



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Материалы защиты](#) • [Сведения о диссертации](#)



Широбоков М.Г.

Баллистико-навигационные
аспекты миссий малых
космических аппаратов к
Луне и точкам либрации

Диссертация

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Широбоков М.Г. Баллистико-навигационные аспекты миссий малых космических аппаратов к Луне и точкам либрации: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. М., 2017. 181 с. URL: <http://library.keldysh.ru/diss.asp?id=2017-shirobokov>

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»

На правах рукописи

Широбоков Максим Геннадьевич

**БАЛЛИСТИКО-НАВИГАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ МИССИЙ
МАЛЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ
К ЛУНЕ И ТОЧКАМ ЛИБРАЦИИ**

Специальность 01.02.01 – Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
М.Ю. Овчинников

Москва – 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Базовые теоретические сведения	11
1.1 Круговая ограниченная задача трех тел	11
1.1.1 Уравнения движения и интеграл Якоби	11
1.1.2 Точки либрации и линейная динамика вокруг них	13
1.1.3 Орбиты вблизи коллинеарных точек либрации	17
1.1.4 Метод Линдштедта–Пуанкаре построения периодических орбит вокруг точек либрации	25
1.1.5 Техника дифференциальной коррекции гало-орбит	28
1.1.6 Метод Коулмена построения квазигало-орбит	28
1.1.7 Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия, связанные с периодическими орбитами вокруг точек либрации	31
1.1.8 Миссии к точкам либрации и поддержание орбит	32
1.2 Численные методы общего назначения	36
1.2.1 Метод Левенберга–Марквардта и метод доверительных областей для решения систем нелинейных уравнений	36
1.2.2 Метод параллельной пристрелки	38
1.2.3 Метод последовательного квадратичного программирования	41
1.3 Адаптация траектории на случай эфемеридной модели движения Солнечной системы	44
Глава 2. Анализ спиральных траекторий перелета к лунной точке либрации L_1 с использованием резонансных сближений	47
2.1 Введение	47
2.2 Постановка задачи	50
2.3 Исходные данные	52
2.4 Теоретические сведения	54

2.4.1	Вариационные уравнения движения	54
2.4.2	Учитываемые возмущающие силы	55
2.4.3	Оптимальная по быстродействию задача перелета с малой тягой	57
2.4.4	Резонансные сближения с возмущающим телом	59
2.5	Алгоритм построения траектории перелета к лунной точке либрации L_1 с использованием резонансных сближений	63
2.5.1	Первый этап перелета	63
2.5.2	Третий этап перелета	64
2.5.3	Второй этап перелета	68
2.5.4	Переход от импульсного приближения к модели с активными участками	70
2.6	Результаты параметрического анализа	72
2.6.1	Анализ перелетов на первом этапе	72
2.6.2	Анализ перелетов на третьем этапе	75
2.6.3	Анализ целых перелетов	82
2.7	Спиральные траектории перелета без использования резонансных сближений с Луной	88
2.8	О деградации солнечных панелей и оптимальных по затрату топлива траекториях	88
Глава 3. Варианты дальнейших перелетов с орбит вокруг лунной точки либрации L_1		91
3.1	Введение	91
3.2	Соединения между орбитами вокруг разных точек либрации	93
3.2.1	Перелеты между гало-орбитами вокруг L_1 и L_2	93
3.2.2	Перелеты между системами трех тел	101
3.3	Перелет на окологлуные орбиты	105
3.3.1	Оскулирующие окологлуные орбиты из неустойчивого многообразия гало-орбит	105
3.3.2	Стабилизация окологлуных орбит малой тягой	112
Глава 4. Смена номинальной орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации в случае нештатной задержки коррекции		118

4.1	Введение	118
4.2	Постановка оптимизационной задачи для гало-орбит	120
4.3	Результаты перелетов на гало-орбиты	125
4.3.1	Отклонение вдоль неустойчивого многообразия	125
4.3.2	Серия испытаний Монте–Карло	134
4.4	Постановка оптимизационной задачи для квазигало-орбит	139
4.5	Результаты перелетов на квазигало-орбиты	141
4.6	Несколько слов о задаче с орбитами Лиссажу	146
4.7	Адаптация траекторий перелета к эфемеридной модели движения тел Солнечной системы	146
	Заключение	153
	Список сокращений и условных обозначений	155
	Литература	157
	Приложение А. Таблицы коэффициентов разложения гало-орбит вокруг точек либрации Земля–Луна L_1/L_2 в ряды Фурье	173
	Приложение Б. Связь между равноденственными орбитальными переменными и фазовым состоянием	180

Введение

В настоящее время малые космические аппараты (малые КА, МКА) становятся все более популярным инструментом космических исследований. Это вызвано относительной дешевизной таких аппаратов, скоростью их изготовления, пониженными требованиями к надежности и разработке. Последний отчет компании SpaceWorks [1] о тенденциях на рынке нано- и микроспутников наглядно демонстрирует тренд к увеличению числа МКА: если за 2000–2015 годы было запущено порядка 500 аппаратов весом от 1 до 50 кг, то на 2016–2022 годы прогнозируется запуск уже около 3000 таких аппаратов (рисунки 1 и 2).

МКА уже давно используются для проведения различного рода наблюдений на околоземных орбитах. Они выполняют задачи дистанционного зондирования Земли (например, миссии WNISAT-1 [2], ТаблетСат-Аврора [3], Зонд-ПП [4]), наблюдения за ионосферой (DEMETER [5]), радиоактивными и микрофизическими свойствами облаков (миссия PARASOL [6]), электрическими разрядами в атмосфере (Чибис-М [7], Вернов [8]), магнитосферными явлениями и геокоорной (Astrid-1 [9], Astrid-2 [10], Резонанс [11]), солнечной активностью (миссия Picard [12]), служат в рамках системы противоракетной обороны (программа SPIRALE [13]) и т.д. Пониженные требования на разработку и создание МКА дали возможность студентам и молодым специалистам принимать участие в создании спутников. Разработкой платформ и научной аппаратуры для МКА занимаются десятки университетов по всему миру, среди них Самарский государственный аэрокосмический университет (АИСТ [14]), Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского (Можаяец [15]), Московский авиационный институт (CONDOR UNAM-MAI [16]), Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Бауманец-2 [17]), Томский политехнический университет (Томск-ТПУ-120 [18]), Юго-Западный Государственный университет (РадиоСкаф [19]), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Университетский-Татьяна и Компас-2 [20]), Массачусетский технологический институт (iROSS [21]), Делфтский технический университет (OLFAR [22]), университет Кагавы (STARS [23]) и многие другие. МКА играют важную научную и образовательную роль, их разработка в России значительно повысит уровень научных исследований [24, 25].

Historical Nano/Microsatellites Launched: 2000 - 2015 (1 - 50 kg)

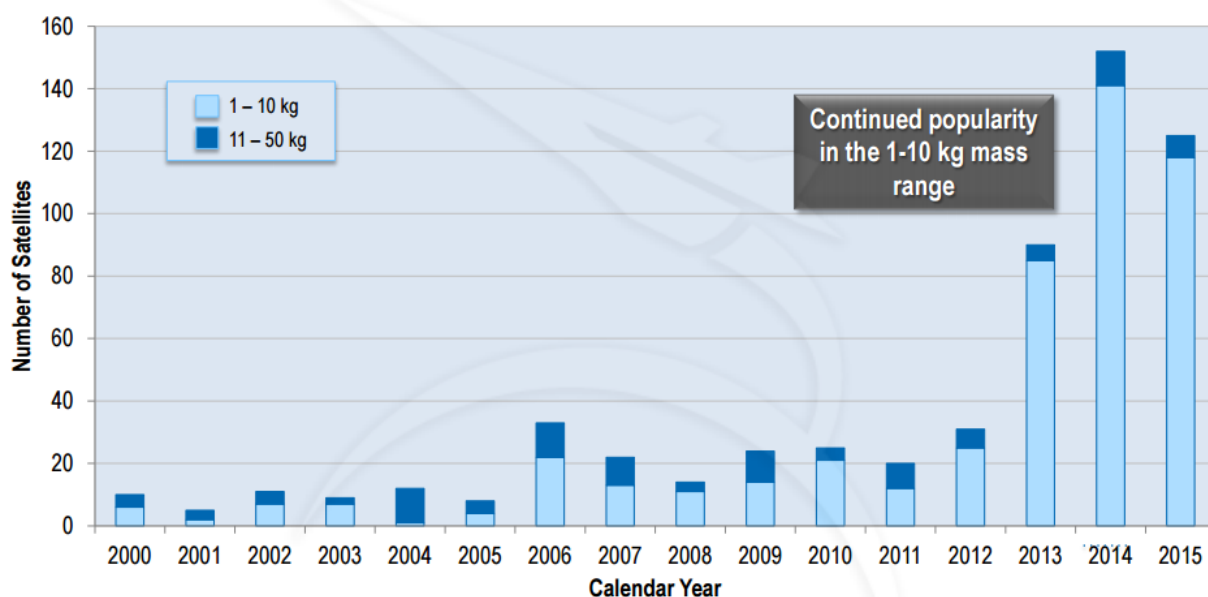


Рисунок 1 — Количество запущенных МКА в диапазоне масс от 1 до 50 кг за 2000–2015 гг.; всего более 500 аппаратов. На диаграмме видно резкое увеличение числа запущенных аппаратов на временном интервале с 2013 по 2015 гг. Заимствовано из [1]

Nano/Microsatellite Launch History and Forecast (1 - 50 kg)

Projections based on announced and future plans of developers and programs indicate as many as 3,000 nano/microsatellites will require a launch from 2016 through 2022

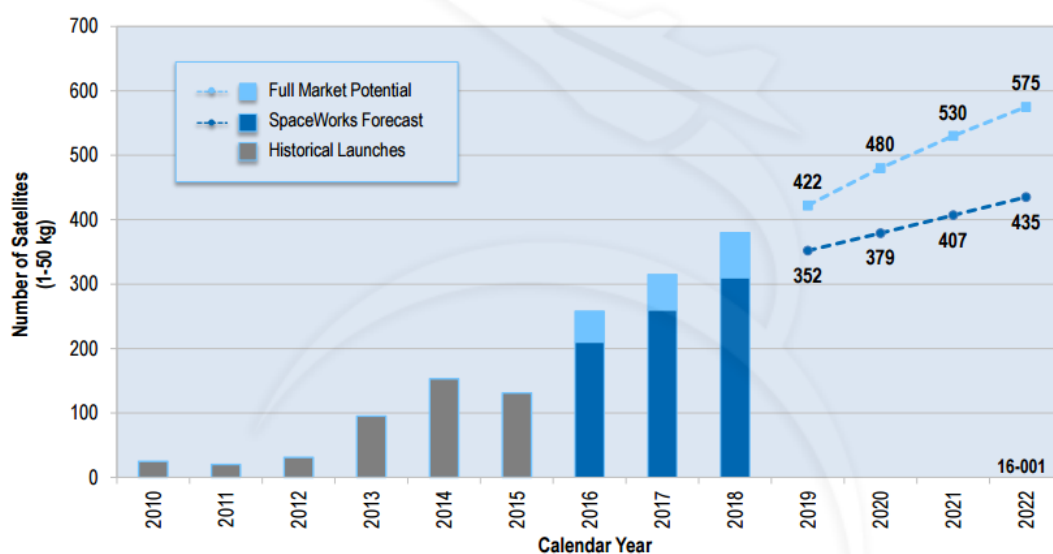


Рисунок 2 — Количество запущенных МКА в диапазоне масс от 1 до 50 кг за 2010–2015 гг. и прогноз на 2016–2022 гг. Согласно прогнозу, в 2016–2022 гг. ожидается запуск порядка 3000 аппаратов. Заимствовано из [1]

В Таблице 1 приведена терминологическая классификация МКА. В данной работе будут рассматриваться классы мини-, микро- и наноаппаратов, т.е. аппараты массой от 1 до 500 кг. Среди малых аппаратов распространенным форматом сейчас являются так называемые кубсаты (cubesats), состоящие из стандартизованных блоков в форме куба размера $10 \times 10 \times 10$ см и массой около 1 кг.

Таблица 1
Классификация МКА

Приставка	мини-	микро-	нано-	пико-	фемто-
Масса, кг	100 – 500	10 – 100	1 – 10	0.1 – 1	< 0.1

Важной вехой освоения космического пространства стало появление межпланетных¹ МКА. И хотя аппараты Deep Space 1 [26] и SMART-1 [27] формально относятся к малым МКА, важно заметить, что за последние несколько лет появились технологии, которые сделают возможным межпланетные перелеты для аппаратов в классе микро и нано. Среди этих технологий создание высокоскоростного лазерного канала связи посредством остронаправленной развертываемой антенны, появление более стойкой к высоким дозам радиации и низким температурам элементной базы, усовершенствование двигателей малой тяги и отработка технологии солнечного паруса, появление новых решений в области абсолютной и относительной автономной навигации и, наконец, развитие прецизионной навигации в условиях хаотической динамики. В ближайшие годы ожидается крупная волна демонстрационных и научных миссий с микро- и наноаппаратами. Так, в рамках миссии Exploration Mission 1 [28, 29] в дальний космос будут выпущены 13 кубсатов: Lunar IceCube [30], Lunar Flashlight [31], Near Earth Asteroid Scout mission [32], BioSentinel [33], CuSP [34], Lunar Polar Hydrogen Mapper [35] и др. Кроме того, новые технологии будут отрабатываться также в рамках миссий INSPIRE [36] и DESTINY [37].

Появление новых технологий сопровождается развитием разнообразных математических инструментов описания движения. Это не случайно: малая масса и небольшие размеры МКА предполагают либо малое количество топлива на борту, либо вообще его отсутствие, что в свою очередь накладывает

¹Здесь и далее слова «межпланетный» и «дальний космос» применяются по отношению к перелетам к точкам либрации, планетам, Луне и малым телам Солнечной системы.

существенные ограничения на перемещение аппарата в пространстве. Поэтому для межпланетных МКА жизненно важно использовать естественные динамические эффекты задачи многих тел, описываемые теорией динамических систем. Исследования в этой области в приложении к механике космического полета привели к обнаружению инвариантных многообразий, связанных с (квази)периодическими орбитами вокруг точек либрации [38], введению понятия границы слабой устойчивости (weak stability boundary, WSB) [39], использованию резонансных орбит и резонансных сближений (resonant encounters) с возмущающим телом [40]. Сейчас все это относится к построению так называемых низкоэнергетических перелетов [41] (low-energy transfers), замысловатые траектории которых характеризуются малыми затратами топлива и большими временами перелета².

Низкоэнергетические траектории неразрывно связаны с точками либрации и динамикой вокруг них. Подобно тому, как в системе двух тел различают несколько типов движения (эллиптическое, параболическое, гиперболическое и вдоль прямой), в системе трех тел выделяют периодические и квазипериодические орбиты, асимптотические к ним траектории, транзитные и нетранзитные траектории и др. Такое описание видов движения впервые было предложено Ч. Конли [42] для построения низкоэнергетических траекторий к Луне через «горлышко» вокруг точки либрации L_1 системы Земля–Луна. Одним из самых распространенных вариантов перемещения в системе трех тел оказывается движение вдоль асимптотических траекторий, связанных с периодическими и квазипериодическими орбитами вокруг коллинеарных точек либрации. В фазовом пространстве множество таких траекторий образует устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия. Благодаря тому, что инвариантные многообразия, связанные с орбитами разных точек либрации, пересекаются [43], оказываются возможными варианты бестопливного перемещения между окрестностями различных точек либрации. Более того, инвариантные многообразия различных систем трех тел также могут пересекаться [44] (например, для системы Солнце–Юпитер и Солнце–Сатурн), что позволяет без затрат топлива перемещаться между соответствующими планетами. Математически идея перемещения по Солнечной системе вдоль инвариантных многообразий различных систем трех тел была оформлена в ряде

²Низкоэнергетические перелеты уже использовались в миссиях Hiten, SMART-1, Genesis, GRAIL и др.

статей [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55] и названа межпланетным суперхайвеем (interplanetary superhighway) и межпланетной транспортной сетью (interplanetary transport network). Интересно отметить, что межпланетные траектории в этом случае проектируются состоящими из нескольких сопряженных участков, каждый из которых рассчитывается в своей системе трех тел, подобно тому, как строятся межпланетные траектории с несколькими гравитационными маневрами в рамках модели сопряженных конических сечений.

Итак, в связи с ростом числа МКА, наличием подходящих технологий, математических инструментов и имеющегося опыта освоения дальнего космоса в ближайшем будущем ожидается бурный рост числа межпланетных миссий с МКА. Подчеркивая важность точек либраций и низкоэнергетических траекторий для будущих межпланетных миссий с МКА и ориентированность Федеральной космической программы на исследование Луны в 2016–2025 годах (Луна-Ресурс [56, 57], Луна-Грунт [58], Луна-Глоб [59]), данная диссертация направлена на изучение различных аспектов и возможностей перелетов на орбиты вокруг точки L_1 системы Земля–Луна с легко доступных низких околоземных орбит (например, низких круговых орбит, НКО) и геопереходной орбиты (ГПО), перелетов на окололунные орбиты из окрестностей точек L_1 и L_2 системы Земля–Луна. Поэтому содержание диссертации построено по следующей схеме.

В первой главе даны основные теоретические сведения, которые будут использоваться в остальных главах. Сначала речь идет о динамике круговой ограниченной задачи трех тел (circular restricted three-body problem, CR3BP). Дается определение устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий, связанных с периодическими орбитами вокруг коллинеарных точек либрации. Инвариантные многообразия послужат затем рабочим инструментом проектирования перелетов к точкам либрации с околоземных орбит, а также от точек либрации до окололунных орбит. Затем будет описана процедура адаптации полученных в CR3BP траекторий к эфемеридной модели движения Солнечной системы. Наконец, будут кратко описаны численные методы решения систем нелинейных уравнений, краевых задач и задач оптимизации. Данные методы оказались наиболее эффективными в настоящем исследовании.

Вторая глава посвящена перелетам с околоземных орбит на орбиты вокруг точки L_1 системы Земля–Луна, играющей роль транспортного узла при

перелетах к остальным точкам либрации системы Земля–Луна, окололунным орбитам и точкам либрации системы Солнце–Земля. Тяга будет предполагаться малой, а старт будет рассматриваться как с низких околоземных орбит, так и с геопереходной орбиты. Спиралевидные траектории к точке L_1 системы Земля–Луна будут строиться с помощью резонансных сближений с Луной, позволяющих сэкономить топливо. Здесь же обосновываются преимущества такой схемы перелета. Краткая справка по резонансным сближениям с необходимыми отсылками к литературе также размещается в этой главе.

В **третьей главе** рассматриваются варианты дальнейших перелетов из окрестностей точек L_1 и L_2 системы Земля–Луна на окололунные орбиты. Здесь будут проанализированы затраты топлива, время перелета, а также диапазоны наклонений и долгот восходящих узлов окололунных орбит в зависимости от размеров орбит вокруг L_1 и L_2 .

Наконец, **четвертая глава** посвящена выбору номинальных орбит вокруг коллинеарных точек либрации систем Земля–Луна и Солнце–Земля в случае нештатной задержки коррекции по причине временного выхода из строя маршевого двигателя или потери связи с КА.

Глава 1. Базовые теоретические сведения

1.1 Круговая ограниченная задача трех тел

Так как модель CRЗВР является центральной в настоящем исследовании, сначала будут приведены основные сведения о соответствующей динамике: уравнения движения, точки либрации, орбиты вокруг точек либрации и методы их построения, а также инвариантные многообразия, связанные с орбитами вокруг точек либрации.

1.1.1 Уравнения движения и интеграл Якоби

Согласно модели CRЗВР, две массы m_1 и $m_2 \leq m_1$ движутся по круговым орбитам вокруг их барицентра C , а КА пренебрежимо малой массы движется в их поле тяготения. В модели CRЗВР система двух масс m_1 и m_2 определяет поле сил однозначно. Если m_1 обозначает Солнце, а m_2 обозначает Землю, тогда получается система Солнце–Земля¹; если m_1 и m_2 обозначают Землю и Луну, соответственно, то рассматривается система Земля–Луна.

Перед выводом уравнений движения введем две системы координат: инерциальную $CXYZ$ и вращающуюся $Cxyz$ (рисунок 1.1). Пусть оси CZ и Cz в любой момент времени совпадают и сонаправлены вектору угловой скорости орбитального движения m_2 вокруг m_1 , а ось Cx соединяет массы m_1 и m_2 и направлена в сторону m_2 . Для простоты будем предполагать, что в начальный момент времени $t = 0$ ось CX совпадает с осью Cx , а ось CY совпадает с осью Cy .

Кроме того, введем безразмерную систему единиц, в которой 1) массы нормированы таким образом, что $m_1 = 1 - \mu$ и $m_2 = \mu$, где $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, 2) угловая скорость вращающейся системы координат нормирована на единицу и 3) расстояние между m_1 и m_2 нормировано на единицу. Тогда во вращающейся системе координат массы m_1 и m_2 имеют фиксированные положения в точках

¹Иногда, m_2 также включает в себя массу Луны; в этом случае система называется Солнце–Земля/Луна или Солнце–Барицентр.

