этой пары спутников (второй и третий спутники формации) вследствие (41) накладываются ограничения

$$\begin{aligned} \eta_3 - \eta_2 &= \arccos \frac{1}{3}, \\ \lambda_3 - \lambda_2 &= \arccos \frac{1}{3}, \\ \eta_3 - \lambda_3 &= \frac{\pi}{2}, \\ \eta_2 - \lambda_2 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{59}$$

Легко заметить, что из четырёх ограничений можно произвольно выбрать три, являющихся независимыми, четвёртое ограничение будет выполняться автоматически.

4.3 Выбор исполнительных элементов управления

При построении алгоритма управления формацией, обращающейся вокруг Земли на высоте около 400 км, естественно сделать выбор в пользу управления с помощью силы сопротивления атмосферы. Будем использовать, следуя подходу, подробно описанному в [153], диффузно-зеркальную модель взаимодействия, при которой часть молекул отражается от поверхности абсолютно упруго, а оставшиеся отражаются диффузно с максвелловским распределением. Ускорение, сообщаемое спутнику, имеющему форму пластины, в этом случае равно

$$\mathbf{a}_{\text{атм}} = -\rho_{\text{атм}} \frac{S}{m} (\delta \mathbf{v}, \mathbf{n}) \cdot \left((1 - \epsilon) \cdot \delta \mathbf{v} + 2\epsilon \cdot (\delta \mathbf{v}, \mathbf{n}) \mathbf{n} + (1 - \epsilon) \alpha \cdot \delta v \cdot \mathbf{n} \right). \tag{60}$$

Здесь $\rho_{\text{атм}}$ – плотность атмосферы в рассматриваемой точке, S – площадь пластины, m – масса спутника, $\delta\mathbf{v}$ – скорость набегающего потока, δv – модуль этой скорости, \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к пластине, ϵ – коэффициент зеркального отражения, α – коэффициент диффузного отражения.

Легко заметить, что основное воздействие набегающего потока происходит в направлении, противоположном скорости спутника, так что из трёх компонент управляющего ускорения (u_x, u_y, u_z) лишь u_y существенно отлична от нуля. Этот факт осложняет управление конфигурацией формации с помощью силы сопротивления атмосферы, поскольку движение аппаратов вне плоскости орбиты является слабо управляемым.

4.4 Синтез управления на основе прямого метода Ляпунова

Мы будем синтезировать управление формацией с помощью прямого метода Ляпунова [154]. Метод является вычислительно простым, что важно в приложении к малым спутникам. Кроме того, этот метод обеспечивает асимптотическую устойчивость требуемого движения, так что достаточно малые неучтённые возмущения, действующие на спутник, к примеру, со стороны атмосферы, не ухудшают производительность алгоритма управления.

В этом разделе мы получим требуемые значения компонент управляющего ускорения (u_x, u_y, u_z) , в дальнейшем эти компоненты будут использованы для получения требуемого направления нормали к поверхности спутника, обеспечивающего требуемую управляющую силу.

Отметим важный факт: при обеспечении управления с помощью сил аэродинамического сопротивления в соответствии с моделью (60) величина компоненты силы u_y на порядок превышает величины u_x и u_z [153]. Будем синтезировать управление с учётом этого факта, пренебрегая иногда

величинами u_x и u_z по сравнению с u_y , особенно при получении управления, обеспечивающего асимптотически устойчивое опорное движение. Подобное пренебрежение позволяет упростить систему уравнений (58), которая тогда разделяется на три независимых системы. Построение управления будем осуществлять последовательно для каждой из подсистем.

4.4.1 Обеспечение требуемых сдвига и дрейфа

Пренебрегая в (58) членом u_x вследствие его малости при рассматриваемой модели взаимодействия спутника и атмосферы, получим уравнения эволюции сдвига и дрейфа спутника вдоль орбиты

$$\begin{aligned}\dot{C} &= \frac{1}{n}u_y, \\ \dot{D} &= -3Cn.\end{aligned}\tag{61}$$

Поскольку требуемые значения сдвига и дрейфа равны

$$\begin{aligned}D_{ref,1} &= 0, D_{ref,2} = D_{ref,3} = \sqrt{\frac{5}{3}}K, D_{ref,4} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}K, \\ C_{ref,1} &= C_{ref,2} = C_{ref,3} = C_{ref,4} = 0,\end{aligned}$$

будем искать кандидат-функцию Ляпунова для каждого из спутников по отдельности в виде

$$V_{CD,i} = C_i^2 + k_D(D_i - D_{ref,i})^2, \quad k_D > 0.$$

Далее индекс i опускается для повышения удобочитаемости, кандидат-функция Ляпунова и соответствующее управление всюду строится отдельно для каждого спутника.

Функция V_{CD} неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $C = C_{ref} = 0$, $D = D_{ref}$. Найдем производную этой функции в силу уравнений движения (61)

$$\dot{V}_{CD} = 2C \left(\frac{u_y}{n} - 3nk_D(D - D_{ref}) \right).\tag{62}$$

Для того чтобы кандидат-функция Ляпунова удовлетворяла теореме Барбашина-Красовского [155], необходимо, чтобы её производная в силу уравнений движения была неположительной. Потребуем, чтобы

$$\left(\frac{u_y}{n} - 3nk_D(D - D_{ref}) \right) = -k_C C, \quad k_C > 0,$$

что автоматически влечёт

$$\dot{V}_{CD} = -2k_C C^2 \leq 0.$$

Следовательно, управление

$$u_y = 3n^2 k_D (D - D_{ref}) - nk_C C \quad (63)$$

обеспечивает выполнение необходимых условий теоремы Барбашина-Красовского. Для того чтобы построенное управление обеспечивало глобальную асимптотическую устойчивость опорного движения спутника на относительной орбите, должны быть выполнены также достаточные условия теоремы Барбашина-Красовского. Условие $\dot{V}_{CD} = 0$ влечёт $C = 0$ тождественно, при подстановке этого условия в (61) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= 3nk_D (D - D_{ref}), \\ \dot{C} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, единственное движение, при котором производная кандидат-функции Ляпунова обращается в нуль, есть $D = D_{ref}, C = C_{ref} = 0$. Таким образом, управление (63) обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость опорного движения.

4.4.2 Обеспечение требуемого движения в плоскости орбиты

Аналогично предыдущему пункту выделим амплитуду и фазу движения спутника в плоскости орбиты в предположении малости u_x

$$\begin{aligned}\dot{A}_i &= -\frac{2}{n} \sin \eta_i \cdot u_{y,i}, \\ \dot{\eta}_i &= n - \frac{2}{A_i n} \cos \eta_i \cdot u_{y,i}.\end{aligned}\tag{64}$$

Требуемый вид фаз η спутниковой формации имеет специфический вид: поскольку амплитуды $A_{ref,1} = A_{ref,4} = 0$, то управление фазами первого и четвёртого спутников не является необходимым. Для оставшихся спутников нет ограничения на фазы колебания в плоскости орбиты по отдельности, но есть ограничение на разность фаз $\eta_3 - \eta_2 = \Delta\eta_{ref} = \arccos \frac{1}{3}$. При этом

$$A_{ref,2} = A_{ref,3} = K.$$

Рассмотрим следующую кандидат-функцию Ляпунова

$$V_A = (A_2 - A_{ref,2})^2 + (A_3 - A_{ref,3})^2 + k_\eta (\eta_3 - \eta_2 - \Delta\eta_{ref})^2.$$

Здесь k_η положительная константа. Производная кандидат-функции в силу уравнений движения (64)

$$\begin{aligned}\dot{V}_A &= -(A_2 - A_{ref,2}) \frac{4}{n} \sin \eta_2 \cdot u_{y,2} - (A_3 - A_{ref,3}) \frac{4}{n} \sin \eta_3 \cdot u_{y,3} + \\ &+ k_\eta \frac{4}{n} (\eta_3 - \eta_2 - \Delta\eta_{ref}) \left(\frac{\cos \eta_2 \cdot u_{y,2}}{A_2} - \frac{\cos \eta_3 \cdot u_{y,3}}{A_3} \right) = \\ &= u_{y,2} \frac{4}{n} \left(k_\eta (\eta_3 - \eta_2 - \Delta\eta_{ref}) \frac{\cos \eta_2}{A_2} - (A_2 - A_{ref,2}) \sin \eta_2 \right) + \\ &+ u_{y,3} \frac{4}{n} \left(-k_\eta (\eta_3 - \eta_2 - \Delta\eta_{ref}) \frac{\cos \eta_3}{A_3} - (A_3 - A_{ref,3}) \sin \eta_3 \right).\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}u_{y,2} &= -k_A \left(k_\eta (\eta_3 - \eta_2 - \Delta\eta_{ref}) \frac{\cos \eta_2}{A_2} - (A_2 - A_{ref,2}) \sin \eta_2 \right), \\ u_{y,3} &= -k_A \left(-k_\eta (\eta_3 - \eta_2 - \Delta\eta_{ref}) \frac{\cos \eta_3}{A_3} - (A_3 - A_{ref,3}) \sin \eta_3 \right),\end{aligned}\tag{65}$$

где k_A положительна. Тогда производная \dot{V}_A неположительна в силу движения, что обеспечивает необходимые условия теоремы Барбашина-Красовского. Достаточные условия проверяются аналогично предыдущему случаю.

4.4.3 Обеспечение требуемого движения вне плоскости орбиты

Движение вне плоскости орбиты (амплитуда и фаза колебаний) отделяются согласно (58)

$$\begin{aligned}\dot{B} &= \frac{1}{n} \cos \lambda \cdot u_z, \\ \dot{\lambda} &= n - \frac{1}{nB} \sin \lambda \cdot u_z.\end{aligned}$$

Как и в случае движения в плоскости орбиты, вне плоскости орбиты колебания первого и четвёртого спутников формации отсутствуют на опорной траектории: $B_{ref,1} = B_{ref,4} = 0$, что позволяет не следить за фазами. У второго и третьего спутников $B_{ref,2} = B_{ref,3} = \sqrt{5}K$, $\lambda_3 - \lambda_2 = \Delta\lambda_{ref} = \arccos \frac{1}{3}$.

Для поддержания опорной орбиты рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова

$$V_B = (B_2 - B_{ref,2})^2 + (B_3 - B_{ref,3})^2 + k_\lambda (\lambda_3 - \lambda_2 - \Delta\lambda_{ref})^2.$$

Здесь k_λ – положительная константа. Производная кандидат-функции Ляпунова в силу уравнений движения

$$\begin{aligned}\dot{V}_B &= (B_2 - B_{ref,2}) \frac{2}{n} \cos \lambda_2 \cdot u_{z,2} + (B_3 - B_{ref,3}) \frac{2}{n} \cos \lambda_3 \cdot u_{z,3} + \\ &+ k_\lambda \frac{2}{n} (\lambda_3 - \lambda_2 - \Delta\lambda_{ref}) \left(\frac{\sin \lambda_2 \cdot u_{z,2}}{B_2} - \frac{\sin \lambda_3 \cdot u_{z,3}}{B_3} \right) = \\ &= u_{z,2} \frac{2}{n} \left(k_\lambda (\lambda_3 - \lambda_2 - \Delta\lambda_{ref}) \frac{\sin \lambda_2}{B_2} + (B_2 - B_{ref,2}) \cos \lambda_2 \right) + \\ &+ u_{z,3} \frac{2}{n} \left(-k_\lambda (\lambda_3 - \lambda_2 - \Delta\lambda_{ref}) \frac{\sin \lambda_3}{B_3} + (B_3 - B_{ref,3}) \cos \lambda_3 \right).\end{aligned}$$

Управление

$$\begin{aligned} u_{z,2} &= -k_B \left(k_\lambda (\lambda_3 - \lambda_2 - \Delta\lambda_{ref}) \frac{\sin \lambda_2}{B_2} + 2(B_2 - B_{ref,2}) \cos \lambda_2 \right), \\ u_{z,3} &= -k_B \left(-k_\lambda (\lambda_3 - \lambda_2 - \Delta\lambda_{ref}) \frac{\sin \lambda_3}{B_3} + 2(B_3 - B_{ref,3}) \cos \lambda_3 \right), \end{aligned} \quad (66)$$

при положительном k_B обеспечивает неположительность производной \dot{V}_B и асимптотическую устойчивость опорного движения.

4.4.4 Фазирование и поддержание плоскости относительной орбиты

Одновременное использование управления (65) и (66) обеспечивает два из трёх необходимых условий фазирования (59). При этом, между фазами в плоскости и вне плоскости относительной орбиты может не сохраняться требуемая разность фаз. Согласно уравнениям (29) разность фаз отвечает за ориентацию плоскости относительной орбиты вращения спутников, постоянной разности фаз соответствует постоянная ориентация плоскости.

Следовательно, поддержание $\eta - \lambda = \frac{\pi}{2}$, в отличие от управления (65) и (66), обеспечивает сохранение плоскости относительной орбиты.

Не будем делать здесь предположений о том, какое из условий фазирования (59) является более важным с точки зрения поддержания качества тетраэдральной формации. Вместо этого построим аналогичное (65) управление, обеспечивающее сохранение ориентации плоскости относительной орбиты. Рассмотрим кандидат-функцию Ляпунова

$$V_{A,\phi} = (A_2 - A_{ref,2})^2 + (A_3 - A_{ref,3})^2 + k_\phi \left(\eta_2 - \lambda_2 - \frac{\pi}{2} \right)^2 + k_\phi \left(\eta_3 - \lambda_3 - \frac{\pi}{2} \right)^2,$$

здесь как и ранее k_ϕ – положительная константа. Пренебрежём величинами u_x, u_z , как малыми по сравнению с u_y . Тогда производная функции в силу уравнений движения есть

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{A,\phi} &= -\left(A_2 - A_{ref,2}\right) \frac{4}{n} \sin \eta_2 \cdot u_{y,2} - \left(A_3 - A_{ref,3}\right) \frac{4}{n} \sin \eta_3 \cdot u_{y,3} + \\
&+ k_\phi \frac{4}{n} \left(\eta_2 - \lambda_2 - \frac{\pi}{2} \right) \left(-\frac{1}{A_2} \cos \eta_2 \cdot u_{y,2} \right) + \\
&+ k_\phi \frac{4}{n} \left(\eta_3 - \lambda_3 - \frac{\pi}{2} \right) \left(-\frac{1}{A_3} \cos \eta_3 \cdot u_{y,3} \right) = \\
&= u_{y,2} \frac{4}{n} \left(-k_\phi \left(\eta_2 - \lambda_2 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\cos \eta_2}{A_2} - \left(A_2 - A_{ref,2} \right) \sin \eta_2 \right) + \\
&+ u_{y,3} \frac{4}{n} \left(-k_\phi \left(\eta_3 - \lambda_3 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\cos \eta_3}{A_3} - \left(A_3 - A_{ref,3} \right) \sin \eta_3 \right).
\end{aligned}$$

Управление

$$\begin{aligned}
u_{y,2} &= -k_A \left(-k_\phi \left(\eta_2 - \lambda_2 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\cos \eta_2}{A_2} - \left(A_2 - A_{ref,2} \right) \sin \eta_2 \right), \\
u_{y,3} &= -k_A \left(-k_\phi \left(\eta_3 - \lambda_3 - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\cos \eta_3}{A_3} - \left(A_3 - A_{ref,3} \right) \sin \eta_3 \right),
\end{aligned} \tag{67}$$

где k_A положительна, обеспечивает неположительность производной $\dot{V}_{A,\phi}$ в силу уравнений движения.

Заметим, что управление (67), (66) обеспечивает выполнение уже всех трёх условий фазирования (59) (четвёртое выполняется автоматически).

4.5 Последовательное обеспечение геометрических характеристик опорной орбиты

Законы управления (63) и (67) не могут быть выполнены одновременно. При этом эти законы обеспечивают постоянство различных геометрических характеристик тетраэдра, а потому при поддержании тетраэдра приоритет этих законов различен:

- если управление не обеспечивает нулевой относительный дрейф спутников в группе, то обеспечение амплитуд и/или фаз колебаний спутников бессмысленно – спутники с разным

дрейфом обращаются в ОСК по незамкнутым орбитам, так что тетраэдр деградирует за несколько витков,

- с другой стороны, если сдвиг спутников в группе близок к требуемому, а дрейф близок к нулевому, отличие закона управления от (63) не приводит к быстрому распаду группы, но может быть использовано для поддержания амплитуд и фаз колебаний спутников в группе.

Мы будем строить управление в два этапа. Выбираются некоторые допустимые отклонения сдвига и дрейфа: δD , δC . В случае, если текущие значения

$$|C| \geq \delta C \quad \text{или} \quad |D - D_{ref}| \geq \delta D,$$

то используется управление (63), которое обеспечивает малость относительного дрейфа и малость отклонения сдвига от требуемого.

Если же оба абсолютных значения меньше допустимых отклонений, будет использоваться управление (67) или (65), которое уже (не приводя к разлёту формации как целого) обеспечивает необходимые геометрические характеристики тетраэдра в проекции на плоскость орбиты.

Заметим, что описанная выше схема может приводить к быстрым переключениям между двумя режимами, если текущие значения сдвига или дрейфа близки к пограничным. Это, в свою очередь, не позволяет управлению обеспечить ни один из режимов движения, а также вызывает необходимость слишком частой переориентации спутника. Скорректируем поэтому схему: для сдвига и дрейфа выберем по два пороговых значения

$$\delta C_{lower} < \delta C_{upper}, \quad \delta D_{lower} < \delta D_{upper}.$$

Переключение схемы управления в режим коррекции сдвига и дрейфа (63) происходит при выполнении условия

$$|C| \geq \delta C_{upper} \quad \text{или} \quad |D - D_{ref}| \geq \delta D_{upper}.$$

Переключение схемы управления в режим коррекции амплитуды и фазы (67) или (65) происходит при выполнении условия

$$|C| \leq \delta C_{lower} \quad \text{и} \quad |D - D_{ref}| \leq \delta D_{lower}.$$

4.6 Реализация управления

Поскольку управление, полученное ранее, должно быть реализовано с помощью сил аэродинамического сопротивления, простой закон, полученный с помощью прямого метода Ляпунова, необходимо преобразовать по следующим причинам. Во-первых, управление с помощью сил аэродинамического сопротивления существенно ограничено по величине. Пусть максимальная величина возможного управляющего воздействия есть u_{max} , необходимо ограничить управление: $u = \min\{u_{max}, |u|\} \cdot \text{sign}(u)$. Во-вторых, сила сопротивления атмосферы направлена всегда в одну и ту же сторону по оси Oy – противоположно направлению скорости спутника. Это не позволяет использовать законы вида (63), (65), (67) напрямую, поскольку u_y может быть только сонаправлено скорости спутника. Для решения этой проблемы модифицируем закон управления формацией в целом. В разделе 1.2 было сформулировано утверждение, что в линейной модели движения без ограничения общности можно предполагать один из спутников покоящимся в начале ОСК. Используем похожую идею: поскольку всё опорное движение строится относительно одного из спутников группы (четвёртого), положим, что четвёртый спутник находится под действием постоянной силы аэродинамического сопротивления

$$u_{y,4} = \frac{u_{max}}{2}.$$

В этом случае $u_{y,i} \in [0, u_{max}/2)$ приводит в силу линейности модели управляемого движения к отрицательной величине относительного управления между спутником номер i и главным спутником, а

$u_{y,i} \in (u_{max} / 2, u_{max}]$ – к положительной. Таким образом, возможно получение управляющего воздействия в любом направлении вдоль оси Oy . Негативными последствиями подобной модификации закона управления являются уменьшение величины возможного управляющего ускорения в два раза. В-третьих, как уже было сказано, величина силы по оси Oz много меньше величины силы по оси Oy . Кроме того, формация требует постоянной корректировки по направлению, перпендикулярному плоскости орбиты. В связи с этим целесообразно использовать управляющее воздействие целиком: вместо расчёта требуемой силы по формулам (66) будем использовать формулы для получения требуемого направления воздействия, а силу при расчётах положим максимально возможной.

При известных расчётных значениях величин u_y, u_z для каждого из спутников определим направление нормали \mathbf{n} к поверхности спутника

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \zeta \\ \cos \zeta \\ \cos \vartheta \sin \zeta \end{pmatrix}.$$

Здесь ζ – угол между нормалью к плоскости поверхности спутника и скоростью спутника, ϑ – угол, определяющий поворот спутника вокруг вектора скорости. Всюду далее ϑ будет равен 0 или π , тем самым обеспечивая требуемое направление n_z и знак управления u_z . Углы вычисляются по формулам

$$\zeta = \arccos \left(\frac{u_y - \frac{u_{max}}{2}}{u_{max}} \right), \quad (68)$$

$$\vartheta = (1 - \text{sign}(u_z)) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Обобщим предыдущие построения в блок-схему используемого в работе алгоритма управления (рис. 14).

Построенное управление, несмотря на результат пункта 3.4, уже не удовлетворяет теореме Барбашина-Красовского и в общем случае может не обеспечивать глобальную (или даже локальную) асимптотическую устойчивость опорного движения. Причинами этого являются ограниченность управления и переключение управления между несколькими режимами. Тем не менее, результаты проведенного статистического моделирования показывают, что даже при такой реализации алгоритма управления удаётся поддерживать тетраэдр невырожденным, а качество – близким к требуемому значению на длительном промежутке времени.

