

*На правах рукописи*

Шестопёров Алексей Игоревич

**Стабилизация заданных режимов углового движения спутников с  
нежесткими элементами конструкции**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении  
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

**Научный руководитель:**

**Овчинников Михаил Юрьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, и.о. заведующего отделом №7 ФГУ «ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН»

**Официальные оппоненты:**

**Лемак Степан Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», руководитель лаборатории МОИДС ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова»

**Никонов Василий Иванович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела 24 ФГУ «ФИЦ ИУ РАН», доцент кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ»

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2022 г. в \_\_\_\_\_ час. на заседании диссертационного совета Д 002.024.01, созданного на базе ФГУ «ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН», по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН <http://keldysh.ru/>.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
к.ф.-м.н

Широбоков М.Г.

## Общая характеристика работы

### Актуальность тематики исследования

Создание новейших космических средств связи, навигации, телерадиовещания, дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) приводит к усложнению конструкций современных космических аппаратов (КА). Увеличение размеров отдельных элементов конструкции КА, уменьшение их массы и жесткости приводит к возникновению в них упругих деформаций в ходе орбитального и углового маневрирования КА. Примерами нежестких элементов (НЭ) могут служить выносные штанги, солнечные панели и антенны, включенные в конструкции широко используемых на практике спутников дистанционного зондирования Земли высокого и сверхвысокого разрешения, геостационарных спутников связи.

Упругие колебания вышеуказанных НЭ обладают низкочастотным спектром, низким декрементом затухания и поэтому способны негативно сказываться на точности ориентации КА. Ввиду все более возрастающих требований к последней становится актуальной задача совместной стабилизации заданных режимов движения КА и гашения низкочастотных колебаний в НЭ его конструкции. Ее решение требует составления высокоточной математической модели КА с НЭ и разработки новых или модификации имеющихся методов управления угловым движением КА.

Для активного гашения вибраций в НЭ часто используются пьезоактюаторы, непосредственно крепящиеся на НЭ и влияющие на колебательный процесс напрямую. Однако представляет интерес альтернативная ситуация, когда гашение осуществляется только при помощи исполнительных органов системы управления, расположенных на корпусе КА и используемых для осуществления программных разворотов. Как правило, для точной реализации требуемых опорных движений используются маховики.

Стоит отметить, что при проектировании космических миссий процедура построения опорной траектории углового движения спутника сводится к интерполяции значений кинематических параметров, заранее заданных в указанные моменты времени. При этом ограничения, накладываемые на искомую опорную траекторию, диктуются как характером самой миссии, так и особенностями конструкции используемого КА. Для КА с НЭ актуальной проблемой является предотвращение возбуждения колебаний в НЭ путем построения достаточно гладких опорных траекторий его углового движения.

Исследованию динамики космических систем с упругими элементами посвящены многочисленные труды российских и зарубежных ученых. Большой научный вклад в эту область науки внесли Асланов В.С., Баничук Н.В., Докучаев Л.В., Климов Д.М., Маркеев А.П., Морозов В.М., Набиуллин Л.В., Рабинович Б.И., Хорошилов В.С., Шклярчук Ф.Н., Hughes P.C., Junkins J.L., Likins P.W., Modi V.J., Santini P. и др. Исследования, касающиеся методов управления упругими конструкциями, содержатся в работах Акуленко Л.Д., Ганиева Р.Ф., Дегтярева Г.Л., Гришаниной Т.В., Закржевского А.Е., Колесникова К.С., Рутковского В.Ю., Сиразетдинова Т.К., Сомова Е.И., Суханова В.М., Черноусько Ф.Л., Banerjee A.K., Gasbarri P., Meirovich L. и др. В области проектирования КА с НЭ бесценным является опыт предприятий АО «Информационные спутниковые системы имени академика М.Ф. Решетнёва», РКЦ «Прогресс», ПАО «РКК Энергия им. С.П. Королёва», НПО имени С.А. Лавочкина, ЦНИИмаш, АО «Корпорация ВНИИЭМ».

Решенные в диссертационной работе задачи отвечают текущим запросам и использовались в рамках выполнения контрактов с отечественной космической промышленностью.

### **Цель работы и решаемые задачи**

Целью настоящей работы является создание научного и методического заделов для разработки и проектирования систем управления ориентацией КА с НЭ в условиях возрастающих требований по точности управления его угловым движением.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи.

1. Составление математической модели движения КА с НЭ, допускающей различные типы сочленения последних с корпусом КА.
2. Разработка законов управления ориентацией КА и гашения низкочастотных колебаний в НЭ, реализуемых с помощью маховиков, расположенных на корпусе КА.
3. Построение опорных траекторий по заданному набору кватернионов, двигаясь по которым в процессе переориентации КА удастся уменьшить возбуждение колебаний в НЭ.

### **Соответствие паспорту специальности**

Диссертационная работа соответствует паспорту специальности (ПС) 01.02.01 «Теоретическая механика». Работа посвящена построению законов

управления механической системой, в качестве которой выступает КА с НЭ. При получении уравнений движения используются методы аналитической механики, возможность применения предложенного стабилизирующего закона управления КА с НЭ опирается на методы теории устойчивости. При этом, в ходе маневрирования КА, в НЭ возникают колебания, подлежащие учету в модели движения КА с целью их последующего гашения.

### **Положения, выносимые на защиту:**

- Нелинейная математическая модель КА с произвольным наперед заданным числом НЭ, допускающая основные типы сочленения последних с его корпусом.
- Алгоритм управления, одновременно осуществляющий инерциальную стабилизацию геостационарного КА и гашение низкочастотных колебаний в НЭ его конструкции.
- Методика построения опорных траекторий углового движения КА, при перемещении вдоль которых слабо возбуждаются колебания в НЭ в процессе переориентации КА. Закон управления, стабилизирующий полученные опорные движения КА.

### **Научная новизна работы**

Исследовано движение КА, имеющего протяженные НЭ с нулевыми декрементами затухания колебательных мод. Разработанная нелинейная модель КА с НЭ допускает изменение числа НЭ и типов их сочленения с корпусом КА, среди которых жесткое, а также с помощью одностепенного и двухстепенного шарниров. При этом структура полученных уравнений такова, что изменение конфигурации КА не приводит к необходимости их повторного вывода.