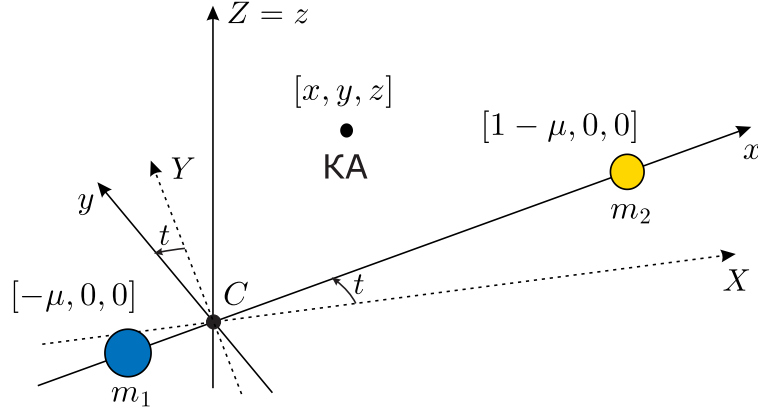


Рисунок 1.1 — Инерциальная и вращающаяся системы координат.
 Координаты КА, m_1 и m_2 указаны во вращающейся системе координат.
 Система единиц безразмерная

$[-\mu, 0, 0]$ и $[1 - \mu, 0, 0]$, соответственно. В системе Солнце–Земля массовый параметр $\mu = 3.0393890 \times 10^{-6}$, а в системе Земля–Луна $\mu = 1.2150668 \times 10^{-2}$.

Перейдем теперь к выводу уравнений движения во вращающейся системе координат. Для этого свяжем положение $\mathbf{R} = [X, Y, Z]$ и скорость $\mathbf{V} = [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}]$ в инерциальной системе координат с положением $\mathbf{r} = [x, y, z]$ и скоростью $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ во вращающейся системе координат:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Запишем уравнения Эйлера–Лагранжа во вращающейся системе координат:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (1.1)$$

с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (1.2)$$

где $V^2 = (\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2$, а расстояния r_1 и r_2 до m_1 и m_2 , соответственно, выражаются по формулам

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2$$

$$r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2$$

Подставляя выражение (1.2) для функции Лагранжа в уравнение (1.1), получаем уравнения движения во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \mathcal{U}_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \mathcal{U}_y \\ \ddot{z} &= \mathcal{U}_z\end{aligned}\tag{1.3}$$

где

$$\mathcal{U}(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

и \mathcal{U}_x , \mathcal{U}_y и \mathcal{U}_z – частные производные функции $\mathcal{U}(x, y, z)$ по координатам. Легко показать, что система уравнений (1.3) обладает первым интегралом

$$C_J(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 2\mathcal{U}(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

который называется интегралом Якоби.

1.1.2 Точки либрации и линейная динамика вокруг них

Система (1.3) имеет пять положений равновесия (рисунок 1.2), все они находятся в плоскости Sxy , обычно обозначаются символами L_1 , L_2 , L_3 , L_4 и L_5 и называются точками либрации. Точки L_1 , L_2 и L_3 расположены на оси Sx и называются коллинеарными точками либрации, а точки L_4 и L_5 располагаются в вершинах равносторонних треугольников с общим основанием $m_1 - m_2$ и называются треугольными точками либрации. Линеаризуя систему уравнений (1.3) вокруг положений равновесия, можно доказать, что коллинеарные точки либрации L_1 , L_2 , L_3 неустойчивы по Ляпунову при любых $\mu \in (0, 1)$, т.е. в любой системе трех тел. Что касается треугольных точек либрации L_4 и L_5 , то в системах Земля–Луна и Солнце–Земля они устойчивы по Ляпунову для почти всех начальных условий (в смысле Лебега), как следует из исследований [60].

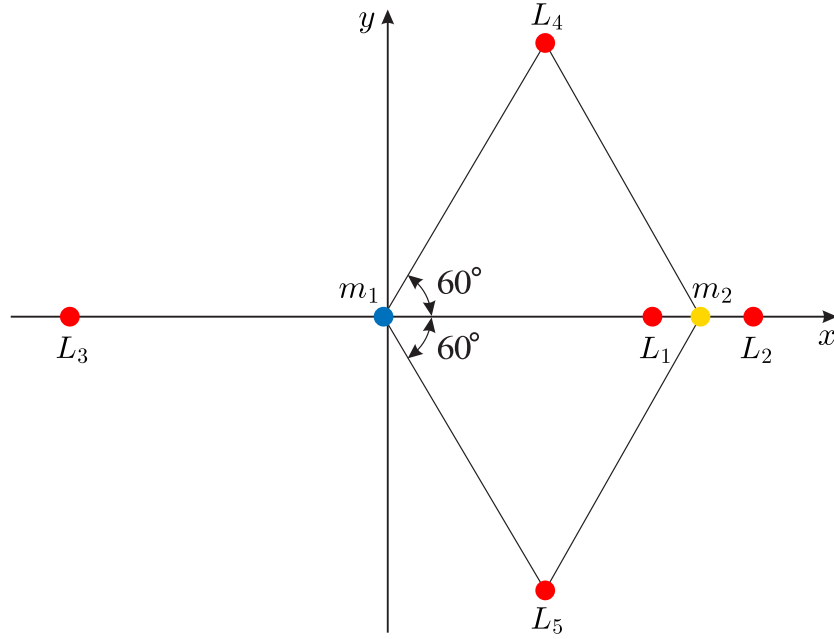


Рисунок 1.2 — Точки либрации L_1 , L_2 , L_3 , L_4 и L_5

В дальнейшем наше внимание будет направлено только на точки L_1 и L_2 систем Земля–Луна и Солнце–Земля. Координаты точек L_1 и L_2 зависят от рассматриваемой системы трех тел. В системе Земля–Луна координаты равны $x_{L1} = 0.8369147$ и $x_{L2} = 1.1556825$, соответственно, а в системе Солнце–Земля они равны $x_{L1} = 0.9899871$ и $x_{L2} = 1.0100740$, соответственно. В случае же произвольной системы трех тел координаты коллинеарных точек либрации рассчитываются численно как корни некоторых полиномов [60], но эти соотношения в диссертации не понадобятся.

Теперь перейдем к динамике вокруг коллинеарных точек либрации в линейном приближении. Для этого перепишем уравнения (1.3) в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

с нелинейной правой частью $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \mathcal{U}_x + 2\dot{y}, \mathcal{U}_y - 2\dot{x}, \mathcal{U}_z]$ и фазовым вектором переменных $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$. Рассмотрим произвольную коллинеарную точку либрации L ; ей соответствует некий фазовый вектор $\mathbf{x}_L = [x_L, 0, 0, 0, 0, 0]$. Возьмем отклонение $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_L$ от точки либрации L , тогда линейная динамика вокруг L описывается уравнениями

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathcal{U}_{\text{rr}} & -2\mathbf{\Omega}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_L} \quad (1.5)$$

Здесь $\mathbf{O}_{m \times n}$ обозначает нулевую матрицу размера $m \times n$, а $\mathbf{I}_{n \times n}$ обозначает единичную матрицу размера $n \times n$, \mathcal{U}_{rr} – матрица вторых частных производных функции \mathcal{U} по координатам x, y, z и $\mathbf{\Omega}_{3 \times 3}$ – матрица векторного произведения на угловую скорость вращающейся системы $\boldsymbol{\omega} = [0, 0, 1]$:

$$\mathbf{\Omega}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В коллинеарной точке либрации L матрица \mathcal{U}_{rr} оказывается диагональной:

$$\mathcal{U}_{\text{rr}} = \begin{bmatrix} 1 + 2\bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\mu} \end{bmatrix}$$

где $\bar{\mu} = \mu|x_L - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu)|x_L + \mu|^{-3}$. Отсюда можно получить характеристические числа матрицы \mathbf{A} линейной системы (1.5):

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{(\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}})/2}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{(2 - \bar{\mu} + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}})/2}$$

$$\lambda_{5,6} = \pm i \sqrt{\bar{\mu}}$$

Из полученных выражений следует, что коллинеарные точки либрации имеют тип седло \times центр \times центр. Характеристическое число $\lambda_1 > 0$ определяет характерное время $\tau_L = \lambda_1^{-1}$ удаления от точки либрации L . В системе Солнце–Земля получаем $\tau_{L1} = 22.9370$ дней и $\tau_{L2} = 23.3833$ дней, а в системе Земля–Луна $\tau_{L1} = 1.4830$ дней и $\tau_{L2} = 2.0144$ дней. Далее примем обозначения $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_p$, $\lambda_{5,6} = \pm i\omega_v$.

Решения линейных уравнений (1.5) выражаются по формулам

$$\delta x(t) = \alpha \cos(\omega_p t + \phi_1) + \gamma e^{\lambda t} + \bar{\gamma} e^{-\lambda t} \quad (1.6)$$

$$\delta y(t) = -\kappa_2 \alpha \sin(\omega_p t + \phi_1) + \kappa_1 (\gamma e^{\lambda t} - \bar{\gamma} e^{-\lambda t}) \quad (1.7)$$

$$\delta z(t) = \beta \cos(\omega_v t + \phi_2) \quad (1.8)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\lambda^2 - 2\bar{\mu} - 1}{2\lambda}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega_p^2 + 2\bar{\mu} + 1}{2\omega_p}$$

и постоянные интегрирования α , β , γ , $\bar{\gamma}$, ϕ_1 и ϕ_2 определяются начальными условиями. Выражения (1.6)–(1.8) позволяют выделить типы движения вблизи коллинеарных точек либрации в линейном приближении, см. Таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Классификация типов движения вблизи коллинеарных точек либрации в линейной приближении

плоские периодические орбиты	$\alpha \neq 0, \beta = \gamma = \bar{\gamma} = 0$
вертикальные периодические орбиты	$\beta \neq 0, \alpha = \gamma = \bar{\gamma} = 0$
квазипериодические орбиты	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma = \bar{\gamma} = 0$
асимптотические траектории	$\gamma \neq 0, \bar{\gamma} = 0$ или $\bar{\gamma} \neq 0, \gamma = 0$
транзитные траектории	$\gamma \cdot \bar{\gamma} < 0$
нетранзитные траектории	$\gamma \cdot \bar{\gamma} > 0$

Плоские периодические орбиты представляют собой эллипсы в плоскости Sxy с центром в точке либрации. Вертикальные периодические орбиты определяют периодическое движение вдоль прямой, параллельной оси Cz . В более общем случае при $\gamma = \bar{\gamma} = 0$ траектории в фазовом пространстве лежат на двумерных торах, заполненных квазипериодическими орбитами. С каждой орбитой на торе связаны асимптотические траектории, которые либо «наматываются» ($\bar{\gamma} \neq 0, \gamma = 0$) на орбиту, либо «разматываются» с нее ($\gamma \neq 0, \bar{\gamma} = 0$). Наконец, транзитные траектории – те, у которых координата δx меняет знак, а нетранзитные траектории – те, у которых не меняется знак δx (траектория «отражается» от точки либрации).

В дальнейшем мы не будем касаться линейной динамики вокруг точек либрации, но сделаем одно важное замечание: все указанные выше типы движения присутствуют и в нелинейной модели CRЗВР, определяемой уравнениями (1.3). Этот факт прямо следует из теоремы Ляпунова о центре [61], а также из более общих результатов Ю. Мозера [62] о сохранении четырехпараметрического семейства траекторий в нелинейной системе. Более того, в модели CRЗВР обнаруживаются многие другие периодические и квазипериодические орбиты,

аналогов которых нет в линейной динамике. Подробнее о (квази)периодических орбитах в CRЗBP речь пойдет в следующем параграфе.

1.1.3 Орбиты вблизи коллинеарных точек либрации

Перейдем теперь к описанию наиболее часто встречающихся в приложениях периодических и квазипериодических орбит вблизи коллинеарных точек либрации, методам построения таких орбит и описанию общей структуры динамики в окрестности коллинеарных точек либрации.

На сегодня известны десятки семейств периодических орбит вокруг точек либрации, их классификацию можно найти в работе [63]. Но, пожалуй, самыми известными семействами периодических орбит вокруг коллинеарных точек либрации являются плоские (горизонтальные) орбиты Ляпунова (рисунки 1.3–1.4), вертикальные орбиты Ляпунова (рисунки 1.5–1.6), северные гало-орбиты (рисунки 1.7–1.8) и южные гало-орбиты (рисунки 1.9–1.10). Указанные семейства орбит являются однопараметрическими: плоские орбиты Ляпунова параметризуются амплитудами A_x или A_y движения по оси Cx или Cy , соответственно, а вертикальные орбиты Ляпунова и гало-орбиты – амплитудой A_z движения по оси Cz . Отметим, что семейство гало-орбит связано с семейством орбит Ляпунова: при увеличении амплитуды A_x плоских орбит Ляпунова сказываются нелинейные эффекты задачи трех тел, в какой-то момент происходит бифуркация, и от семейства плоских орбит Ляпунова отщепляется семейство гало-орбит. Этот вид периодических орбит не существует в линейной динамике, а проявляется лишь начиная с приближения третьего порядка [64]. Подробную картину бифуркационных переходов можно найти в упоминавшейся работе [63].

На практике также встречаются квазипериодические орбиты – ограниченные и незамкнутые траектории. Присутствие таких траекторий является прямым следствием существования четырехмерного центрального подпространства, связанного с точкой либрации. Это четырехмерное подпространство состоит из целых семейств двумерных торов, всюду плотно заполненных квазипериодическими орбитами. Это значит, что если выбрать одно из таких семейств и зафиксировать уровень интеграла Якоби, то получится один двумерный тор, состоящий из квазипериодических орбит. Отсюда следует, что каждая квазипериодическая орбита задается двумя параметрами, например, амплитудами A_x

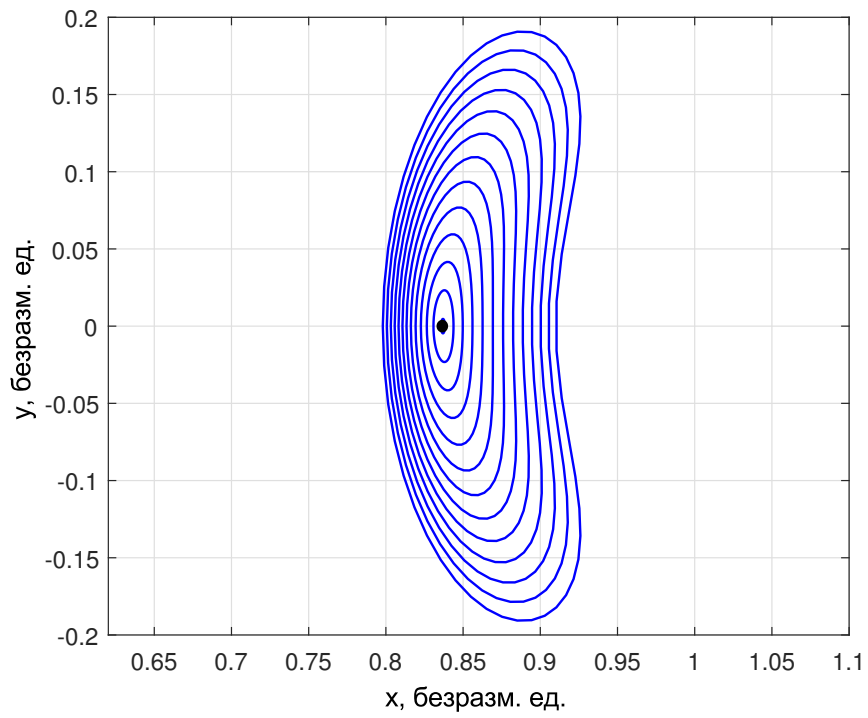


Рисунок 1.3 — Семейство горизонтальных орбит Ляпунова вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; черный круг обозначает точку L_1

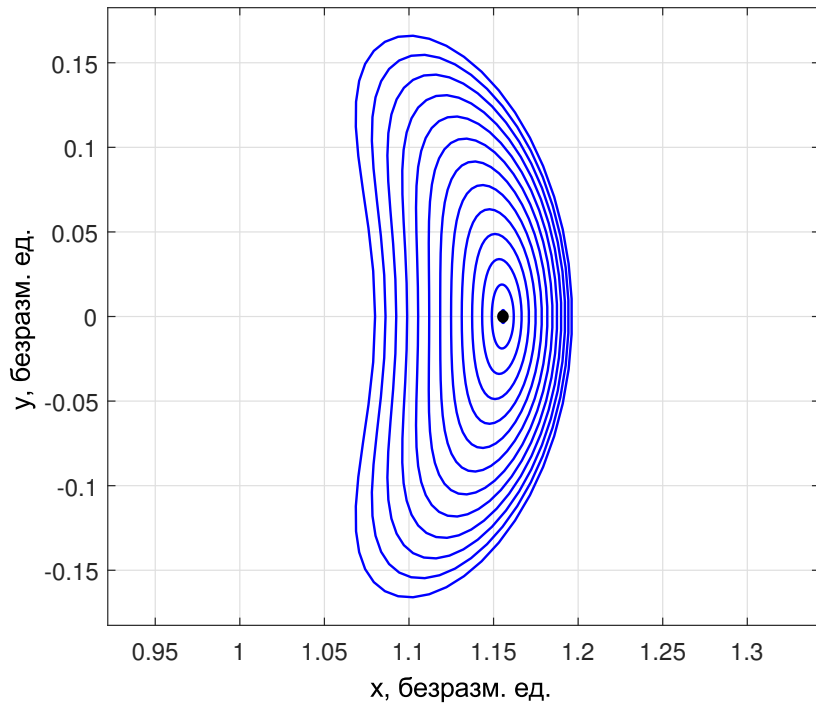


Рисунок 1.4 — Семейство горизонтальных орбит Ляпунова вокруг точки L_2 системы Земля–Луна; черный круг обозначает точку L_2

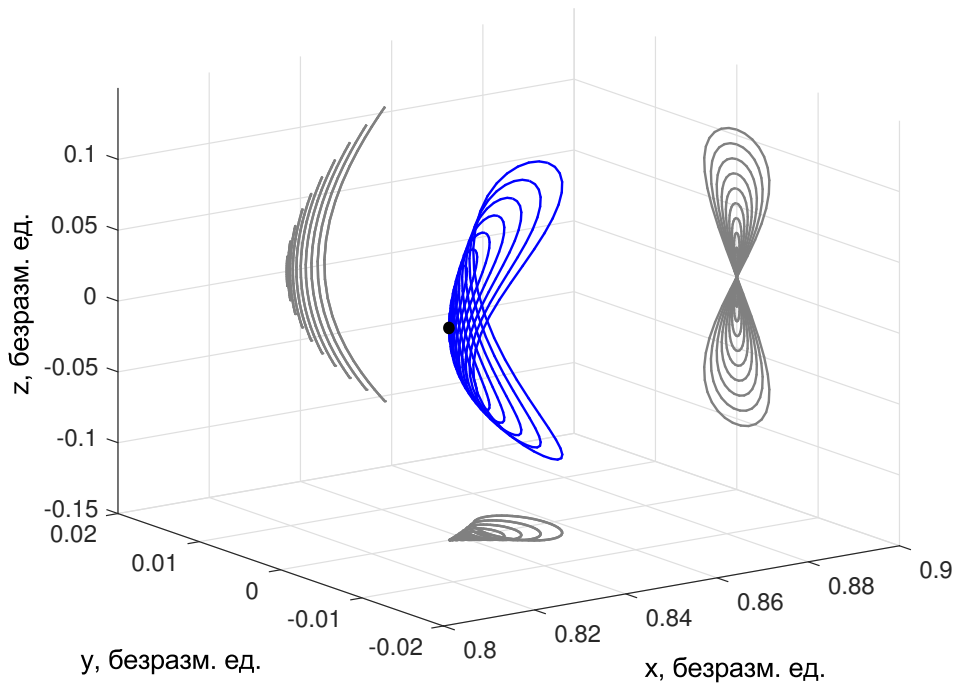


Рисунок 1.5 — Семейство вертикальных орбит Ляпунова вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; черный круг обозначает точку L_1

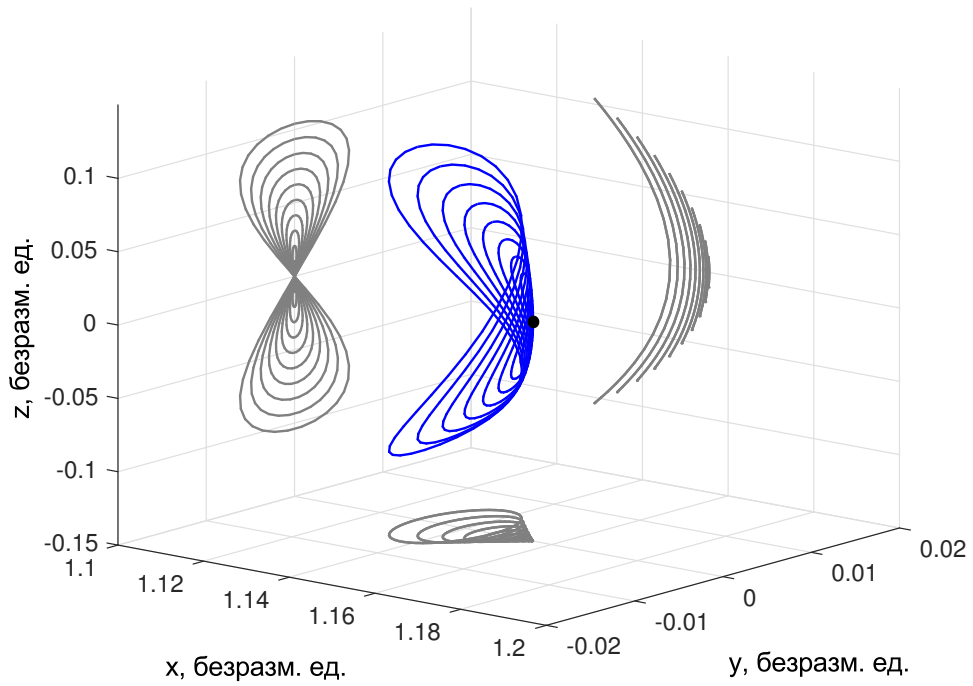


Рисунок 1.6 — Семейство вертикальных орбит Ляпунова вокруг точки L_2 системы Земля–Луна; черный круг обозначает точку L_2