Отметим сходство между построенным управлением и локально-оптимальным управлением, описанным в [156,157]. Однако, несмотря на внешнее сходство и использование геометрических параметров относительной орбиты для построения алгоритма, алгоритмы различны: локально-оптимальное управление не основывается на теореме Барбашина-Красовского, а обеспечивает минимум производной динамических параметров орбиты в силу уравнений движения.

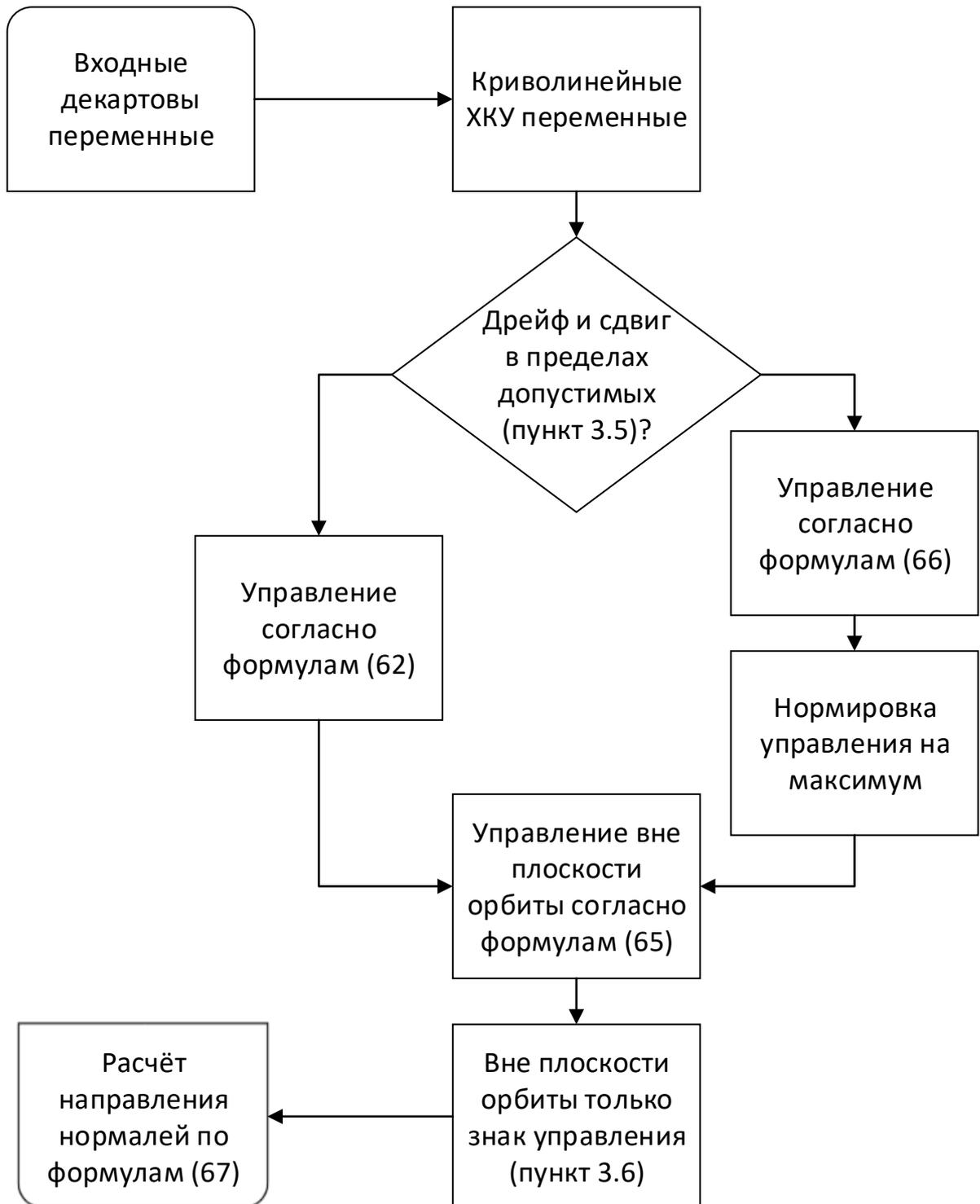


Рис. 14. Общая схема алгоритма управления.

4.7 Результаты численного моделирования

Перейдем к численному моделированию динамики тетраэдральной формации при использовании построенного управления.

Параметры моделирования

- Начальные данные получены по формулам (41) с учётом результатов пункта 2.4.
- Высота опорной орбиты 400 км.
- Движение каждого из спутников интегрируется в ИСК независимо в декартовых координатах методом Рунге–Кутты 4 порядка с постоянным шагом 5 с. (при анализе шаг варьировался, но оказалось, что выбранный шаг обеспечивает необходимую точность и быстродействие).
- Масса каждого из спутников 5 кг.
- В начальные данные каждого из спутников внесена ошибка, моделируемая нормально распределённой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием.
- Нецентральность гравитационного поля Земли учитывается с точностью до членов порядка (10,10) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по сферическими функциям.
- Атмосфера считается вращающейся вместе с Землёй, её плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004.
- Каждый спутник предполагается плоским, взаимодействие спутника с атмосферой описывается уравнением (60) с коэффициентами $\alpha = \epsilon = 0.1$.
- В каждый момент времени положение каждого из спутников известно точно. Навигационная задача не рассматривается.
- Угловая динамика спутников не исследуется, в каждый момент времени предполагается возможным обеспечить необходимую ориентацию каждого из спутников.
- Переориентация каждого из спутников происходит мгновенно.

При моделировании движения тетраэдральной формации изменяются следующие параметры формации и спутников.

- Наклонение опорной орбиты.
- Площадь поверхности спутника, в том числе предполагается возможность установки жесткого паруса.
- Характерный размер формации.
- Среднеквадратичное отклонение начальных ошибок положения и скорости.
- Время запуска.

4.7.1 Формация размером $K = 1000$ м, наклонение 56°

Высота опорной орбиты 400 км, наклонение 56 градусов, площадь поверхности – 0.1 м^2 (типовой размер спутника «3U CubeSat» с откидными солнечными панелями), характерный размер формации $K = 1000$ м, дисперсия начальных ошибок 5 м и 0.5 см/с, время запуска – март 2009 года в период низкой солнечной активности. На рис. 15 представлены данные численного моделирования качества тетраэдра.

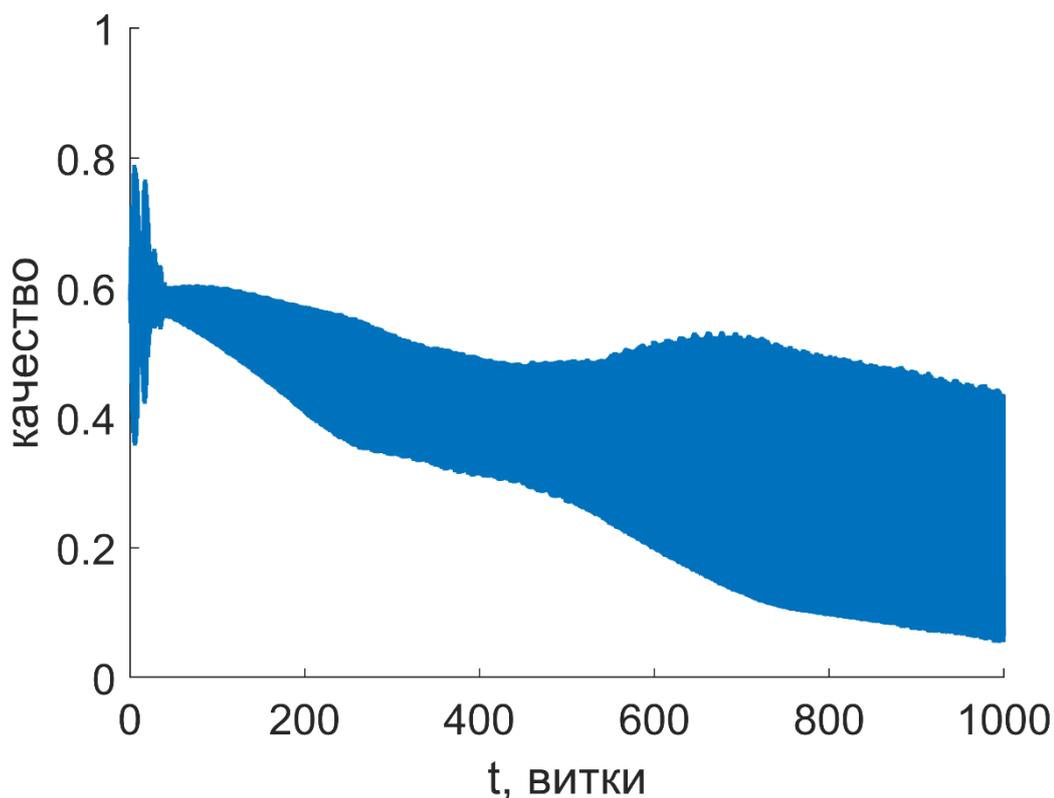


Рис. 15. Эволюция качества тетраэдра при наличии управления.

Как видно из результатов моделирования движения, качество тетраэдра находится в пределах 0.4 на протяжении 200 витков (каждый виток на такой высоте ≈ 1.4 часа, т.е. 200 витков – это почти 12 суток), а в пределах 0.2 на протяжении 600 витков (35 суток). Тетраэдр остаётся невырожденным на протяжении более 1000 витков (около 60 суток).

Рассмотрим причины падения качества тетраэдра. На рис. 16-17 приведена эволюция относительного сдвига и дрейфа спутников тетраэдральной формации. Кривыми различного цвета обозначены параметры, относящиеся к различным спутникам. Отклонения от опорного положения в начале движения связаны с ошибкой начальных данных движения спутников.

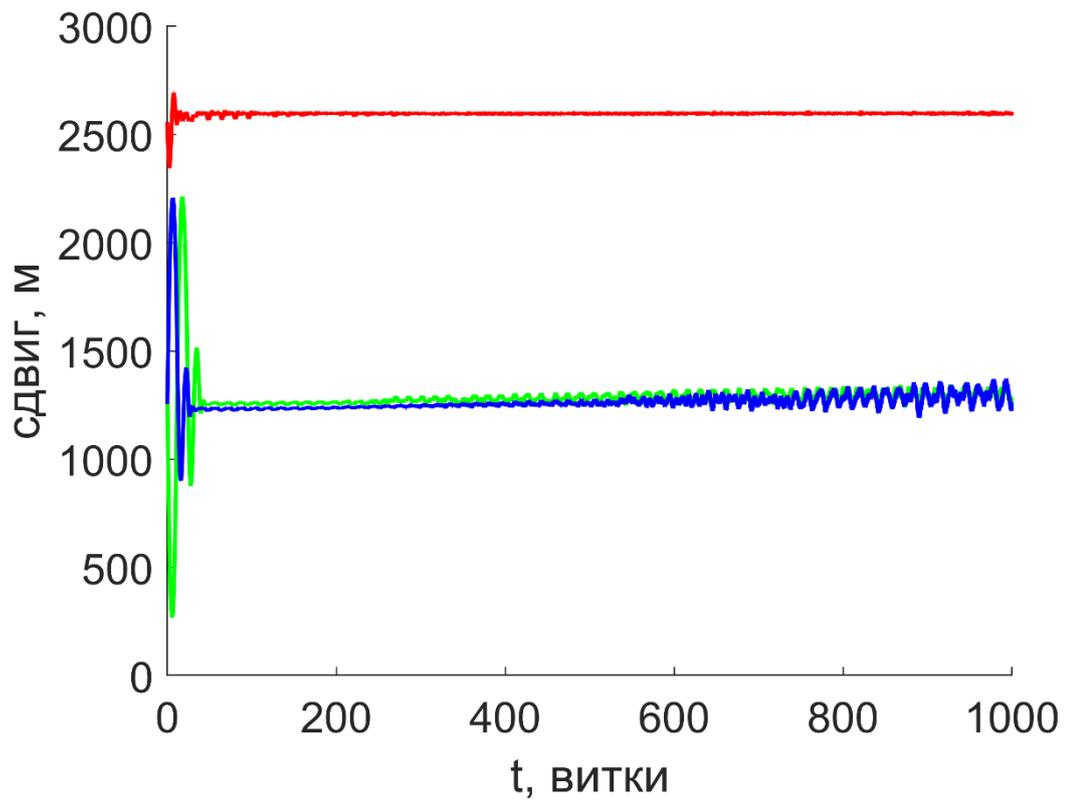


Рис. 16. Эволюция сдвига формации.

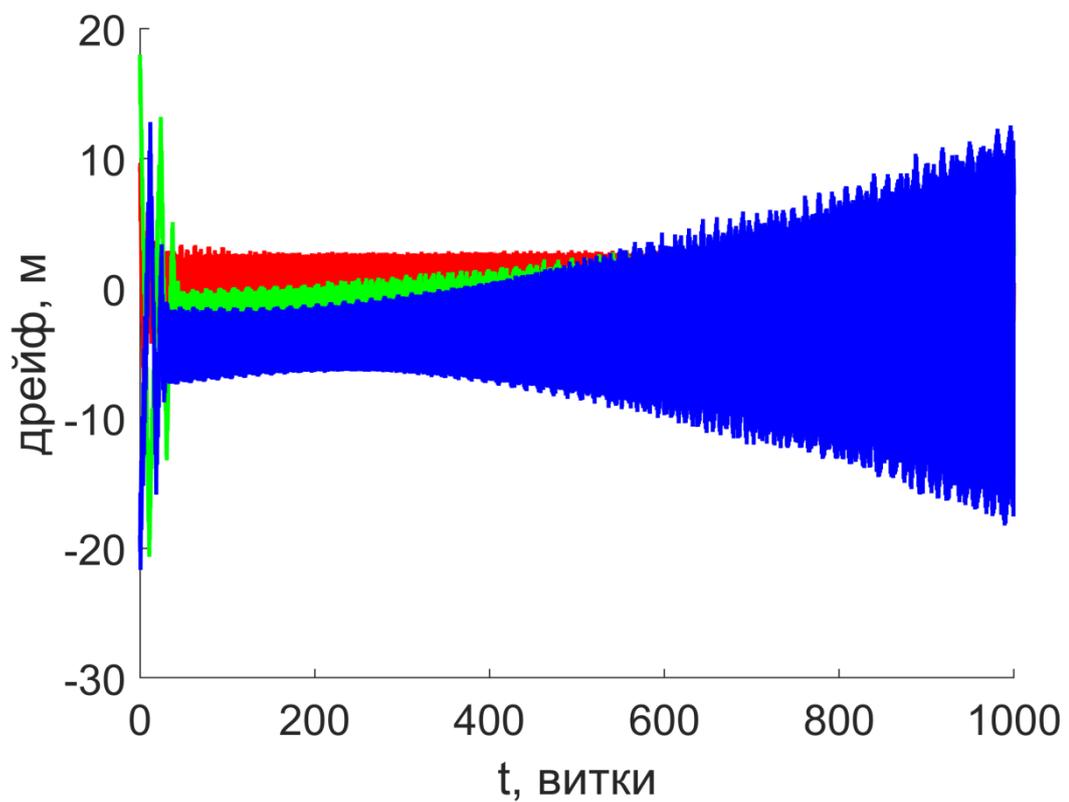


Рис. 17. Эволюция дрейфа формации.

Из графиков видно, что сдвиг и дрейф управляемы, а управление поддерживает дрейф в пределах заданного диапазона (не более 10 м отклонения от нулевого положения) и сдвиг в окрестности опорного (не более 40 м отклонения).

На рис. 18-19 показана эволюция амплитуд колебаний спутников в и вне плоскости орбиты. Амплитуда колебаний в плоскости орбиты хоть и не поддерживается идеально в допустимом интервале значений (отклонение в 300 м, начиная с 200 витков), тем не менее, значение амплитуд практически неизменно (после 200 витков), что позволяет поддерживать качество тетраэдра практически постоянным. Амплитуда колебаний вне плоскости орбиты, с другой стороны, неуправляема в общем случае. Это связано с нехваткой управляющего воздействия по направлению, перпендикулярному плоскости орбиты, то есть с малостью подъёмной силы при движении в атмосфере.

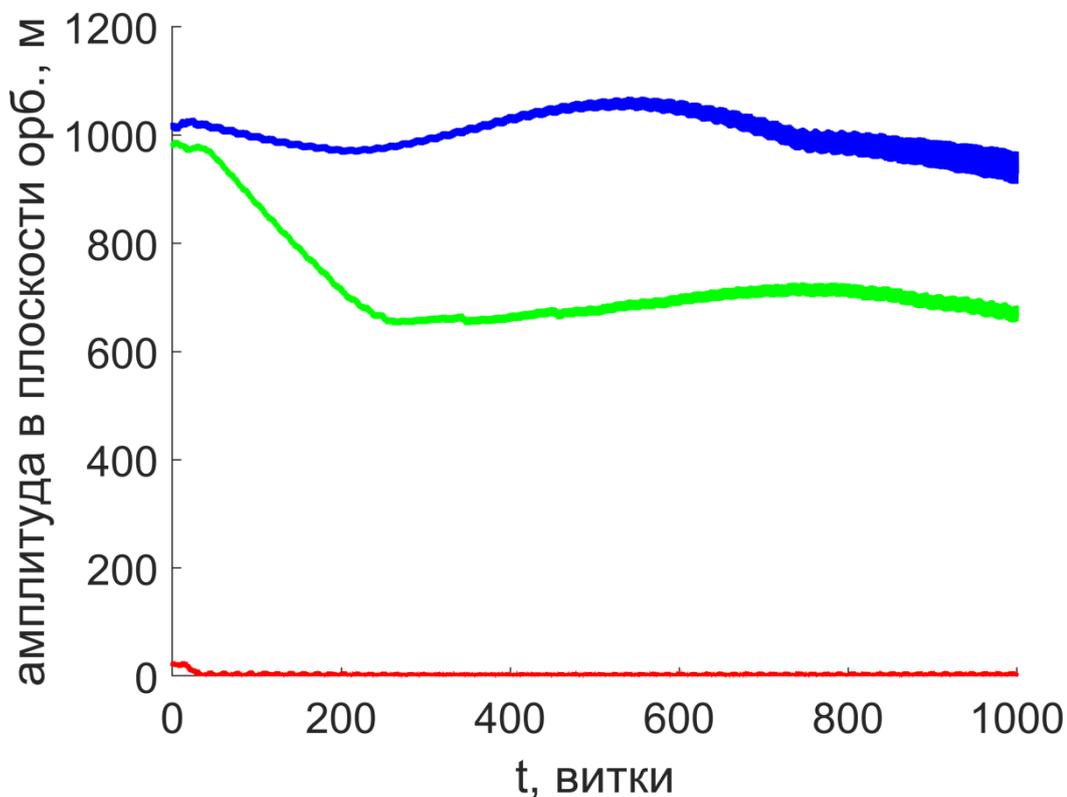


Рис. 18. Эволюция амплитуд в плоскости орбиты.

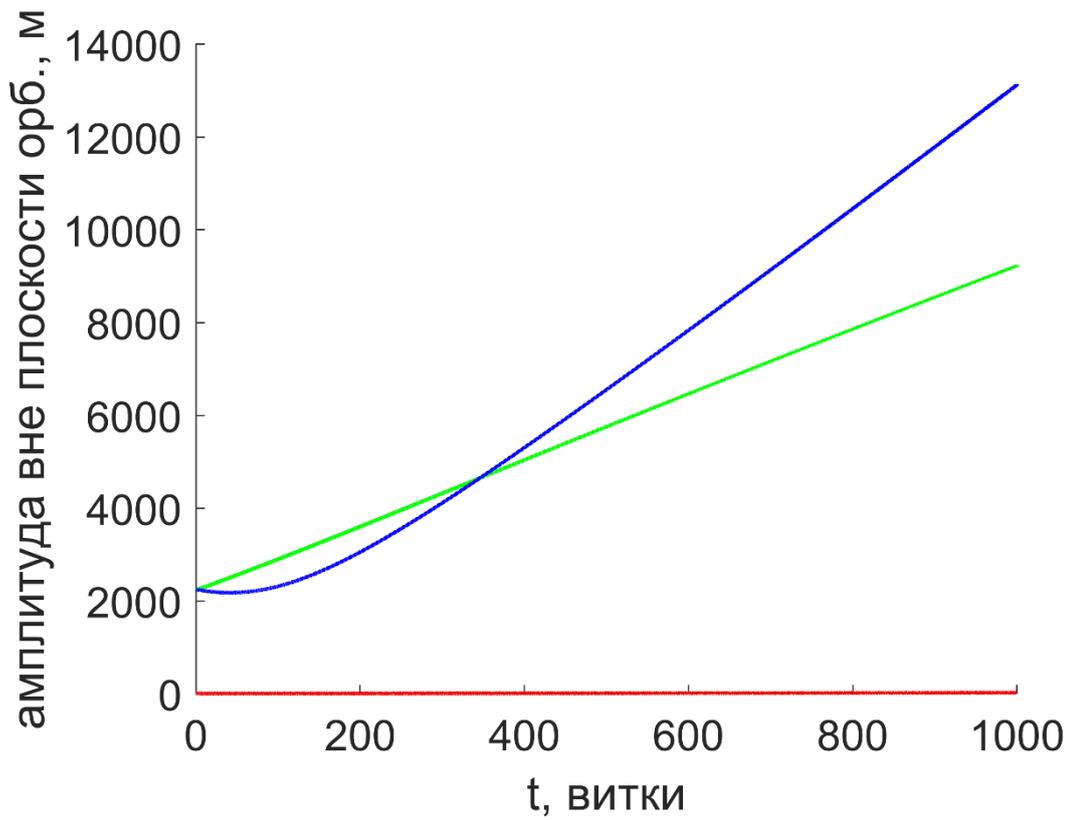


Рис. 19. Эволюция амплитуд вне плоскости орбиты.