Построен закон управления, обеспечивающий инерциальную стабилизацию геостационарного КА с НЭ и гашение вибраций в последних, не требующий информации о модальных переменных. Получены условия асимптотической устойчивости положения равновесия КА с НЭ в инерциальной системе координат. Отрицательная обратная связь по состоянию, описывающему поведение корпуса КА, представляется как решение задачи линейно-квадратичного регулирования. За счет выбора матриц в функционале качества удовлетворяется ограничение на максимально допустимую величину управляющего момента маховиков, а также в явном виде находится положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати. С

помощью последнего обеспечивается положительная определенность матриц обратной связи, благодаря чему и осуществляется режим инерциальной стабилизации.

Построенная по заранее заданному набору кватернионов опорная траектория углового движения КА обладает третьей степенью гладкости и согласуется с условием нормировки на всем интервале движения. Движение вдоль нее не вызывает роста колебаний НЭ. Предложен и исследован алгоритм управления, реализующий указанный режим опорного движения.

### **Практическая значимость работы**

Практическая значимость полученных результатов исследования состоит в том, что

- разработанная модель КА с НЭ масштабируется на случай любого наперед заданного числа НЭ, что делает ее подходящей для программной реализации;
- предложенные законы стабилизации заданных режимов углового движения КА не требуют выполнения процедуры идентификации обобщенных координат, описывающих колебания НЭ, что уменьшает общую вычислительную сложность работы алгоритма управления в процессе маневрирования КА. При этом управляющий момент реализуется только с помощью маховиков, расположенных на корпусе КА, и не требует установки дополнительных исполнительных устройств на НЭ;
- может быть увеличена точность ориентации телекоммуникационных и других геостационарных аппаратов за счет учета низкочастотных колебаний в НЭ при построении математической модели КА с НЭ и их последующего гашения с помощью предложенного алгоритма управления КА;
- слабо возбуждаются колебания НЭ, благодаря движению корпуса КА вдоль предложенных гладких опорных траекторий.

### **Апробация результатов работы**

Результаты работы были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- 1-я Международная конференция «Проблемы механики и управления», Махачкала, 16–22 сентября 2018 г.

- 53-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, 18–19 сентября 2018 г.
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 г.
- 70th International Astronautical Congress (IAC), Washington, USA, 21-25 October, 2019.
- XLIV Академические чтения по космонавтике, Москва, 28–31 января 2020 г.
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Московская область, Долгопрудный, 23–29 ноября 2020 г.
- XLV Академические чтения по космонавтике, Москва, 30 марта – 2 апреля 2021 г.

Результаты работы также обсуждались на следующих научных семинарах:

- Семинар «Динамика космических систем» отдела №7 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, 2021 г., 2022 г.)
- Семинар «Динамические системы и механика», МАИ (г. Москва, 2022 г.)
- Семинар «Механика и управление движением» отдела № 5 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва, 2022 г.).

## **Публикации**

Основные положения и результаты диссертации были опубликованы в 6 изданиях [1-6], включенных в перечень рекомендованных ВАК РФ, из которых 4 индексируются в базах данных Scopus и/или Web of Science, 2 – препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

## **Личный вклад автора**

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач и результаты исследований обсуждались с соавторами.

Результаты работы использованы при выполнении грантов РФФИ (№ 16-01-00634 А, № 19-31-90047 Аспиранты) и РФФИ (№ 17-71-20117), а также контрактов с отечественной космической промышленностью.

## Содержание работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения.

**Во введении** обосновывается актуальность и практическая значимость работы, а также проводится обзор существующих подходов к решению поставленных задач.

**Первая глава** посвящена разработке математической модели движения космического аппарата (КА) с заранее заданным числом (равным  $N$ ) нежестких элементов (НЭ), прикрепленных к его корпусу. Она производится в два этапа. На первом выводятся уравнения углового движения отдельно для корпуса КА и всех НЭ. На втором этапе, благодаря предположению об идеальности связей в точках крепления НЭ к корпусу КА, строится искомая математическая модель движения КА с НЭ, записанная в обобщенных координатах.

Движение корпуса КА моделировалось как движение твердого тела под действием равнодействующей активных внешних сил  $\mathbf{F}_s$ , а также сил реакции  $\mathbf{G}_{SPn}$   $n = \overline{1, N}$ , приложенных к нему в  $N$  точках сочленения с НЭ.

Для вывода уравнений движения  $n$ -го НЭ используется общее уравнение динамики

$$\sum_i (m_{ni} \ddot{\mathbf{R}}_{ni} - \mathbf{F}_{ni}) = \mathbf{G}_{Pn} \delta \mathbf{R}_{Pn}, \quad (1)$$

в котором  $m_{ni}$  –  $i$ -ая точечная масса  $n$ -го НЭ,  $\delta \mathbf{R}_{ni}$  – виртуальное перемещение  $i$ -ой точки  $n$ -го НЭ,  $\delta \mathbf{R}_{Pn}$  – виртуальное перемещение точки крепления  $n$ -го НЭ к корпусу КА,  $\mathbf{F}_{ni}$  – равнодействующая всех активных сил, действующих на  $i$ -ую точку  $n$ -го НЭ,  $\mathbf{G}_{Pn}$  – сила реакции, действующая на НЭ в точке крепления. В (1) сумма берется по всем точкам  $n$ -го НЭ.

Пусть  $\mathbf{R}_{ni} = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}$ , где  $\mathbf{R}_n$  – радиус-вектор центра масс недеформированного  $n$ -го НЭ относительно центра масс Земли;  $\mathbf{r}_{ni}$  – радиус-вектор  $i$ -ой точки недеформированного  $n$ -го НЭ, начало которого помещено в его центр масс;  $\mathbf{u}_{ni}$  – смещение  $i$ -ой точки  $n$ -го НЭ относительно ее недеформированного состояния  $\mathbf{r}_{ni}$ , вызванное упругими деформациями. Для описания последних в работе использован модальный подход, в рамках которого

$$\mathbf{u}_{ni} = \mathbf{A}_{ni} \mathbf{q}_n, \quad (2)$$

где вектор  $\mathbf{q}_n(t) = (q_1(t) \cdots q_{k_n}(t))^T$  содержит  $k_n$  обобщенных координат, характеризующих величину деформаций на каждой из собственных мод колебаний  $n$ -го НЭ (в дальнейшем, *модальных переменных*),  $\mathbf{A}_{ni} = (\mathbf{a}_{n1i} \cdots \mathbf{a}_{nk_n i})$  – матрица собственных мод колебаний, столбцы  $\mathbf{a}_{nki}$  которой задают смещение  $i$ -ой точки  $n$ -ого НЭ относительно ее недеформированного положения  $\mathbf{r}_{ni}$ , вызванное его  $k$ -ой колебательной модой. Матрица  $\mathbf{A}_{ni}$  зависит лишь от радиус-вектора  $\mathbf{r}_{ni}$ .