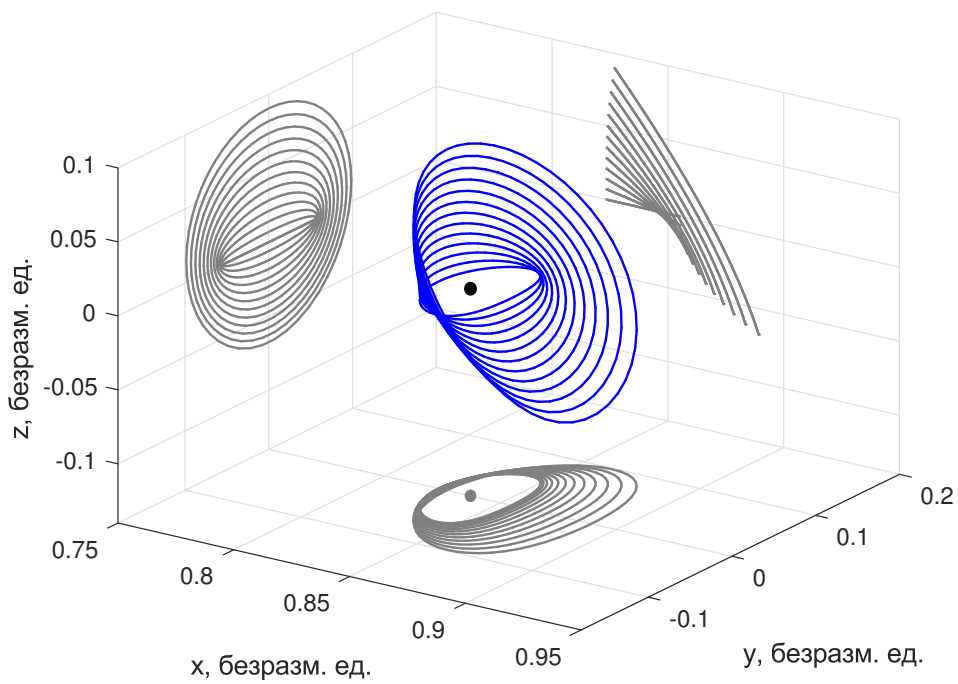


Рисунок 1.7 — Семейство северных гало-орбит вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; черный круг и его проекция обозначает точку L_1

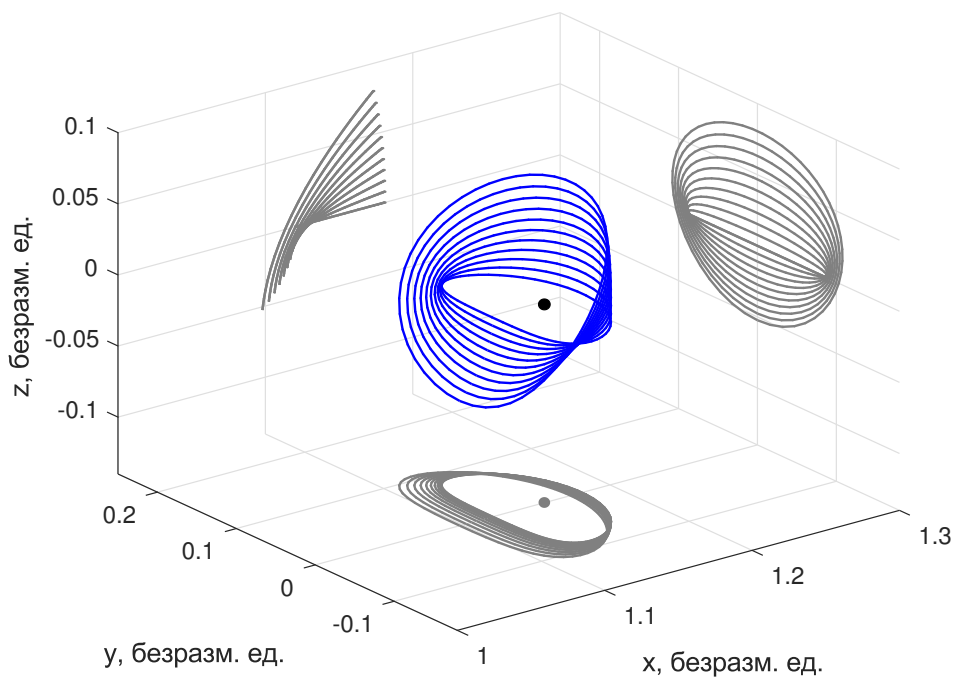


Рисунок 1.8 — Семейство северных гало-орбит вокруг точки L_2 системы Земля–Луна; черный круг и его проекция обозначает точку L_2

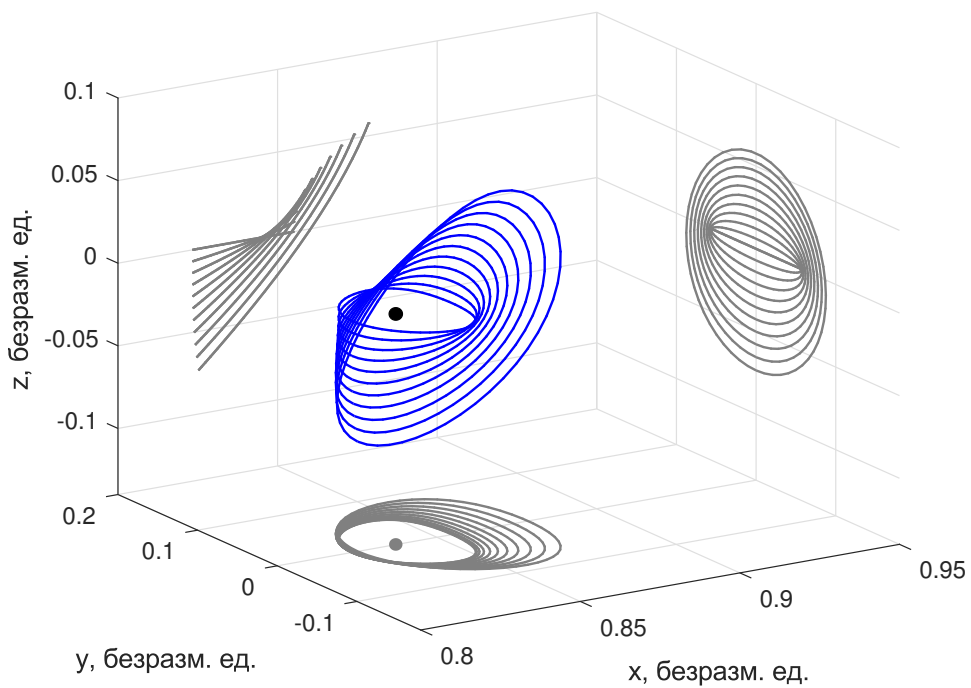


Рисунок 1.9 — Семейство южных гало-орбит вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; черный круг и его проекция обозначает точку L_1

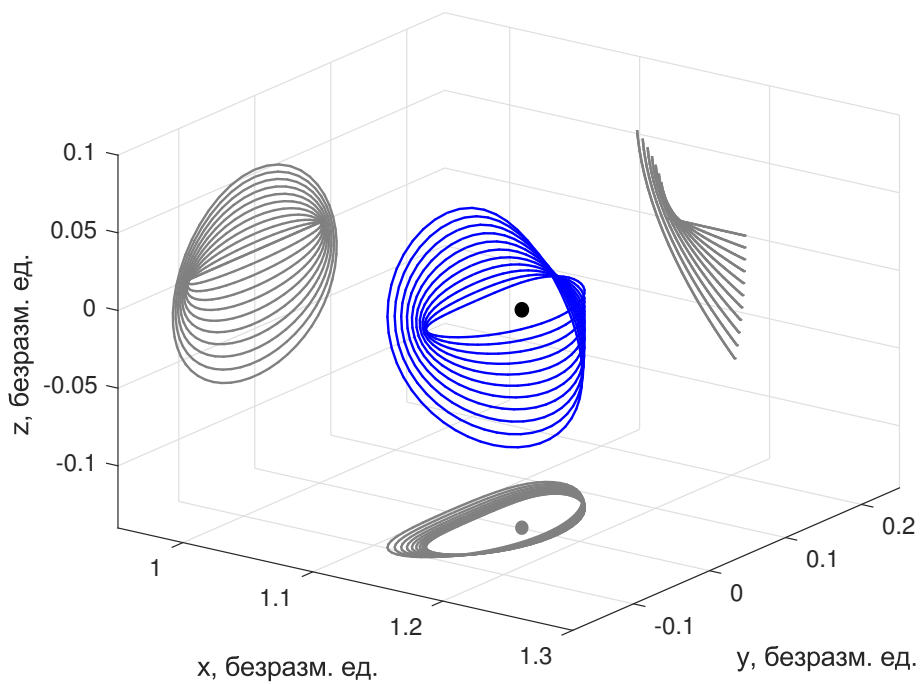


Рисунок 1.10 — Семейство южных гало-орбит вокруг точки L_2 системы Земля–Луна; черный круг и его проекция обозначает точку L_2

и A_z . Сечение одного из таких двумерных торов изображено на рисунке 1.11. Каждая точка на центральной фигуре этого рисунка отвечает некоторой траектории, пересекающей в этой точке плоскость Sxy . Всюду в этой диссертации используется общепринятая терминология, которая относит траекторию к тому или иному семейству судя по картине, которую она оставляет на плоскости Sxy , пересекая ее (рисунок 1.11). Квазипериодические траектории принято делить на два типа: орбиты Лиссажу (рисунок 1.12) и квазигало-орбиты (рисунок 1.13).

Для построения (квази)периодических орбит вокруг коллинеарных точек либрации можно использовать как полуаналитические, так и численные (итеративные) методы. Из полуаналитических методов наиболее широкое распространение получил метод Линдштедта–Пуанкаре (the Lindstedt-Poincaré technique), в котором орбиты представляются в виде рядов по степеням амплитуд орбит. Пользуясь этим методом, Д. Ричардсон [64] вывел формулы для приближения третьего порядка для гало-орбит. В работе [66] этот подход был верифицирован сравнением приближенных решений с решениями, получаемыми техникой дифференциальной коррекции (the differential correction technique) [67]. Приближения более высокого порядка также существуют и опубликованы в книге [68] для гало-орбит и в книге [69] для орбит Лиссажу. Другие известные подходы включают использование методов параллельной пристрелки (the multiple

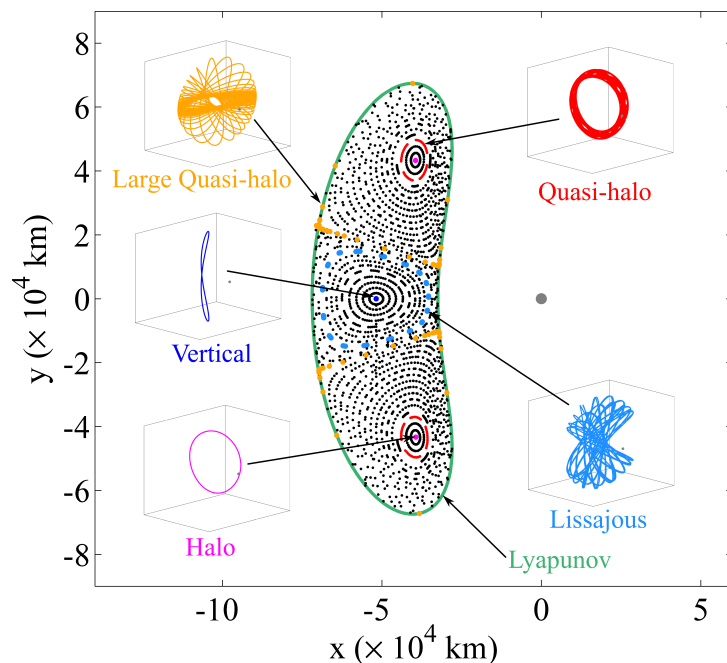


Рисунок 1.11 — Структура периодических и квазипериодических орбит вблизи точки L_1 системы Земля–Луна на плоскости Sxy . Заимствовано из [65]

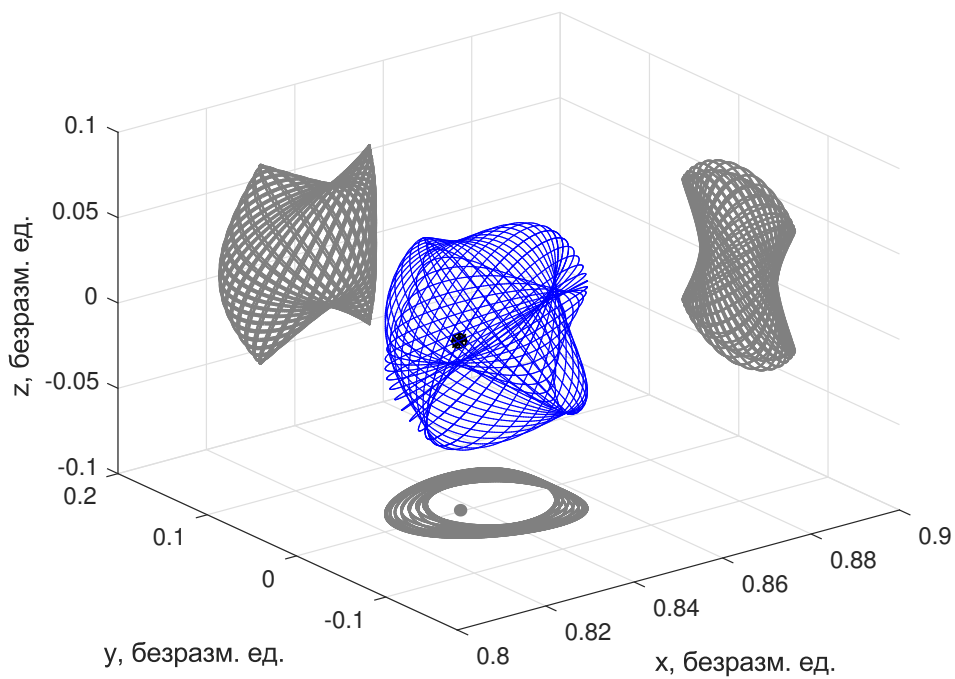


Рисунок 1.12 — Орбита Лиссажу вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; черный круг и его проекция обозначает точку L_1

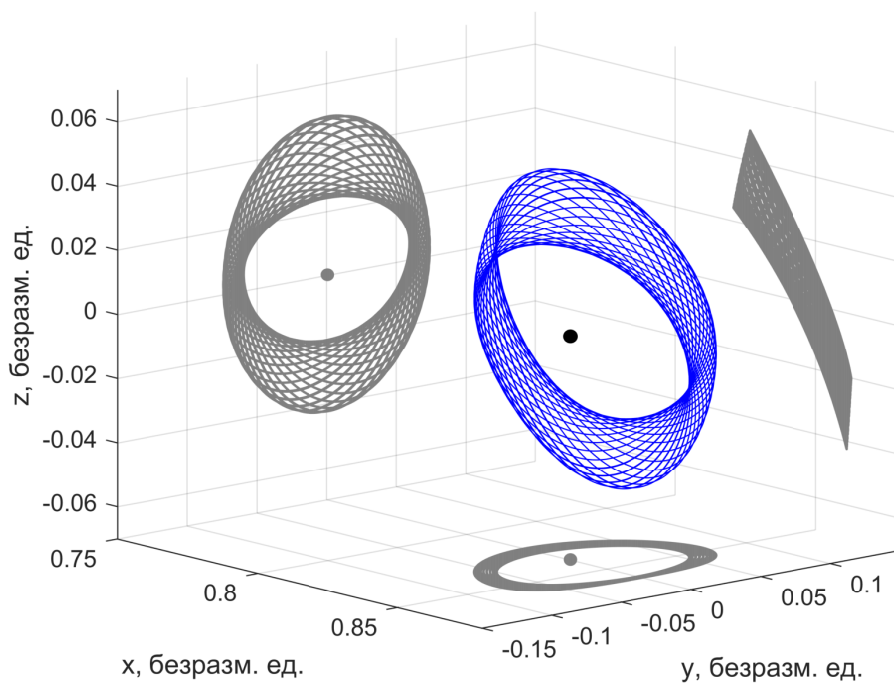


Рисунок 1.13 — Квазигало-орбита вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; черный круг и его проекция обозначает точку L_1

shooting methods) [70], методов продолжения по параметру (the continuation techniques) [71], метода множественных сечений Пуанкаре (the multiple Poincaré sections method) [72], оптимизационного метода роя частиц (the particle swarm optimization technique) [73] и других методов [74, 75]. В отличие от методов построения периодических орбит вокруг точек либрации, методов построения квазипериодических орбит относительно мало. Трудности построения квазипериодических орбит связаны в первую очередь с неустойчивостью динамики, препятствующей построению ограниченной траектории на длительном интервале времени, и отсутствием простых критериев построения таких траекторий (в отличие от периодических, для построения которых достаточно опираться на симметрию уравнений движения и замкнутость траектории). Даже если в некоторых случаях удастся построить такую траекторию из отдельных сегментов [70], основываясь на приближенных моделях, остается нерешенным вопрос, как управлять параметрами полученной орбиты, например, амплитудами A_x , A_y и A_z . Для решения возникших проблем были изобретены методы построения непосредственно двумерных торов: это методы Е. Коулмена [72], Ж. Оликары [76] и Ф. Шильдера [77]; обзор этих методов и их обсуждение можно найти в работе [78]. Коротко говоря, эти методы имеют общую цель построения семейств двумерных торов и отличаются лишь только оптимизируемым функционалом и методом продолжения вдоль семейства. Практика показывает, что использование нескольких сечений Пуанкаре делает метод Коулмена [72] более устойчивым и позволяет быстрее двигаться вдоль семейства торов, однако оказывается значительно ресурсозатратнее метода Оликары [76], более быстрого и простого по реализации. Метод Шильдера [77] менее точен, хоть и позволяет двигаться вдоль семейства намного быстрее предыдущих двух методов.

В данной диссертации периодические орбиты аппроксимируются с помощью техники Линдштедта–Пуанкаре и впоследствии уточняются методом дифференциальной коррекции. Методы Линдштедта–Пуанкаре и дифференциальной коррекции кратко описаны в двух последующих разделах. Построение же квазипериодических орбит проводилось с помощью метода Коулмена [72], его краткое описание также следует ниже.

1.1.4 Метод Линдштедта–Пуанкаре построения периодических орбит вокруг точек либрации

Метод Линдштедта–Пуанкаре представляет собой итерационный метод расчета коэффициентов рядов Фурье, аппроксимирующих периодические или квазипериодические орбиты динамических систем. В данном разделе кратко описывается алгоритм для аппроксимации гало-орбит вокруг точек либрации L_1 и L_2 , а также приведены таблицы полученных коэффициентов рядов Фурье для гало-орбит вокруг точек Земля–Луна L_1 и Земля–Луна L_2 ; аналогичную процедуру можно использовать и для построения плоских и вертикальных орбит Ляпунова, но в данной работе такие орбиты не встречаются.

Обозначим символом $D = |x_L - 1 + \mu|$ расстояние между телом m_2 и точкой либрации $L = L_k$, $k = 1, 2$ и сделаем замену переменных

$$\bar{x} = \frac{x - x_L}{D}, \quad \bar{y} = \frac{y}{D}, \quad \bar{z} = \frac{z}{D}$$

Чтобы упростить вид последующих выражений, вместо обозначений \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} будем пользоваться все теми же x , y и z , соответственно. Координаты точек гало-орбиты будем аппроксимировать рядами Фурье в комплексной форме

$$\begin{aligned} x &= \sum_{(i,j,k) \in I} x_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \\ y &= \sum_{(i,j,k) \in I} \sqrt{-1} y_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \\ z &= \sum_{(i,j,k) \in I} z_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $\gamma = \exp(\sqrt{-1}\omega t)$, величины α и β определяют x - и z -амплитуды гало-орбиты, соответственно, а суммы проводятся на множестве индексов

$$I = \{(i,j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : i, j \geq 0, i + j \geq |k|, (0,0,0) \notin I\}$$

Частота движения вдоль гало-орбиты ω в свою очередь также разлагается в ряд Фурье по степеням амплитуд движения:

$$\omega = \omega_p \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 2}} d_{ij} \alpha^i \beta^j \quad (1.10)$$

где ω_p – связанная с точкой либрации L частота плоского движения (см. раздел 1.1.2 первой главы). К вышеуказанным рядам следует добавить также условие периодичности пространственной орбиты [68]

$$\sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \geq 2}} f_{ij} \alpha^i \beta^j = \omega_p^2 - \omega_v^2 \quad (1.11)$$

связывающее амплитуды α и β ; величина ω_v – связанная с точкой либрации L частота вертикального движения. Параметры D , ω_p и ω_v для различных точек либрации приведены в Таблице 1.2.