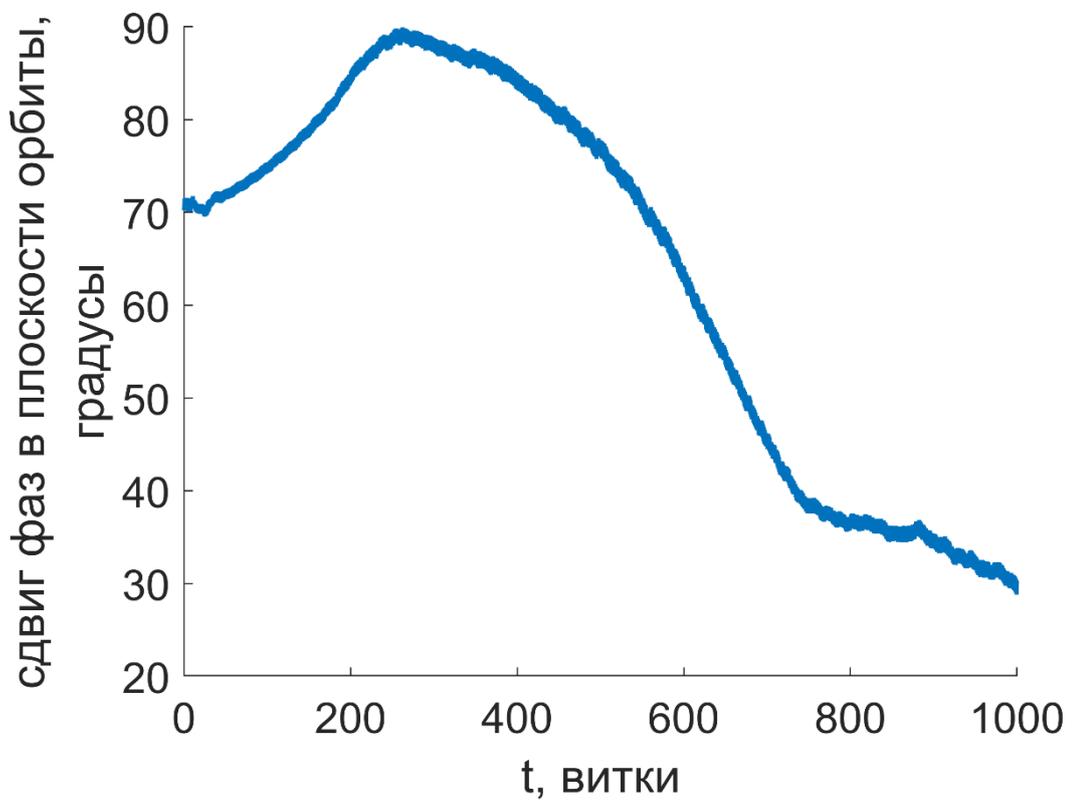


Рис. 20. Эволюция сдвига фаз между спутниками в плоскости орбиты.

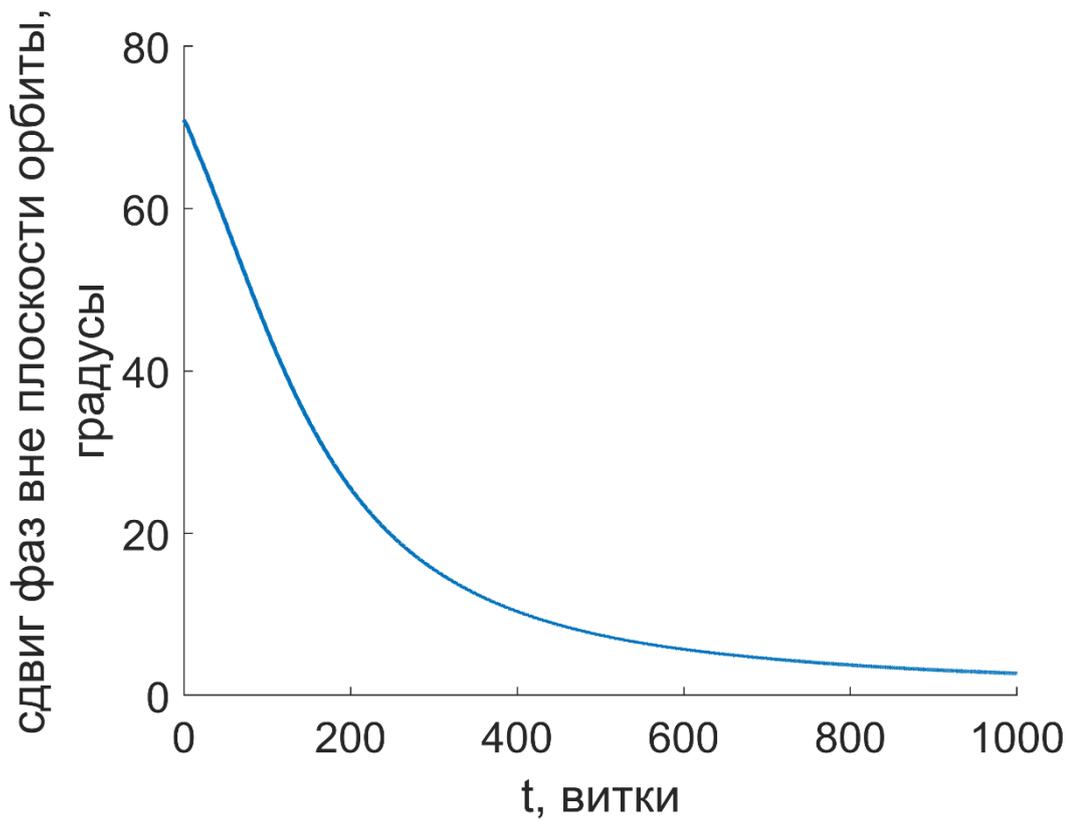


Рис. 21. Эволюция сдвига фаз между спутниками вне плоскости орбиты.

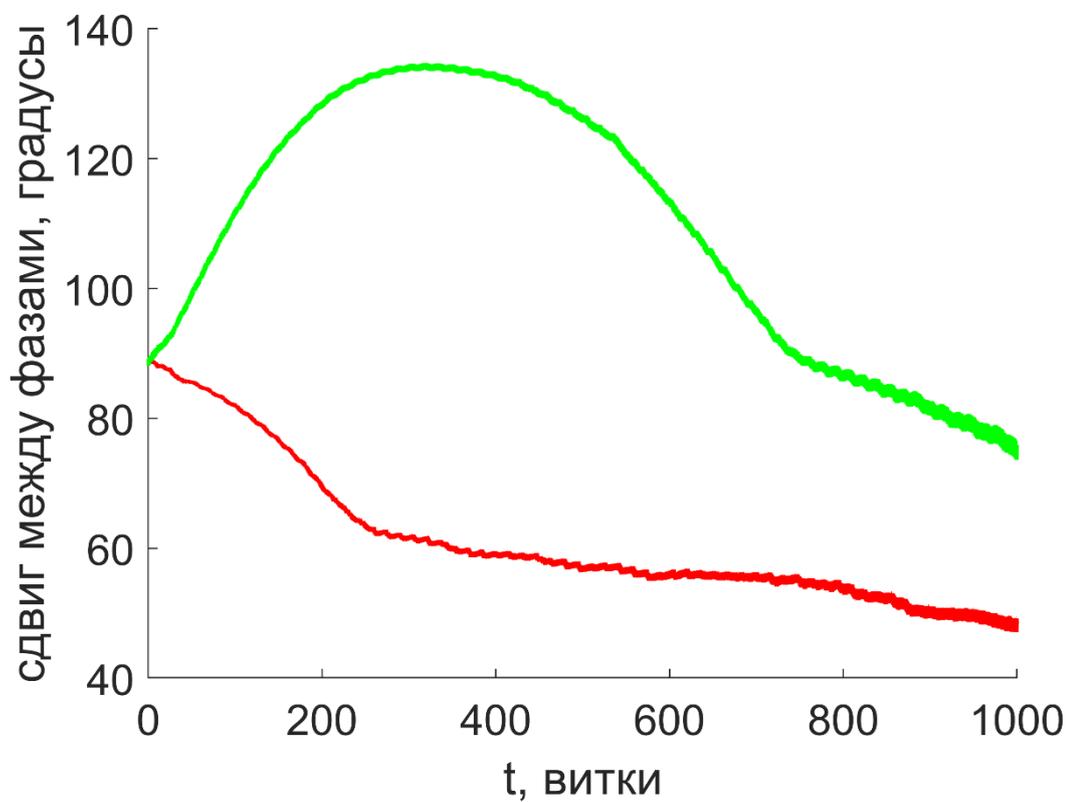
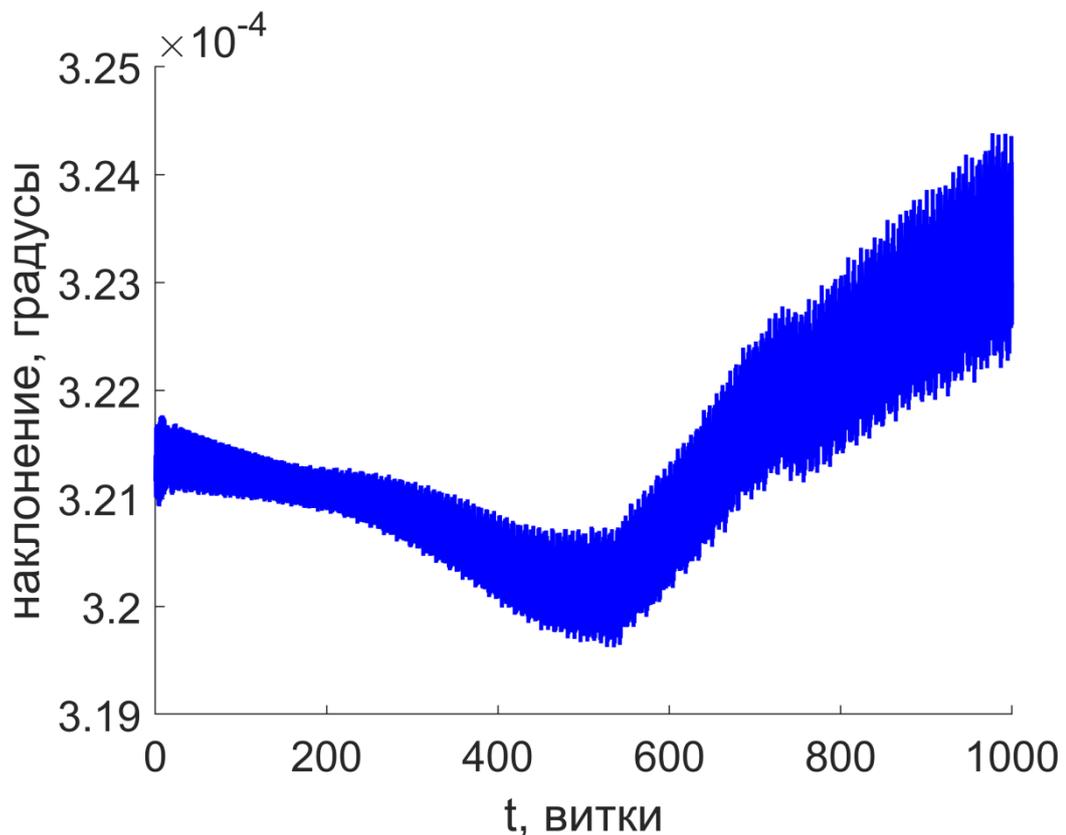


Рис. 22. Эволюция сдвига между фазами в и вне плоскости орбиты.

На рис 20-21 показана эволюция фаз спутников в тетраэдральной формации ($\eta_3 - \eta_2$ и $\lambda_3 - \lambda_2$ соответственно), а на рис. 22 показана эволюция разности фаз колебаний между двумя спутниками (обращающимися вокруг главного спутника в ОСК) в и вне плоскости орбиты $\eta_2 - \lambda_2$ и $\eta_3 - \lambda_3$. Сравнивая результаты с деградацией качества (рис. 16), получаем, что на начальном промежутке (первые 500 витков), когда качество ещё не слишком мало, сдвиг фаз в плоскости орбиты близок к требуемому значению. Сдвиг фаз вне плоскости орбиты неуправляем по той же причине – малости подъёмной силы. Заметим, что алгоритм поддержания разности фазы в и вне плоскости орбиты для каждого спутника по отдельности позволяет сохранять ориентацию плоскости движения спутников в ОСК близкой к требуемой.



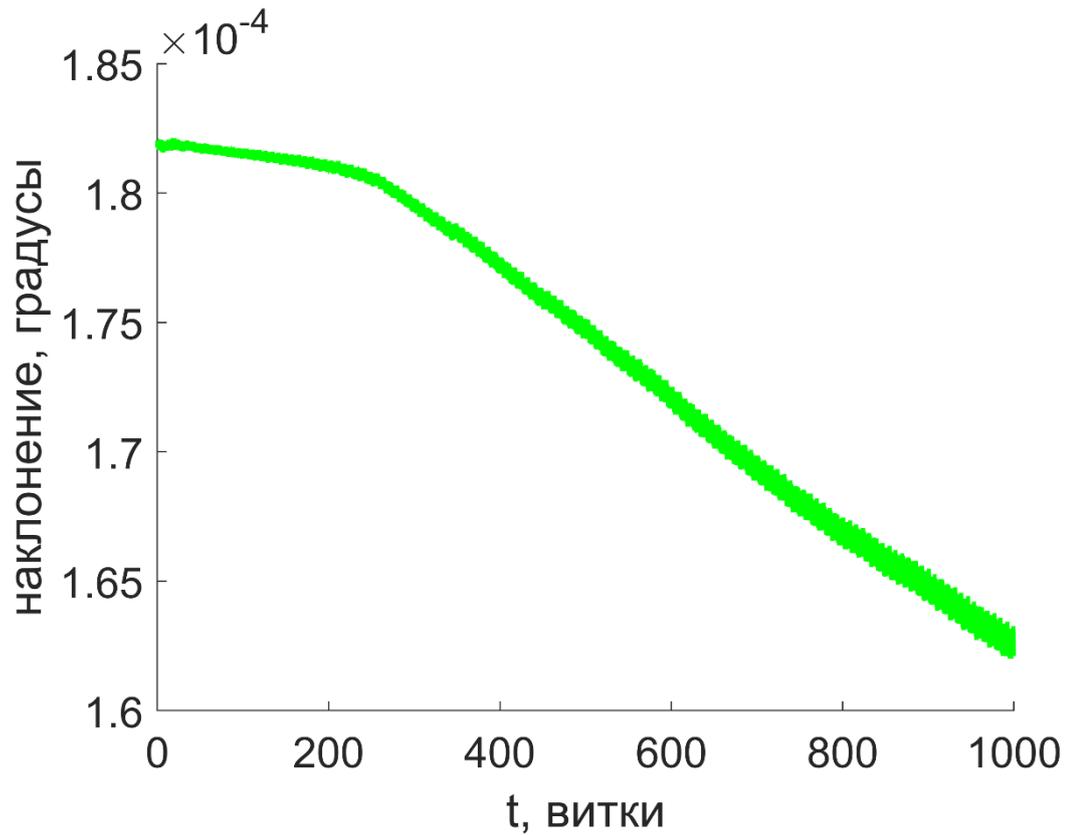


Рис. 23. Наклонение спутников формации (по отношению к главному спутнику).

С точки зрения движения в ИСК основной вклад в деградацию формации вносит различие наклонения орбит спутников в группировке. На рис. 23 представлены разности наклонения двух спутников формации по отношению к главному спутнику.

Нехватка управляющего воздействия может быть частично компенсирована увеличением плотности атмосферы в период высокой солнечной активности. Если запуск миссии может быть осуществлён в такой период времени, это может положительно сказаться на эволюции качества тетраэдра (рис. 24).

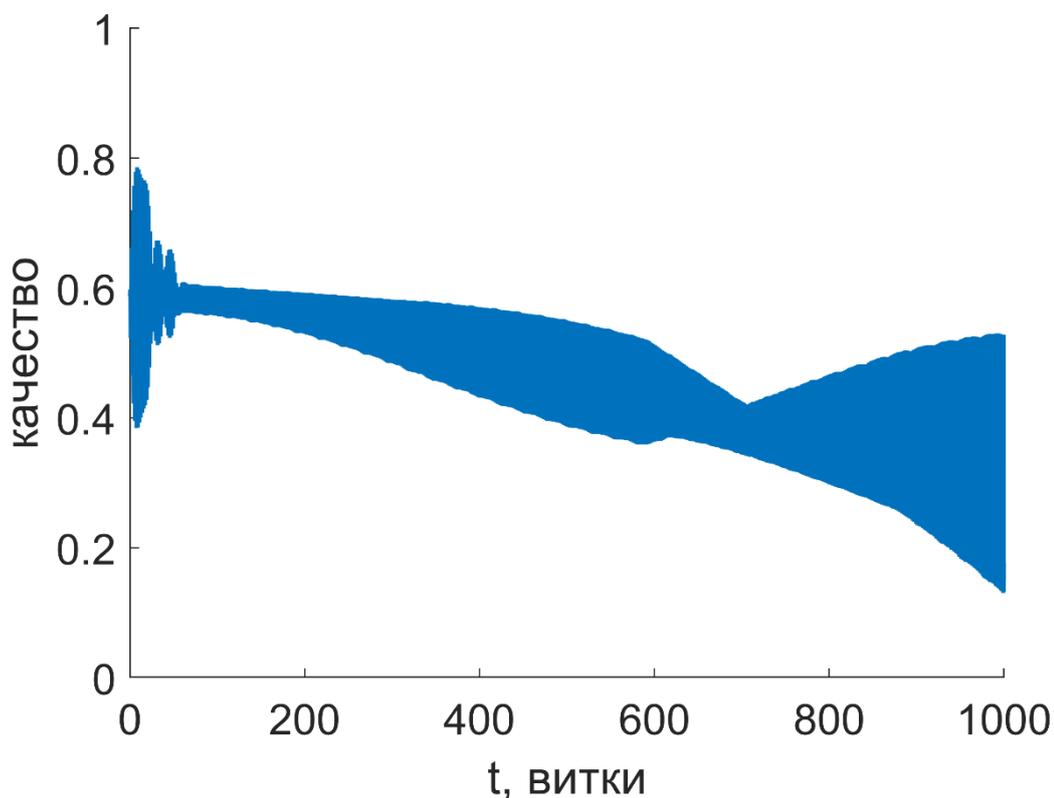


Рис. 24. Эволюция качества при высокой активности атмосферы.

Следует отметить, что построенный алгоритм поддерживает конфигурацию вида «leader-follower», поддержание других типов тетраэдральных конфигураций с помощью построенного алгоритма осложняется. У конфигурации «leader-follower» лишь два спутника требуют поддержки фазы и амплитуды вне плоскости орбиты, поскольку два оставшихся спутника покоятся в ОСК в опорном движении. В любой другой тетраэдральной конфигурации потребуется поддерживать амплитуды и фазы трёх (или всех четырёх) спутников совместно, что затруднительно — относительное движение вне плоскости орбиты слабо управляемо.

4.7.2 Формация размером $K = 1000$ м, различные наклонения орбиты

Похожая картина деградации качества и эволюции отдельных геометрических характеристик формации сохраняется в целом при изменении наклонения орбиты формации в широких пределах. В таблице 1

представлены результаты численного моделирования эволюции формации для различных значений параметров орбиты. Для каждого значения наклона проведено численное моделирование со случайной ошибкой в начальных данных 20 раз. В таблице приведены средние по этим 20-ти попыткам результаты.

Табл. 1. Количество витков управляемого движения до деградации формации.

Наклонение орбиты (градусы)	Число витков – падение качества до 0.4/0.2/0
0	251/513/969
10	246/527/972
20	248/586/937
30	253/571/954
40	218/590/1056
50	207/597/1014
60	201/550/927
70	194/496/796
80	171/439/711
90	154/402/613

Зависимость скорости деградации формации от ошибки в начальных данных имеет ярко выраженный нелинейный характер. В каждом конкретном случае управляющего воздействия либо хватает для парирования начального возмущения движения, либо оно оказывается недостаточным. В последнем случае движение формации становится неуправляемым и деградирует в течение нескольких витков. В табл. 2 приведены результаты численного моделирования: производился запуск формации со случайными начальными

данными с заданным среднеквадратичным отклонением случайной величины 100 раз. Вследствие случайности ошибки некоторая доля запусков оказывалась удачной – управление могло компенсировать ошибку выведения.