Выразим  $\delta \mathbf{R}_{ni}$  через вариации обобщенных координат НЭ  $\delta \mathbf{R}_n$ ,  $\delta \boldsymbol{\theta}_n$ ,  $\delta \mathbf{q}_n$ :

$$\delta \mathbf{R}_{ni} = \delta \mathbf{R}_n + \delta \boldsymbol{\theta}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + \mathbf{A}_{ni} \delta \mathbf{q}_n \quad (3)$$

(здесь  $\delta \boldsymbol{\theta}_n$  – вектор бесконечно малого поворота НЭ), и подставим (3) в (1). Ввиду независимости обобщенных координат, в результате ряда преобразований получаем окончательно уравнения углового движения  $n$ -го НЭ в матричном виде

$$\mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{N}_n + \boldsymbol{\Phi}_n + \boldsymbol{\Gamma}_n, \quad (4)$$

где  $\ddot{\mathbf{x}}_n \triangleq (\ddot{\mathbf{R}}_n^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_n^T)^T$  – вектор старших производных  $n$ -го НЭ и

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} M_n \mathbf{E}_{3 \times 3} & -M_n [\mathbf{r}_{Cn}]_{\times} & M_n \mathbf{A}_n \\ M_n [\mathbf{r}_{Cn}]_{\times} & \tilde{\mathbf{J}}_n & \sum_i m_{ni} [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} \mathbf{A}_{ni} \\ M_n \mathbf{A}_n^T & -\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} & \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{A}_{ni} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_n = \begin{pmatrix} -M_n (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{Cn} + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{r}}_{Cn}) \\ -\boldsymbol{\omega}_n \times \tilde{\mathbf{J}}_n \boldsymbol{\omega}_n - \sum_i m_{ni} (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times (2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) \\ -\sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \begin{pmatrix} \sum_i \mathbf{F}_{ni} \\ \sum_i (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times \mathbf{F}_{ni} \\ \sum_i \mathbf{A}_{ni}^T \mathbf{F}_{ni} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}_{Pn} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{Pn} \\ [\mathbf{r}_{Pn} + \mathbf{u}_{Pn}]_{\times} \mathbf{G}_{Pn} \\ \mathbf{A}_{Pn}^T \mathbf{G}_{Pn} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $M_n$  – масса  $n$ -го НЭ,  $\boldsymbol{\omega}_n$  – абсолютная угловая скорость СК, связанной с  $n$ -ым НЭ, относительно инерциальной системы координат (ИСК),  $\tilde{\mathbf{J}}_n$  – тензор инерции деформированного  $n$ -го НЭ,  $\mathbf{r}_{Cn}$  – вектор смещения центра масс  $n$ -го НЭ, вызванного его деформацией, и  $\mathbf{A}_n = \frac{1}{M_n} \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}$ . Отметим, что на  $i$ -ую точку  $n$ -го НЭ действуют как внешние силы  $\mathbf{F}_{ni}^{ext}$ , так и внутренние  $\mathbf{F}_{ni}^{int} = -m_{ni} \mathbf{A}_{ni} \boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{q}_n$ , возникновение которых вызвано упругими деформациями. Здесь  $\boldsymbol{\Omega}_n$  – матрица собственных частот колебаний  $n$ -го НЭ. Присутствие тех или иных внешних сил в  $\mathbf{F}_{ni}^{ext}$  зависит от орбиты КА.

Производя в уравнениях (4) суммирование по пространственной части и выделяя переменные  $\boldsymbol{\omega}_n$  и  $\mathbf{q}_n$ , которые зависят от времени, получим соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}_n &= \mathbf{J}_n + \mathbf{K}_{rA} \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_n^T \mathbf{K}_{Ar} + \mathbf{Q}_n^T \mathbf{K}_{AA} \mathbf{Q}_n, \quad \sum_i m_{ni} [\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}]_{\times} \mathbf{A}_{ni} = \mathbf{C}_{rA} + \mathbf{Q}_n^T \mathbf{C}_{AA}, \\ \sum_i m_{ni} (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) \times (2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) &= 2(\mathbf{K}_{rA} + \mathbf{Q}_n^T \mathbf{K}_{AA}) \mathbf{Q}_n \boldsymbol{\omega}_n, \\ \sum_i m_{ni} \mathbf{A}_{ni}^T (\boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{\omega}_n \times (\mathbf{r}_{ni} + \mathbf{u}_{ni}) + 2\boldsymbol{\omega}_n \times \dot{\mathbf{u}}_{ni}) &= -(\boldsymbol{\Omega}_n^T \mathbf{K}_{Ar} \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\Omega}_n^T \mathbf{K}_{AA} \boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{q}_n + 2\boldsymbol{\Omega}_n^T \mathbf{C}_{AA} \dot{\mathbf{q}}_n), \end{aligned}$$

в которых постоянные матрицы  $\mathbf{K}_{rA}, \mathbf{K}_{Ar}, \mathbf{K}_{AA}, \mathbf{C}_{rA}, \mathbf{C}_{AA}$  зависят лишь от матриц собственных мод колебаний, а матрицы  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_n(\mathbf{q}_n)$  и  $\boldsymbol{\Omega}_n = \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{\omega}_n)$  зависят от состояния КА. Суммирование происходит один раз до начала численного интегрирования, что существенно упрощает процесс численного решения системы (4).

Уравнения (4), выписанные для каждого НЭ, наряду с уравнениями движения корпуса КА, описывают движение всего КА с  $N$  НЭ. Они содержат неизвестные силы реакции, а набор координат, определяющих поведение КА, является избыточным. Так как рассматриваемая конфигурация КА имеет структуру дерева, оказалось возможным получить уравнения движения в обобщенных координатах системы КА с  $N$  НЭ, используя подход, предложенный Д.Ю. Погореловым<sup>1</sup> для вывода уравнений движения системы твердых тел.

<sup>1</sup> Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: Учебное пособие. Брянск: БГТУ, 1997, 164 с.