Таблица 1.2
Характеристики точек либрации

Точка либрации	D	ω_p	ω_v
Земля–Луна L_1	0.1509346	2.3343865	2.2688317
Земля–Луна L_2	0.1678331	1.8626454	1.7861757
Солнце–Земля L_1	0.0100098	2.0864519	2.0152089
Солнце–Земля L_2	0.0100771	2.0570158	1.9850765

Коэффициенты x_{ijk} , y_{ijk} , z_{ijk} , d_{ij} и f_{ij} ищутся путем подстановки выражений (1.9)–(1.11) в уравнения движения (1.3) и решением получающихся при этом систем линейных уравнений. Чтобы это сделать, сначала необходимо учесть симметрии задачи, выражающиеся в следующих соотношениях на коэффициенты:

- для всех k таких что $i + j \geq |k|$, $j \equiv 0 \pmod{2}$ и $i - k \equiv 0 \pmod{2}$

$$x_{00k} = 0, \quad x_{ijk} = x_{ij,-k}, \quad x_{ij1} = -1/2\delta_{1i}\delta_{0j}$$

$$y_{00k} = 0, \quad y_{ijk} = -y_{ij,-k}, \quad y_{101} = -(\omega_p^2 + 2\sqrt{\omega_v} + 1)/(4\omega_p)$$

– для всех k таких что $i + j \geq |k|$, $j \equiv 1 \pmod{2}$, $i - k \equiv 1 \pmod{2}$

$$z_{00k} = 0, \quad z_{ijk} = z_{ij,-k}, \quad z_{ij1} = 1/2\delta_{0i}\delta_{1j}$$

– для нечетных i или j

$$d_{ij} = 0, \quad f_{ij} = 0$$

Процедура расчета коэффициентов рядов Фурье итерационная. Начинается она с аппроксимации первого порядка:

$$x = -\alpha \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}, \quad y = -\kappa_2 \alpha \sqrt{-1} \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad z = \beta \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad (1.12)$$

где $\kappa_2 = (\omega_p^2 + 2\sqrt{\omega_v} + 1) / (2\omega_p)$. К этим выражениям добавляются слагаемые второго порядка, т.е. слагаемые со степенями $\alpha^i \beta^j$, для которых $i + j = 2$ и которые содержат неизвестные коэффициенты x_{ijk} , y_{ijk} , z_{ijk} , d_{ij} и f_{ij} . Полученные выражения подставляются в уравнения (1.3), при этом оставляются только слагаемые порядка не выше второго. Приравнивая множители при одинаковых степенях, можно получить систему линейных уравнений на неизвестные коэффициенты. Таким образом будет получено решение второго порядка. Далее к полученным рядам добавляются слагаемые третьего порядка, полученные выражения вновь подставляются в уравнения (1.3), при этом оставляются только слагаемые порядка не выше третьего. Приравнивая множители при одинаковых степенях, можно также получить систему линейных уравнений на неизвестные коэффициенты. Эта процедура может повторяться вплоть до произвольного порядка n , при этом все ряды Фурье будут оборваны на степенях $i + j \leq n$.

Для целей данной работы были получены коэффициенты вплоть до 9-го порядка включительно, как для точек либрации системы Земля–Луна, так и для системы Солнце–Земля. Так как таблицы коэффициентов для системы Солнце–Земля можно найти в монографии [68], в данной работе в приложении А приводятся только коэффициенты для системы Земля–Луна.

Отметим, наконец, что в случае гало-орбит вокруг точки L_1 ряды (1.9) аппроксимируют северные гало-орбиты при $\beta > 0$ и южные гало-орбиты при $\beta < 0$. Что касается гало-орбит вокруг L_2 , условие $\beta > 0$ соответствует южным гало-орбитам, а условие $\beta < 0$ соответствует северным гало-орбитам.

1.1.5 Техника дифференциальной коррекции гало-орбит

Для того чтобы гало-орбита точно соответствовала модели CR3BP, ее аппроксимация рядами Фурье может быть скорректирована техникой дифференциальной коррекции. А именно, приняв во внимание симметрию гало-орбит относительно плоскости $y = 0$, достаточно лишь скорректировать три компоненты x_0, z_0, \dot{y}_0 фазового вектора $[x_0, 0, z_0, 0, \dot{y}_0, 0]$ на плоскости $y = 0$ так, чтобы при интегрировании вперед вплоть до следующего пересечения траекторией плоскости $y = 0$ компоненты \dot{x}_1 и \dot{z}_1 фазового вектора $[x_1, 0, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1]$ были равны нулю. Так как число переменных превышает число уравнений на единицу (отсюда следует однопараметричность семейства гало-орбит), достаточно зафиксировать какую-нибудь компоненту (например, x_0), и корректировать остальные две (z_0 и \dot{y}_0). Коррекцию можно производить с помощью метода Ньютона, и тогда дифференциальная коррекция реализуется, по сути, методом простой пристрелки. Крупные гало-орбиты (например, при $A_z \geq 40$ тыс. км в системе Земля–Луна) удобно корректировать, применяя более устойчивый метод – метод параллельной пристрелки (см. раздел 1.2.2).

1.1.6 Метод Коулмена построения квазигало-орбит

Как уже было сказано в разделе 1.1.3, помимо периодических орбит вокруг коллинеарных точек либрации существуют также квазипериодические орбиты, образующие два семейства орбит – квазигало-орбиты и орбиты Лиссажу. Орбиты Лиссажу можно аппроксимировать рядами Фурье по методу Линдштедта–Пуанкаре аналогично тому, как это делается для гало-орбит (см. раздел 1.1.4), но только не требуя условие периодичности орбиты (для справки см. [69]). Последующее уточнение к модели CR3BP легко производится методом параллельной пристрелки, когда всем фазовым векторам позволяют свободно варьироваться в фазовом пространстве.

Что же касается квазигало-орбит, то аппроксимация их рядами Фурье хоть и существует [79], но является чрезвычайно вычислительно затратной операцией, а реализация расчета соответствующих коэффициентов – технически громоздкой. Множество усилий было затрачено разными исследователями на

разработку устойчивого и интуитивно понятного алгоритма построения квазигало-орбит. Для целей данной диссертации в качестве такого алгоритма был выбран метод, описываемый в работе [72] и кратко называемый (в рамках данной диссертации) методом Коулмена.

Квазигало-орбиты формируют двумерные торы, во внутренней полости которых находится гало-орбита с соответствующим значением интеграла Якоби. При этом у каждой гало-орбиты существует семейство квазигало-орбит, окружающих данную гало-орбиту. Семейство это является однопараметрическим, и в качестве параметра можно выбрать размер области, окружающей гало-орбиту стенками квазигало-орбиты. Если ввести в рассмотрение сечение Пуанкаре, проходящее через какую-нибудь точку гало-орбиты и ортогональное скорости, то пересечением квазигало-орбиты с сечением Пуанкаре окажется замкнутая кривая наподобие эллипса (см. рисунок 1.14). Если теперь ввести несколько таких сечений Пуанкаре (см. рисунок 1.15), проходящих через различные точки гало-орбиты, то в сечениях получим несколько замкнутых кривых, переходящих друг в друга под действием потока динамической системы. На этом наблюдении и основывается метод Коулмена: предлагается аппроксимировать замкнутые кривые в нескольких сечениях рядами Фурье и подбирать коэффициенты разложений таким образом, чтобы под действием потока динамической системы замкнутые кривые переходили друг в друга. Множественность сечений Пуанкаре снижает чувствительность образа кривой на одном сечении Пуанкаре при вариации коэффициентов кривой на предыдущем сечении Пуанкаре. В этом смысле метод Коулмена близок к методу параллельной пристрелки и опирается на априори известные сведения о топологическом строении квазигало-орбит.

Метод Коулмена можно применять для квазигало-орбит любых размеров и с произвольным размером внутренней полости торов. Заранее насчитанные фазовые векторы квазигало-орбит можно использовать в основе любых интерполяционных процедур, которые позволят вычислить с заранее установленной точностью фазовые векторы на квазигало-орбитах, не прибегая к интегрированию уравнений движения. Это ускоряет расчеты оптимизационных процедур, где требуется варьировать положения на квазигало-орбитах (глава 4).

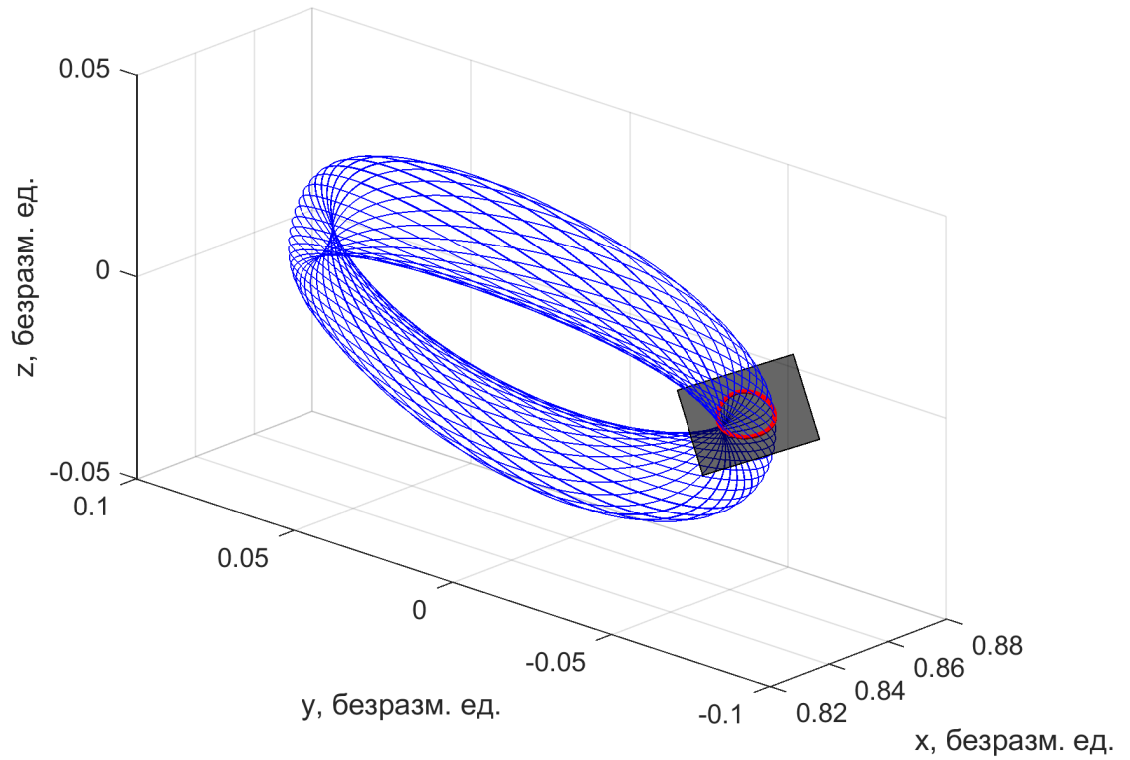


Рисунок 1.14 — Квазигало-орбита вокруг точки L_1 системы Земля–Луна и кривая (красная) в сечении Пуанкаре

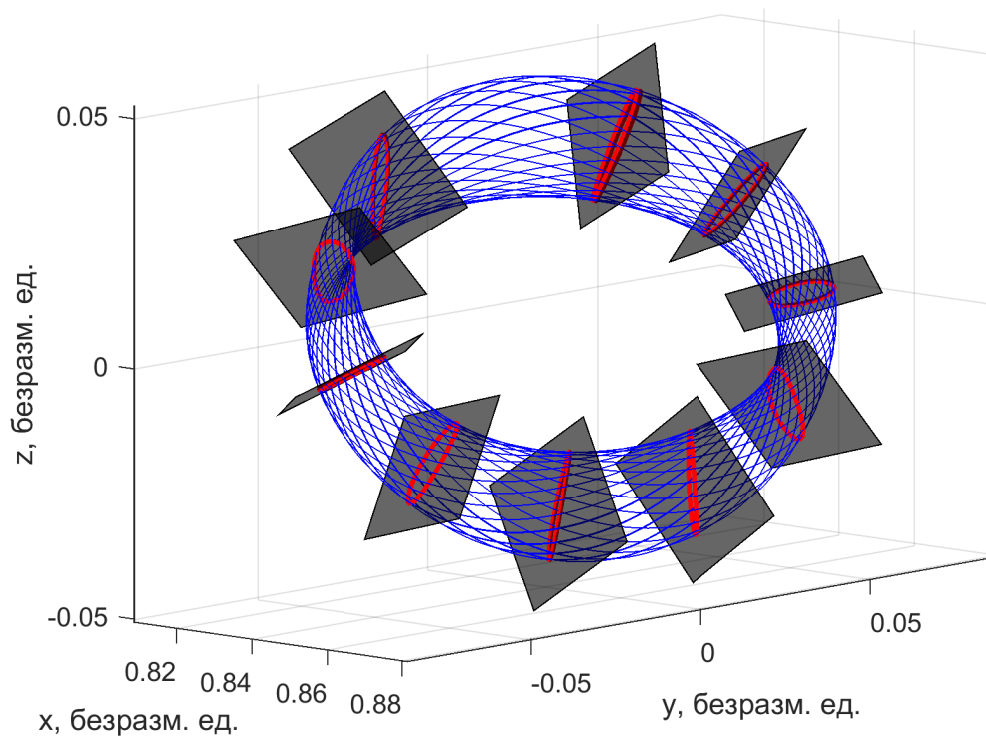


Рисунок 1.15 — Квазигало-орбита вокруг точки L_1 системы Земля–Луна и несколько сечений Пуанкаре, используемых для ее построения

1.1.7 Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия, связанные с периодическими орбитами вокруг точек либрации

Существуют два множества асимптотических траекторий, связанных с периодическими орбитами вокруг коллинеарных точек либрации: устойчивые и неустойчивые многообразия. Траектории устойчивого многообразия стремятся к орбите при $t \rightarrow \infty$, в то время как траектории неустойчивого многообразия стремятся к орбите при $t \rightarrow -\infty$. Каждая асимптотическая траектория связана с некоторой точкой на периодической орбите.

Пусть требуется построить асимптотическую траекторию, связанную с точкой $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]$ периодической орбиты $\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)$. Вблизи $\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)$ линейная динамика описывается уравнениями

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ U_{\text{rr}} & -2\boldsymbol{\Omega}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)}$$

где $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ref}}$. Решение этих уравнений можно выразить в форме

$$\delta\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\delta\mathbf{x}(t_0)$$

где матрица перехода $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ вычисляется как решение уравнений в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}_{6 \times 6}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.14)$$

Проинтегрировав уравнения (1.13)–(1.14) на интервале $(t_0, t_0 + P)$, где P – период орбиты $\mathbf{x}_{\text{ref}}(t)$, получим матрицу монодромии $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Phi}(t_0 + P, t_0)$. Для типичных, неустойчивых, орбит вокруг коллинеарных точек либрации эта матрица имеет шесть собственных значений со свойствами

$$\mu_1 > 1, \quad \mu_2 = \mu_1^{-1} < 1, \quad \mu_3 = \mu_4 = 1, \quad \mu_5 = \mu_6^*, \quad |\mu_5| = |\mu_6| = 1$$

где μ_5 и μ_6 – комплексно сопряженные числа. Пусть \mathbf{u}_u и \mathbf{u}_s – собственные векторы, отвечающие собственным значениям μ_1 и μ_2 , соответственно. Тогда \mathbf{u}_u и \mathbf{u}_s можно рассматривать как локальные приближения к направлениям

вдоль неустойчивых и устойчивых многообразий в точке \mathbf{x}_0 , соответственно. Возьмем, наконец, векторы \mathbf{x}_u и \mathbf{x}_s , такие что

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_u$$

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_s$$

где \mathbf{u}_s и \mathbf{u}_u нормированы на единицу и ε малое число (10^{-6} , в этой работе). Интегрирование вперед/назад во времени от $\mathbf{x}_u/\mathbf{x}_s$ дает траекторию неустойчивого/устойчивого многообразия.

1.1.8 Миссии к точкам либрации и поддержание орбит

Благодаря своим уникальным свойствам точки либрации служат платформой для размещения на них космических обсерваторий для наблюдения за Солнцем и другими астрофизическими объектами в Солнечной системе и за ее пределами. В настоящее время реализовано уже более десятка миссий к коллинеарным точкам либрации, информация о них приведена в Таблице 1.3 (здесь и далее для обозначения системы Солнце–Земля используется сокращение SE, а для системы Земля–Луна – EM). Из отечественных миссий в ближайшие годы планируется запуск КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон» к точке либрации L_2 системы Солнце–Земля. К настоящему времени проведен подробный баллистический анализ этих миссий (см., например, [80, 81, 82]).

Следует отметить, что благодаря своим геометрическим свойствам гало-орбиты быстро привлекли интерес разработчиков миссий. Связано это, например, с тем, что при выведении КА в окрестность точки SE L_1 необходимо обеспечить угол между направлениями на Солнце и КА порядка нескольких градусов, чтобы избежать зашумления сигналов с КА при передаче на Землю. Из перечисленных в разделе 1.1.3 периодических орбит только гало-орбиты не пересекают линию Земля–Солнце, а требуемый угол достигается увеличением размеров гало-орбиты², как видно по форме проекций гало-орбит на плоскость Syz (рисунки 1.7–1.10). В точке SE L_2 проблема зашумления сигнала остро не стоит, однако гало-орбиты могут использоваться для избегания попадания КА

²Например, в миссии SOHO угол между направлением на КА и на Солнце должен был составлять не менее 4.5° , что отвечало амплитуде не менее $A_z = 120000$ км.

в тень Земли. Также отметим, что использование гало-орбит вокруг ЕМ L_2 позволяет установить постоянную связь с перспективными в ближайшем будущем станциями на обратной стороне Луны – проект, разрабатываемый Р. Фаркуа в 1970-х годах [83].

Таблица 1.3 показывает, однако, что наибольшей популярностью пользуются именно квазипериодические орбиты: квазигало-орбиты и орбиты Лиссажу. Использование на практике квазигало-орбит вместо гало-орбит оправдано в случаях, когда от траекторий требуется лишь их ограниченность и удаленность от линии m_1 – m_2 . Популярность орбит Лиссажу обусловлена все теми же требованиями к углам между направлениями на КА и m_2 со стороны m_1 , но в данном случае это ограничение сверху, и диктуется оно обычно научными требованиями или требованиями к системе ориентации. Действительно, для гало-орбит максимальные значения этого угла составляют не менее 24° , в то время как ограничение сверху может быть установлено 10° – 15° (миссии ACE, DSCOVR, Plank). За выбор орбиты Лиссажу в качестве номинальной орбиты приходится платить соответствующую цену: помимо регулярной коррекции для поддержания неустойчивой орбиты вокруг точки либрации требуется также регулярная коррекция движения для избегания попадания в запрещенную зону вблизи линии m_1 – m_2 . Такая коррекция требует Δv порядка ≈ 30 м/с в год, что вполне доступно для МКА, как следует из оценок по формуле (1.15).

К настоящему моменту образовалось обширное количество литературы по методам поддержания орбит вокруг коллинеарных точек либрации. Первые работы в этом направлении связаны с именем М. Л. Лидова и его коллег [84, 85, 86], А. Ю. Когана [87], П. Е. Эльясберга и Т. А. Тимоховой [88], Р. Фаркуа [89, 90, 83, 91, 92], а также Д. Коломбо [93], Э. Эйлера [94] и Дж. Брейквелла [95]. Все методы поддержания условно можно разделить на две категории. В первую категорию попадают методы, основанные на устранении неустойчивой компоненты движения, главным образом, с помощью инструментов теории Флоке. Сюда, например, относятся работа Лидова по стабилизации движения КА около ЕМ L_2 [84], работа Лидова и Ляховой [86] по созданию итеративной процедуры устранения неустойчивой компоненты с помощью техники динамического программирования. Также к методам первой категории всецело относится метод Флоке-управления (Floquet mode approach), развитый в работах У. Визеля [96], А. Ю. Когана [87], К. Симо [97, 98], Т. Китера [99] и

основанный на применении теории Флоке для устранения неустойчивой моды движения около опорной орбиты. Управление при поддержании может быть также основано на вычислении характеристической экспоненты [100]. Наконец, стоит упомянуть метод, предложенный в работе Эльясберга и Тимоховой [88] и основанный на идее оскулирующих элементов.

Методы второй категории – это методы общей теории управления в приложении к задаче поддержания неустойчивой орбиты, они различаются лишь подходом к решению задачи оптимального управления и не опираются на специальный характер динамики задачи трех тел. Сюда относятся методы построения линейно-квадратичного регулятора (LQR) [95, 101], методы нелинейного программирования (NLP) [101] и линейного программирования [102], методы H_2 -управления [103] и H_∞ -управления [104, 105], методы целевых точек (target point approach) [106, 107, 99] и скользящего управления [108], а также большое количество других методов и подходов [109].