Табл. 2. Численное моделирование вероятности того, что управление достаточно для компенсации ошибки начальных данных.

Среднеквадратичное отклонение положения и скорости	1м	5м	10м	20м
0.5 см/с	97%	92%	82%	41%
1 см/с	91%	86%	73%	32%
2 см/с	76%	62%	48%	23%

4.7.3 Способы увеличения времени жизни формации

Представленные выше численные расчёты показывают, что предложенное управление может поддерживать качество тетраэдра на приемлемом уровне в течение нескольких недель. Для увеличения времени жизни (времени, при котором качество остаётся невырожденным) формации предлагается два способа. Первый способ основан на том, что уравнения относительного движения (55) тем точнее описывают реальную динамику системы, чем меньше расстояние между спутниками формации. Вследствие этого предлагается использовать формацию малого размера: характерное расстояние K между спутниками равно 100 м. Естественно, целесообразность запуска подобной группировки определяется в первую очередь целями миссии и навигационными возможностями аппаратов.

На рис. 25-32 представлены данные численного моделирования, порядок рисунков аналогичен рис. 15-22, параметры моделирования аналогичны за исключением размера формации.

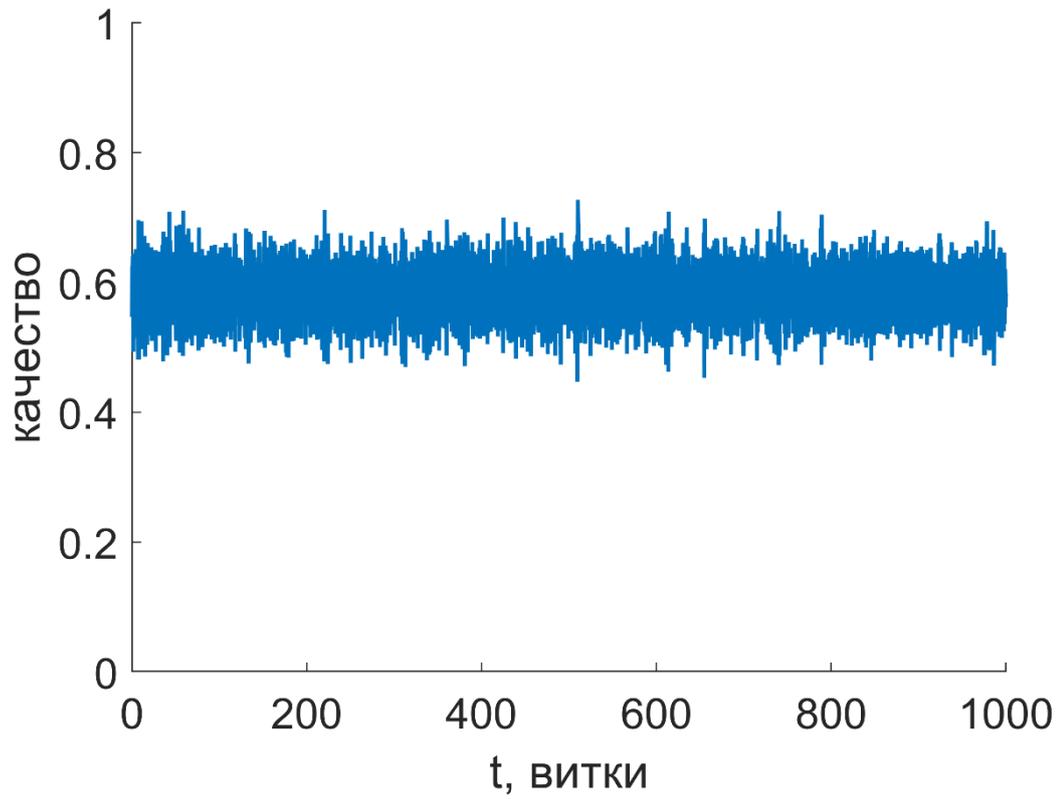


Рис. 25. Эволюция качества тетраэдра при наличии управления.

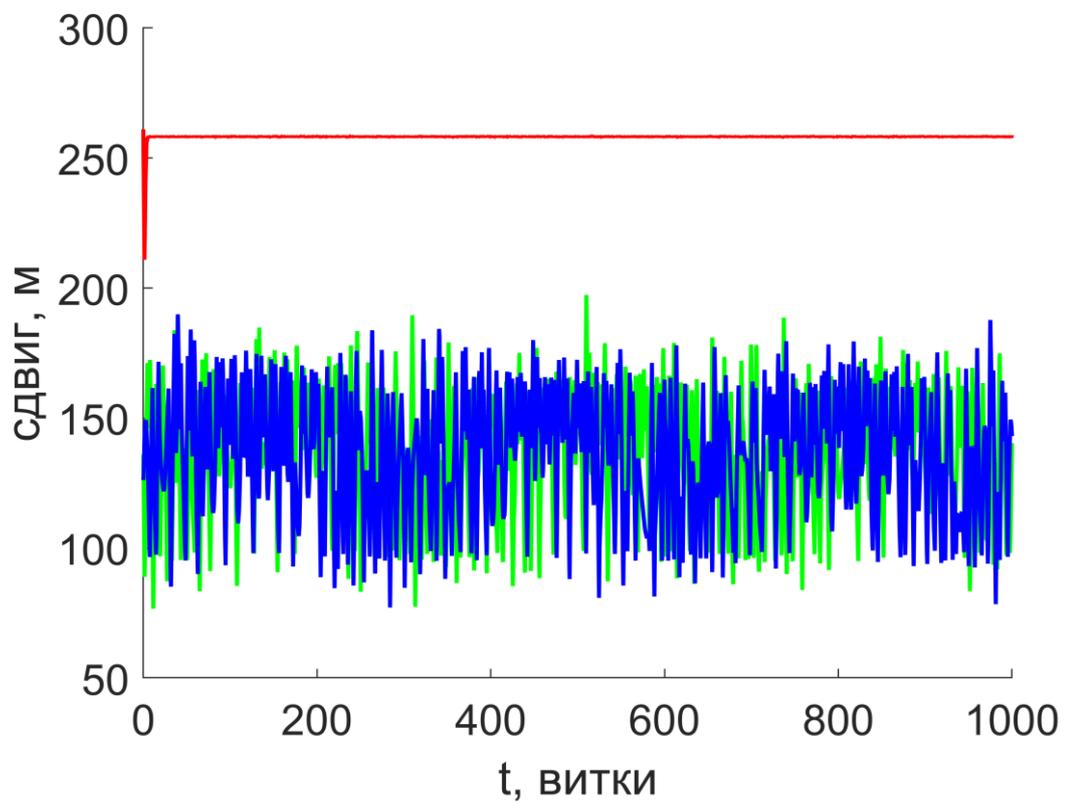


Рис. 26. Эволюция сдвига формации.

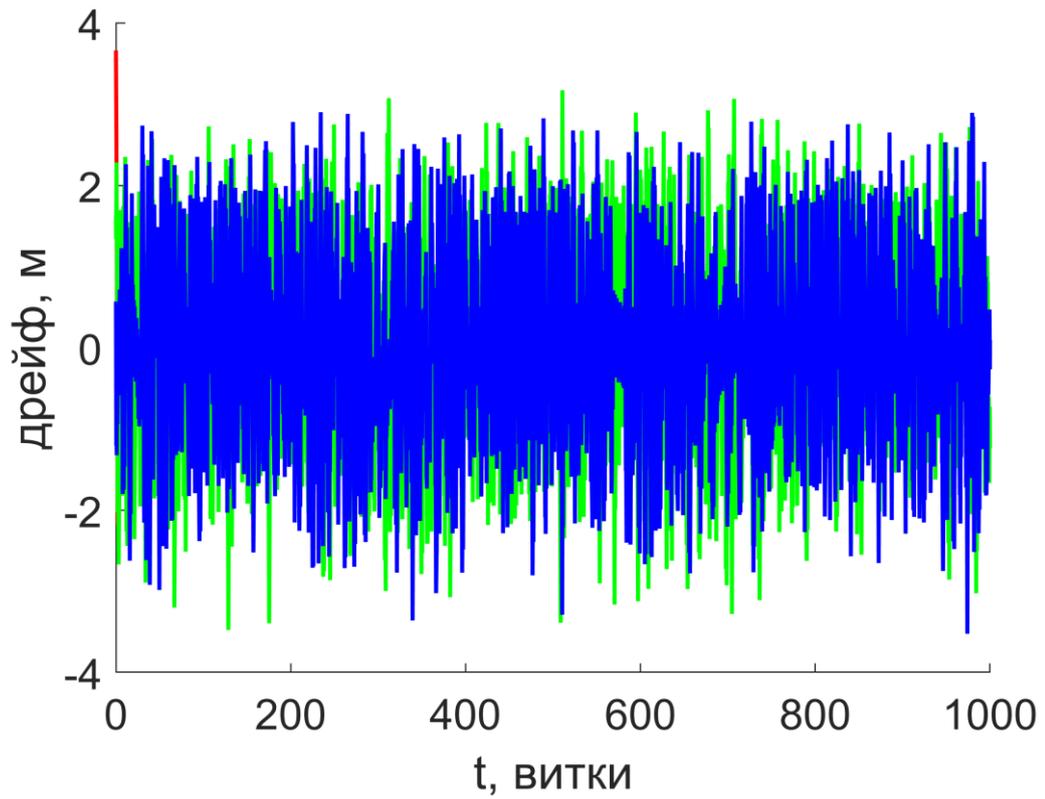


Рис. 27. Эволюция дрейфа формации.

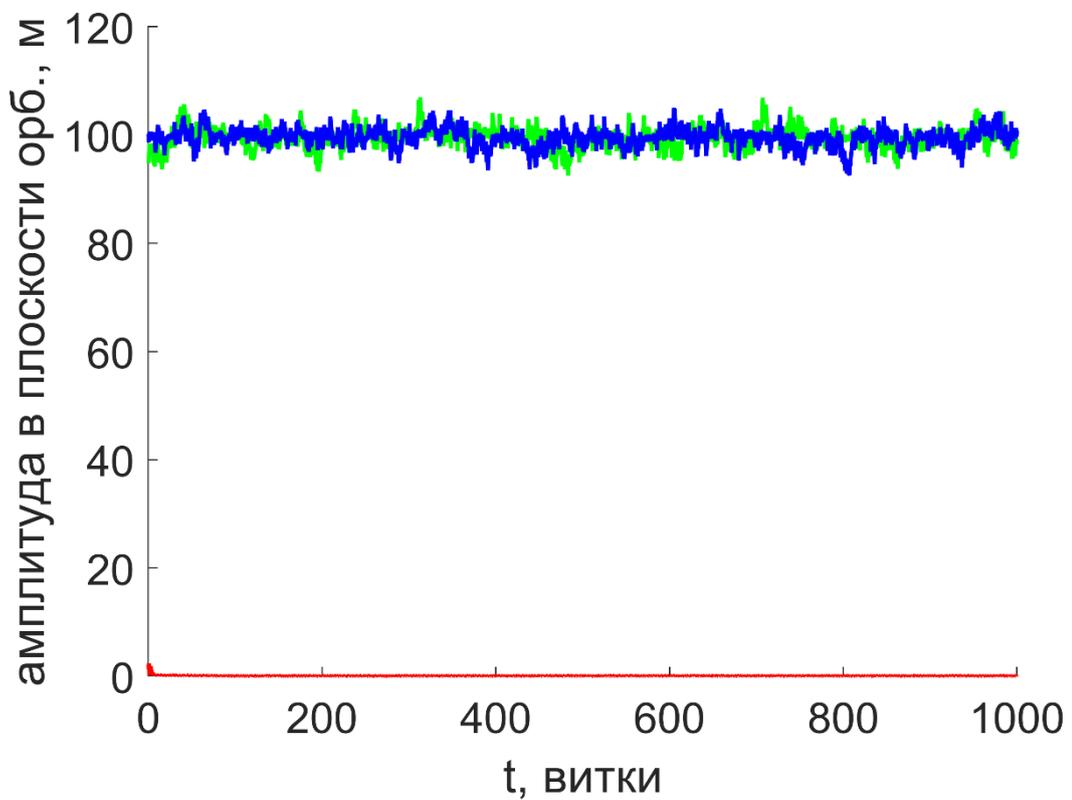


Рис. 28. Эволюция амплитуд в плоскости орбиты.

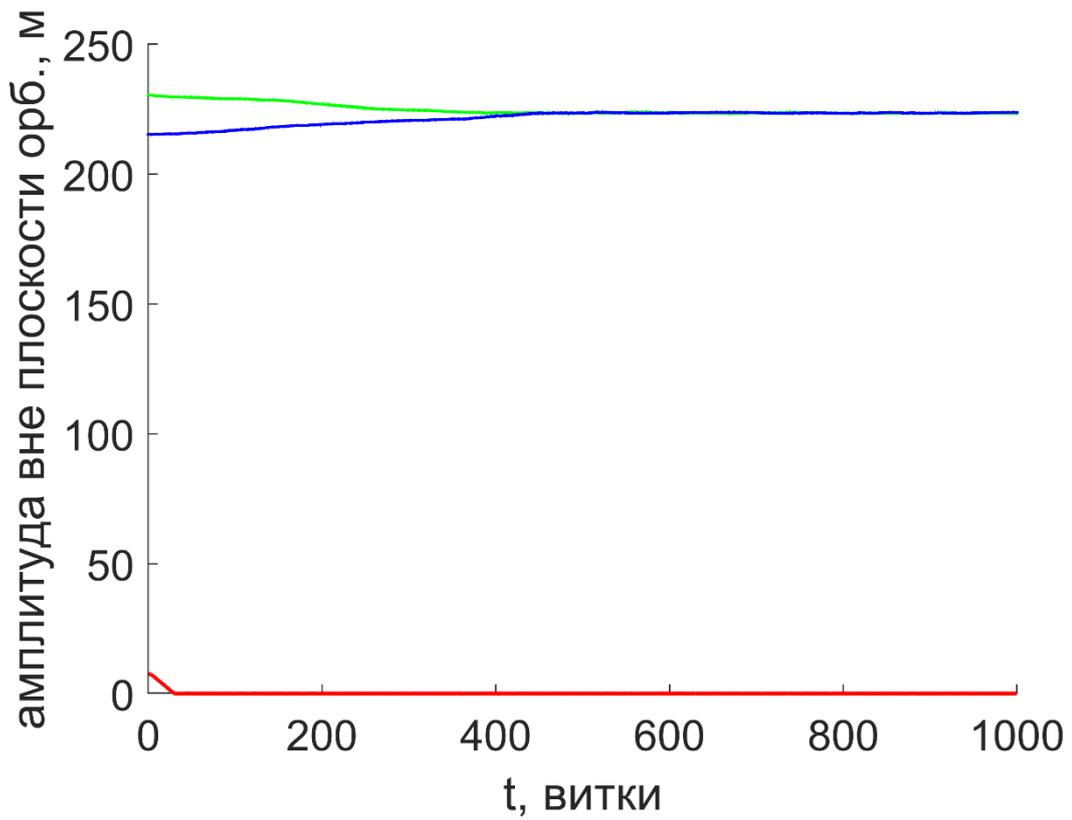


Рис. 29. Эволюция амплитуд вне плоскости орбиты.

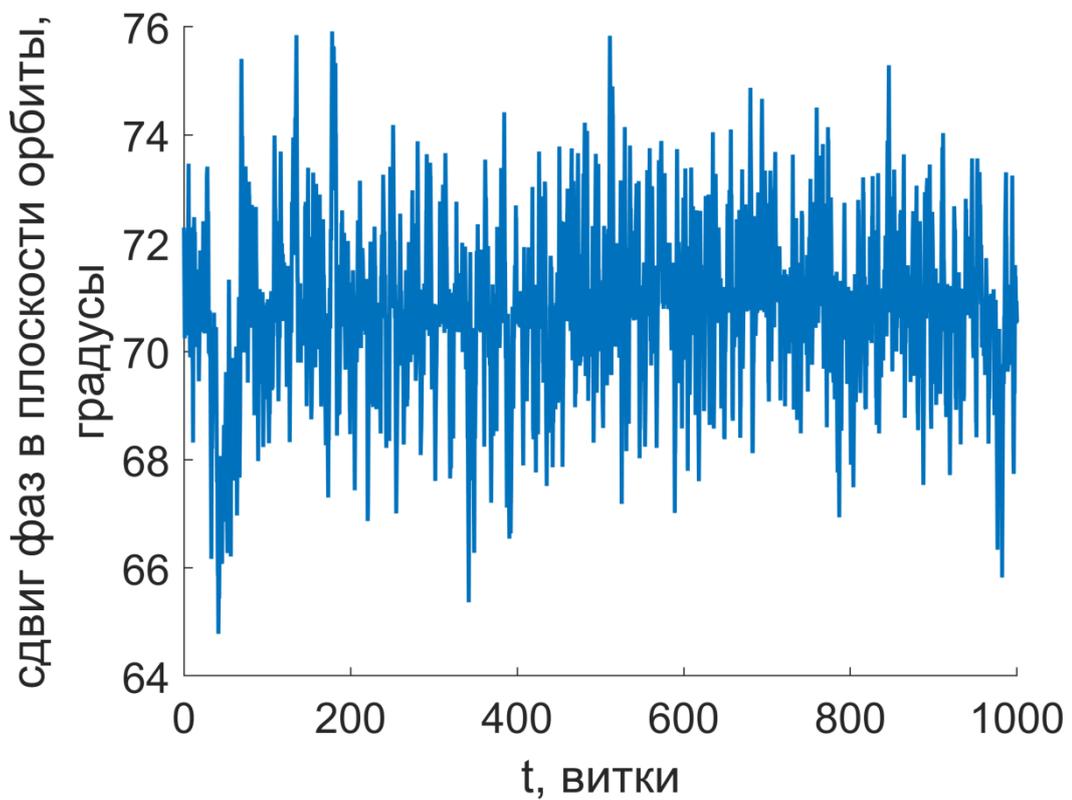


Рис. 30. Эволюция сдвига фаз между спутниками в плоскости орбиты.

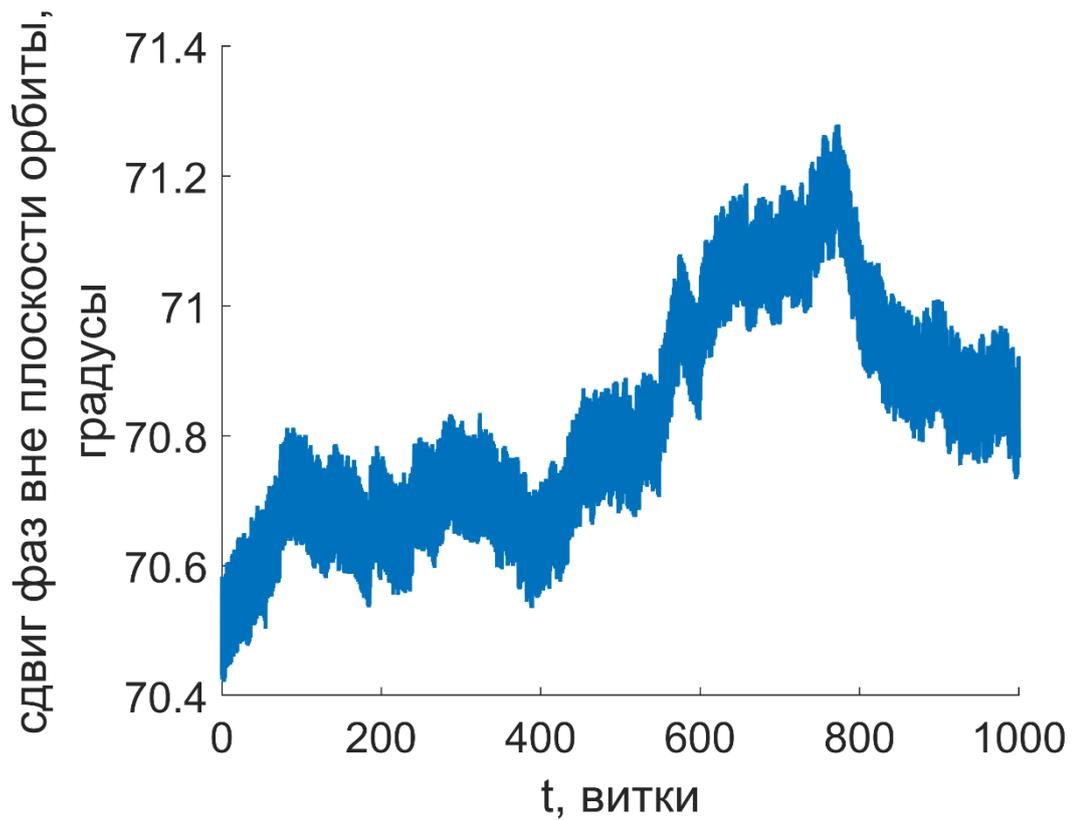


Рис. 31. Эволюция сдвига фаз между спутниками вне плоскости орбиты.