В диссертационной работе вектор вариаций обобщенных координат КА с  $N$  НЭ определяется как  $\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{x}_S^T \quad \delta \mathbf{x}_{E1}^T \quad \dots \quad \delta \mathbf{x}_{EN}^T)^T$ , где  $\delta \mathbf{x}_S = (\delta \mathbf{R}_S^T \quad \delta \boldsymbol{\theta}_S^T)^T$  – вариации обобщенных координат корпуса КА, вариации  $\delta \mathbf{x}_{En}$ , описывающие поведение  $n$ -го НЭ. Модель допускает три основных типа сочленения НЭ с корпусом КА: жесткое, с помощью одностепенного и двухстепенного шарниров. В зависимости от типа его сочленения с корпусом КА

$$\delta \mathbf{x}_{En} = \begin{cases} \delta \mathbf{q}_n - \text{жесткое крепление,} \\ (\delta \varphi_n \quad \delta \mathbf{q}_n^T)^T - \text{одностепенной шарнир,} \\ (\delta \varphi_n^1 \quad \delta \varphi_n^2 \quad \delta \mathbf{q}_n^T)^T - \text{двухстепенной шарнир.} \end{cases}$$

Здесь  $\delta \mathbf{R}_S$  и  $\delta \boldsymbol{\theta}_S$  определяют виртуальное перемещение центра масс корпуса КА и его бесконечно малый поворот,  $\delta \varphi_n$  определяет бесконечно малый поворот в одностепенном шарнире,  $\delta \varphi_n^1, \delta \varphi_n^2$  – в двухстепенном.

Для того чтобы выписать уравнения движения КА в обобщенных координатах, была установлена связь вектора вариаций обобщенных координат  $\delta \mathbf{x}_n$  каждого отдельного НЭ с вариациями обобщенных координат КА  $\delta \mathbf{x}$ . Аналогичная процедура проделана для соответствующих векторов старших производных. В результате, получены искомые динамические уравнения движения КА с  $N$  НЭ

$$\mathbf{S}_\Sigma \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_\Sigma + \boldsymbol{\Phi}_\Sigma, \quad (5)$$

где  $\mathbf{N}_\Sigma = (\mathbf{N}_{\Sigma 0}^T \quad \mathbf{N}_{\Sigma 1}^T \quad \dots \quad \mathbf{N}_{\Sigma N}^T)^T$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_\Sigma = (\boldsymbol{\Phi}_{\Sigma 0}^T \quad \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma 1}^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\Phi}_{\Sigma N}^T)^T$ ,

$$\mathbf{S}_\Sigma = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{0\Sigma} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cccc} \mathbf{S}_{00} & \mathbf{S}_{01} & \dots & \dots & \mathbf{S}_{0N} \\ \mathbf{S}_{01}^T & \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{0N}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{NN} \end{array} \right)$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{00} &= \mathbf{S}_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{D}_n^S)^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n^S, \quad \mathbf{S}_{0n} = (\mathbf{D}_n^S)^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n^E, \quad \mathbf{S}_{nn} = (\mathbf{D}_n^E)^T \mathbf{S}_n \mathbf{D}_n^E, \quad n = \overline{1, N}, \\ \mathbf{N}_{\Sigma 0} &= \mathbf{N}_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{D}_n^S)^T (\mathbf{N}_n - \mathbf{S}_n \mathbf{d}_n), \quad \mathbf{N}_{\Sigma n} = (\mathbf{D}_n^E)^T (\mathbf{N}_n - \mathbf{S}_n \mathbf{d}_n), \quad n = \overline{1, N}, \\ \Phi_{\Sigma 0} &= \Phi_S + \sum_{n=1}^N (\mathbf{D}_n^S)^T \Phi_n, \quad \Phi_{\Sigma n} = (\mathbf{D}_n^E)^T \Phi_n, \quad n = \overline{1, N}.\end{aligned}$$

Матрицы  $\mathbf{D}_n^e$ ,  $n = \overline{1, N}$  в  $\mathbf{S}_\Sigma$  и  $\mathbf{N}_\Sigma$  зависят от типа крепления НЭ к корпусу КА. Динамические уравнения (5) дополняются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_S &= \mathbf{V}_S, \quad \dot{\Lambda}_S = \frac{1}{2} \Lambda_S \circ \boldsymbol{\omega}_S, \quad \dot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{V}_{q_n}, \quad n = \overline{1, N}, \\ \dot{\varphi}_n &= \psi_n, \quad n = \overline{l_1 + 1, l_1 + l_2}, \quad \dot{\varphi}_n^1 = \psi_n^1, \quad \dot{\varphi}_n^2 = \psi_n^2, \quad n = \overline{l_1 + l_2 + 1, N},\end{aligned}$$

в которых  $\mathbf{V}_S$  обозначает скорость центра масс корпуса КА,  $\mathbf{V}_{q_n}$  – скорость изменения модальных переменных, а  $\Lambda_S = (\lambda_{0S} \quad \lambda_S^T)^T$  – кватернион ориентации корпуса КА, задающий переход из ИСК в СК, связанную с корпусом КА.

В диссертационной работе приведен алгоритм модификации математической модели движения КА (уравнения движения (5)) при добавлении в его конструкцию  $N+1$  НЭ, существенно использующий ее модульный характер. Масштабируемость предложенной модели КА на случай любого заранее заданного числа НЭ является ее главным достоинством. При этом модель обладает рядом дополнительных положительных характеристик:

- описывается конечномерной системой дифференциальных уравнений, что упрощает процесс ее численного интегрирования и разработку законов управления;
- записывается в обобщенных координатах системы КА с НЭ, что минимизирует число уравнений, описывающих его движение;
- допускает основные типы сочленения НЭ с корпусом КА.

Отметим, что в [1] в качестве обобщенных координат вместо радиус-вектора центра масс корпуса КА  $\mathbf{R}_S$  выступает радиус-вектор центра масс всего КА  $\mathbf{R}_C$ , что приводит к отделению орбитального движения КА от углового. Используемый в диссертационной работе подход к составлению математической модели КА с НЭ оказывается предпочтительнее в плане обращения матрицы динамики, особенно в случае возрастающего числа учтенных в модели КА мод колебаний НЭ. Обращение производилось по формуле Фробениуса.

Тестирование математической модели заключалось в проверке сохранения кинетического момента и энергии КА в отсутствии внешних моментов.

Результаты первой главы опубликованы в [2].