Из Таблицы 1.3 видно, что годовые затраты на поддержание орбит вокруг коллинеарных точек либрации систем Земля–Луна и Солнце–Земля составляют 1 – 10 м/с. При постоянной силе тяги относительные затраты топлива имеют вид

$$\frac{\Delta m}{m_0} = 1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{I_{sp}g}\right) \approx \frac{\Delta v}{I_{sp}g} \quad (1.15)$$

где m_0 – масса КА до маневрирования, Δm – расход топлива, I_{sp} – удельный импульс тяги, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Например, для двигателя СПД-100В удельный импульс тяги $I_{sp} = 1600 \text{ с}$, отсюда получается, что годовые относительные затраты топлива составят всего 0.006 – 0.06%.

Таблица 1.3

Миссии к коллинеарным точкам либрации и годовые затраты Δv на поддержание орбиты

Миссия	Агентство	Дата запуска	Точка либрации	Тип орбиты	$A_y, A_z,$ 1000 км	$\Delta v,$ м/с/год	Ссылки
ISEE-3	NASA/ESA	12.08.1978	SE L_1	Гало	666.67, 120.0	8.5	[110, 111]
Wind	NASA	01.11.1994	SE L_1	Квазигало	640.0, 170.0	1.0	[112]
SOHO	ESA/NASA	02.12.1995	SE L_1	Гало	666.67, 120.0	2.4	[113]
ACE	NASA	25.08.1997	SE L_1	Лиссажу	264.0, 157.41	1.0	[112]
WMAP	NASA	30.06.2001	SE L_2	Лиссажу	264.0, 264.0	1.2	[114]
Genesis	NASA	08.08.2001	SE L_1	Квазигало	800.0, 450.0	9.0	[115, 116]
ARTEMIS	NASA	17.02.2007	EM L_2	Квазигало	63.52, 35.20 (P1)	7.39 (P1)	[65]
			EM L_1	Квазигало	58.82, 2.39 (P1)	5.28 (P1)	
			EM L_1	Квазигало	67.71, 4.68 (P2)	5.09 (P2)	
Herschel	ESA/NASA	14.05.2009	SE L_2	Гало	700.0, 400.0	1.0	[117]
Planck	ESA	14.05.2009	SE L_2	Лиссажу	300.0, 300.0	1.0	[118]
Chang'e 2	CNSA	01.10.2010	SE L_2	Лиссажу	918.0, 400.0	(N/A)	[119]
Gaia	ESA	19.12.2013	SE L_2	Лиссажу	350.0, 100.0	2.0	[120]
Chang'e 5-T1	CNSA	23.10.2014	EM L_2	Лиссажу	40.0, 35.0	(N/A)	[121]
DSCOVR	NASA/NOAA	11.02.2015	SE L_1	Лиссажу	264.1, 157.4	(N/A)	[122]
LISA Pathfinder	ESA	03.12.2015	SE L_1	Квазигало	800.0, 600.0	1.8	[123, 124]

1.2 Численные методы общего назначения

Здесь будут кратко описаны численные методы общего назначения, которые используются во всех главах данной работы. Сюда входят методы решения систем нелинейных уравнений, а также краевых и оптимизационных задач.

1.2.1 Метод Левенберга–Марквардта и метод доверительных областей для решения систем нелинейных уравнений

Метод Левенберга–Марквардта (Levenberg–Marquardt) по праву считается одним из самых известных и эффективных методов решения систем нелинейных уравнений общего вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

где вектор неизвестных $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ и функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]$ (называемая иногда вектором невязок) записаны в компактном векторном виде. Будем считать, что $n \leq m$, т.е. что число неизвестных не превышает числа уравнений. Пусть \mathbf{x}_k , $k = 0, 1, \dots$ – некоторое приближение к решению задачи. Тогда шаг метода $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ можно вычислять из выражения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}_k} \Delta\mathbf{x} = 0$$

Так как матрица Якоби $\mathbf{J}_k = [\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}]_{\mathbf{x}_k}$ в общем случае является прямоугольной, $\Delta\mathbf{x}$ находят через безусловную оптимизацию выражения

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}_k \Delta\mathbf{x})^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}_k \Delta\mathbf{x}) \rightarrow \min$$

относительно вектора $\Delta\mathbf{x}$. Решение такой вспомогательной задачи хорошо известно и выражается формулой

$$\Delta\mathbf{x} = -(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (1.16)$$

Описанная процедура расчета шага для получения приближенных решений исходной задачи составляет содержание метода Гаусса. Легко видеть, что в первом

приближении в точке $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}$ мы получим

$$F(\mathbf{x}_{k+1}) = F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}_k^T \mathbf{J}_k (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{f}_k$$

и уменьшение нормы вектора невязок $F(\mathbf{x}_{k+1}) < F(\mathbf{x}_k)$ зависит от знаковой определенности матрицы $\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k$. Так, если $\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k$ не является положительно определенной, то может случиться $F(\mathbf{x}_{k+1}) > F(\mathbf{x}_k)$. Другая трудность расчета шага возникает в случае вырожденности матрицы $\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k$. Метод Левенберга–Марквардта устраняет эти проблемы введением вспомогательного параметра $\lambda > 0$ в формулу расчета шага:

$$\Delta\mathbf{x} = - (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (1.17)$$

где $\mathbf{I}_{n \times n}$ – единичная матрица подходящего размера. В случае $\lambda = 0$ мы возвращаемся к методу Гаусса, а если $\lambda \rightarrow \infty$, то направление шага $\Delta\mathbf{x}$ стремится к антиградиенту функции $F(\mathbf{x})$, а его абсолютная величина стремится к нулю:

$$\Delta\mathbf{x} \sim - \frac{\mathbf{J}_k^T \mathbf{f}_k}{\lambda}$$

Как следствие, при достаточно больших значениях λ будет достигнуто необходимое неравенство $F(\mathbf{x}_{k+1}) < F(\mathbf{x}_k)$, хоть и при малой величине шага. Поэтому можно предложить следующий алгоритм расчета шага: если при выбранном λ оказывается $F(\mathbf{x}_{k+1}) < F(\mathbf{x}_k)$, то шаг принимается и λ уменьшается в 10 раз, а если $F(\mathbf{x}_{k+1}) > F(\mathbf{x}_k)$, то λ увеличивается в 10 раз, \mathbf{x}_{k+1} пересчитывается, и $F(\mathbf{x}_{k+1})$ вновь сравнивается с $F(\mathbf{x}_k)$. Процедура останавливается, когда относительное изменение шага и относительное изменение F становятся менее заранее установленных величин или когда превышено число итераций.

В методе доверительных областей [125] на каждой итерации шаг рассчитывается по той же формуле (1.17), но параметр λ находится из условия на максимальную величину шага $\|\Delta\mathbf{x}\| = \Delta$; параметр Δ называется доверительным радиусом, а область $\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{s}\| \leq \Delta\}$ называется доверительной областью. В случаях, когда размерность задачи небольшая, λ подбирается решением т.н. векового уравнения

$$\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\|\Delta\mathbf{x}(\lambda)\|} = 0$$

с помощью метода Ньютона. В некоторых случаях оказывается, что такой подход позволяет достичь сходимости тогда, когда отсутствует сходимость метода Левенберга–Марквардта, но ценой большего числа итераций.

1.2.2 Метод параллельной пристрелки

Метод параллельной пристрелки зарекомендовал себя в астродинамике как один из самых эффективных методов решения краевых задач. Причина чрезвычайно широкой области применения данного метода в астродинамике кроется в устранении высокой чувствительности конечных условий от начальных и очень быстрой скорости сходимости. Один из основных способов применения метода параллельной пристрелки – адаптация траектории, полученной в «простой» модели движения, к «сложной» модели движения. Например, если траектория аппарата была получена в рамках модели CR3BP, то с помощью данного метода ее можно перевести в эфемеридную модель Солнечной системы и уточнить таким образом ее характеристики.

Суть метода состоит в том, что некоторое приближение к будущей траектории разбивается узлами на несколько участков. Из каждого узла на каждом участке траектория распространяется вперед на заданное время. Получается набор дуг, «сшить» которые гладко (или только непрерывно) и составляет содержание метода. Есть много вариантов строгой формулировки метода параллельной пристрелки. Здесь сначала будет дан наиболее простой вариант, а затем будут показаны его возможные расширения. Итак, пусть поставлена двухточечная краевая задача вида

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)) = 0 \end{cases}$$

которую требуется решить на заданном интервале времени $t \in [t_0, t_f]$. В методе параллельной пристрелки интервал $[t_0, t_f]$ разбивается на N частей:

$$t_0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N+1} = t_f$$

Обозначим символом \mathbf{x}_j^t решение в момент τ_{j+1} следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(\tau_j) = \mathbf{x}_j \end{cases}$$

на интервале $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 1, \dots, N$, где \mathbf{x}_j – пока еще не известный фазовый вектор аппарата в момент τ_j . Сформируем вектор неизвестных переменных

$$\mathbf{s} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N] \quad (1.18)$$

и вектор невязок

$$\mathbf{F} = [\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2^t - \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N^t - \mathbf{x}_{N+1}, \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N)] \quad (1.19)$$

В итоге мы получаем систему $\mathbf{F}(\mathbf{s}) = 0$ нелинейных алгебраических уравнений, которая содержит $6N$ неизвестных и $6N + l$ уравнений (здесь l – количество краевых условий, т.е. размерность вектора \mathbf{g}).

Существует много модификаций метода параллельной пристрелки. Наиболее часто используемая из них предполагает вариацию узловых моментов времени τ_j , $j = 1, \dots, N + 1$. В этом случае вектор неизвестных переменных расширяется на $N + 1$ компоненту. Что касается вектора невязок, то снова возможны различные варианты: можно добавить разности $\tau_1 - t_0$ и $\tau_{N+1} - t_f$, если фиксированы моменты времени начала и конца перелета; можно добавить одну разность $\tau_{N+1} - \tau_1 - (t_f - t_0)$, если фиксировано лишь время перелета; можно и не расширять вектор невязок, если допускается изменение времени перелета.

Если краевые условия представляют из себя ограничения на начальное и конечное положение КА, т.е. фиксированы радиус-векторы \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_f , то можно поступать следующим образом. Вместо вариации полного фазового состояния \mathbf{x}_1 в момент времени τ_1 , варьируется только скорость \mathbf{v}_1 аппарата, а радиус-вектор считается параметром. В таком случае невязку на радиус-вектор можно из вектора \mathbf{F} исключить. Более того, если нет ограничений на скорость аппарата в конечный момент времени, то компоненты скорости аппарата в векторе \mathbf{x}_{N+1} можно также не варьировать и исключить из вектора переменных \mathbf{s} .

Хотя в разных модификациях метода параллельной пристрелки количество переменных и количество уравнений может варьироваться, в подавляющем

большинстве случаев количество неизвестных превышает количество уравнений. В этом случае применять методы Левенберга–Марквардта и доверительных областей нельзя, так как матрица $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$, составленная для матрицы Якоби $\mathbf{J} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{s}$, является вырожденной. Система уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}_k) + \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \right]_{\mathbf{s}_k}^T \Delta \mathbf{s} = 0$$

на шаг $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k$ оказывается переопределенной и обычно имеет бесконечное множество решений. Поэтому чаще всего в этом множестве решений интересуются решением минимальной нормы:

$$\begin{cases} \|\Delta \mathbf{s}\| \rightarrow \min \\ \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) + \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \right]_{\mathbf{s}_k}^T \Delta \mathbf{s} = 0 \end{cases}$$

которое выражается известной формулой

$$\Delta \mathbf{s} = -\mathbf{J}_k^T (\mathbf{J}_k \mathbf{J}_k^T)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{s}_k)$$

сходной с формулой (1.16). На практике, однако, применение этой формулы может приводить к возрастанию вектора невязки $\|\mathbf{F}(\mathbf{s})\|$. Как и в методе Левенберга–Марквардта, это можно контролировать введением вспомогательного параметра $\lambda > 0$

$$\Delta \mathbf{s} = -\mathbf{J}_k^T (\mathbf{J}_k \mathbf{J}_k^T + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{s}_k) \quad (1.20)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица подходящего размера. При этом логика управления параметром λ остается той же, что и в методе Левенберга–Марквардта.

Матрица Якоби в простейшем случае (1.18)–(1.19) имеет следующий блочный вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1^t}{\partial \mathbf{x}_1} & -\mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{O}_{6 \times 6} & \mathbf{O}_{6 \times 6} & \cdots & \mathbf{O}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_{6 \times 6} & \frac{\partial \mathbf{x}_2^t}{\partial \mathbf{x}_2} & -\mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{O}_{6 \times 6} & \cdots & \mathbf{O}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_{6 \times 6} & \mathbf{O}_{6 \times 6} & \frac{\partial \mathbf{x}_3^t}{\partial \mathbf{x}_3} & -\mathbf{I}_{6 \times 6} & & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \frac{\partial \mathbf{x}_N^t}{\partial \mathbf{x}_N} & -\mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_1} & \mathbf{O}_{l \times 6} & & & \mathbf{O}_{l \times 6} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_N} \end{bmatrix}$$

где матрицы перехода $\partial \mathbf{x}_j^t / \partial \mathbf{x}_j$ рассчитываются в точке $\mathbf{x}(\tau_j)$ и получаются путем численного интегрирования уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j^t}{\partial \mathbf{x}_j} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j^t}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \\ \mathbf{x}(\tau_j) &= \mathbf{x}_j, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{x}_j^t}{\partial \mathbf{x}_j} \right) (\tau_j) = \mathbf{I}_{6 \times 6} \end{aligned}$$

на интервалах времени $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 1, \dots, N$. По сравнению с разностными схемами оценивания матрицы Якоби, такой подход не только более точный, но и гораздо более быстрый, даже несмотря на увеличенное число зависимых переменных.

1.2.3 Метод последовательного квадратичного программирования

Метод последовательного квадратичного программирования (sequential quadratic programming, SQP) давно доказал свою эффективность в решении задач оптимизации и особенно – в задачах оптимизации траекторий КА. Идея метода SQP состоит в том, чтобы свести задачу оптимизации общего вида к последовательности задач квадратичного программирования. Опишем метод более подробно.

Пусть поставлена задача оптимизации

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (1.21)$$

с ограничениями-равенствами

$$\mathbf{g}_e(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.22)$$

и ограничениями-неравенствами

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (1.23)$$

Функции $f(x)$, \mathbf{g}_e и \mathbf{g}_i могут быть нелинейными, от них требуется лишь достаточная гладкость. Введем вспомогательный вектор переменных $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r$, где r – количество ограничений-неравенств, и преобразуем ограничения-неравенства (1.23) к ограничениям-равенствам:

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \leq 0 \Leftrightarrow g_{i,j}(\mathbf{x}) + v_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, r \quad (1.24)$$

где $g_{i,j}$ – это j -ая компонента вектора \mathbf{g}_i , v_j – это j -ая компонента вектора \mathbf{v} . Введем наконец функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_e(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \mu_j v_j^2$$

Тогда необходимые условия оптимальности задачи (1.21)–(1.23) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_e + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}_i) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 &\Leftrightarrow \mu_j v_j = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{g}_e = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 0 &\Leftrightarrow g_{i,j}(\mathbf{x}) + v_j^2 = 0, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (1.25)$$

Добавим к этим условиям требование $\mu_j \geq 0$ для всех $j = 1, \dots, r$, что означает необходимое условие существования минимума функции L . Заметим также, что $\mu_j v_j = 0$ можно заменить на $\mu_j g_{i,j} = 0$. С учетом сказанного, необходимые

условия оптимальности можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_e + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}_i) &= 0 \\ \mu_j g_{i,j} &= 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r \\ \mathbf{g}_e &= 0 \\ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

В такой форме необходимые условия оптимальности носят название условий Каруша–Куна–Таккера.

Метод SQP представляет собой один из способов решения уравнений необходимых условий оптимальности (1.25) или условий Каруша–Куна–Таккера (1.26). Для квадратичных задач с линейными ограничениями эти уравнения могут решаться методом Ньютона. Для этого требуется на каждой итерации вычислять матрицу вторых производных \mathbf{H} функции Лагранжа L . Так как расчет матрицы вторых производных является трудоемкой операцией, были изобретены различные способы ее оценивания. Например, можно воспользоваться формулой Бройдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно (BFGS):

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k}$$

где $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, $\mathbf{q}_k = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k+1}) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)$. На первой итерации можно выбрать $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}_{n \times n}$, последующие итерации будут становиться ближе к реальному значению \mathbf{H} . Для того, чтобы шаг метода Ньютона приближал именно к минимуму функции L , а не к седловой точке или точке максимума, в процессе счета \mathbf{q}_k можно слегка модифицировать, чтобы \mathbf{H}_{k+1} была положительно определенной матрицей.

В общем же случае неквадратичной задачи с нелинейными ограничениями метод Ньютона решения уравнений (1.25) или (1.26) может не сойтись. Главная идея метода SQP состоит в том, чтобы аппроксимировать данную оптимизационную задачу квадратичной задачей с линейными ограничениями. Формально говоря, на каждом шаге метода SQP функция Лагранжа L аппроксимируется квадратичной функцией, а условия-ограничения – линейными функциями. Полученная задача квадратичного программирования решается указанным выше методом Ньютона с оценкой матрицы вторых производных по формуле BFGS.

Метод Ньютона даст лишь приближенное решение исходной задачи \mathbf{x}_{k+1} , т.к. нелинейная функция Лагранжа может сильно отличаться от ее квадратичной аппроксимации. Поэтому процедура аппроксимации повторяется вновь, уже относительно новой точки \mathbf{x}_{k+1} , и уравнения (1.25) или (1.26) снова решаются указанным способом. Продолжается такая последовательная процедура решения квадратичных задач до тех пор, пока градиент функции Лагранжа не будет достаточно близок нулю.

Напоследок отметим, что решение квадратичной задачи способно увеличить целевую функцию $f(\mathbf{x})$ и нарушить исходные ограничения-равенства (1.22) и ограничения-неравенства (1.23). Чтобы этого избежать, применяется широко известная процедура линейного поиска: ищется значение скалярного параметра α

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k$$

которое оптимизирует скалярную функцию

$$\Psi(\alpha) = f(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{j=1}^m w_j g_{e,j}(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{j=1}^r \bar{w}_j \max[0, g_{i,j}(\mathbf{x}_{k+1})]$$

Здесь \mathbf{d}_k шаг метода Ньютона в решении квадратичной задачи, m – количество ограничений-равенств, w_j и \bar{w}_j – весовые коэффициенты.

1.3 Адаптация траектории на случай эфемеридной модели движения Солнечной системы

Модель CR3BP предоставляет интуитивно понятные и удобные инструменты проектирования траекторий перелета в системах Земля–Луна и Солнце–Земля. Заключительным этапом предварительного анализа всегда должна служить верификация полученных результатов в эфемеридной модели движения тел Солнечной системы. В данной работе для моделирования движения Земли, Луны, Солнца, Юпитера и других объектов Солнечной системы были выбраны эфемериды Jet Propulsion Laboratory (JPL) DE423.

Все траектории в данной работе будут сначала построены в рамках модели CR3BP и затем адаптированы на случай эфемеридной модели. Будем при этом придерживаться следующего алгоритма.

1) Пусть дана некоторая траектория, описываемая фазовым состоянием $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$ в рамках модели CRЗВР. Сместим начало координат в центр одного из главных тел, например, m_2 . В результате получим фазовый вектор

$$\mathbf{x}_2(t) = [x(t) + \mu - 1, y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$$

2) Согласно выбранной эфемеридной модели движения m_2 вокруг m_1 найдем радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ и скорость $\mathbf{V}(t)$ тела m_2 относительно m_1 . Воспользуемся этими данными для расчета базисных векторов вращающейся системы координат

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{R}(t)}{|\mathbf{R}(t)|}, \quad \mathbf{e}_3(t) = \frac{\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)}{|\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_2(t) = \mathbf{e}_3(t) \times \mathbf{e}_1(t)$$

и ее мгновенной угловой скорости

$$\dot{\theta}(t) = \frac{|\mathbf{R}(t) \times \mathbf{V}(t)|}{|\mathbf{R}(t)|^2}$$

В данной работе векторы \mathbf{R} и \mathbf{V} выражались в проекциях на оси Международной небесной системы координат (МНСК).

3) Фазовое состояние $\mathbf{X}(t) = [X(t), Y(t), Z(t), \dot{X}(t), \dot{Y}(t), \dot{Z}(t)]$ в проекциях на оси МНСК с началом в центре масс тела m_2 выражается по формуле:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta}e_{12} & -\dot{\theta}e_{11} & 0 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ \dot{\theta}e_{22} & -\dot{\theta}e_{21} & 0 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ \dot{\theta}e_{32} & -\dot{\theta}e_{31} & 0 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$$

где базисные векторы $\mathbf{e}_1 = [e_{11}, e_{21}, e_{31}]$, $\mathbf{e}_2 = [e_{12}, e_{22}, e_{32}]$, $\mathbf{e}_3 = [e_{13}, e_{23}, e_{33}]$ и фазовый вектор $\mathbf{x}_2 = [x_2, y_2, z_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2]$.

4) Фазовое состояние $\mathbf{X}(t)$ не соответствует реальному движению в рамках эфемеридной модели, однако может быть использовано в качестве начального приближения для последующей итерационной процедуры уточнения с помощью

метода параллельной пристрелки. Рисунок 1.16 показывает пример адаптации гало-орбиты вокруг ЕМ L_1 на случай эфемеридной модели. Такие орбиты также называются квазигало-орбитами и принадлежат нестационарному четырехпараметрическому центральному многообразию.