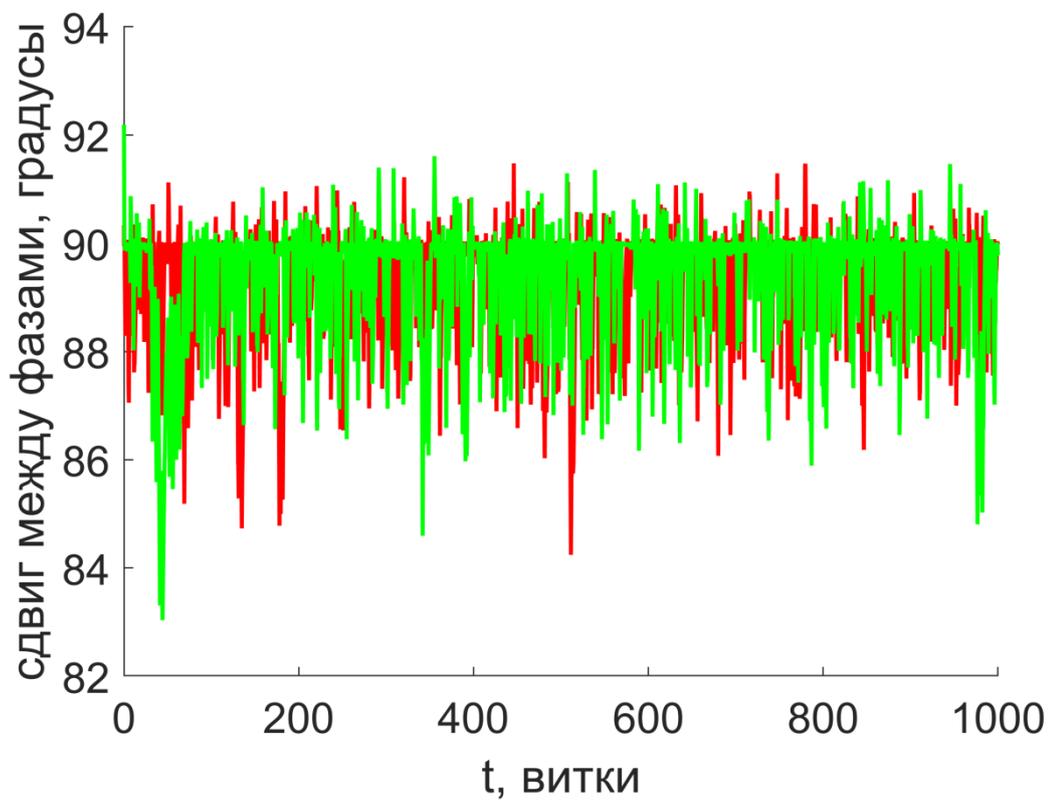


Рис. 32. Эволюция сдвига между фазами в и вне плоскости орбиты.

Как видно из результатов моделирования, качество формации малого размера сохраняется практически постоянным на протяжении длительного периода времени (на протяжении нескольких месяцев управлению удаётся поддерживать качество близким к изначальному). Подобное поведение сохраняется при различных значениях наклона орбиты. Из результатов численного моделирования можно сделать вывод, что формация малого размера может быть эффективно управляема представленным алгоритмом на протяжении длительных промежутков времени.

Другим способом, улучшающим качество тетраэдра и снижающим скорость деградации формации, является увеличение управляющего воздействия путём увеличения эффективной площади спутника – использования паруса. В дальнейшем моделировании предполагается, что каждый из спутников формации оснащён жестким парусом площадью 1 м^2 . Прочие параметры моделирования остаются неизменными (размер формации $K = 1000 \text{ м}$).

На рис. 33 представлены результаты численного моделирования качества тетраэдральной формации, а на рис. 34-40 – результаты моделирования отдельных параметров орбиты при использовании паруса. Порядок рисунков аналогичен рис. 15-22.

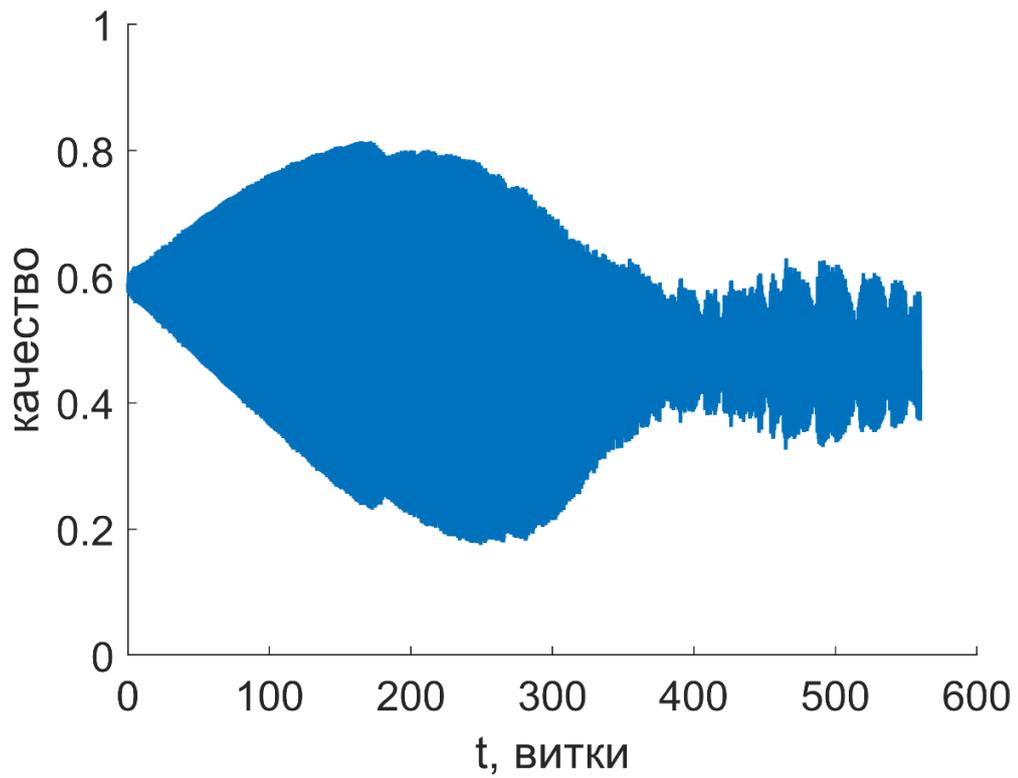


Рис. 33. Эволюция качества тетраэдра при наличии управления и использовании паруса.

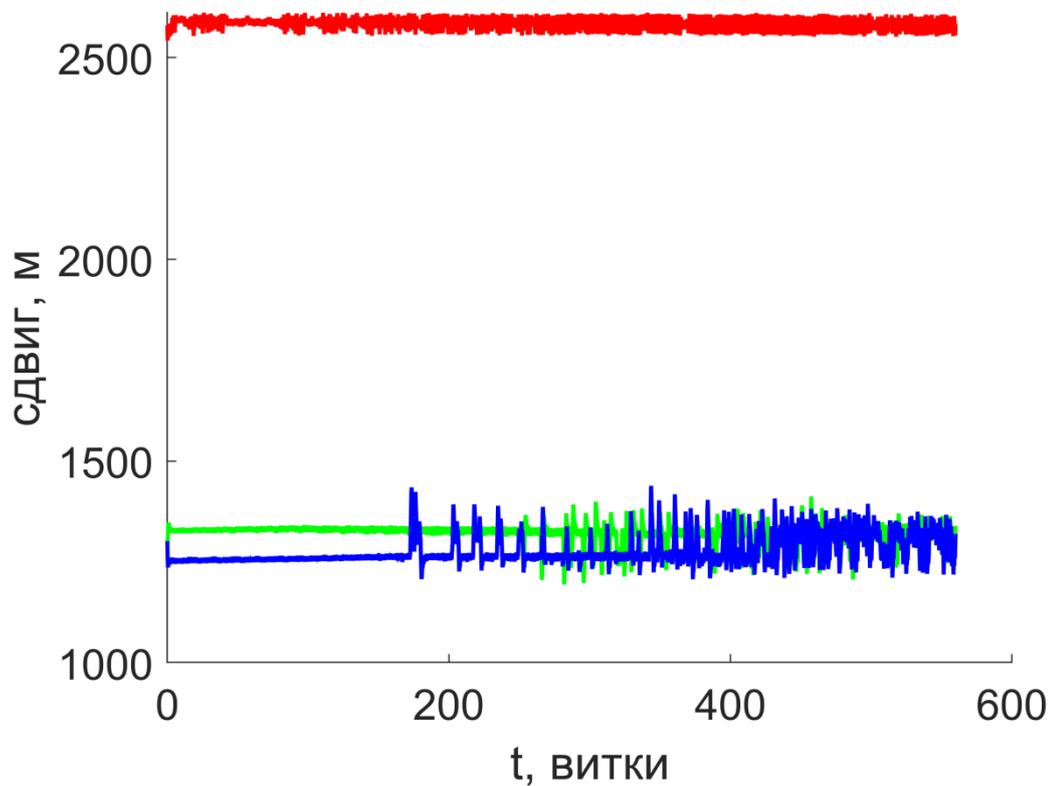


Рис. 34. Эволюция сдвига формации.

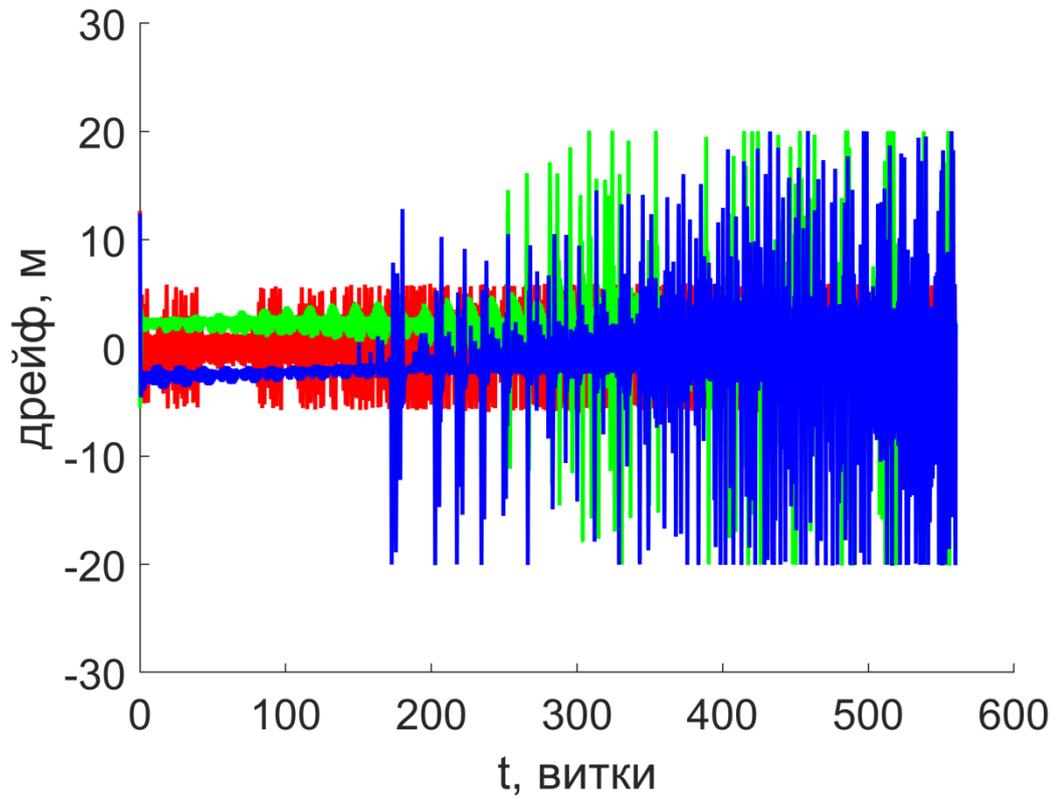


Рис. 35. Эволюция дрейфа формации.

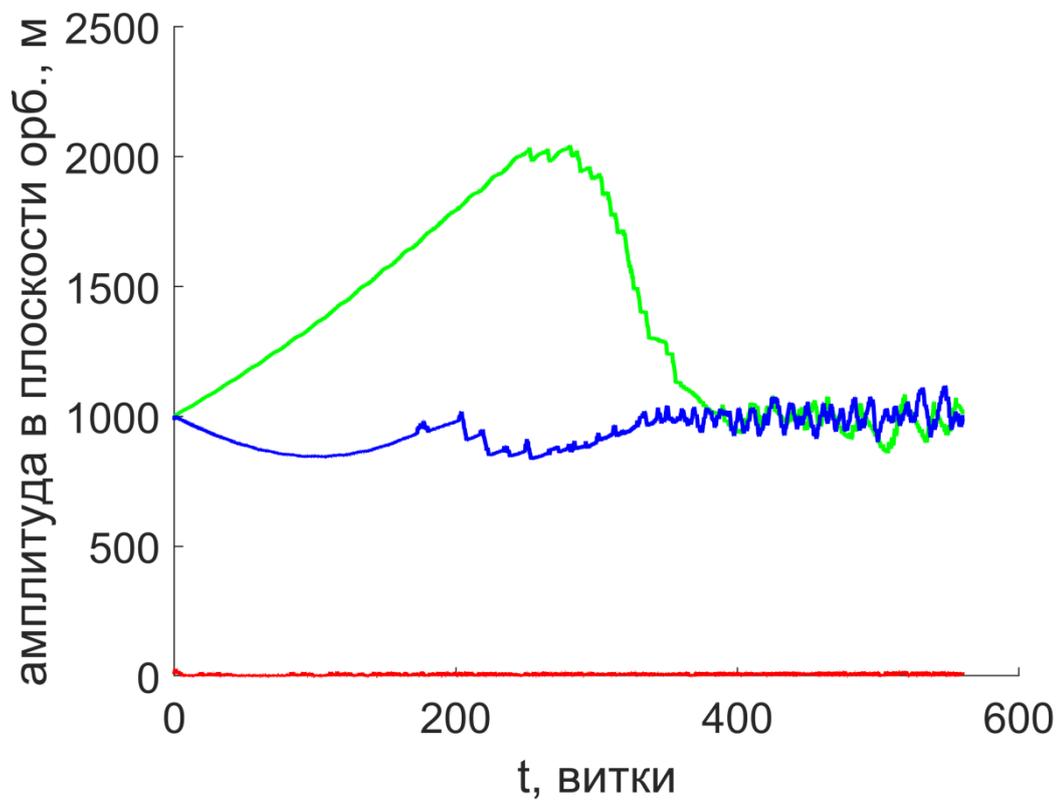


Рис. 36. Эволюция амплитуд в плоскости орбиты.

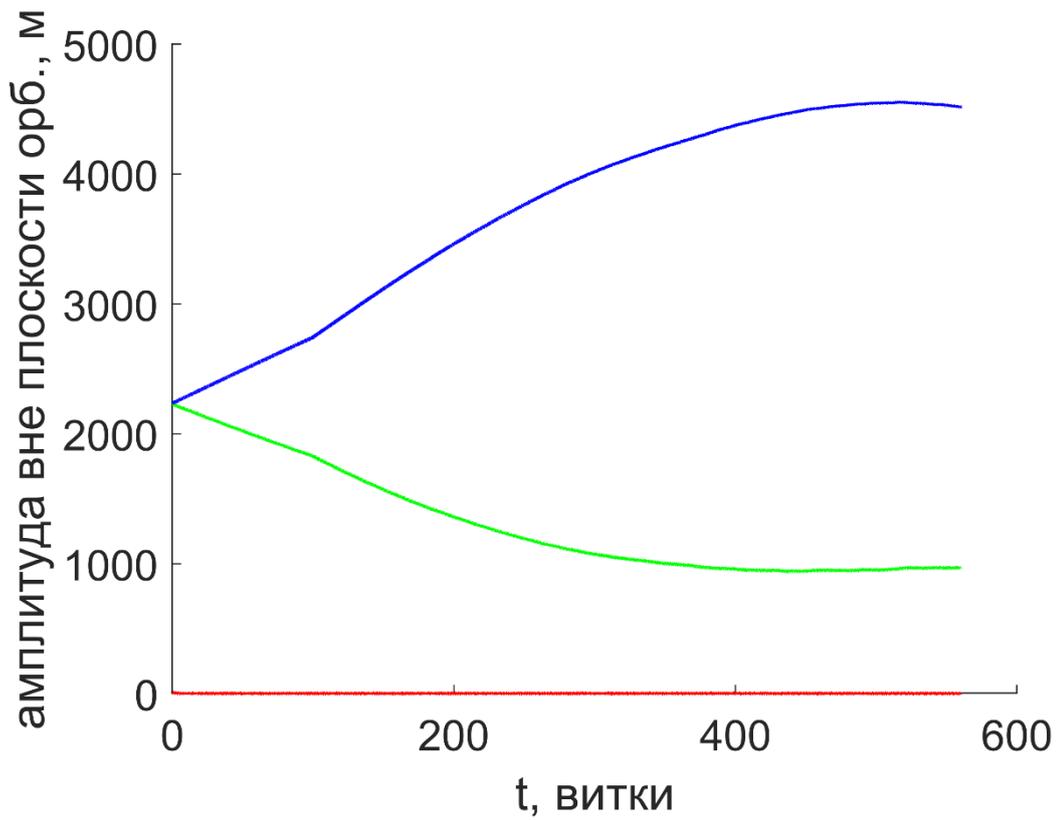


Рис. 37. Эволюция амплитуд вне плоскости орбиты.

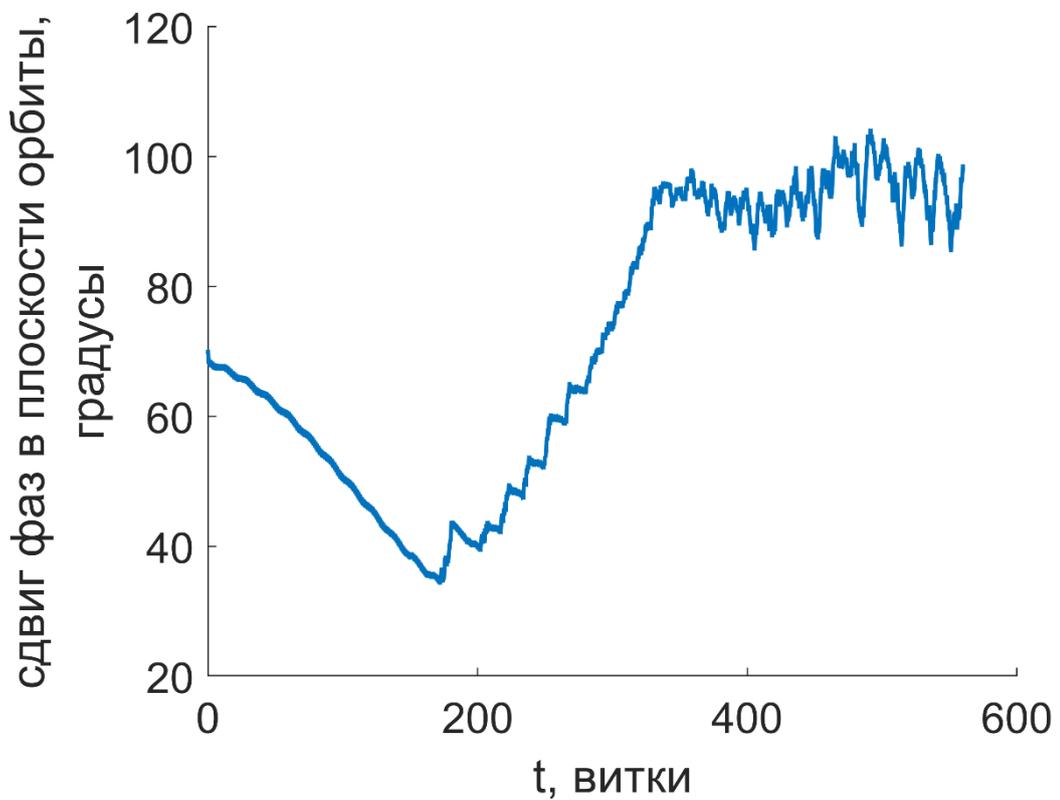


Рис. 38. Эволюция сдвига фаз между спутниками в плоскости орбиты.