**Во второй главе** объектом исследования является КА с НЭ, состоящий из корпуса и трех жестко закрепленных НЭ – антенны и двух панелей. Его центр масс движется по геостационарной орбите в гравитационном (центральном, ньютоновом) поле Земли. Получены уравнения движения КА относительно центра масс

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{\omega\mathbf{q}}^T & \tilde{\mathbf{S}}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_\omega \\ \mathbf{N}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ctrl} + \tilde{\mathbf{M}}_{ext}(\mathbf{q}) \\ \Phi_{att}^q \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda}_S \circ \boldsymbol{\omega}_S, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_q,$$

в которых  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T)^T$  и  $\mathbf{V}_q = (\mathbf{V}_{q_1}^T \quad \mathbf{V}_{q_2}^T \quad \mathbf{V}_{q_3}^T)^T$  – векторы модальных переменных всех НЭ и скоростей их изменения, соответственно, векторы  $\mathbf{N}_\omega = \mathbf{N}_\omega(\boldsymbol{\omega}_S, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\mathbf{N}_q = \mathbf{N}_q(\boldsymbol{\omega}_S, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  содержат нелинейные слагаемые по обобщенным координатам КА с НЭ,  $\tilde{\mathbf{J}}$  – тензор инерции деформированного КА относительно его центра масс,  $\mathbf{M}_{ctrl}$  – управляющий момент,  $\tilde{\mathbf{M}}_{ext}$  – момент внешних сил, действующих на КА. В случае движения КА по геостационарной орбите он включает в себя моменты гравитационных сил  $\tilde{\mathbf{M}}_{grav}$  и сил светового давления  $\mathbf{M}_{sp}$ . В (6) символ  $\tilde{\alpha}$  обозначает зависимость соответствующей величины от модальных переменных, т.е.  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\mathbf{q})$ .

Уравнения (6) используются при разработке закона управления ориентацией КА. Проводя их линеаризацию в отсутствии внешних сил в окрестности положения равновесия  $\boldsymbol{\omega}_S = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_S = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \end{pmatrix}^T$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{0}_{k_\Sigma \times 1}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{0}_{k_\Sigma \times 1}$ , получаем линейные уравнения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}} \\ \mathbf{S}_{\omega\mathbf{q}}^T & \mathbf{S}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \\ \dot{\mathbf{V}}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ctrl} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_S = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_S, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_q.$$

Здесь  $\mathbf{J}$  – тензор инерции КА, НЭ которого находятся в недеформированном состоянии (в дальнейшем *недеформированный* ТИ),  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\boldsymbol{\Omega}_1 \quad \boldsymbol{\Omega}_2 \quad \boldsymbol{\Omega}_3)$  –

диагональная матрица собственных частот колебаний НЭ,  $k_\Sigma = \sum_{n=1}^3 k_n$ , где  $k_n$  – число колебательных мод  $n$ -го НЭ, учтенных в математической модели.

В главе решается задача построения управляющего момента  $\mathbf{M}_{ctrl}$ , одновременно обеспечивающего инерциальную стабилизацию ( $\boldsymbol{\omega}_S = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ ) КА с НЭ в угловом положении  $\Lambda_S^f = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{3 \times 1}^T \end{pmatrix}^T$  и гашение низкочастотных колебаний в НЭ. Она имеет следующие особенности.

- Исполнительные органы системы управления и датчики расположены только на корпусе КА.
- Роль исполнительных органов играют маховики, создающие суммарный относительный кинетический момент  $\mathbf{H}$ . Управляющий момент рассчитывается по формуле  $\mathbf{M}_{ctrl} = -\dot{\mathbf{H}} - \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{H}$  и не превышает заданного максимального значения.
- При формировании управления не используется информация о модальных переменных.

В диссертационной работе для решения поставленных задач используется управление

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} - \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_S - \mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_S, \quad (8)$$

где  $\mathbf{K}_\omega$  и  $\mathbf{K}_\lambda$  – положительно определенные матрицы. Заметим, что в рамках (8) компенсируется лишь часть момента внешних сил  $\mathbf{M}_{ext}$ , действующего на *недеформированный* КА, то есть на КА с тензором инерции  $\mathbf{J}$ .

В работе получены достаточные условия, при которых закон управления  $\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega}_S - \mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_S$  обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия линеаризованных уравнений движения КА с НЭ относительно центра масс (7) в отсутствии внешних возмущений.

Для решения последней задачи используется прямой метод Ляпунова, а точнее теорема Барбашина-Красовского. Кандидат-функция Ляпунова записывается в виде

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S^T & \mathbf{V}_q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{S}_{\omega q} \\ \mathbf{S}_{\omega q}^T & \mathbf{S}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_S \\ \mathbf{V}_q \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda}_S^T \mathbf{K}_\lambda \boldsymbol{\lambda}_S + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}.$$

Её производная в силу уравнений движения является знакоотрицательной. Отметим, что матрицы  $\mathbf{S}_q$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  положительно определенные. Показано, что если все собственные значения  $\nu_i$ ,  $i = \overline{1, k_\Sigma}$ , найденные из соотношений

$(\boldsymbol{\Omega} - \nu_i \mathbf{S}_q) \mathbf{z}_i = 0$ ,  $i = \overline{1, k_\Sigma}$ , различны и  $\text{rank}(\mathbf{S}_{\omega q} \mathbf{Z}) = 3$ , где  $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1 \ \dots \ \mathbf{z}_{k_\Sigma})$ , то на множестве  $\{\dot{V} = 0\}$  отсутствуют целые траектории за исключением нулевого положения равновесия, а, следовательно, условия теоремы Барбашина-Красовского выполняются.

В диссертационной работе положительно определенные матрицы  $\mathbf{K}_\omega$  и  $\mathbf{K}_\lambda$  формируются как матрицы обратной связи линейно-квадратичного регулятора (ЛКР)

$$\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_s \\ \boldsymbol{\lambda}_s \end{pmatrix}, \quad (9)$$

построенного на основе линеаризованных уравнений углового движения корпуса КА с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{1}{2} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}.$$

Закон (9) минимизирует функционал  $J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}_{stab}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{stab}) dt$ , где положительно определенные матрицы

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}$$

и  $\mathbf{R}$  выступают в качестве параметров. Матрица

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}$$

– положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати (АУР)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Для обеспечения положительной определенности матриц обратной связи  $\mathbf{K}_\omega = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_{11}$ ,  $\mathbf{K}_\lambda = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P}_{12}$  были соответствующим образом подобраны матрицы функционала качества  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ . А именно, полагалось, что  $\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ , а матрицы  $\mathbf{Q}_{11}$ ,  $\mathbf{Q}_{22}$  и  $\mathbf{R}$  являются диагональными в том же базисе, что и тензор инерции  $\mathbf{J}$ , то есть