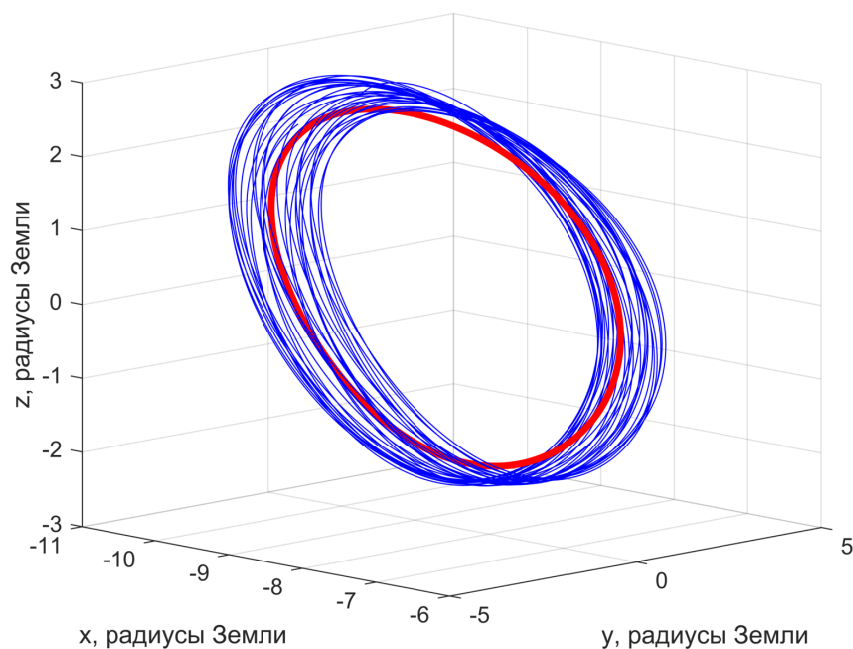


Рисунок 1.16 — Гало-орбита (красная кривая) вокруг ЕМ L_1 , $A_z = 15$ тыс. км, и ее адаптация (синяя кривая) на случай эфемеридной модели; вращающаяся система координат, начало координат в центре масс Луны

Глава 2. Анализ спиральных траекторий перелета к лунной точке либрации L_1 с использованием резонансных сближений

Эта глава посвящена анализу спиральных траекторий перелета с околоземных орбит к лунной точке либрации L_1 с использованием резонансных сближений с Луной. Характеристики траектории (время полета, затраты топлива) анализируются в зависимости от даты и времени старта, параметров исходной орбиты, последовательности резонансов и параметров двигателя малой тяги.

2.1 Введение

За последние 50 лет было разработано и верифицировано огромное количество вариантов доставки КА к Луне и лунным точкам либрации. Подробный обзор основных методов можно найти в монографии Д. Паркера и Р. Андерсона [126]. Однако, если речь идет о малых аппаратах, нам доступны всего две опции: попутный запуск к Луне либо старт с околоземной орбиты.

Первый вариант доставки МКА к Луне будет реализован в рамках миссии¹ Exploration Mission 1: главный аппарат двигаясь по пролетной траектории выпустит 13 кубсатов для отработки технологий МКА в дальнем космосе. Из них два аппарата, Lunar IceCube [30] и Lunar Flashlight [127], после череды сложных, запутанных пролетов Луны и окрестности коллинеарных точек либрации будут выведены на окололунные орбиты (рисунки 2.1 и 2.2). При этом аппарат Lunar IceCube будет оснащен двигателем малой тяги ВТ-3 компании Busek, а Lunar Flashlight «опустится» на низкую окололунную орбиту с помощью солнечного паруса из алюминированного каптона площадью 85 м². Проектирование траекторий здесь осуществляется преимущественно с помощью гиперболических многообразий орбит вокруг коллинеарных точек либрации и понятия о границе слабой устойчивости (weak stability boundary) [39] – области фазового пространства, в котором силы притяжения к Земле, Луне и Солнцу уравниваются и небольшой импульс сообщенный аппарату способен качественно определить его последующее движение в системе Земля–Луна (например, выйти на траекторию захвата Луной). Адаптацию этого метода к случаю движения аппарата

¹http://www.esa.int/Our_Activities/Human_Spaceflight/Orion/Exploration_Mission_1.

с малой тягой можно найти, например, в статье М. Озимека и К. Хауэлл [128]. Отметим, однако, что попутные запуски в дальний космос очень редки, в то время как на околоземные орбиты КА выводятся часто и регулярно, а потому анализ траекторий перелета с легко доступных околоземных орбит является более значимым с практической точки зрения.

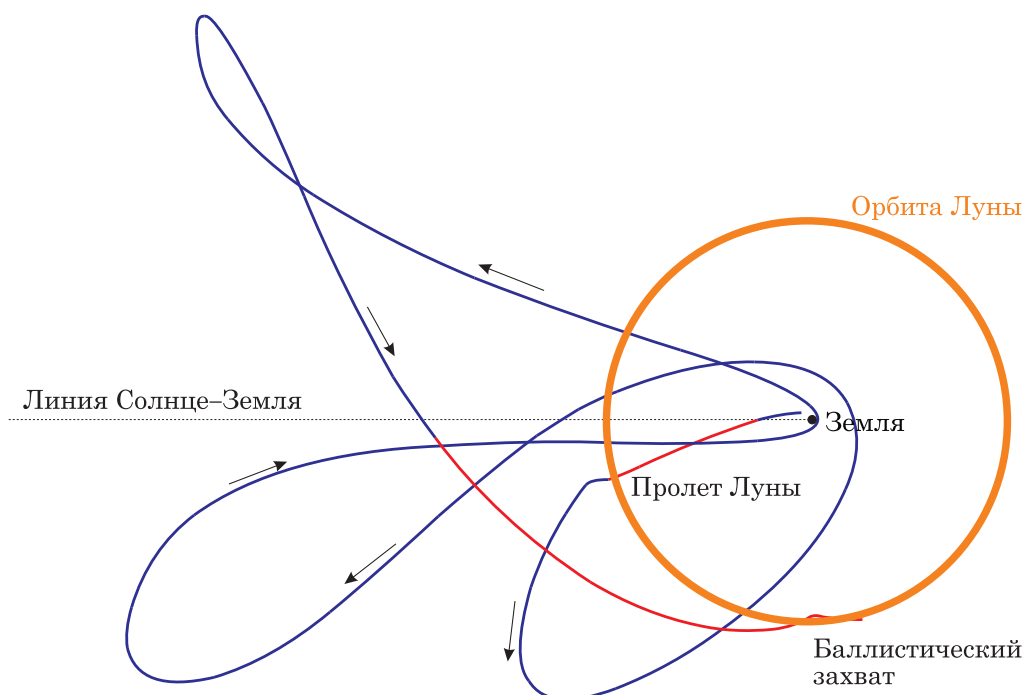


Рисунок 2.1 — Траектория Lunar IceCube во вращающейся системе координат, связанной с Солнцем и Землей. Синим цветом обозначены пассивные участки движения, красным цветом – активные участки. Адаптировано из [129]

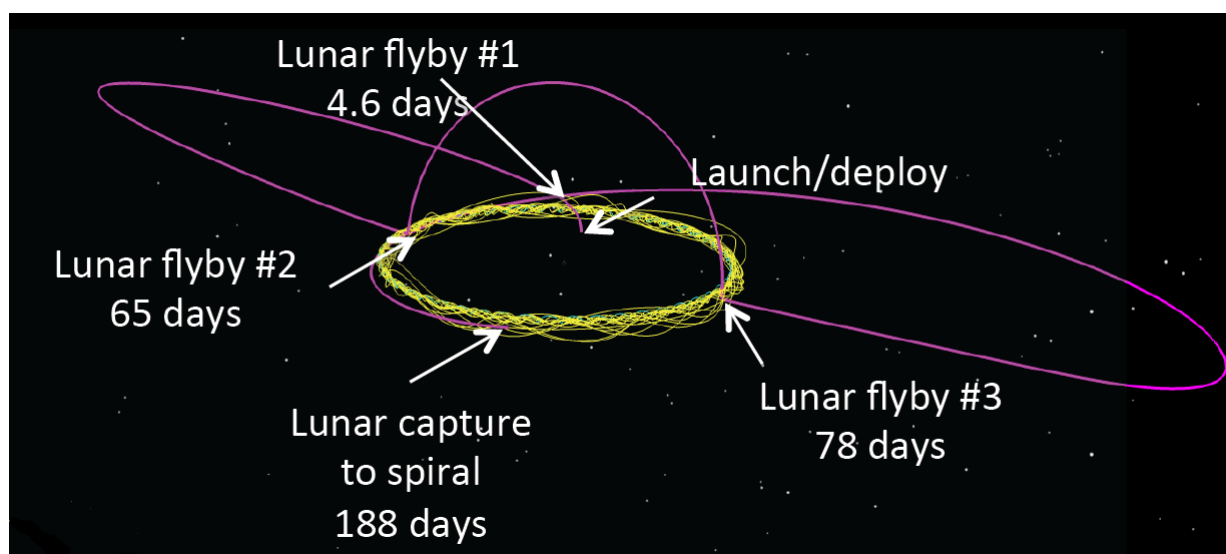


Рисунок 2.2 — Траектория Lunar Flashlight. Заимствовано из [130]

Для МКА, выведенных на низкие околоземные орбиты или на геопереходную орбиту, единственно возможным вариантом полета к Луне или лунным точкам либрации является использование двигателей малой тяги – преимущественно электрических ракетных двигателей (ЭРД).

Проектирование траекторий с малой тягой к Луне или лунным точкам либрации является вычислительно трудной задачей, так как необходимо учесть целый ряд факторов: 1) радиационные пояса, время пребывания в которых следует минимизировать, 2) тень Земли, в которой маршевый двигатель может быть отключен из-за нехватки энергии для обеспечения тяги, 3) многовитковость перелетов, из-за чего следует выбирать и настраивать только робастные итерационные методы оптимизации траекторий, 4) гравитационные эффекты задачи трех тел, которые в равной степени могут как мешать построению траекторий, так и способствовать их поиску.

Чтобы решить возникающие проблемы, в данной работе предлагается разбить проектирование траекторий перелета на орбиту вокруг ЕМ L_1 на несколько частей (этапов). А именно, так как начальная стадия раскрутки траектории происходит в пределах радиационных поясов, то необходимо максимально быстро выйти за их пределы. На этом, первом, этапе проектирования перелета предлагается сделать тягу касательной к траектории. Когда орбита аппарата становится достаточно высокой, для экономии топлива предлагается использовать последовательности внешних гравитационных маневров у Луны (резонансные сближения). А так как время перелета с малой тягой велико и может занимать больше года, то на участке между радиационными поясами и областью сильного возмущения Луной предлагается решать оптимальную по быстрдействию задачу перелета. Таким образом, схема направлена на быстрое достижение точки либрации L_1 с экономией топлива благодаря гравитационному влиянию Луны.

Первой и пока единственной реализованной миссией к Луне с малой тягой является европейская миссия SMART-1 [27], длившаяся с 2003 по 2006 гг. Стартовав с геопереходной орбиты, SMART-1 в течение года раскручивал свою орбиту двигателем малой тяги PPS-1350-G, разработанным французской компанией Snesta в кооперации с ОКБ «Факел». Перелет SMART-1 к Луне проводился по похожей схеме, однако целевыми орбитами являлись окололунные орбиты. В данной диссертации, напротив, целевыми являются гало-орбиты вокруг ЕМ L_1 : это снижает риски миссии и оставляет многочисленные возможности по даль-

нейшему перемещению в системе Земля–Луна как на окололунные орбиты, так и на орбиты вокруг точки EM L_2 . Открывается и возможность перемещения к точкам либрации системы Солнце–Земля. Орбиты вокруг EM L_1 выступают, таким образом, своеобразными транспортными узлами, вспомогательными промежуточными пунктами, чтобы можно было провести проверку всех систем перед последующими рискованными фазами полета.

Цель данной работы состоит в разработке методики построения номинальных траекторий на орбиты вокруг EM L_1 , что предполагает создание автоматизированной процедуры построения множества номинальных траекторий, для произвольных исходной околоземной орбиты, целевой орбиты, даты и времени старта. Как известно, даже перед проектированием миссии SMART-1 такой методики разработано не было [27], хотя после завершения миссии попытки создать ее уже предпринимались [131]. Отметим, что существенным недостатком подхода в [131] является отсутствие использования резонансных сближений с Луной, отсутствие определения оптимальных последовательностей резонансных сближений, а также отсутствие полного анализа характеристик перелета при различных параметрах начальной орбиты и времени старта. Данная диссертация предлагает новый подход, призванный устранить все вышеизложенные недостатки.

Далее изложение построено следующим образом. Сначала формулируется постановка задачи и приводятся необходимые для целей данной главы специальные теоретические сведения: вариационные уравнения движения, учитываемые возмущающие силы, решение оптимальной по быстродействию задачи перелета с малой тягой, понятие о резонансных сближениях с Луной. Затем подробно описывается алгоритм построения траектории перелета на гало-орбиту вокруг точки либрации EM L_1 . Далее излагаются результаты параметрического анализа при различных исходных орбитах, двигателях малой тяги, целевых орбитах и т.д. Глава завершается сравнением характеристик перелета с использованием резонансных сближений и без их использования.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим околоземную орбиту заданного размера, наклона и вектора эксцентриситета на начальный момент времени $t = t_0$. Пусть Ω_0 обозначает

долготу восходящего узла (ДВУ) орбиты, λ_{S0} обозначает эклиптическую долготу Солнца в момент t_0 , а Ω_{M0} – ДВУ орбиты Луны в момент t_0 . Так как λ_{S0} и $\Delta\Omega = \Omega_0 - \Omega_{M0}$ определяют начальную относительную конфигурацию между КА, Луной и Солнцем, их удобнее использовать в качестве начальных параметров вместо момента старта t_0 и ДВУ орбиты Ω_0 .

Что касается аппарата, то он предполагается малым, т.е. его полная масса в момент t_0 не превосходит 500 кг. Аппарат оснащен двигателем малой тяги, причем имеется возможность направлять тягу в любых направлениях. Ограничений на скорость поворота вектора тяги не ставится. На аппарате установлены солнечные панели, которые преобразуют солнечную энергию в электрическую и снабжают ею двигатель малой тяги. Предполагается также, что на затененных участках траектории двигатель не производит тягу.

Перелет на гало-орбиту вокруг ЕМ L_1 состоит из трех этапов. На первом этапе КА как можно быстрее проходит через радиационные пояса. Здесь принимаются во внимание влияние атмосферы Земли, второй зональной гармоники геопотенциала (J_2), и гравитационное притяжение Солнца и Луны. Будем также предполагать, что вектор тяги направлен по касательной к траектории за исключением случаев, когда КА попадает в тень Земли. В тени Земли двигатель выключен. Траектория распространяется вперед во времени до тех пор, пока перицентральный расстояние не превысит верхней границы радиационных поясов (30 тыс. км в данной работе). На выходе первого этапа получаем орбитальные элементы после преодоления зоны радиационных поясов.

Независимо от первого этапа производятся расчеты на третьем этапе: траектория распространяется назад во времени от данной гало-орбиты. Точки на гало-орбите однозначно задаются указанием скалярной переменной $\varphi \in [0, 1]$. Взяв точку φ , можно рассчитать соответствующую ветвь устойчивого многообразия, распространив ее назад во времени, и найти резонансные сближения по алгоритму, описанному ниже. Когда алгоритм останавливается, нам доступны орбитальные элементы, параметризованные аргументом широты Луны u_M и ДВУ орбиты Луны Ω_M . Значения u_M и Ω_M зависят от времени полета на втором этапе, то есть между первым и третьим участками перелета.

Далее начинаются расчеты на втором этапе, решается оптимальная по быстрдействию задача перелета с фиксированным левым концом и нефиксированным, но принадлежащим определенному множеству, правым концом траек-

тории. Вариация оптимизационных переменных дает время полета, время в конце второго этапа и орбитальные элементы перед резонансными сближениями. На втором этапе учитываются возмущения от J_2 и гравитационного притяжения Солнца и Луны. Также считается, что двигатель выключен на затененных участках орбиты.

После того, как подсчитана целая траектория, она уточняется до эфемеридной модели с помощью метода параллельной пристрелки.

Предложенная схема расчета успешно автоматизируется и дает целое множество перелетов, параметризованных λ_{S0} , $\Delta\Omega$, φ и последовательностью резонансов. Таким образом, формируется база данных траекторий, которая дает глобальную картину возможностей перелета данного аппарата на гало-орбиту вокруг ЕМ L_1 с заданной околоземной орбиты.

2.3 Исходные данные

В качестве околоземных орбит рассматривались низкая круговая орбита (НКО) и геопереходная орбита (ГПО), их характеристики приведены в таблице 2.1. В качестве целевых орбит рассматривались две гало-орбиты вокруг точки ЕМ L_1 : одна с z -амплитудой 35 000 км, другая с z -амплитудой 15 000 км. На каждой из гало-орбит было выбрано по 10 точек, равномерно по времени отстоящих друг от друга. От этих точек впоследствии и распространялись назад во времени траектории, согласно алгоритму третьего этапа.

С учетом типичных значений характеристик двигателей малой тяги для малых аппаратов (см. таблицу 2.2), для целей данной работы были рассмотрены два аппарата: один в классе мини, а другой в классе нано, их характеристики приведены в таблице 2.3. Здесь I_{sp} – удельный импульс двигателя, N/M – отношение мощности, получаемой КА с солнечных батарей, к массе аппарата, eff – тяговый КПД двигателя, a_T – ускорение тяги, F_T – сила тяги. Для расчета силы атмосферного сопротивления коэффициент лобового сопротивления у обоих аппаратов был выбран равным $c_x = 2.2$, а характерная площадь поперечного сечения $A = 2.0 \text{ м}^2$ для миниаппарата и $A = 0.1 \text{ м}^2$ для наноаппарата.

Таблица 2.1
Околоземные орбиты в данном исследовании

Параметры орбиты	НКО	ГПО
Высота перигея	300 км	250 км
Высота апогея	300 км	35 786 км
Наклонение	51.6°	6.0°

Таблица 2.2
Характеристики двигателей малой тяги на малых аппаратах

	I_{sp} , с	N/M , Вт/кг	eff	a_T , мм/с ²
Типичные значения	1 500...3 000	4...6	0.4...0.6	0.1...0.5
SMART-1	1 640	3.2	0.51	0.20
Lunar IceCube	3 000	4.3	0.42	0.10
В данном исследовании	1 600	4.5	0.45	0.26

Таблица 2.3
Параметры КА и двигателей в данном исследовании

Масса КА: 300 кг	Масса КА: 10 кг
«Мини-ДУ»	«Нано-ДУ»
$I_{sp} = 1600$ с	$I_{sp} = 3000$ с
$F_T = 77.5$ мН	$F_T = 1.4$ мН
eff = 0.45	eff = 0.45

2.4 Теоретические сведения

Алгоритмы построения траекторий на каждом из этапов опираются на изложенные в данном разделе базовые теоретические сведения об уравнениях движения, формулы расчета возмущений, задачи оптимизации управления по быстрдействию, а также некоторые сведения о резонансных сближениях с возмущающим телом.

2.4.1 Вариационные уравнения движения

Сначала введем в рассмотрение две вспомогательные системы координат. Начало инерциальной системы координат (ИСК) поместим в центр Земли, а оси в любой момент времени направим параллельно осям Международной небесной системы координат. Начало орбитальной системы координат (ОСК) поместим в центр масс КА, первую ось направим вдоль местной вертикали в сторону от Земли, третью ось направим вдоль мгновенного орбитального момента аппарата, а вторую ось направим так, чтобы все три оси вместе образовывали правую тройку.

Состояние КА на первых двух этапах будем задавать по отношению к ИСК с помощью равноденственных орбитальных элементов h , e_x , e_y , i_x , i_y и истинной долготы L . Эти элементы связаны с классическими орбитальными элементами a , e , ω , i , Ω и истинной аномалией ϑ следующими соотношениями

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{a(1 - e^2)/\mu_E} \\ e_x &= e \cos(\Omega + \omega) \\ e_y &= e \sin(\Omega + \omega) \\ i_x &= \tan(i/2) \cos \Omega \\ i_y &= \tan(i/2) \sin \Omega \\ L &= \Omega + \omega + \vartheta \end{aligned}$$

где $\mu_E = 3.9860044 \times 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Земли. Формулы перехода между равноденственными орбитальными элементами и декартовыми

координатами и скоростями приведены в Приложении Б. Так как наклонение выше 90° здесь не встречается, ретроградный фактор всюду равен единице.

Введем массу аппарата M , силу тяги $F_T \in [0, F_{\max}]$ и скорость истечения v_{ex} реактивной струи установленного на аппарате ЭРД. Тогда вариационные уравнения движения можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{oe}}{dt} = \mathbf{K}\mathbf{a}, \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\xi^2}{h^3\mu_E} + \frac{h\eta}{\xi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}, \quad \frac{dM}{dt} = -\frac{F_T}{v_{ex}} \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{oe} = [h, e_x, e_y, i_x, i_y]^T \quad (2.2)$$

$$\xi = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \quad (2.3)$$

$$\eta = i_x \sin L - i_y \cos L \quad (2.4)$$

$$\phi = (1 + i_x^2 + i_y^2)/2 \quad (2.5)$$

и матрица

$$\mathbf{K} = \frac{h}{\xi} \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ \xi \sin L & (\xi + 1) \cos L + e_x & -e_y \eta \\ -\xi \cos L & (\xi + 1) \sin L + e_y & e_x \eta \\ 0 & 0 & \phi \cos L \\ 0 & 0 & \phi \sin L \end{bmatrix}$$

В этих уравнениях ускорение $\mathbf{a} = [a_r, a_t, a_b]^T$ выражается в ОСК и содержит ускорение тяги \mathbf{a}_T и ускорения возмущающих сил, действующих на КА. Использование равноденственных элементов для моделирования движения вместо декартовых координат и скоростей сокращает накопление численных ошибок интегрирования многовитковых траекторий перелета, и потому равноденственные элементы более предпочтительны.