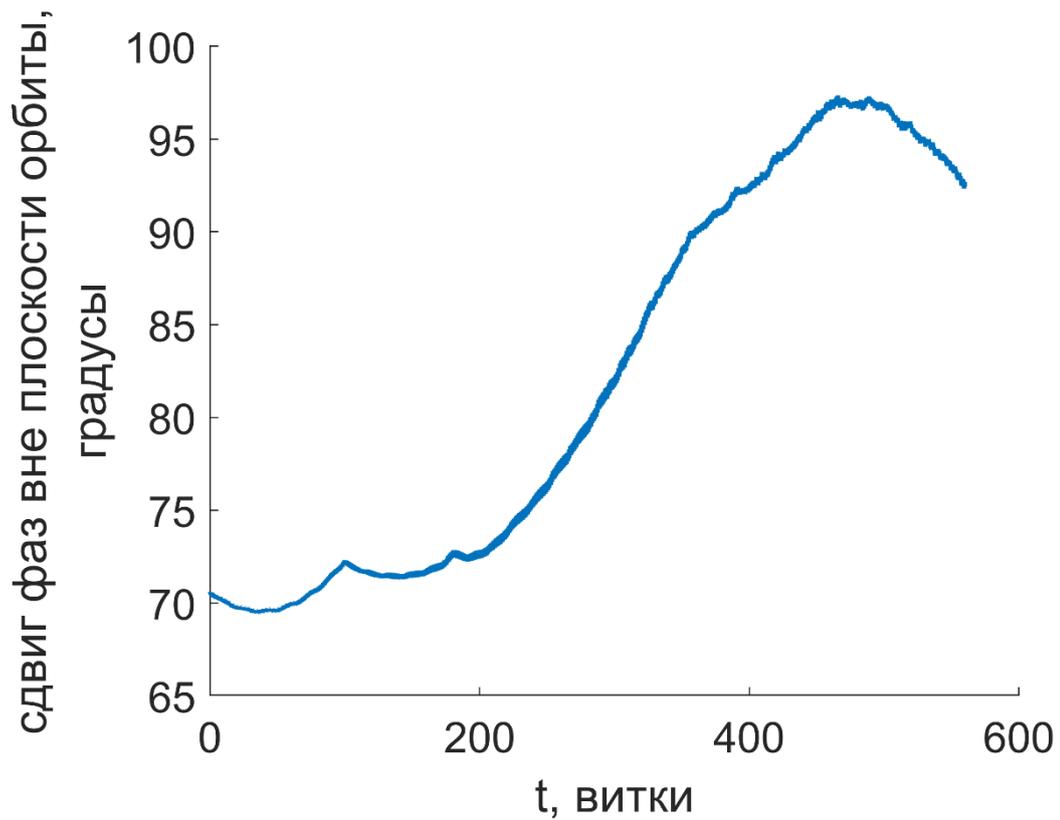


Рис. 39. Эволюция сдвига фаз между спутниками вне плоскости орбиты.

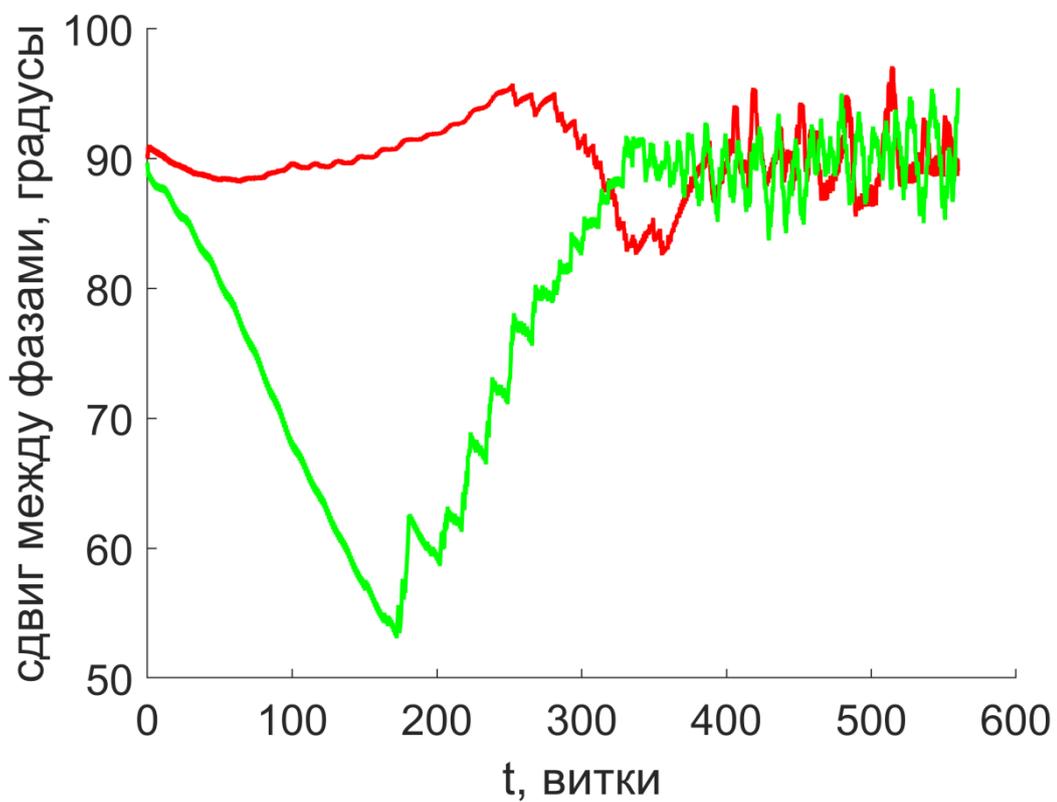


Рис. 40. Эволюция сдвига между фазами в и вне плоскости орбиты.

Необходимо также отметить, что использование паруса приводит к весьма стремительному снижению высоты орбиты спутников. На рис. 41 приведен график изменения высоты главного спутника формации во время его движения. Видно, что на низких орбитах использование паруса приводит к улучшению производительности алгоритма управления и увеличению среднего качества тетраэдральной формации. Время жизни аппаратов на орбите при этом уменьшается, что необходимо принимать во внимание при проектировании миссии.

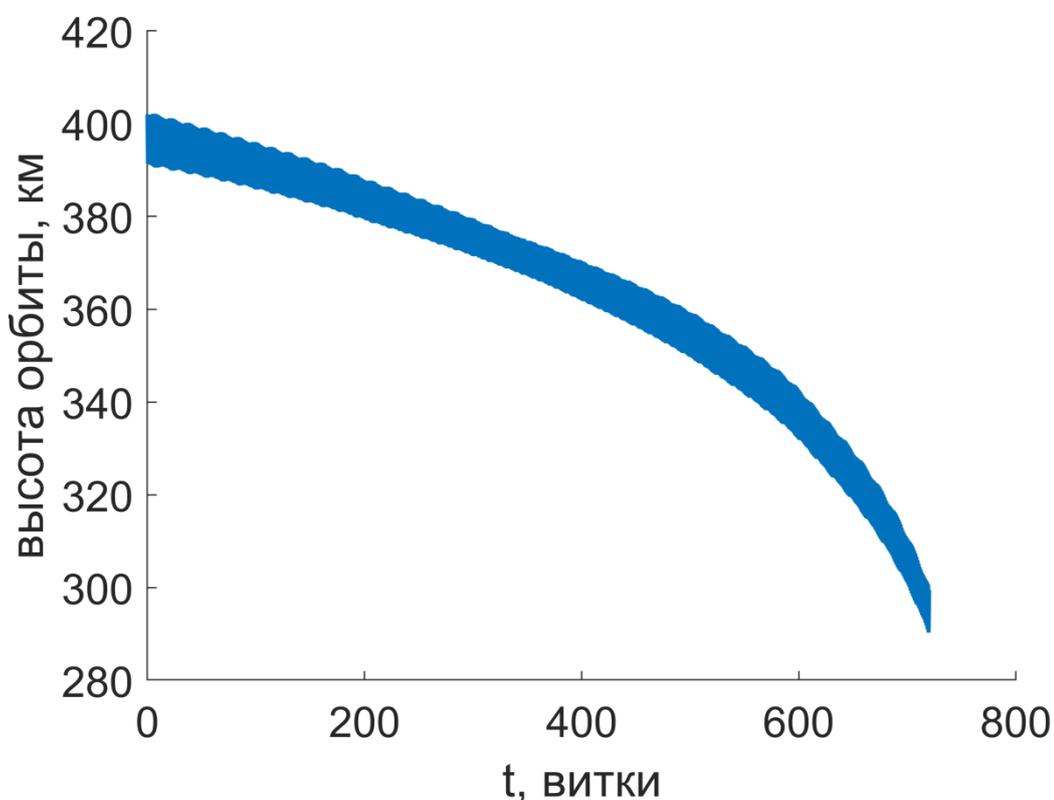


Рис. 41. Снижение спутника при движении в атмосфере.

4.8 Выводы по главе 4

В главе 4 предложена и реализована методика управления относительным движением группы спутников на основе параметров относительной орбиты. Алгоритм использует медленно меняющиеся во времени геометрические характеристики относительной и требуемой орбит для построения кандидат-функции Ляпунова.

Эффективность предложенной методики демонстрируется на примере сохранения качества тетраэдральной спутниковой группировки на орбите. Строится алгоритм бестопливного управления тетраэдральной формацией с помощью силы аэродинамического сопротивления. В соответствии с методикой основой алгоритма управления является прямой метода Ляпунова и подходящим образом выбираемая кандидат-функция. Затем алгоритм модифицируется с учётом специфики сил аэродинамического сопротивления.

Проведённое численное моделирование показывает, что построенный алгоритм способен поддерживать тетраэдральную формацию размером порядка километра, состоящую из малых космических аппаратов, на протяжении 1-2 месяцев в зависимости от требуемой орбиты и времени запуска миссии.

Продемонстрировано, что формация малого размера (порядка 100 метров) может эффективно поддерживаться построенным алгоритмом управления на длительных промежутках времени. Также рассмотрена возможность установки паруса для повышения ресурса управления.

Заключение

Решена задача построения и поддержания тетраэдральной формации спутников на орбите. Первая глава работы содержит описание тетраэдральной формации, описание систем координат, вспомогательные сведения и соотношения.

Во второй главе решена общая задача нахождения опорных орбит для спутников в тетраэдральной формации. Введено и обосновано понятие качества тетраэдра, найдены необходимые и достаточные условия сохранения качества тетраэдра во время его пассивного движения по орбите в линейной модели относительного движения спутников. Подробно исследована система уравнений, описывающая упомянутые выше условия, описан геометрический смысл отдельных параметров найденных движений.

В третьей главе подробно исследована зависимость существования тетраэдральной формации с постоянным качеством в линейной модели от амплитуд колебаний отдельных спутников формации. Выделены специфические семейства решений, особое внимание уделено формациям, в которых амплитуды колебаний спутников равны между собой: формации типа «leader-follower» и формациям с тремя равными амплитудами. Описаны геометрические характеристики соответствующих тетраэдров, проведено аналитическое уточнение полученных опорных орбит. Построена методика получения опорной орбиты в модели движения, учитывающей нелинейность гравитационного поля Земли. Исследована зависимость скорости деградации формации от величины ошибок выведения спутников на опорную орбиту. По результатам исследования сделан вывод о необходимости управления спутниками формации, поскольку в пассивном движении качество тетраэдра падает до нуля в течение нескольких дней.

Четвёртая глава посвящена построению методики управления спутниками в формации, основанной на использовании прямого метода

Ляпунова. Для построения кандидат-функции Ляпунова использованы геометрические характеристики относительных орбит спутников группы. Построенный алгоритм управления адаптирован к задаче с учётом особенностей его реализации при помощи сил аэродинамического сопротивления. Показано, что тетраэдральная формация в зависимости от своего размера и требуемых характеристик орбит может поддерживаться на протяжении нескольких месяцев.

Список литературы

1. Jorgensen A., Spence H. On separating space and time variations of auroral precipitation: Dual DMSP-F6 and -F8 observations // *Adv. Sp. Res.* 1997. Vol. 20, № 3. P. 453–456.
2. Karlsson T. et al. Separating spatial and temporal variations in auroral electric and magnetic fields by Cluster multipoint measurements // *Ann. Geophys.* 2004. Vol. 22, № 7. P. 2463–2472.
3. Haerendel, G., Roux, A., Blanc, M., Paschmann, G., Bryant, D., Korth, A., & Hultqvist B. Cluster, study in three dimensions of plasma turbulence and small-scale structure // *Mission Propos.* 1982.
4. Chang I.-S., Toda S., Kibe S. European space launch failures // 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
5. Le Lann G. An analysis of the Ariane 5 flight 501 failure-a system engineering perspective // *Proceedings International Conference and Workshop on Engineering of Computer-Based Systems.* IEEE Computer. Soc. Press, 2002. P. 339–346.
6. Lions J.-L. et al. ARIANE 5 Flight 501 Failure Report by the Inquiry Board [Electronic resource] // European Space Agency, (Special Publication) ESA SP. 1996. URL: http://monge.univ-mlv.fr/~dr/XPOSE2002/Site_Vaubourg_Stephane_IR3/doc/esa-x-1819eng.pdf (accessed: 04.02.2020).
7. Escoubet C.P., Fehringer M., Goldstein M. The Cluster mission // *Ann. Geophys.* 2001. Vol. 19, № 10/12. P. 1197–1200.
8. Escoubet C., Schmidt R. Cluster II: Plasma measurements in three dimensions // *Adv. Sp. Res.* 2000. Vol. 25, № 7–8. P. 1305–1314.
9. Southwood D., Cowley FRS S.W.H., Mitton S. Magnetospheric Plasma Physics: The Impact of Jim Dungey's Research // *Magnetospheric Plasma*

- Physics: The Impact of Jim Dungey's Research / ed. Cowley FRS S.W.H., Southwood D., Mitton S. Cham: Springer International Publishing, 2015. Vol. 41. 1–271 p.
10. Paschmann G. et al. Outer Magnetospheric Boundaries: Cluster Results / ed. Paschmann G. et al. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005. Vol. 20.
 11. Escoubet C.P., Schmidt R., Goldstein M.L. Cluster - Science and Mission Overview // The Cluster and Phoenix Missions. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. Vol. 79, № 1–2. P. 11–32.
 12. Balogh A. et al. The Cluster Magnetic Field Investigation // The Cluster and Phoenix Missions. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. P. 65–91.
 13. Taylor M.G.G.T. et al. The Science of the Cluster Mission // Magnetospheric Plasma Physics: The Impact of Jim Dungey's Research / ed. Cowley FRS S.W.H., Southwood D., Mitton S. Cham: Springer International Publishing, 2015. P. 159–179.
 14. Guzman J., Schiff C. A Preliminary Study for a Tetrahedron Formation: Quality Factors and Visualization // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
 15. Daly. P.W. The Tetrahedron Quality Factors of CSDS // Tech. Rep. MP Ae–W–100–94–27, Max-Planck-Institut für Aeron. D–37191 Katlenburg-Lindau, Ger. 1994. P. 1–6.
 16. Robert P., Roux A., Coeur-Joly O. Validity of the Estimate of the Current Density Along Cluster Orbit with Simulated Magnetic Data // Proceedings of the Cluster Workshops, Data Analysis Tools and Physical Measurements and Mission-Oriented Theory. European Space Agency, 1995. P. 229.
 17. Dunlop, M. W.; Balogh, A.; Southwood, D. J.; Elphic, R. C.; Glassmeier, K. -H.; Neubauer F.M. Configurational sensitivity of multipoint magnetic field measurements // Proceedings of an International Workshop on Space Plasma Physics Investigations by Cluster and Regatta. 1990. P. 23–28.

18. Robert P., Roux A. Accuracy of the Estimate of J via Multipoint Measurements // Workshop on Space Plasma Physics Investigations by Cluster and Regatta. 1990.
19. Paschmann G., Daly. P.W. Analysis methods for multi-spacecraft data. 1st ed. International Space Science Institute, 1998. 485 p.
20. ESA Cluster mission [Electronic resource]. URL: <https://sci.esa.int/web/cluster> (accessed: 04.02.2020).
21. Mauk B.H. et al. Magnetospheric multiscale and global electrodynamics missions // Geophysical Monograph Series. 1999. Vol. 109. P. 225–235.
22. Burch J.L. et al. Magnetospheric Multiscale Overview and Science Objectives // Space Sci. Rev. The Author(s), 2016. Vol. 199, № 1–4. P. 5–21.
23. Guzman J.J., Edery A. Mission design for the MMS tetrahedron formation // 2004 IEEE Aerospace Conference Proceedings (IEEE Cat. No.04TH8720). IEEE, 2004. Vol. 1. P. 533–540.
24. Clemente D.C., Atkins E.M. Optimization of a Tetrahedral Satellite Formation // J. Spacecr. Rockets. 2005. Vol. 42, № 4. P. 699–710.
25. Hughes S.P. Formation Tetrahedron Design for Phase I of the Magnetospheric Multiscale Mission // Proc. of the Flight Mechanics Symposium. NASA GSFC, 2003.
26. Roscoe C.W.T., Vadali S.R., Alfriend K.T. Design of Satellite Formations in Orbits of High Eccentricity with Performance Constraints Specified over a Region of Interest // J. Astronaut. Sci. 2012. Vol. 59, № 1–2. P. 141–160.
27. Hughes S.P. General Method for Optimal Guidance of Spacecraft Formations // J. Guid. Control. Dyn. 2008. Vol. 31, № 2. P. 414–423.
28. MMS Science Team publications [Electronic resource]. URL: <http://mms.rice.edu/mms/publications.php> (accessed: 04.02.2020).
29. Science Team NASA MMS [Electronic resource]. URL: <https://publons.com/researcher/2612056/science-team-nasa-mms/> (accessed: 04.02.2020).

30. Draim J.E. A common-period four-satellite continuous global coverage constellation // *J. Guid. Control. Dyn.* 1987. Vol. 10, № 5. P. 492–499.
31. Draim J.E. Three- and four-satellite continuous-coverage constellations // *J. Guid. Control. Dyn.* 1985. Vol. 8, № 6. P. 725–730.
32. Hsu D.Y. Relations between dilutions of precision and volume of the tetrahedron formed by four satellites // *Proceedings of 1994 IEEE Position, Location and Navigation Symposium - PLANS'94.* IEEE. Vol. 1, № 0. P. 669–676.
33. Parsay K. et al. Improving magnetosphere in situ observations using solar sails // *Adv. Sp. Res.* 2018. Vol. 61, № 1. P. 74–88.
34. Koptev M.D., Trofimov S.P., Ovchinnikov M.Y. Design and deployment of a tetrahedral formation with passive deputy nanosatellites for magnetospheric studies // *Adv. Sp. Res.* 2019. Vol. 63, № 12. P. 3953–3964.
35. Hametz M.E., Conway D.J., Richon K. Design of a Formation of Earth-Orbiting Satellites: The Auroral Lites Mission // *Proc. 1999 NASA GSFC Flight Mech. Estim. Conf.* 1999. № May. P. 295–308.
36. Gluitz K.J. The German Aeronomy Satellite AEROS // *Astronautical Research 1971.* Dordrecht: Springer Netherlands, 1973. Vol. 40. P. 421–441.
37. Reigber C., Lühr H., Schwintzer P. CHAMP mission status // *Adv. Sp. Res.* 2002. Vol. 30, № 2. P. 129–134.
38. Hulot G. et al. Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data // *Nature.* 2002. Vol. 416, № 6881. P. 620–623.
39. Friis-Christensen E. et al. Swarm – An Earth Observation Mission investigating Geospace // *Adv. Sp. Res.* 2008. Vol. 41, № 1. P. 210–216.
40. Зелёный Л.М. и др. Академический микроспутник Чибис-М // *Космические исследования.* 2014. Т. 52, № 2. С. 93–105.
41. Ovchinnikov M.Y. et al. Development, integrated investigation, laboratory and in-flight testing of Chibis-M microsatellite ADCS // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2014. Vol. 93. P. 23–33.