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{W}\mathbf{Q}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T, \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{W}\mathbf{Q}_{22}^{diag}\mathbf{W}^T, \mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{R}^{diag}\mathbf{W}^T.$$

Здесь  $\mathbf{Q}_{11}^{diag}$ ,  $\mathbf{Q}_{22}^{diag}$ ,  $\mathbf{R}^{diag}$  – положительно определенные диагональные матрицы,  $\mathbf{W}$  – ортогональная матрица, осуществляющая преобразование тензора  $\mathbf{J}$  к главным осям. Такой подход позволил найти решение АУР в явном виде, положительная определенность которого была установлена с помощью леммы Шура. В результате, закон управления (9) принимает окончательный вид

$$\mathbf{u}_{stab} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\omega}_S + \mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\lambda}_S), \quad (10)$$

где  $\mathbf{P}_{11} = \mathbf{W}\mathbf{P}_{11}^{diag}\mathbf{W}^T$ ,  $\mathbf{P}_{12} = \mathbf{W}\mathbf{P}_{12}^{diag}\mathbf{W}^T$ .

На этом завершена процедура построения закона управления (8), обеспечивающего инерциальную стабилизацию КА с НЭ в заданном положении.

Результаты второй главы опираются на работы [1, 4–6].

**Третья глава** посвящена задачам построения и стабилизации неинерциальных опорных режимов углового движения КА с НЭ, жестко прикрепленными к корпусу. Для описания опорных режимов используется опорная система координат (ОСК), начало которой лежит в центре масс корпуса КА, а положение осей относительно ИСК, задается единичным опорным кватернионом  $\mathbf{Q}(t)$ . Вращение ОСК относительно ИСК определяется опорной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Как  $\mathbf{Q}(t)$ , так и  $\boldsymbol{\omega}(t)$  являются заданными функциями времени.

В диссертационной работе для решения задачи стабилизации КА с НЭ в ОСК в относительном угловом положении  $\boldsymbol{\Lambda}_{rel}^f = (1 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}^T)^T$  использовался управляющий момент

$$\mathbf{M}_{ctrl} = -\mathbf{M}_{ext} + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_S - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_{rel} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{u}_{stab}. \quad (11)$$

В (11) слагаемое  $\mathbf{u}_{stab}$  определяется выражением (10), в которое вместо абсолютных угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_S$  и кватерниона ориентации  $\boldsymbol{\Lambda}_S$  подставляются относительные угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_{rel} = \boldsymbol{\omega}_S - \boldsymbol{\omega}$  и относительный кватерниона ориентации  $\boldsymbol{\Lambda}_{rel} = \tilde{\mathbf{Q}} \circ \boldsymbol{\Lambda}_S$ .

В главе рассматривается задача построения опорного движение корпуса КА на фиксированном отрезке времени  $[t_0, t_N]$  по набору кватернионов ориентации  $\mathbf{Q}_j$ , заданных в моменты времени  $t_j$ ,  $j = \overline{0, N}$ . В дальнейшем пара

$(\mathbf{Q}_j, t_j)$  называется *узлом*. В диссертационной работе ставится задача: построить опорную траекторию КА с НЭ, обладающую двумя следующими свойствами.

1. Норма опорного кватерниона ориентации сохраняется на всем интервале движения, т.е.  $\|\mathbf{Q}(t)\| = 1$ .

2. Первая производная опорного ускорения  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  (или *рывка ускорения*) должна быть непрерывной функцией. В ряде работ выдвигалась гипотеза, что движение вдоль опорной траектории, удовлетворяющей указанному условию, позволяет уменьшить возбуждение колебаний в НЭ.

Условие 2 приводит к необходимости построения опорной траектории  $\mathbf{Q}(t)$  третьей степени гладкости, так как

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \dot{\mathbf{Q}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \ddot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= 2\tilde{\mathbf{Q}} \circ \ddot{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \circ \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\tag{12}$$

Рассматривается случай, когда в каждом узле траектории известна «тройка» параметров  $\boldsymbol{\omega}(t_j)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t_j)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_j)$ . На практике значения  $\boldsymbol{\omega}(t_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$  обычно задаются наряду с информацией об узлах, в то время как векторы  $\boldsymbol{\varepsilon}(t_j)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_j)$  в узлах доопределяются и становятся параметрами искомой траектории. В этом случае задача построения опорной траектории разбивается на независимые друг от друга задачи построения ее частей  $\mathbf{Q}_{j,j+1}(t)$ ,  $t \in [t_j, t_{j+1}]$  между каждой парой узлов  $(\mathbf{Q}_j, t_j)$  и  $(\mathbf{Q}_{j+1}, t_{j+1})$ , имеющих степень гладкости не ниже третьей.

Пусть суммарное число значений  $\boldsymbol{\omega}(t)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ , заданных в моменты времени  $t_j, t_{j+1}$ , равно  $n$ . Кимом и др.<sup>2</sup> была предложена следующая конструкция интерполирующей кривой:

$$\mathbf{Q}_{j,j+1}(t) = \boldsymbol{\mu}_0 \circ \Pi_{\mathbf{Q}}(\tau),\tag{13}$$

где  $\boldsymbol{\mu}_0 \triangleq \mathbf{Q}_j$ ,  $\boldsymbol{\mu}_{n+1} \triangleq \mathbf{Q}_{j+1}$ ,  $\tau = (t - t_j) / (t_{j+1} - t_j)$  и

<sup>2</sup> Kim, M.-J. et al. A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives // Proc. of the 22nd Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1995, P. 369–376

$$\Pi_{\mathbf{Q}}(\tau) = \prod_{i=0}^n (\boldsymbol{\mu}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{i+1})^{\beta_{i+1}(\tau)} = (\boldsymbol{\mu}_0^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_1)^{\beta_1(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_i^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{i+1})^{\beta_{i+1}(\tau)} \circ \dots \circ (\boldsymbol{\mu}_n^{-1} \circ \boldsymbol{\mu}_{n+1})^{\beta_{n+1}(\tau)},$$