2.4.2 Учитываемые возмущающие силы

Выражения для возмущений, действующих на аппарат, легко записать в ИСК. Затем их можно будет перевести в ОСК и подставить в уравнения движения (2.1). Ускорение \mathbf{a}_S силы гравитационного притяжения Солнца вычисляется

по формуле

$$\mathbf{a}_S = \frac{\mu_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3}(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) - \frac{\mu_S}{|\mathbf{r}_S|^3}\mathbf{r}_S$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор КА, \mathbf{r}_S – радиус-вектор Солнца и $\mu_S = 1.3271244 \times 10^{11}$ км³/с² – гравитационный параметр Солнца. Похожая формула используется и для ускорения \mathbf{a}_M силы гравитационного притяжения Луны:

$$\mathbf{a}_M = \frac{\mu_M}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3}(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) - \frac{\mu_M}{|\mathbf{r}_M|^3}\mathbf{r}_M$$

где \mathbf{r}_M – радиус-вектор Луны и $\mu_M = 4.9028002 \times 10^3$ км³/с² – гравитационный параметр Луны. Ускорение \mathbf{a}_{J_2} , вызванное второй зональной гармоникой геопотенциала, рассчитывается по формуле

$$\mathbf{a}_{J_2} = -\frac{3\mu_E J_2 R_E^2}{2r^4} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) \frac{x}{r} \\ \left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right) \frac{y}{r} \\ \left(3 - \frac{5z^2}{r^2}\right) \frac{z}{r} \end{bmatrix}$$

где $r = |\mathbf{r}|$, $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$, $R_E = 6378.13$ км – экваториальный радиус Земли. Ускорение \mathbf{a}_A , вызванное силой сопротивления атмосферы Земли, равно

$$\mathbf{a}_A = -f \frac{\mathbf{v}}{v}$$

где $v = |\mathbf{v}|$ – скорость КА и

$$f = \frac{c_x A v^2}{2M} \rho_l \left(\frac{\rho_h}{\rho_l} \right)^{(D-D_0)/(D_1-D_0)} \quad (2.6)$$

Здесь c_x – коэффициент лобового сопротивления, A – характерная площадь поперечного сечения КА. Формула (2.6) представляет кусочно-экспоненциальную модель атмосферы и дает ускорение на высоте D для выбранной пары плотностей ρ_l и ρ_h на высотах D_0 и D_1 , соответственно; $D_0 \leq D \leq D_1$. Величины для плотностей, используемые в данной работе, соответствуют высотным профилям модели JB2008 и могут быть найдены в COSPAR International Reference Atmosphere 2012 [132]. Для высоты больше 900 км полагается $f = 0$.

Для учета теневых участков используется цилиндрическая модель тени Земли. А именно, если условие

$$\frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \leq -\sqrt{1 - \frac{R_E^2}{r^2}}$$

выполнено, то КА находится в тени и маршевый двигатель выключен. Как только аппарат выходит из тени Земли, двигатель включается снова и производит тягу в соответствии с выбранной стратегией.

2.4.3 Оптимальная по быстродействию задача перелета с малой тягой

На втором этапе перелета нас интересует оптимальное по быстродействию управление, т.е. управление, которое переводит КА с одной орбиты $\boldsymbol{\alpha}_1 = [h, e_x, e_y, i_x, i_y]_1$ в момент времени t_1 на другую орбиту $\boldsymbol{\alpha}_2(t_2) = [h, e_x, e_y, i_x, i_y]_2$ в момент t_2 за минимальное время перелета $t_2 - t_1$. Предполагается, что терминальное граничное условие $\boldsymbol{\alpha}_2(t_2)$ является функцией времени t_2 . Оптимальная по быстродействию задача перелета формулируется и решается для усредненной задачи. В этом случае уравнения движения выглядят так:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(L, \mathbf{y}) \frac{dt}{dL} dL \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{y} = [\boldsymbol{\alpha}, L, M]^T$, $n = \frac{1}{\mu_E} \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{h} \right)^3$, $\frac{dt}{dL} = \frac{h^3}{\xi^2}$ и $\mathbf{f}(L, \mathbf{y})$ – правая часть уравнений (2.1). Теперь введем сопряженные переменные $\mathbf{p}_y = [\mathbf{p}_\alpha, p_L, p_M]^T$, гамильтониан

$$H = -1 + \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{p}_y^T \mathbf{f}(L, \mathbf{y}) \frac{dt}{dL} dL$$

условия трансверсальности

$$p_L(t_2) = 0, \quad p_M(t_2) = 0, \quad \mathbf{p}_\alpha^T \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_2) - H(t_2) = 0$$

и уравнения для сопряженных переменных

$$\frac{d\mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad \frac{d\mathbf{p}_L}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial L}, \quad \frac{d\mathbf{p}_M}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial M}, \quad (2.8)$$

Поскольку осредненный гамильтониан не зависит явно от L , то из уравнения (2.8) и $p_L(t_2) = 0$ получаем $p_L \equiv 0$. Максимизация гамильтониана дает вектор оптимального ускорения силы тяги вне затененного участка траектории

$$\mathbf{a}_T = \frac{F_{\max}}{M} \frac{\mathbf{K}^T \mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\mathbf{K}^T \mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}\|} \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что масса аппарата изменяется по закону

$$M(t) = M_1 - (F_{\max}/v_{ex})t_{op}$$

где M_1 – масса КА в момент t_1 и t_{op} – моторное время² двигателя на интервале $[t_1, t]$. Заметим, что правая часть уравнений (2.7)–(2.8) не зависит от p_M , поэтому уравнение для p_M отделяется, и интегрированием его назад во времени можно всегда найти $p_M(t_1)$ такое, чтобы $p_M(t_2) = 0$. Поэтому уравнение для p_M исключается из уравнений движения и более не рассматривается. Наконец, полная система уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.11)$$

и граничные условия

$$\boldsymbol{\alpha}(t_1) = \boldsymbol{\alpha}_1, \quad \boldsymbol{\alpha}(t_2) = \boldsymbol{\alpha}_2(t_2), \quad \mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}^T \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_2) - H(t_2) = 0$$

определяют двухточечную краевую задачу, которая решается относительно переменных $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)$ и t_2 . Задача поиска оптимального управления таким образом свелась к решению системы нелинейных уравнений численными методами. Эксперименты показали, что двумя наиболее эффективными средствами решения

²Чтобы упростить вывод оптимального управления, зависимостью моторного времени двигателя t_{op} от наличия теневого участка пренебрегаем.

получающейся системы уравнений являются алгоритм Левенберга–Марквардта и метод доверительных областей.

2.4.4 Резонансные сближения с возмущающим телом

Одними из наиболее полезных динамических эффектов, предоставляемых моделью CR3BP, являются гравитационные эффекты от сближения со вторым главным телом (в нашем случае – Луной) при движении аппарата по орбите вокруг первого главного тела (Земли). В отличие от привычных гравитационных маневров, происходящих внутри сферы действия возмущающего тела, сближения происходят вне сферы действия. И если раньше сближения представляли интерес лишь как инструменты стабилизации высокоэллиптических орбит над Землей (см., например, статью А.Ю. Когана и В.А. Котина [133]), современные приложения интересуют случаи, когда сближения способны резко изменять высоту перигея: либо понижать ее, либо повышать. Здесь можно отметить подходы, появившиеся в 1990-х годах в связи с развитием методов управления хаосом [134, 135, 136, 137]. Впоследствии нашел развитие метод на основе диаграммы Тиссерана-Пуанкаре [138] для проектирования серии сближений у лун Юпитера за их сферами действия. Для задачи сближения у Луны был разработан более простой алгоритм последовательного нацеливания на сближения [40].

Пример траектории со сближением в инерциальной системе координат с началом в центре Земли показан на рисунке 2.3. Хорошо видно, какое воздействие на размеры орбиты оказывает сближение с Луной: перигей поднимается приблизительно на 37 000 км! Заметим, что перигей поднимается в случаях, когда Луна немного опережает движение КА вдоль своей орбиты. Величина эффекта от сближения в зависимости от угла между направлениями на возмущающее тело и на КА изображена на рисунке 2.4. Из рисунка видны узкие области вблизи нулевого угла, в которых влияние сближения на орбиту наиболее велико. В расчетах же области повышения и понижения перигея гораздо удобнее выражать во вращающейся системе координат модели CR3BP, см. рисунки 2.5 и 2.6. Легко доказать [40], что сближение повысит перигей орбиты, если в момент сближения координата $y \lesssim 0$, и понизит перигей, если $y \gtrsim 0$.

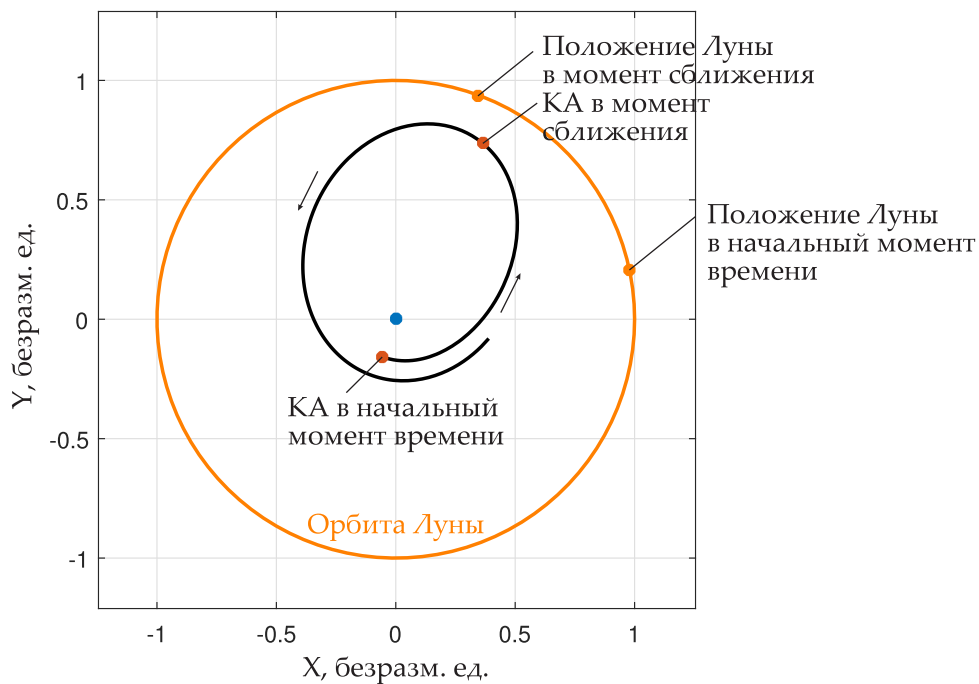


Рисунок 2.3 — Пример траектории со сближением у Луны; сближение повышает перигей орбиты КА (черная кривая); инерциальная система координат с началом в центре Земли (синий круг) и плоскостью XU , совпадающей с плоскостью орбиты Луны

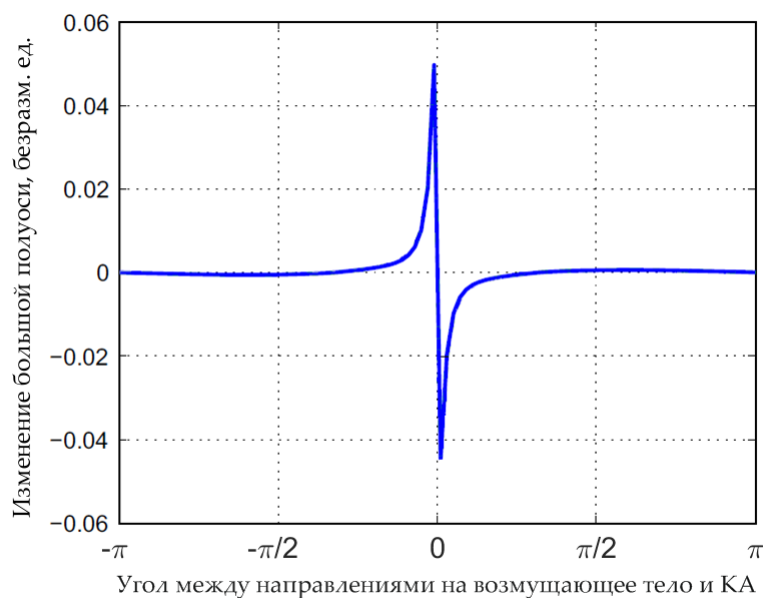


Рисунок 2.4 — Типичное влияние сближения на большую полуось в зависимости от угла между направлениями на возмущающее тело и КА; рисунок демонстрирует узкие области, где влияние сближения на орбиту КА наиболее сильно. Адаптировано из [138]

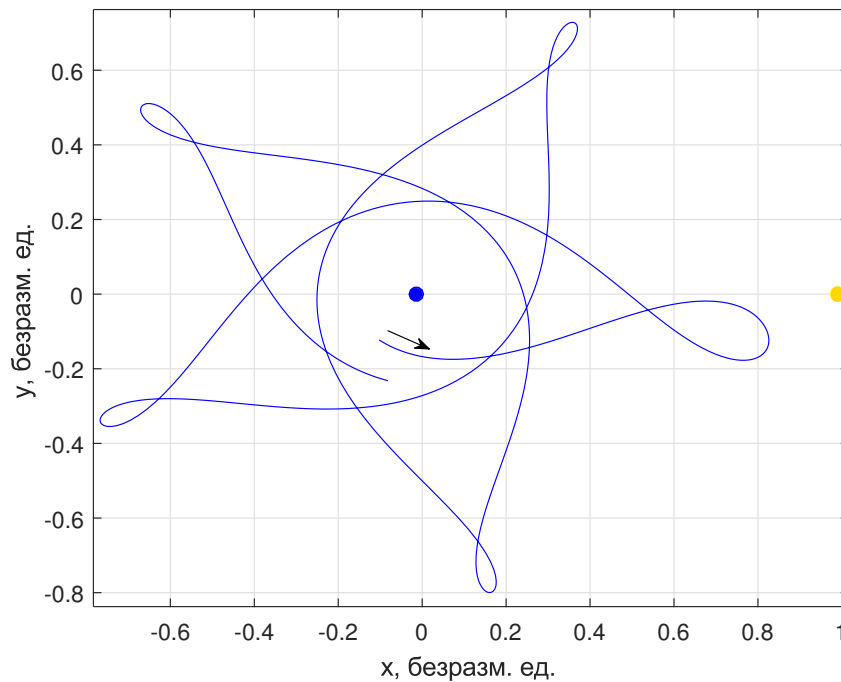


Рисунок 2.5 — Пример траектории со сближением у Луны (желтый круг); сближение повышает перигей орбиты КА (синяя кривая), стрелка указывает направление движения КА; вращающаяся система координат модели CR3BP

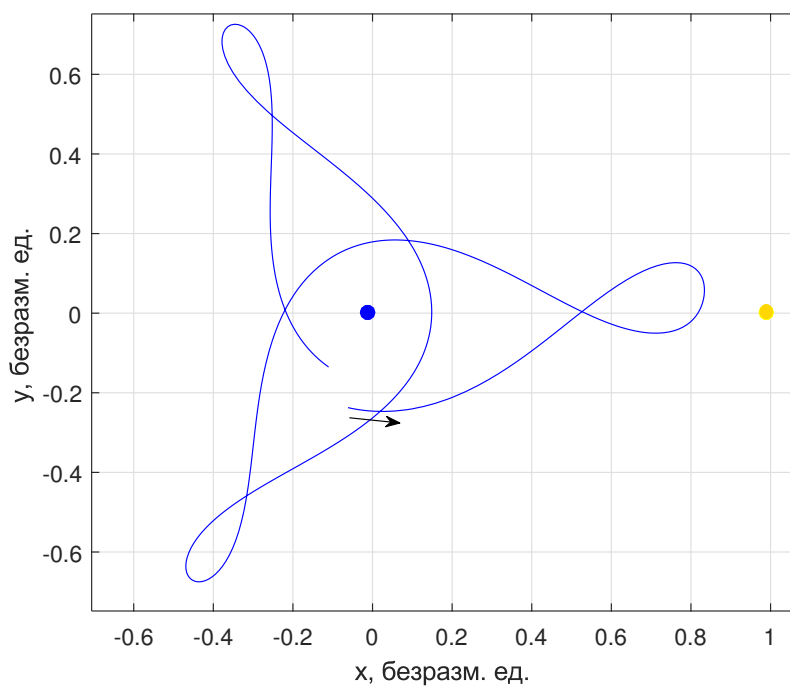


Рисунок 2.6 — Пример траектории со сближением у Луны (желтый круг); сближение понижает перигей орбиты КА (синяя кривая), стрелка указывает направление движения КА; вращающаяся система координат модели CR3BP

В данном исследовании сближения используются на третьем этапе для увеличения высоты перигея. Для достижения этой цели проектируется специальная процедура перескока между резонансными орбитами, чтобы возрастание энергии в результате сближений было повторяющимся. Серия таких резонансных сближений с Луной оканчивается на устойчивом многообразии выбранной гало-орбиты вокруг точки L_1 системы Земля–Луна. Идея использования последовательных резонансных сближений уже была высказана в прикладных задачах [27, 139, 138, 40]. В работе [40] была предложена процедура нацеливания на резонансные орбиты с целью увеличения или уменьшения энергии аппарата. А именно, в перигее орбиты подбирается такой импульс, чтобы орбита аппарата стала наиболее близка к резонансной орбите, которая бы обеспечила изменение энергии в результате последующего сближения. Недостатком такой процедуры является то, что импульс обеспечивает лишь текущее попадание на резонансную орбиту и никак не контролирует условия при следующем проходе перигея. В результате такого управления следующий импульс в перигее может оказаться неоправданно большим. В настоящей диссертации предлагается ранее не исследованный подход – искать такое управление в окрестности перигея, чтобы орбита была близка к резонансной не только при текущем пролете перигея, но и при следующем. Для простоты сначала находится импульсное управление, при этом ограничивается максимально допустимая величина импульса. Затем импульсы заменяются на эквивалентные по действию конечные активные участки вблизи перигея.

Проясним теперь некоторые термины, которые будут встречаться далее в работе. Под сближением будем понимать событие, в момент которого расстояние до Луны принимает локально минимальное значение. Дополнительно потребуем, чтобы эта величина была достаточно малой (менее 115 000 км, в данной работе). Резонанс $l : m$ означает, что период T оскулирующей орбиты КА вокруг Земли связан с орбитальным периодом $T_M = 2\pi$ движения Луны вокруг Земли следующим соотношением

$$l \cdot T = m \cdot 2\pi$$

Здесь l – число периодов КА вокруг Земли и m – число орбитальных периодов Луны. Большая полуось a_{res} , связанная с резонансом $l : m$, выражается по

формуле

$$a_{\text{res}} = (1 - \mu)^{1/3} (m/l)^{2/3}$$

где μ – массовый параметр системы Земля–Луна.

2.5 Алгоритм построения траектории перелета к лунной точке либрации L_1 с использованием резонансных сближений

Рассмотрим теперь алгоритм перелета более детально. Как уже было сказано, перелет состоит из трех этапов: 1) движение по раскручивающейся спирали до тех пор, пока перигей не выйдет за пределы радиационных поясов, 2) оптимальное по быстродействию поднятие орбиты и 3) последующие резонансные сближения и выход на устойчивое многообразие гало-орбиты. Расчеты начинаются с первого и третьего этапов перелета. Второй этап связывает траектории, полученные на первом и третьем этапах.

2.5.1 Первый этап перелета

Сначала выбираются размеры и наклонение опорной околоземной орбиты, год запуска миссии и эклиптическая долгота Солнца λ_{S0} . Год запуска и λ_{S0} однозначно определяют время старта t_0 и ДВУ орбиты Луны Ω_{M0} на момент t_0 . Пусть выбрана разность ДВУ орбит КА и Луны $\Delta\Omega$ на момент старта, тогда ДВУ КА равна $\Omega_0 = \Omega_M + \Delta\Omega$. Задав характеристики КА, можно проинтегрировать уравнения движения (2.1), учитывая возмущения со стороны атмосферы Земли, зональной гармонике J_2 , сил притяжения Луны и Солнца. Направление тяги на первом этапе считаем касательным к траектории. Тяга включена всюду, за исключением теневых участков Земли. Стартуя из перигея, траектория распространяется до тех пор, пока высота перигея не поднимется выше радиационных поясов (30 тыс. км в данной работе). На выходе первого этапа получаем орбитальные элементы \mathbf{oe}_1 .