42. Cussac T., Buisson F., Parrot M. The DEMETER Program: Mission and Satellite Description - Early in Orbit Performances // 55th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, the International Academy of Astronautics, and the International Institute of Space Law. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004. Vol. 5. P. 3371–3383.
43. Immel T.J. et al. The Ionospheric Connection Explorer Mission: Mission Goals and Design // Space Sci. Rev. 2018. Vol. 214, № 1. P. 13.
44. Fish C.S. et al. Design, Development, Implementation, and On-orbit Performance of the Dynamic Ionosphere CubeSat Experiment Mission // Space Sci. Rev. 2014. Vol. 181, № 1–4. P. 61–120.
45. Fish C. et al. DICE Mission Design, Development, and Implementation: Success and Challenges // 26th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites. 2012.
46. Чернышов А.А. и др. Подходы к исследованию мультимасштабной структуры ионосферы с использованием наноспутников // Геомагнетизм и аэрономия. 2016. Т. 56, № 1. С. 77–85.
47. Чернышов А.А. и др. Изучение неоднородной структуры ионосферы при помощи одновременных измерений наноспутниками стандарта CubeSat // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2016. С. 443–449.
48. Чугунин Д.В. и др. Использование сверхмалых космических аппаратов для изучения околоземной плазмы радиофизическими методами // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 1. С. 154–162.
49. Sadeghi S., Emami M.R. Multi-spacecraft studies of the auroral acceleration region: From cluster to nanosatellites // Adv. Sp. Res. COSPAR, 2017. Vol. 59, № 5. P. 1173–1188.
50. Петрукович А.А. Исследования солнечно-земных связей на микро-,

- нано- и пикоспутниках. Москва: Механика, управление и информатика, ИКИ РАН, 2015. 184 с.
51. Denisenko P. et al. The global distribution of ionospheric small-scale irregularities from topside sounding data // *J. Atmos. Terr. Phys.* 1992. Vol. 54, № 10. P. 1303–1309.
 52. Альперт Я.Л. Статистический характер структуры ионосферы // *Успехи физических наук.* 1953. Т. 49, № 1. С. 49–91.
 53. Klimenko M.V. et al. Spatial features of Weddell Sea and Yakutsk Anomalies in foF2 diurnal variations during high solar activity periods: Interkosmos-19 satellite and ground-based ionosonde observations, IRI reproduction and GSM TIP model simulation // *Adv. Sp. Res. COSPAR,* 2015. Vol. 55, № 8. P. 2020–2032.
 54. Гинзбург В.Л. Теория распространения радиоволн в ионосфере // *Успехи физических наук.* 1946. Т. 28, № 2. С. 155–201.
 55. Шебшаевич В.С. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. Шебшаевич В.С. Москва: «Радио и связь», 1993. 408 с.
 56. Kelly M.A. et al. Progress toward forecasting of space weather effects on UHF SATCOM after Operation Anaconda // *Sp. Weather.* 2014. Vol. 12, № 10. P. 601–611.
 57. Smith A.M. et al. GPS scintillation in the high arctic associated with an auroral arc // *Sp. Weather.* 2008. Vol. 6, № 3.
 58. Bilitza D. et al. The International Reference Ionosphere 2012 – a model of international collaboration // *J. Sp. Weather Sp. Clim.* 2014. Vol. 4. P. A07.
 59. Balan N., Liu L., Le H. A brief review of equatorial ionization anomaly and ionospheric irregularities // *Earth Planet. Phys.* 2018. Vol. 2, № 4. P. 1–19.
 60. McClure J.P., Hanson W.B., Hoffman J.H. Plasma bubbles and irregularities in the equatorial ionosphere // *J. Geophys. Res.* 1977. Vol. 82, № 19. P. 2650–2656.
 61. Frolov V. Spatial structure of plasma density perturbations, induced in the

- ionosphere modified by powerful HF radio waves: review of experimental results // *Solnechno-Zemnaya Fiz.* 2015. Vol. 1, № 2. P. 22–48.
62. Терещенко Е.Д. и др. Изменение высокоширотной ионосферы при нагреве мощной коротковолновой радиоволной установки EISCAT/Heating по данным сигналов спутника ГЛОНАСС и радара некогерентного рассеяния // *Вестник МГТУ.* 2018. Т. 21, № 1. С. 170–181.
 63. Tereshchenko E.D. et al. Spatial structure of auroral day-time ionospheric electron density irregularities generated by a powerful HF-wave // *Ann. Geophys.* 1998. Vol. 16, № 7. P. 812–820.
 64. McEwen D.J. et al. The polar ionosphere // *Adv. Sp. Res.* 2004. Vol. 34, № 9. P. 2080–2084.
 65. Buchau J. et al. Structure and dynamics of the winter polar cap F region // *Radio Sci.* 1983. Vol. 18, № 6. P. 995–1010.
 66. Laakso H. Earth's ionosphere and magnetosphere // *Proceedings of the 36th ESLAB Symposium, 3 - 8 June 2002, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands. SA SP-514, Noordwijk: ESA Publications Division, ISBN 92-9092-824-7, 2002. P. 41–50.*
 67. Ermilov N.O. Reconstruction of tetrahedra from sets of edge lengths // *Math. Notes. Springer,* 2012. Vol. 91, № 3–4. P. 500–507.
 68. Wirth K., Dreiding A. Edge lengths determining tetrahedrons // *Elem. der Math.* 2009. Vol. 64. P. 160–170.
 69. Robert P. et al. Tetrahedron geometric factors // *Anal. methods Multi-spacecr. data.* 1998. Vol. 001. P. 323–348.
 70. Hughes S.P. Orbit design for phase I and II of the Magnetospheric Multiscale Mission // *Advances in the Astronautical Sciences. NASA Goddard Space Flight Center; Greenbelt, MD, United States, 2004. Vol. 118. P. 255–274.*
 71. Hughes S. Formation Design and Sensitivity Analysis for the Magnetospheric Multiscale Mission (MMS) // *AIAA/AAS Astrodynamics*

- Specialist Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008. № August 2008.
72. Berzins M. Mesh Quality: A Function of Geometry, Error Estimates or Both? // Eng. Comput. 1999. Vol. 15, № 3. P. 236–247.
 73. Erleben K., Dohlmann H. The Thin Shell Tetrahedral Mesh // Proc. DSAGM. 2004. P. 94–102.
 74. Molino N., Bridson R., Fedkiw R. Tetrahedral mesh generation for deformable bodies // Proc. Symposium on Computer Animation 2003. P. 8.
 75. Parthasarathy V.N., Graichen C.M., Hathaway A.F. A comparison of tetrahedron quality measures // Finite Elem. Anal. Des. 1994. Vol. 15, № 3. P. 255–261.
 76. Knupp P.M. Algebraic Mesh Quality Metrics // SIAM J. Sci. Comput. 2001. Vol. 23, № 1. P. 193–218.
 77. Alfriend K.T. et al. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation // Spacecraft Formation Flying: Dynamics, control and navigation. 2009.
 78. Hill G.W. Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. Vol. 1, № 3. P. 245.
 79. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // J. Aerosp. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658.
 80. Baoyin H., Junfeng L., Yunfeng G. Dynamical behaviors and relative trajectories of the spacecraft formation flying // Aerosp. Sci. Technol. 2002. Vol. 6, № 4. P. 295–301.
 81. Kumar K.D., Bang H.C., Tahk M.J. Satellite formation flying using along-track thrust // Acta Astronaut. 2007. Vol. 61, № 7–8. P. 553–564.
 82. Redding D., Adams N., Kubiak E. Linear-quadratic stationkeeping for the STS Orbiter // Astrodynamics Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1986. Vol. 12, № 2. P. 248–255.
 83. Kapila V. et al. Spacecraft formation flying: dynamics and control //

- Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251). IEEE, 1999. Vol. 6, № June. P. 4137–4141 vol.6.
84. Robertson A., Inalhan G., How J. Spacecraft formation flying control design for the Orion mission // Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. № c.
 85. Morton B., Weininger N., Tierno J. Collective management of satellite clusters // Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. № c. P. 1576–1584.
 86. Vassar R.H., Sherwood R.B. Formationkeeping for a pair of satellites in a circular orbit // J. Guid. Control. Dyn. 1985. Vol. 8, № 2. P. 235–242.
 87. Yan Q., Kapila V., Sparks A.G. Pulse-based periodic control for spacecraft formation flying // Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC. IEEE, 2000. Vol. 1, № June. P. 374–378 vol.1.
 88. Yedavalli R.K., Sparks A.G. Satellite formation flying control design based on hybrid control system stability analysis // Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC. IEEE, 2000. Vol. 3, № June. P. 2210–2214 vol.3.
 89. Ulybyshev Y. Long-Term Formation Keeping of Satellite Constellation Using Linear-Quadratic Controller // J. Guid. Control. Dyn. 1998. Vol. 21, № 1. P. 109–115.
 90. Xu Y. et al. μ Control for Satellites Formation Flying // J. Aerosp. Eng. 2007. Vol. 20, № 1. P. 10–21.
 91. deBruijn F., Gill E., How J. Comparative analysis of Cartesian and curvilinear Clohessy-Wiltshire equations // J. Aerosp. Eng. Sci. Appl. 2011. Vol. 3, № 2. P. 1–15.
 92. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полёта искусственных спутников Земли. Москва: Наука, 1965. 540 с.

93. Bombardelli C., Gonzalo J.L., Roa J. Approximate solutions of non-linear circular orbit relative motion in curvilinear coordinates // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* Springer Netherlands, 2017. Vol. 127, № 1. P. 49–66.
94. Geller D.K., Lovell T.A. Angles-Only Initial Relative Orbit Determination Performance Analysis using Cylindrical Coordinates // *J. Astronaut. Sci.* 2017. Vol. 64, № 1. P. 72–96.
95. Schweighart S.A., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
96. Schweighart S., Sedwick R. A perturbative analysis of geopotential disturbances for satellite cluster formation flying // 2001 IEEE Aerospace Conference Proceedings. IEEE, 2001. Vol. 2. P. 2/1001-2/1019.
97. Schaub H., Alfriend K. Hybrid Cartesian and orbit element feedback law for formation flying spacecraft // *Astrodynamics Specialist Conference*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000. P. 184–191.
98. Schaub H., Alfriend K.T. Impulsive Feedback Control to Establish Specific Mean Orbit Elements of Spacecraft Formations // *J. Guid. Control. Dyn.* 2001. Vol. 24, № 4. P. 739–745.
99. De Vries J.P. Elliptic Elements in Terms of Small Increments of Position and Velocity Components // *AIAA J.* 1963. Vol. 1, № 11. P. 2626–2629.
100. Scott, Jr. J., Shulman Y. Terminal rendezvous for elliptical orbits // 3rd and 4th Aerospace Sciences Meeting. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1966. № 66.
101. Tschauner J., Hempel P. Rendezvous zu einem in elliptischer Bahn umlaufenden Ziel // *Astronaut. Acta.* 1965. Vol. 11, № 2. P. 104–109.
102. Carter T.E. State Transition Matrices for Terminal Rendezvous Studies: Brief Survey and New Example // *J. Guid. Control. Dyn.* 1998. Vol. 21, № 1. P. 148–155.

103. Yamanaka K., Ankersen F. New State Transition Matrix for Relative Motion on an Arbitrary Elliptical Orbit // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 1. P. 60–66.
104. Sengupta P., Vadali S.R. Relative Motion and the Geometry of Formations in Keplerian Elliptic Orbits with Arbitrary Eccentricity // *J. Guid. Control. Dyn.* 2007. Vol. 30, № 4. P. 953–964.
105. Bando M., Ichikawa A. Graphical Generation of Periodic Orbits of Tschauner-Hempel Equations // *J. Guid. Control. Dyn.* 2012. Vol. 35, № 3. P. 1002–1007.
106. Schiff C., Rohrbaugh D., Bristow J. Formation flying in elliptical orbits // 2000 IEEE Aerospace Conference. Proceedings. IEEE, 2000. Vol. 7. P. 37–47.
107. Inalhan G., Tillerson M., How J.P. Relative Dynamics and Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 1. P. 48–59.
108. Melton R.G. Time-Explicit Representation of Relative Motion Between Elliptical Orbits // *J. Guid. Control. Dyn.* 2000. Vol. 23, № 4. P. 604–610.
109. Dang Z. Solutions of Tschauner–Hempel Equations // *J. Guid. Control. Dyn.* 2017. Vol. 40, № 11. P. 2956–2960.
110. Tillerson M., How J. Formation flying control in eccentric orbits // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001. P. 1–11.
111. Baig J.F. et al. Solar radiation pressure effects on very high-eccentric formation flying // *Eur. Sp. Agency, (Special Publ. ESA SP. 2008). № 654 SP.*
112. Vaddi S.S., Vadali S.R., Alfriend K.T. Formation Flying: Accommodating Nonlinearity and Eccentricity Perturbations // *J. Guid. Control. Dyn.* 2003. Vol. 26, № 2. P. 214–223.
113. London H.S. Second approximation to the solution of the rendezvous

- equations // AIAA J. 1963. Vol. 1, № 7. P. 1691–1693.
114. Alfried K.T., Vadali S.R., Schaub H. Formation Flying Satellites: Control by an Astrodynamicist // Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001. Vol. 81, № 1–2. P. 57–62.
 115. Gim D.-W., Alfried K.T. State Transition Matrix of Relative Motion for the Perturbed Noncircular Reference Orbit // J. Guid. Control. Dyn. 2003. Vol. 26, № 6. P. 956–971.
 116. Gim D.-W., Alfried K.T. Satellite Relative Motion Using Differential Equinoctial Elements // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2005. Vol. 92, № 4. P. 295–336.
 117. Schaub H., Alfried K.T. J2 invariant relative orbits for spacecraft formations // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2001. Vol. 79, № 2. P. 77–95.
 118. Alfried K.T., Schaub H., Gim D. Gravitational perturbations, nonlinearity and circular orbit assumption effects on formation flying control strategies // Guid. Control. 2000. P. 139–158.
 119. Morgan D. et al. Swarm-Keeping Strategies for Spacecraft Under J2 and Atmospheric Drag Perturbations // J. Guid. Control. Dyn. 2012. Vol. 35, № 5. P. 1492–1506.
 120. Carter T., Humi M. Clohessy-Wiltshire Equations Modified to Include Quadratic Drag // J. Guid. Control. Dyn. 2002. Vol. 25, № 6. P. 1058–1063.
 121. Sullivan J., Grimberg S., D’Amico S. Comprehensive Survey and Assessment of Spacecraft Relative Motion Dynamics Models // J. Guid. Control. Dyn. 2017. Vol. 40, № 8. P. 1837–1859.
 122. Sarda K. et al. Making the invisible visible: Precision RF-emitter geolocation from space by the hawkeye 360 pathfinder mission // Proc. Int. Astronaut. Congr. IAC. 2018.
 123. Баранов А.А. Маневрирование космических аппаратов в окрестности круговой орбиты. Москва: Спутник +, 2016. 512 с.
 124. Joe H. et al. Formation Dynamics of Coulomb Satellites // 6th Int. Conf. Dyn.

- Control Control Syst. Struct. Sp. 2004. P. 14.
125. Natarajan A., Schaub H. Linear dynamics and stability analysis of a two-craft coulomb tether formation // J. Guid. Control. Dyn. 2006. Vol. 29, № 4. P. 831–838.
 126. Mullen E.G. et al. SCATHA survey of high-level spacecraft charging in sunlight // J. Geophys. Res. 1986. Vol. 91, № A2. P. 1474.
 127. Bennett T., Schaub H. Contactless electrostatic detumbling of axi-symmetric GEO objects with nominal pushing or pulling // Adv. Sp. Res. COSPAR, 2018. Vol. 62, № 11. P. 2977–2987.
 128. Hogan E.A., Schaub H. Relative motion control for two-spacecraft electrostatic orbit corrections // J. Guid. Control. Dyn. 2013. Vol. 36, № 1. P. 240–249.
 129. Huang X., Yan Y., Zhou Y. Optimal Lorentz-augmented spacecraft formation flying in elliptic orbits // Acta Astronaut. Elsevier, 2015. Vol. 111. P. 37–47.
 130. Tsujii S., Bando M., Yamakawa H. Spacecraft formation flying dynamics and control using the geomagnetic lorentz force // J. Guid. Control. Dyn. 2013. Vol. 36, № 1. P. 136–148.
 131. Pollock G.E., Gangestad J.W., Longuski J.M. Analytical solutions for the relative motion of spacecraft subject to Lorentz-force perturbations // Acta Astronaut. Elsevier, 2011. Vol. 68, № 1–2. P. 204–217.
 132. King L.B. et al. Study of interspacecraft Coulomb forces and implications for formation flying // J. Propuls. Power. 2003. Vol. 19, № 3. P. 497–505.
 133. Peck M.A. Prospects and challenges for lorentz-augmented orbits // Collect. Tech. Pap. - AIAA Guid. Navig. Control Conf. 2005. Vol. 3, № August. P. 1631–1646.
 134. Gong S., Yunfeng G., Li J. Solar sail formation flying on an inclined Earth orbit // Acta Astronaut. Elsevier, 2011. Vol. 68, № 1–2. P. 226–239.
 135. Parsay K., Schaub H. Designing solar sail formations in sun-synchronous

- orbits for geomagnetic tail exploration // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2015. Vol. 107. P. 218–233.
136. Mashtakov Y. et al. Two-satellite formation flying control by cell-structured solar sail // *Acta Astronaut.* 2020. Vol. 170. P. 592–600.
137. McInnes C.R. et al. Geosail: Exploring the geomagnetic tail using a small solar sail // *J. Spacecr. Rockets.* 2001. Vol. 38, № 4. P. 622–629.
138. Bae Y.K. A contamination-free ultrahigh precision formation flying method for micro-, Nano-, and pico-satellites with nanometer accuracy // *AIP Conf. Proc.* 2006. Vol. 813. P. 1213–1223.
139. Tragesser S.G. Static formations using momentum exchange between satellites // *J. Guid. Control. Dyn.* 2009. Vol. 32, № 4. P. 1277–1286.
140. Joslyn T., Ketsdever A. Constant Momentum Exchange Between Microspacecraft Using Liquid Droplet Thrusters // 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2010. № July. P. 1–9.
141. Schonig J., Ketsdever A. Constant Momentum Exchange to Maintain Spacecraft Formations // *J. Spacecr. Rockets.* 2012. Vol. 49, № 1. P. 69–75.
142. Ivanov D., Ovchinnikov M., Shestakov S. Satellite formation flying control by mass exchange // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2014. Vol. 102. P. 392–401.
143. Shestakov S., Ivanov D., Ovchinnikov M. Formation-flying momentum exchange control by separate mass // *J. Guid. Control. Dyn.* 2015. Vol. 38, № 8. P. 1534–1543.
144. Leonard C.L., Hollister W.M., Bergmann E. V. Orbital formationkeeping with differential drag // *J. Guid. Control. Dyn.* 1989. Vol. 12, № 1. P. 108–113.
145. Bevilacqua R., Romano M. Rendezvous maneuvers of multiple spacecraft using differential drag under J2 perturbation // *J. Guid. Control. Dyn.* 2008. Vol. 31, № 6. P. 1595–1607.

146. Bevilacqua R., Hall J.S., Romano M. Multiple spacecraft rendezvous maneuvers by differential drag and low thrust engines // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2010. Vol. 106, № 1. P. 69–88.
147. Kumar B.S. et al. Differential drag as a means of spacecraft formation control // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2011. Vol. 47, № 2. P. 1125–1135.
148. Reid T., Misra A.K. Formation flight of satellites in the presence of atmospheric drag // *J. Aerosp. Eng. Sci. Appl.* 2011. Vol. 3, № 1. P. 64–91.
149. Liu A., Joe B. Relationship between tetrahedron shape measures // *BIT.* 1994. Vol. 34, № 2. P. 268–287.
150. Liu A., Joe B. On the Shape of Tetrahedra from Bisection // *Math. Comput.* 1994. Vol. 63, № 207. P. 141.
151. Powell M.J.D. A hybrid method for nonlinear equations // *Numer. methods nonlinear Algebr. equations.* Gordon and Breach, 1970.
152. Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming // *Math. Program. Ser. B.* 2000. Vol. 89, № 1. P. 149–185.
153. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка, 1984. 187 с.
154. Teschl G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* American Mathematical Society, 2012. 356 p.
155. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. Москва: Наука, 1967. 224 с.
156. Егоров В.А., Егоров М.А., Сазонов В.В. Оптимизация геоцентрического разгона космического аппарата с солнечным парусом при ограничении на угловую скорость паруса // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 1995. № 23.
157. Егоров В.А. и др. Оптимизация перелета космического аппарата с

солнечным парусом от Земли к Марсу с пертурбационным маневром у Венеры // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1999. № 8.

158. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 3. Москва: Наука, 1969. 656 с.