а  $\boldsymbol{\mu}_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – постоянные кватернионы, названные в текущей работе *вспомогательными*. В (13) введено обозначение  $\mathbf{Q}^t = \exp(t \ln(\mathbf{Q}))$ , где экспонента и логарифм определяются формулами<sup>3</sup>

$$\mathbf{Q} = \exp(|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|}{2}\right) & \frac{\bar{\boldsymbol{\varphi}}^T}{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|} \sin\left(\frac{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}|}{2}\right) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}^T, & |\bar{\boldsymbol{\varphi}}| \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \end{pmatrix}^T, & |\bar{\boldsymbol{\varphi}}| = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \ln(\mathbf{Q}) = \begin{cases} 2 \arccos(Q_0) \frac{(Q_1 \ Q_2 \ Q_3)^T}{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}}, & \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \neq 0 \\ \mathbf{0}, & \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} = 0 \end{cases}$$

В диссертационной работе  $n = 6$ , а в качестве показателей степени взяты полиномы  $\beta_i(\tau) = \sum_{m=0}^{n+1} a_m^i \tau^m$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ . Благодаря конструкции (13) задача интерполяции между двумя узлами  $(\mathbf{Q}_j, t_j)$  и  $(\mathbf{Q}_{j+1}, t_{j+1})$ , разбивается на две: задачу поиска коэффициентов полиномов  $\beta_i(\tau)$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , и задачу определения вспомогательных кватернионов  $\boldsymbol{\mu}_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Обе указанные задачи были решены автором, причем полагалось, что полиномы вместе со своими производными  $\beta_i^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $i = \overline{1, n+1}$  удовлетворяют граничным условиям

$$\beta_i(0) = 0, \beta_i^{(k)}(0) \begin{cases} \neq 0, & i = k \\ = 0, & i \neq k \end{cases}, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, 3}$$

$$\beta_i(1) = 1, \beta_i^{(k)}(1) \begin{cases} \neq 0, & i = 8 - k \\ = 0, & i \neq 8 - k \end{cases}, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, 3}$$

<sup>3</sup> Boyarko G.A., Romano M., Yakimenko O.A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamics optimization method // Journal of Guidance, Control, Dynamics, 2011, Vol. 34, № 4, P. 1197–1208.

С их помощью, удалось не только найти коэффициенты  $a_m^i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $m = \overline{0, n+1}$ , но и, исходя из (12), последовательно получить выражения для вспомогательных кватернионов:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 \circ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t_1)}{\dot{\beta}_1(0)}\right), \mu_2 = \mu_1 \circ \exp\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\dot{\beta}_2(0)}\right), \\ \mu_3 &= \mu_2 \circ \exp\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_1) - 2\boldsymbol{\omega}(t_1) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t_1)}{\ddot{\beta}_3(0)}\right), \mu_6 = \mu_7 \circ \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\omega}(t_2)}{\dot{\beta}_7(1)}\right), \\ \mu_5 &= \mu_6 \circ \exp\left(-\mu_6^{-1} \circ \mu_7 \circ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(t_2)}{\dot{\beta}_6(1)} \circ \mu_7^{-1} \circ \mu_6\right), \\ \mu_4 &= \mu_5 \circ \exp\left(-\mu_5^{-1} \circ \mu_7 \circ \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_2) + 2\boldsymbol{\omega}(t_2) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t_2)}{\ddot{\beta}_5(1)} \circ \mu_7^{-1} \circ \mu_5\right). \end{aligned}$$

В ходе численного моделирования были сопоставлены течения колебательных процессов в НЭ геостационарного КА из главы 2 в случаях режима орбитальной стабилизации и стабилизации заданного опорного режима углового движения, построенного по описанной выше методике. В качестве последнего выступил программный разворот из заданного положения в ИСК в заданное положение в орбитальной системе координат. Отметим, что в диссертационной работе предварительно было показано, что остаточные деформации оказывают малое влияние на процесс орбитальной стабилизации рассматриваемого КА с НЭ, осуществляемой с помощью управляющего момента (11).

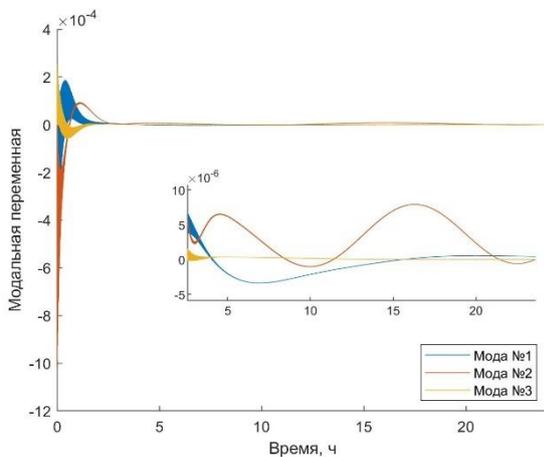


Рис. 1. Орбитальная стабилизация. Модальные переменные антенны

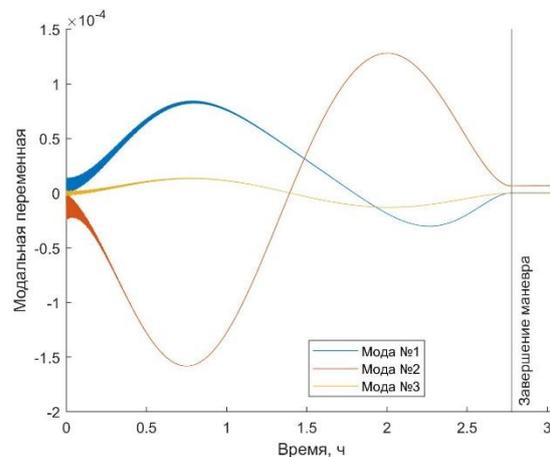


Рис. 2. Опорный режим. Модальные переменные антенны

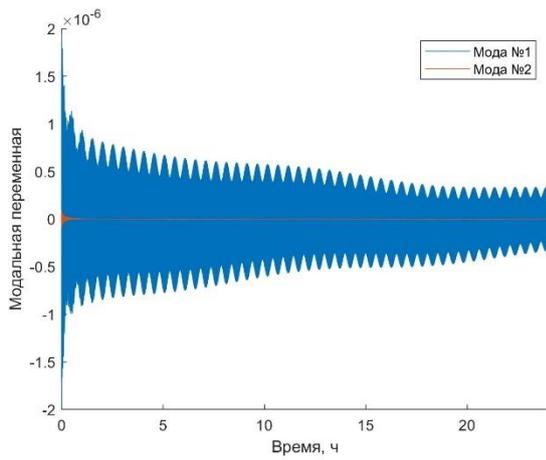


Рис. 3. Орбитальная стабилизация. Модальные переменные 1ой панели

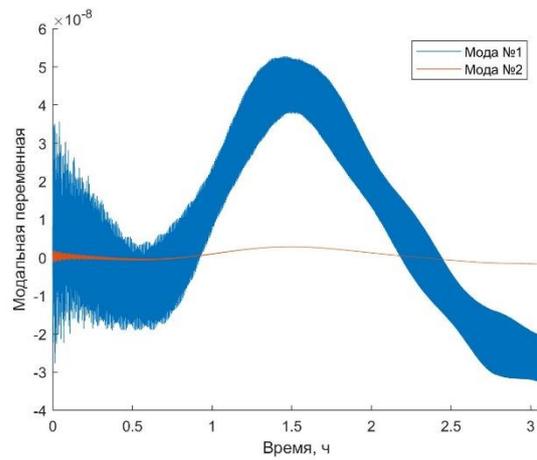


Рис. 4. Опорный режим. Модальные переменные 1ой панели

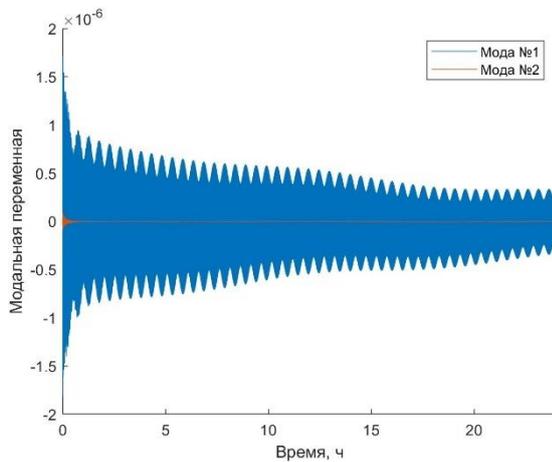


Рис. 5. Орбитальная стабилизация. Модальные переменные 2ой панели

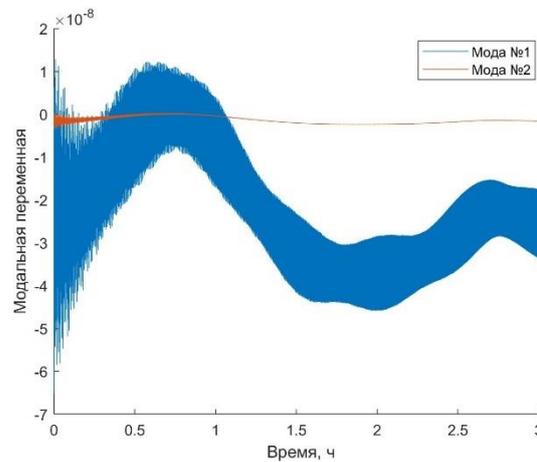


Рис. 6. Опорный режим. Модальные переменные 2ой панели

Приведенные на рис. 1–6 графики демонстрируют целесообразность использования предложенного класса опорных траекторий углового движения КА с точки зрения меньшего возбуждения колебательных процессов в НЭ.

Результаты третьей главы опубликованы в [3].

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования.

## Основные результаты и выводы

В диссертационной работе исследованы отдельные аспекты актуальной задачи стабилизации заданных режимов углового движения КА с НЭ и получены следующие результаты.

1. Разработана и апробирована нелинейная математическая модель КА с произвольным наперед заданным числом НЭ, прикрепленных к его корпусу. Она допускает основные типы сочленения НЭ с корпусом КА, встречающиеся на практике. Ключевым преимуществом предложенной модели можно считать ее масштабируемость на случай любого заранее заданного числа НЭ.

2. Разработан алгоритм инерциальной стабилизации геостационарного КА с НЭ. С его помощью решена задача гашения низкочастотных колебательных мод НЭ. При формировании предложенного закона управления не используются модальные переменные. В роли исполнительных органов выступают маховики, расположенные на корпусе КА.

3. Предложена методика построения опорной траектории углового движения корпуса КА с НЭ третьей степени гладкости, проходящей в фиксированные моменты времени через заданные кватернионы ориентации и в силу своей конструкции удовлетворяющей условию нормировки кватерниона ориентации на всем интервале движения. Построен закон управления, стабилизирующий полученные неинерциальные опорные режимы углового движения КА с НЭ. С помощью численного моделирования продемонстрировано, что движение КА вдоль траекторий указанного типа мало возбуждает колебания в НЭ его конструкции.

## Список публикаций по теме диссертации

1. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Алгоритмы стабилизации космического аппарата с нежесткими элементами // Известия РАН. Теория и системы управления, 2019, № 3, С. 147–163.

Пер.вер.: Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S., Shestoperov A.I. Algorithms of Stabilization of a Spacecraft with Flexible Elements // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2019, V. 58, № 3, P. 474–490.

2. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Математическая модель спутника с произвольным числом нежестких элементов // Математическое моделирование, 2020, Т. 32, № 12, С. 14–28.

Пер.вер.: Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S., Shestoperov A.I. Mathematical Model of a Satellite with an Arbitrary Number of Flexible Appendages // Mathematical Models and Computer Simulations, 2021, V. 13, № 4, P. 638–647.

3. Ткачев С.С., Шестопёров А.И. Построение опорной траектории третьего порядка гладкости углового движения космического аппарата // Математическое моделирование. 2021 г. Т. 33. № 10. с. 3–18.

Пер.вер.: Tkachev S.S., Shestoperov A.I. Construction of a Third Degree of Smoothness Reference Trajectory of the Angular Motion of a Spacecraft // Mathematical Models and Computer Simulations, 2022, V. 14, № 3, P. 357–366.

4. Ivanov D., Meus S., Nuralieva A., Ovchinnikov A., Ovchinnikov M., Roldugin D., Tkachev S., Shestoperov A., Shestakov S., Yakimov E. Coupled Motion Determination and Stabilization of a Satellite Equipped with Large Flexible Elements Using ADCS Only // Proceedings of the Astrodynamics Symposium. Held at the 70th International Astronautical Congress (IAC), Washington, USA, 21–25 October 2019, Curran Associates, Inc. Publ, 2020, V. 2. P. 603–609.

5. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Линейно-квадратичные методы гашения низкочастотных колебаний в нежестком элементе конструкции макета // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2017, № 123, 28 С.

6. Шестопёров А.И., Ткачев С.С. Использование линейно-квадратичного управления для разворотов космического аппарата на большие углы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019, № 142, 18 С.

Подписано в печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_.2022. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Тираж 60 экз. Заказ \_\_\_\_\_.

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4