Приложения

Приложение А – вычисление объёма тетраэдральной формации

Вычислим явно объём тетраэдральной формации \mathbb{V} . Согласно (14)

$$\begin{aligned} 6\mathbb{V} = & \\ & = (A_1 \sin \nu + B_1 \cos \nu)(2A_2 \cos \nu - 2B_2 \sin \nu + C_2)(D_3 \sin \nu + E_3 \cos \nu) + \\ & + (A_2 \sin \nu + B_2 \cos \nu)(2A_3 \cos \nu - 2B_3 \sin \nu + C_3)(D_1 \sin \nu + E_1 \cos \nu) + \\ & + (A_3 \sin \nu + B_3 \cos \nu)(2A_1 \cos \nu - 2B_1 \sin \nu + C_1)(D_2 \sin \nu + E_2 \cos \nu) - \\ & - (A_1 \sin \nu + B_1 \cos \nu)(2A_3 \cos \nu - 2B_3 \sin \nu + C_3)(D_2 \sin \nu + E_2 \cos \nu) - \\ & - (A_2 \sin \nu + B_2 \cos \nu)(2A_1 \cos \nu - 2B_1 \sin \nu + C_1)(D_3 \sin \nu + E_3 \cos \nu) - \\ & - (A_3 \sin \nu + B_3 \cos \nu)(2A_2 \cos \nu - 2B_2 \sin \nu + C_2)(D_1 \sin \nu + E_1 \cos \nu). \end{aligned}$$

Выделим отдельно член при $(D_3 \sin \nu + E_3 \cos \nu)$, не содержащий C_i :

$$\begin{aligned} & 2[(A_1 \sin \nu + B_1 \cos \nu)(A_2 \cos \nu - B_2 \sin \nu) - \\ & - (A_2 \sin \nu + B_2 \cos \nu)(A_1 \cos \nu - B_1 \sin \nu)] = \\ & = 2[A_1 A_2 \sin \nu \cos \nu + B_1 A_2 \cos^2 \nu - A_1 B_2 \sin^2 \nu - B_1 B_2 \sin \nu \cos \nu - \\ & - A_1 A_2 \sin \nu \cos \nu - A_1 B_2 \cos^2 \nu + B_1 A_2 \sin^2 \nu + B_1 B_2 \sin \nu \cos \nu] = \\ & = 2[B_1 A_2 - A_1 B_2]. \end{aligned}$$

Из симметрии выражения получаем

$$\begin{aligned} 6\mathbb{V} = & \\ & = 2(D_3 \sin \nu + E_3 \cos \nu)(B_1 A_2 - A_1 B_2) + \\ & + 2(D_1 \sin \nu + E_1 \cos \nu)(B_2 A_3 - A_2 B_3) + \\ & + 2(D_2 \sin \nu + E_2 \cos \nu)(B_3 A_1 - A_3 B_1) + \\ & + C_1(\dots) + C_2(\dots) + C_3(\dots). \end{aligned}$$

Коэффициент при $\sin \nu$ есть

$$2(B_1 A_2 D_3 - A_1 B_2 D_3 + B_2 A_3 D_1 - A_2 B_3 D_1 + B_3 A_1 D_2 - A_3 B_1 D_2),$$

при $\cos \nu$ есть

$$2(B_1 A_2 E_3 - A_1 B_2 E_3 + B_2 A_3 E_1 - A_2 B_3 E_1 + B_3 A_1 E_2 - A_3 B_1 E_2),$$

Член, содержащий C_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} & C_1(A_3 \sin \nu + B_3 \cos \nu)(D_2 \sin \nu + E_2 \cos \nu) - \\ & -(A_2 \sin \nu + B_2 \cos \nu)(D_3 \sin \nu + E_3 \cos \nu) = \\ & = C_1(A_3 D_2 - A_2 D_3) \frac{1 - \cos 2\nu}{2} + C_1(B_3 E_2 - B_2 E_3) \frac{1 + \cos 2\nu}{2} + \\ & + C_1(A_3 E_2 + B_3 D_2 - A_2 E_3 - B_2 D_3) \frac{\sin 2\nu}{2}. \end{aligned}$$

Тогда коэффициент при $\sin 2\nu$ есть

$$\frac{1}{2}(A_3 E_2 C_1 + B_3 D_2 C_1 - A_2 E_3 C_1 - B_2 D_3 C_1) + \dots,$$

где многоточием обозначены члены, полученные циклической перестановкой индексов. По аналогии получаем коэффициенты при $\cos 2\nu$ и при 1.

Окончательно получаем, что объём тетраэдра является тригонометрическим полиномом второй степени от ν .

Приложение Б – к доказательству теоремы 1

Прежде всего, заметим, что система $\{\sin kx, \cos kx\}$ представляет собой базис в пространстве тригонометрических полиномов степени не выше k [158]. Поэтому обнуление линейной комбинации влечёт обнуление коэффициентов.

Далее, пусть объём представляет собой некоторый тригонометрический полином от $\nu = nt$ вида

$$\mathbb{V}(\nu) = P_{\mathbb{V}} + Q_{\mathbb{V}} \sin \nu + R_{\mathbb{V}} \cos \nu + T_{\mathbb{V}} \sin 2\nu + U_{\mathbb{V}} \cos 2\nu.$$

По аналогии \mathbb{L} представима в виде

$$\mathbb{L}(\nu) = P_{\mathbb{L}} + Q_{\mathbb{L}} \sin \nu + R_{\mathbb{L}} \cos \nu + T_{\mathbb{L}} \sin 2\nu + U_{\mathbb{L}} \cos 2\nu.$$

В силу (16) квадрат тригонометрического полинома второй степени (т.е. тригонометрический полином четвёртой степени) равен тождественно кубу тригонометрического полинома второй степени (т.е. тригонометрическому полиному шестой степени). Покажем аккуратно, что из того следует постоянство \mathbb{V} и \mathbb{L} .

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} & (a + b \sin(x) + c \cos(x) + d \sin(2x) + e \cos(2x))^3 = \\ & = \frac{1}{4} e (e^2 - 3d^2) \cos(6x) + \frac{1}{4} d (3e^2 - d^2) \sin(6x) + \dots, \end{aligned}$$

здесь многоточием обозначены мономы порядка до пятого включительно. Поскольку левая часть тождества (16) не содержит мономов шестого порядка, мы получаем необходимое условие для выполнения тождества:

$$e(e^2 - 3d^2) = 0,$$

$$d(3e^2 - d^2) = 0,$$

из чего следует $d = e = 0$. Следовательно, для выполнения (16) необходимо, чтобы $T_{\mathbb{L}} = U_{\mathbb{L}} = 0$ и тогда $\mathbb{L}(\nu) = P_{\mathbb{L}} + Q_{\mathbb{L}} \sin \nu + R_{\mathbb{L}} \cos \nu$. Аналогично предыдущему рассуждению теперь левая часть (16) есть всё ещё

тригонометрический полином четвёртой степени, а правая теперь представляет собой тригонометрический полином степени не выше третьей.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} (a + b \sin(x) + c \cos(x) + d \sin(2x) + e \cos(2x))^2 = \\ = \frac{1}{2}(e^2 - d^2) \cos(4x) + de \sin(4x) + \dots, \end{aligned}$$

аналогично предыдущему получаем $d = e = 0$, а значит $T_{\mathbb{V}} = U_{\mathbb{V}} = 0$ и $\mathbb{V}(v) = P_{\mathbb{V}} + Q_{\mathbb{V}} \sin v + R_{\mathbb{V}} \cos v$. Теперь левая часть (16) – тригонометрический полином степени не выше второй, а правая часть – не выше третьей.

Выражение

$$(a + b \sin(x) + c \cos(x))^3 = \frac{1}{4}c(c^2 - 3b^2) \cos(3x) + \frac{1}{4}b(3c^2 - b^2) \sin(3x) + \dots$$

даёт $b = c = 0$, а значит $Q_{\mathbb{L}} = R_{\mathbb{L}} = 0$, $\mathbb{L}(v) = P_{\mathbb{L}} = \text{const}$. Затем

$$(a + b \sin(x) + c \cos(x))^2 = \frac{1}{2}(c^2 - b^2) \cos(2x) + bc \sin(2x) + \dots$$

даёт $b = c = 0$, а значит $Q_{\mathbb{V}} = R_{\mathbb{V}} = 0$, $\mathbb{V}(v) = P_{\mathbb{V}} = \text{const}$, что заканчивает доказательство утверждения.

Приложение В – коэффициенты для суммы квадратов длин рёбер

Пусть выполняется

$$\mathbb{L} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2.$$

Подставляя явные выражения радиус-векторов в ОСК, раскрывая скобки и упрощая, получаем

$$\mathbb{L}(\nu) = P_{\mathbb{L}} + Q_{\mathbb{L}} \sin \nu + R_{\mathbb{L}} \cos \nu + T_{\mathbb{L}} \sin 2\nu + U_{\mathbb{L}} \cos 2\nu,$$

где

$$P_{\mathbb{L}} = 3C_1^2 + 3C_2^2 + 3C_3^2 - 2C_1C_2 - 2C_1C_3 - 2C_2C_3,$$

$$Q_{\mathbb{L}} = -12(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3) + 4(B_1C_2 + B_2C_1 + B_1C_3 + B_3C_1 + B_2C_3 + B_3C_2),$$

$$R_{\mathbb{L}} = 12(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - 4(A_1C_2 + A_2C_1 + A_1C_3 + A_3C_1 + A_2C_3 + A_3C_2).$$

Раскрытие скобок даёт также коэффициенты при $\cos^2 \nu$

$$\begin{aligned} & 12(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - 8(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3) + \\ & + 3(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - 2(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3) + \\ & + 3(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) - 2(E_1E_2 + E_1E_3 + E_2E_3), \end{aligned}$$

при $\sin^2 \nu$

$$\begin{aligned} & 12(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) - 8(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3) + \\ & + 3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - 2(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3) + \\ & + 3(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) - 2(D_1D_2 + D_1D_3 + D_2D_3), \end{aligned}$$

и при $\sin \nu \cos \nu$

$$\begin{aligned} & -18(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + 6(A_1B_2 + A_2B_1 + A_1B_3 + A_3B_1 + A_2B_3 + A_3B_2) + \\ & + 6(D_1E_1 + D_2E_2 + D_3E_3) - 2(D_1E_2 + D_2E_1 + D_1E_3 + D_3E_1 + D_2E_3 + D_3E_2). \end{aligned}$$

Пользуясь заменами $\cos^2 \nu = \frac{1 + \cos 2\nu}{2}$, $\sin^2 \nu = \frac{1 - \cos 2\nu}{2}$, получаем

недостающие коэффициенты.

Приложение Г – аналитические решения при нулевой амплитуде

При $\beta = 0$ система (33) приобретает вид

$$2\gamma \cos \theta = 3(1 + \gamma^2 \cos 2\theta),$$

$$2\gamma \sin \theta = 3\gamma^2 \sin 2\theta.$$

Второе уравнение системы допускает следующие случаи.

- $\gamma = 0$, тогда две из трёх амплитуд равны нулю, вследствие этого тетраэдр вырожден.
- $\sin \theta = 0$, это решение существует при любом значении параметра γ , тогда из первого уравнения $3\gamma^2 - 2\gamma \cos \theta + 3 = 0, \cos \theta = \pm 1$, решений квадратного уравнения относительно γ не существует.
- $3\gamma \cos \theta = 1$, тогда первое уравнение приводится к виду $\gamma^2 = 1$, вследствие неотрицательности γ , решение системы единственно. Это решение второго уравнения существует при $\gamma \geq 1/3$.

Заметим отдельно, что первое уравнение системы имеет решения при неотрицательном дискриминанте $72\gamma^4 - 68\gamma^2$, т.е. при $\gamma \geq 16/17$.

Приложение Д – решение уравнений относительного движения при разложении до второго порядка

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X_1'' - 2Y_1' - 3X_1 &= -3X_0^2 + \frac{3}{2}Y_0^2 + \frac{3}{2}Z_0^2, \\ Y_1'' + 2X_1' &= 3X_0Y_0, \\ Z_1'' + Z_1 &= 3X_0Z_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_0(\nu) &= \dot{x}_0 \sin \nu - (2\dot{y}_0 + 3x_0) \cos \nu + 2(\dot{y}_0 + 2x_0), \\ Y_0(\nu) &= (y_0 - 2\dot{x}_0) - 3(\dot{y}_0 + 2x_0)\nu + 2\dot{x}_0 \cos \nu + 2(2\dot{y}_0 + 3x_0) \sin \nu, \\ Z_0(\nu) &= \dot{z}_0 \sin \nu + z_0 \cos \nu. \end{aligned}$$

Маленькими буквами обозначены начальные данные. Пусть также ставится задача Коши

$$\begin{aligned} X_1(0) = Y_1(0) = Z_1(0) &= 0, \\ X_1'(0) = Y_1'(0) = Z_1'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда решение представимо в виде

$$\begin{aligned}
X_1 = & \left(12\dot{y}_0x_0 - \frac{3\dot{x}_0^2}{2} + 3\dot{y}_0^2 + \frac{3\dot{z}_0^2}{4} + \frac{21x_0^2}{2} + \frac{3y_0^2}{2} + \frac{3z_0^2}{4} \right) + \\
& + \nu(3\dot{y}_0y_0 - 6\dot{x}_0\dot{y}_0 - 12\dot{x}_0x_0 + 6x_0y_0) + \\
& + \nu^2 \left(-18x_0^2 - \frac{9\dot{y}_0^2}{2} - 18\dot{y}_0x_0 \right) + \\
& + \sin \nu(7\dot{x}_0\dot{y}_0 + 12\dot{x}_0x_0 - 3\dot{y}_0y_0 + \dot{z}_0z_0 - 6x_0y_0) + \\
& + \cos \nu \left(-15x_0^2 - \frac{3y_0^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} + 2\dot{x}_0^2 - 5\dot{y}_0^2 - \dot{z}_0^2 - 18\dot{y}_0x_0 \right) + \\
& + \sin 2\nu \left(-2\dot{x}_0\dot{y}_0 - 3\dot{x}_0x_0 - \frac{\dot{z}_0z_0}{2} \right) + \\
& + \cos 2\nu \left(\frac{9x_0^2}{2} - \frac{z_0^2}{4} + 6\dot{y}_0x_0 - \frac{\dot{x}_0^2}{2} + 2\dot{y}_0^2 + \frac{\dot{z}_0^2}{4} \right) + \\
& + \nu \sin \nu(6\dot{y}_0^2 + 18x_0^2 + 21\dot{y}_0x_0) + \\
& + \nu \cos \nu(3\dot{x}_0\dot{y}_0 + 6\dot{x}_0x_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 = & \left(3x_0y_0 - 3\dot{x}_0\dot{y}_0 - \frac{15\dot{x}_0x_0}{2} - \frac{3\dot{z}_0z_0}{2} \right) + \\
& + \nu \left(3\dot{x}_0y_0 - 21\dot{y}_0x_0 - \frac{3\dot{x}_0^2}{2} - 6\dot{y}_0^2 - \frac{3\dot{z}_0^2}{2} - \frac{33x_0^2}{2} - 3y_0^2 - \frac{3z_0^2}{2} \right) + \\
& + \sin \nu(2\dot{x}_0^2 + 10\dot{y}_0^2 + 2\dot{z}_0^2 + 30x_0^2 + 3y_0^2 + z_0^2 + 36\dot{y}_0x_0 - 3\dot{x}_0y_0) + \\
& + \cos \nu(6\dot{x}_0x_0 + 2\dot{z}_0z_0 - 3x_0y_0 + 2\dot{x}_0\dot{y}_0) + \\
& + \sin 2\nu \left(\dot{y}_0^2 - \frac{\dot{x}_0^2}{4} - \frac{\dot{z}_0^2}{4} + \frac{9x_0^2}{4} + \frac{z_0^2}{4} + 3\dot{y}_0x_0 \right) + \\
& + \cos 2\nu \left(\dot{x}_0\dot{y}_0 + \frac{3\dot{x}_0x_0}{2} - \frac{\dot{z}_0z_0}{2} \right) + \\
& + \nu \sin \nu(3\dot{x}_0\dot{y}_0 + 6\dot{x}_0x_0) + \\
& + \nu \cos \nu(-6\dot{y}_0^2 - 18x_0^2 - 21\dot{y}_0x_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 = & \left(\frac{3\dot{x}_0\dot{z}_0}{2} - 3\dot{y}_0z_0 - \frac{9x_0z_0}{2} \right) + \\
& + \sin \nu (3\dot{z}_0x_0 + \dot{x}_0z_0 + \dot{y}_0\dot{z}_0) + \\
& + \cos \nu (2\dot{y}_0z_0 + 3x_0z_0 - 2\dot{x}_0\dot{z}_0) + \\
& + \sin 2\nu \left(\frac{3\dot{z}_0x_0}{2} - \frac{\dot{x}_0z_0}{2} + \dot{y}_0\dot{z}_0 \right) + \\
& + \cos 2\nu \left(\dot{y}_0z_0 + \frac{3x_0z_0}{2} + \frac{\dot{x}_0\dot{z}_0}{2} \right) + \\
& + \nu \sin \nu (6x_0z_0 + 3\dot{y}_0z_0) + \\
& + \nu \cos \nu (-3\dot{y}_0\dot{z}_0 - 6\dot{z}_0x_0).
\end{aligned}$$

Приложение Е – оптимизация начальной фазы

Выражение

$$3 \cos(3\varphi + \nu) - \frac{22}{3} \cos(\varphi + \nu) - 8\sqrt{\frac{5}{2}} \cos \nu - 5 \cos(\varphi - \nu)$$

представимо в виде

$$\sqrt{A_\varphi^2 + B_\varphi^2} \cos(\nu + \varphi_{\text{complement}}),$$

так что минимум и максимум этого выражения при переменном ν равны

$$m_\varphi = -\sqrt{A_\varphi^2 + B_\varphi^2}, \quad M_\varphi = \sqrt{A_\varphi^2 + B_\varphi^2}.$$

Тогда

$$A_\varphi = 3 \cos 3\varphi - \frac{37}{3} \cos \varphi - 8\sqrt{\frac{5}{2}},$$

$$B_\varphi = -3 \sin 3\varphi + \frac{7}{3} \sin \varphi.$$

Минимум разности $M_\varphi - m_\varphi$ достигается при $\varphi \approx 3.923$.

Приложение Ж – выражения для огибающих

Семейство решений (47) при учёте членов второго порядка малости эволюционирует в соответствии с формулами

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\nu) &= \frac{5\sqrt{6}}{4} K^3 - \varepsilon K^3 \nu \frac{81\sqrt{15}}{8} + \mathbb{V}_{2\pi\text{periodic}}, \\ \mathbb{L}(\nu) &= 90K^2 - \varepsilon K^2 \nu 243\sqrt{10} + \mathbb{L}_{2\pi\text{periodic}} - \\ &\quad - \varepsilon K^2 \nu \cdot 108 \left(\cos(3\varphi + \nu) + 2\sqrt{10} \cos \nu \right).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{L}}(\nu) &= 90K^2 + \varepsilon \nu K^2 \left(243\sqrt{10} - 108M_\varphi \right), \\ \underline{\mathbb{L}}(\nu) &= 90K^2 + \varepsilon \nu K^2 \left(243\sqrt{10} - 108m_\varphi \right).\end{aligned}$$

Найдём минимум выражения $M_\varphi - m_\varphi$, где m_φ и M_φ – соответственно минимум и максимум $\cos(3\varphi + \nu) + 2\sqrt{10} \cos \nu$ при фиксированном значении параметра φ . В этом случае минимум может быть найден аналитически, а именно $\varphi_{min} = \frac{\pi}{3}$.

Семейство решений (48) при учёте членов второго порядка малости эволюционирует в соответствии с формулами

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\nu) &= \frac{55\sqrt{22}}{324} K^3 + \varepsilon K^3 \nu \left(\frac{83}{648} \sqrt{55} + \frac{25}{18} \sqrt{22} \cos \varphi - \frac{1}{9} \sqrt{55} \cos 2\varphi \right) + \mathbb{V}_{2\pi\text{periodic}}, \\ \mathbb{L}(\nu) &= \frac{110}{3} K^2 + \mathbb{L}_{2\pi\text{periodic}} + \varepsilon K^2 \nu \cdot \frac{83}{9} \sqrt{10} - \\ &\quad - \varepsilon K^2 \nu \left(20 \cos(3\varphi + \nu) - \frac{160}{3} \cos(\varphi - \nu) - \frac{1328}{9} \cos(\varphi + \nu) - 200 \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{40}{3} \sqrt{10} \cos \nu + 16\sqrt{10} \cos(2\varphi + \nu) + 8\sqrt{10} \cos 2\varphi \right).\end{aligned}$$

Объём тетраэдра линейно растёт в первом по малому параметру приближении. Скорость роста объёма равна нулю при $\varphi \approx 1.694$.

Минимум выражения $M_\varphi - m_\varphi$, где m_φ и M_φ – соответственно минимум и максимум выражения в скобках при \mathbb{L} достигается при $\varphi = 0$.

Поскольку

$$\mathbb{Q} = 12 \frac{(3\mathbb{V})^{2/3}}{\mathbb{L}},$$

рост \mathbb{Q} в линейном приближении может быть получен из разложения в ряд Тейлора:

$$\frac{(A+Bx)^{2/3}}{C+Dx} = \frac{A^{2/3}}{C} \left(1 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right) x \right) + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

После проведения соответствующих преобразований качество можно записать в виде $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_0 + C\nu \cdot \mathbb{Q}_1$, где C константа, не зависящая от времени, а скорость роста качества имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_1 = & \frac{16}{11} \cos(\varphi - \nu) - \frac{6}{11} \cos(3\varphi + \nu) + \frac{664}{165} \cos(\varphi + \nu) + \\ & + \frac{4\sqrt{10}}{11} \cos \nu - \frac{24\sqrt{10}}{55} \cos(2\varphi + \nu). \end{aligned}$$

Представляя эту функцию в виде

$$\mathbb{Q}_1 = \sqrt{A_\varphi^2 + B_\varphi^2} \cos(\nu + \varphi_{\text{compl}}),$$

получаем, что минимальная деградация качества достигается при минимуме выражения $A_\varphi^2 + B_\varphi^2$, численная минимизация даёт значение $\varphi \approx 4.378$.

Приложение 3 – выражение криволинейных координат и скоростей

Пусть $\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_c$ – координаты и скорости главного спутника в ИСО, \mathbf{r}, \mathbf{v} – то же для ведомого спутника. Обычным (не полужирным) шрифтом будем обозначать модуль соответствующего вектора. Обозначим $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ относительные координаты и скорости спутника (ведомого относительно главного). Относительные криволинейные координаты вводятся следующим способом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (r_c + \rho) \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя равенство, получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = (\dot{r}_c + \dot{\rho}) \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (r_c + \rho) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi} + (r_c + \rho) \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}.$$

Введём вспомогательные векторы

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{r}_c, \quad \dot{\theta} = \frac{-1}{r \cos \varphi} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{-1}{r} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi).$$

Здесь $\dot{r}_c = \frac{\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{v}_c}{r_c}$, точкой обозначено скалярное произведение векторов, косым

крестом – векторное произведение векторов.