2.5.2 Третий этап перелета

Независимо от первого этапа можно рассчитать третий этап перелета. Для простоты сначала будем считать управление импульсным, впоследствии импульсы будут заменены конечными активными участками. Построение траектории перелета здесь ведется с конца, т.е. распространением траектории назад во времени согласно следующему алгоритму:

1) Выбрать точку на гало-орбите, рассчитать устойчивую асимптотическую траекторию и распространить ее до перигея. Обозначить последнее фазовое состояние символом $\mathbf{x}_0 = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$. Здесь и далее под перигеем понимается точка (на траектории), в которой расстояние до Земли принимает локально минимальное значение. Дополнительно требуется, чтобы эта величина была достаточно малой (менее 270 000 км в данном исследовании).

2) Найти такой импульс³ $\Delta\mathbf{v}_0$ в точке \mathbf{r}_0 , чтобы траектория, распространяемая из состояния $\mathbf{x}_0^+ = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 - \Delta\mathbf{v}_0]$, сблизилась с Луной в точке с $y < 0$. Такая стратегия уменьшает большую полуось [40] и подготавливает ориентацию орбиты для будущих сближений, понижающих энергию. Если $|\Delta\mathbf{v}_0| > \Delta v_{\max}$ для некоторого заранее заданного ограничения на величину импульса Δv_{\max} , то следует выбрать другую точку на гало-орбите и повторить расчеты с пункта 1. Если же $|\Delta\mathbf{v}_0| < \Delta v_{\max}$, то обозначить время сближения символом T_{a1} и распространить траекторию до нового перигея $\mathbf{x}_1 = [\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1]$.

3) Выбрать пару резонансов $l_1 : m_1$ и $l_2 : m_2$, таких что $l_2/m_2 > l_1/m_1$. Вычислить большую полуось $a_{\text{res},1}$, которая соответствует резонансу $l_1 : m_1$ и большую полуось $a_{\text{res},2}$, которая соответствует резонансу $l_2 : m_2$.

4) Пусть $\Delta\mathbf{v}_1$ обозначает импульс в точке \mathbf{r}_1 . Пусть $\mathbf{x}_1^+ = [\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1 - \Delta\mathbf{v}_1]$ – фазовое состояние после импульса и a_1 – соответствующая большая полуось. Распространение траектории от \mathbf{x}_1^+ до сближения и затем до перигея дает фазовое состояние \mathbf{x}_2 . Пусть a_2 – большая полуось в точке \mathbf{x}_2 . Найти импульс $\Delta\mathbf{v}_1$, такой, чтобы $|a_1 - a_{\text{res},1}|$ и $|a_2 - a_{\text{res},2}|$ были минимальными и y -координата была отрицательна в момент сближения; найти соответствующий \mathbf{x}_2 и время в момент сближения T_{a2} .

³Для того, чтобы впоследствии заменить импульсы эквивалентными по действию конечными активными участками вблизи перигея, необходимо заранее ограничить сверху возможные значения импульса. Это ограничение определяется параметрами МКА и двигателя малой тяги, а также выбором максимально допустимого размера активного участка. В данной работе для миниаппарата это ограничение составляло 50 м/с, а для наноаппарата – 25 м/с.

5) Проверить выполнение следующих условий на резонанс $l_1 : m_1$

$$\left| \frac{|T_{a2} - T_{a1}|}{2\pi} - m_1 \right| < \varepsilon_m, \quad \frac{|a_1 - a_{\text{res},1}|}{a_{\text{res},1}} < \varepsilon_a \quad (2.12)$$

Здесь ε_m и ε_a малы ($\varepsilon_m = 0.5$ и $\varepsilon_a = 0.05$ в этом исследовании). Если условие выполнено, перейти к пункту 6; иначе вернуться к пункту 4 и выбрать другую пару резонансов.

6) Будучи в \mathbf{x}_2 , выбрать другую пару резонансов $l_2 : m_2$ и $l_3 : m_3$, такую, чтобы $l_3/m_3 > l_2/m_2$, вычислить соответствующие им большие полуоси и повторить два предыдущих пункта алгоритма, заменив $\Delta \mathbf{x}_1$ на $\Delta \mathbf{v}_2$, \mathbf{x}_1^+ на \mathbf{x}_2^+ и так далее. В общем случае получающаяся цепочка резонансов продолжается до тех пор, пока выполняется $l_i/m_i \leq (l/m)_{\text{max}}$ и $m_i \leq m_{\text{max}}$ для заранее заданных величин $(l/m)_{\text{max}}$ и m_{max} , $i \geq 1$. При этом если на какой-то i -й итерации не были выполнены условия (2.12) или не было выполнено хотя бы одно из условий $|\Delta \mathbf{v}_i| \leq \Delta v_{\text{max}}$, $r_{\alpha,i} \leq r_{\alpha,\text{max}}$ и $r_{\pi,i} \geq r_{\pi,\text{min}}$ для заранее заданных ограничений на величину импульса Δv_{max} , максимальную величину апогея $r_{\alpha,\text{max}}$ и минимальную величину перигея $r_{\pi,\text{min}}$, то вся соответствующая цепочка резонансов удаляется и более не рассматривается, вместо нее выбирается новая пара резонансов $l_1 : m_1 \rightarrow l_2 : m_2$ и расчеты повторяются уже для новой начальной пары резонансов. Если же все ограничения выполнены, то перейти к пункту 7.

7) Пусть $\mathbf{x}_k = [\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k]$ – фазовое состояние в перигее в конце полученной цепочки резонансов. Найти такой импульс $\Delta \mathbf{v}_k$ в точке \mathbf{r}_k , чтобы траектория, распространяемая из $\mathbf{x}_k^+ = [\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k - \Delta \mathbf{v}_k]$ сближалась с Луной в точке с $y < 0$; обозначить $T_{a,k+1}$ соответствующее время в момент сближения. Затем распространить траекторию до перигея и убедиться, что эта орбита близка к соответствующему резонансу $l_k : m_k$:

$$\left| \frac{|T_{a,k+1} - T_{a,k}|}{2\pi} - m_k \right| < \varepsilon_m, \quad \frac{|a_k - a_{\text{res},k}|}{a_{\text{res},k}} < \varepsilon_a$$

На этом шаге последовательность резонансов $l_1 : m_1 \rightarrow l_2 : m_2 \rightarrow \dots \rightarrow l_k : m_k$ считается рассчитанной, данные обо всех характеристиках траектории перелета сохраняются, и мы переходим к расчету других последовательностей. Когда все возможные последовательности просчитаны, алгоритм останавливает свою работу и третий этап считается завершенным. Выходом третьего этапа являет-

ся набор полученных траекторий и соответствующие им фазовые состояния в перигее во вращающейся системе координат. Эти фазовые состояния для каждой найденной траектории переводятся в орбитальные элементы $\mathbf{oe}_2(t_2)$ по отношению к ИСК и потому зависят от пока неопределенного времени t_2 конца второго этапа. Впоследствии каждая из полученных функций $\mathbf{oe}_2(t_2)$ для каждой траектории третьего этапа в отдельности будет служить терминальным многообразием оптимизационной задачи второго этапа.

Поясним, что минимизация величины $|a_1 - a_{\text{res},1}|$ заставляет КА повторить сближение после l_1 периодов КА вокруг Земли и m_1 периодов Луны вокруг Земли. Минимизация величины $|a_2 - a_{\text{res},2}|$ подготавливает орбиту КА для будущего резонанса. Вследствие лунных возмущений следующее сближение может произойти в точке с положительной y -координатой y_a , что увеличит размеры орбиты после сближения. Поэтому необходимо принимать во внимание ограничение-неравенство $y_a < 0$. Отметим также, что условие $l_2/m_2 > l_1/m_1$ обеспечивает $a_{\text{res},2} < a_{\text{res},1}$, поэтому в идеальном случае оптимизация приведет к $a_2 < a_1$.

Реализация вышеуказанного алгоритма требует тщательного подбора численных методов оптимизации, решения систем нелинейных уравнений, а также функций невязок и функционалов. Эксперименты показали, что от выбранных методов и функционалов существенно зависит итоговое количество найденных траекторий и затраты на маневрирование в каждой из точек перигея. Исследованию подверглись метод последовательного квадратичного программирования, несколько вариантов метода доверительных областей и метода внутренней точки, неградиентный метод Нельдера–Мида, глобальные методы оптимизации, а также многокритериальные методы оптимизации. Из функционалов рассматривались как модули невязок больших полуосей, так и их квадраты, причем перебирались различные варианты построения функционала как суммы невязок с различными коэффициентами. Опуская промежуточные результаты такого всестороннего исследования, перейдем к итогу данного поиска.

Первый импульс $\Delta \mathbf{v}_0$ при сходе с многообразия ищется из минимизации $|\Delta \mathbf{v}_0| \rightarrow \min$ при ограничениях

$$0.5 \leq x_a \leq 0.9 \quad (2.13)$$

$$-0.3 \leq y_a \leq -0.005 \quad (2.14)$$

в момент последующего сближения с помощью метода последовательного квадратичного программирования. Нулевой вектор используется в качестве начального приближения.

Маневры, направленные на перескоки между резонансами, рассчитываются с помощью алгоритма Гембики [140], при этом переменными оптимизации являются компоненты вектора $\Delta \mathbf{v}$ в текущем перигее, а минимизируется функционал

$$\max \left((a_1 - a_{\text{res},1})^2, (a_2 - a_{\text{res},2})^2, (y_a + 0.1)^2 \right) \rightarrow \min$$

с ограничениями-неравенствами (2.13) в момент сближения, где a_1 – большая полуось после импульса в текущей точке перигея, a_2 – большая полуось в последующей точке перигея, $a_{\text{res},1}$ и $a_{\text{res},2}$ – требуемые большие полуоси, отвечающие рассматриваемым резонансам. Начальным приближением также служил нулевой вектор. Оптимизация проводилась с помощью функции FGOALATTAIN библиотеки методов Optimization Toolbox в среде MATLAB.

Наконец, в пункте 7 импульс $\Delta \mathbf{v}_k$ находится из минимизации $0 \rightarrow \min$ при все тех же ограничениях-неравенствах (2.13) с помощью метода последовательного квадратичного программирования. Начальным приближением является нулевой вектор. Стоит заметить, что несмотря на то, что в данном месте $|\Delta \mathbf{v}_k|$ не оптимизируется (от метода оптимизации требуется лишь выйти на ограничения-неравенства), он всегда оказывался малым и не превышающим максимально допустимое значение Δv_{max} . Такой подход позволяет безвредно сэкономить на числе итераций и ускорить сходимость метода.

Ограничения, используемые алгоритмом построения резонансных последовательностей на третьем этапе перелета, приведены в таблице 2.4. Ограничение на m означает, что перелет между резонансными орбитами не должен превышать 4 орбитальных периода Луны вокруг Земли, в то время как $(l/m)_{\text{max}}$ ограничивает число витков аппарата вокруг Земли за орбитальный период Луны. Подобные ограничения вводятся для того, чтобы заранее исключить случаи неэффективных резонансных сближений. То же касается и ограничения на минимальную величину апогея $r_{\alpha, \text{min}}$: эксперименты показали, что если апогейное расстояние меньше 250 000 км, то эффект от сближения с Луной крайне мал. Ограничение сверху на апогейное расстояние (384 000 км) необходимо потому, что в результате импульса в перигее апогей может повыситься, и траектория

может быть баллистически захвачена Луной. Ограничение снизу на величину перигея объясняется появлением радиационных поясов на этом расстоянии.

Таблица 2.4

Ограничения на третьем этапе

Параметр	Выбранное значение
Δv_{\max}	50 м/с (мини-ДУ) и 25 м/с (нано-ДУ)
m_{\max}	4
$(l/m)_{\max}$	4
$r_{\pi, \min}$	30 000 км
$r_{\alpha, \min}$	250 000 км
$r_{\alpha, \max}$	384 000 км

2.5.3 Второй этап перелета

Траектории, рассчитанные на первом и третьем этапе, сшиваются на втором этапе перелета. Прямое применение принципа максимума Понтрягина с учетом всех возмущений и нефиксированного правого краевого условия практически невозможно из-за высокой чувствительности задачи к начальному приближению для вектора сопряженных переменных, различному поведению процедур решения системы нелинейных уравнений в зависимости от начального приближения и отсутствию сходимости. И хотя в каждом конкретном случае начальные приближения сопряженных переменных можно подбирать вручную методом проб и ошибок, это может оказаться трудоемкой задачей. Здесь же целью ставится создание именно автоматизированной процедуры построения траекторий.

Универсальных способов получения начального приближения для сопряженных переменных, которое бы обеспечивало сходимость, по-видимому, не существует. В отдельных случаях можно воспользоваться методом продолжения по параметру [141], гибридными методами оптимизации [142], гибридными методами решения систем нелинейных уравнений [143], градиентными и неградиентными методами глобальной оптимизации и пр. В данной задаче из-за большого числа витков и того, что правая граница краевой задачи не фиксирована,

а принадлежит некоторому множеству, эти методы оказались неэффективными. Эффективным же оказался способ последовательного усложнения модели в рамках которого рассчитывается траектория. Поэтому построение траектории перелета на втором этапе разбивается на несколько шагов.

Сначала строим оптимальное управление для усредненной задачи [144], учтя при этом из возмущений только зональную гармонику J_2 . В первую очередь рекомендуется построить оптимальное управление для выхода на одну из точек множества $\{\mathbf{oe}_2(t_2) : t_2 > t_1\}$ (в усредненной задаче краевого условия на истинную долготу нет). Численные эксперименты показывают, что уже в этом случае сходимость процедуры существенно зависит лишь от начального приближения для времени полета $T = t_2 - t_1$: от оптимального значения оно не должно отличаться более чем на 4.5 дня. Области значений начальных приближений T для каждого типа начальной орбиты легко подобрать вручную всего один раз. После того, как процедура сошлась, найденное решение используется в качестве начального приближения для полноценного случая, когда правый конец $\mathbf{oe}_2(t_2)$ зависит от времени полета.

Так как решение усредненной задачи дает оптимальный перелет между двумя орбитами, точка входа на конечную орбиту может оказаться далеко от краевых условий $\mathbf{oe}_2(t_2)$, где теперь учитывается и эксцентрическая аномалия. Оказалось, что даже если истинная долгота отличается от требуемой на 180° , удовлетворить краевым условиям возможно, лишь немного скорректировав управление. Поэтому крайне эффективным средством коррекции траектории и управления оказывается метод параллельной пристрелки. Расчеты показали, что всего за 3–4 итерации метод параллельной пристрелки обеспечивает нужную фазу в конце траектории, чтобы правильно подойти к последующим резонансным сближениям.

До сих пор помимо центрального поля Земли учитывалась лишь гармоника J_2 . После того как целая траектория на втором этапе в такой простой модели найдена, к возмущениям добавляются силы гравитационного притяжения Солнца и Луны, сила светового давления и тень Земли. Уточнение траектории с учетом всех возмущений производится тем же методом параллельной пристрелки, при этом сходимость обеспечивается опять же за 3–4 итерации.

2.5.4 Переход от импульсного приближения к модели с активными участками

Как уже было неоднократно сказано, для упрощения оптимизационных процедур траектории с резонансными сближениями сначала рассчитываются в рамках импульсного приближения. При этом ограничивается максимально допустимая величина импульса при каждом прохождении перигея: 50 м/с для миниаппарата и 25 м/с для наноаппарата. Такие приращения скоростей на миниаппарате массой 300 кг удается реализовать приблизительно за 55 ч, а на наноаппарате – за 40 ч. Для типичных резонансных орбит, которые были получены в данной работе, эти времена составляли от 15 до 30% от периода резонансной орбиты. Отсюда следует, что для соответствия выбранной модели движения аппарата с малой тягой требуется заменить импульсы активными участками. Делается это после расчетов на втором этапе, когда становится известна масса аппарата перед началом резонансных сближений.

Пусть \mathbf{x}_π^+ обозначает фазовый вектор аппарата в точке перигея после импульса при распространении траектории вперед во времени, а \mathbf{x}_π^- обозначает фазовый вектор до импульса в той же точке. Оценим время, которое потребуется аппарату на приращение скорости Δv , и обозначим его $T = m\Delta v/F_T$; здесь m – масса аппарата, F_T – сила тяги двигателя. Распространим траекторию от вектора \mathbf{x}_π^- назад во времени на время $\alpha T/2$ и получим вектор \mathbf{x}_0 . Далее распространим траекторию вперед во времени от вектора \mathbf{x}_π^+ на время $\beta T/2$ и получим фазовый вектор \mathbf{x}_f . Коэффициенты $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ пока считаем неизвестными. Теперь, если удастся найти управление, которое бы обеспечивало за время $(\alpha + \beta)T/2$ переход с фазового вектора \mathbf{x}_0 на фазовый вектор \mathbf{x}_f , то, очевидно, замена импульса активным участком не повлияет на другие части траектории (в том числе на сближения с Луной). При этом малость допустимого значения импульса гарантирует то, что соседние активные участки не накладываются друг на друга.

Разобьем дугу траектории между \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_f на N участков, на каждом из них будем считать управление постоянным, а тягу включенной. На всем участке между \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_f управление является кусочно-постоянной функцией времени. Направление вектора тяги $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$ на каждом из участков будем задавать

двумя углами $\psi \in [0, 2\pi]$ и $\phi \in [0, \pi]$ по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= (F_T/m) \sin \phi \cos \psi \\ u_2 &= (F_T/m) \sin \phi \sin \psi \\ u_3 &= (F_T/m) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.15)$$

Обозначим $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N+1}$ пока неизвестные фазовые векторы в узлах N участков, а τ_1, \dots, τ_N – времена полета вдоль этих участков.

Ставится задача решения системы уравнений:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = 0$$

где вектор переменных \mathbf{y} содержит промежуточные точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N+1}$, времена перелета τ_1, \dots, τ_N , пары углов (ψ_i, ϕ_i) , $i = 1, \dots, N$ и коэффициенты α и β . Вектор невязок \mathbf{F} состоит из разностей $\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N^t - \mathbf{x}_{N+1}$, где \mathbf{x}_i^t – решение уравнений движения с тягой, определяемой по формулам (2.15) с парой углов (ψ_i, ϕ_i) на интервале времени $[0, \tau_i]$, $i = 1, \dots, N$, а также разностей $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{x}_f$ и $\tau_1 + \dots + \tau_N - T$. Так как количество переменных $6N + 6 + N + 2N + 2 = 9N + 8$ превышает число уравнений $6N + 6 + 6 + 1 = 6N + 13$ при $N > 1$, то следует пользоваться решением минимальной нормы (см. раздел 1.2.2).

Начальное приближение \mathbf{y}_0 сформировывалось из векторов состояния \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N$ на дуге между \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_f импульсного приближения, разбиение участка между \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_f было равномерным по времени, углы ψ_i и ϕ_i для всех $i = 1, \dots, N$ соответствовали направлению импульса $\Delta \mathbf{v}$ в точке перигея, а коэффициенты α и β брались в интервале 1.0–1.5. Эксперименты показали, что процедура решения уравнения в подавляющем большинстве случаев сходится ($\|\mathbf{F}\| < 10^{-12}$). При этом так как время перелета между \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_f также может увеличиться в 1.0–1.5 раза, то и масса затраченного топлива увеличивается во столько же раз. Всего на маневрирование вблизи перигея уходит порядка 0.01–1.2 кг топлива у миниаппарата и 1–10 г топлива у наноаппарата.

2.6 Результаты параметрического анализа

2.6.1 Анализ перелетов на первом этапе

Первый этап перелета был рассчитан при $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ и $\lambda_{S0} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ для обеих околоземных орбит (ГПО и НКО) и обоих аппаратов (мини и нано). Характеристики перелета для всех рассматриваемых $\Delta\Omega_0$ и λ_{S0} собраны в таблице 2.5. Здесь T – время перелета на первом этапе, $\Delta M/M_0$ – относительное изменение массы КА за это время полета, $T_{\text{тень}}$ – суммарное время нахождения в тени, $T_{\text{max,тень}}$ – максимальное время нахождения в тени. Из таблицы следует, что минимальное время полета достигается для мини-аппарата, который стартует с ГПО, а наименьшие относительные затраты топлива достигаются для наноаппарата, который также стартует с ГПО.

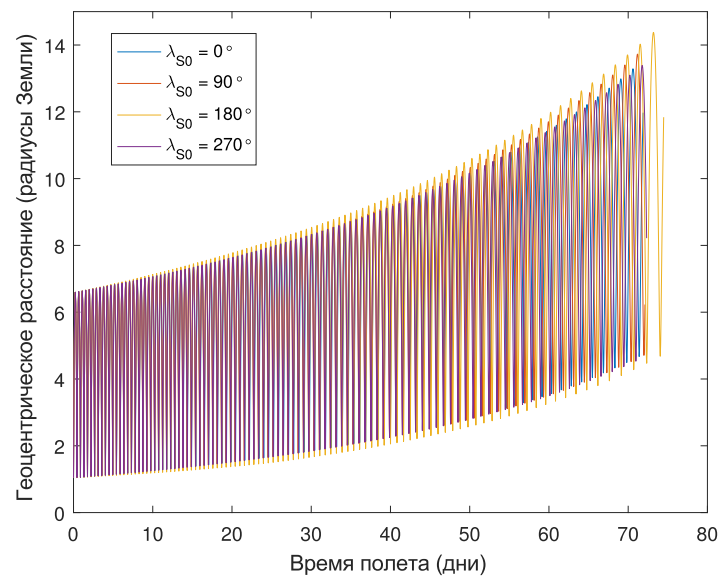
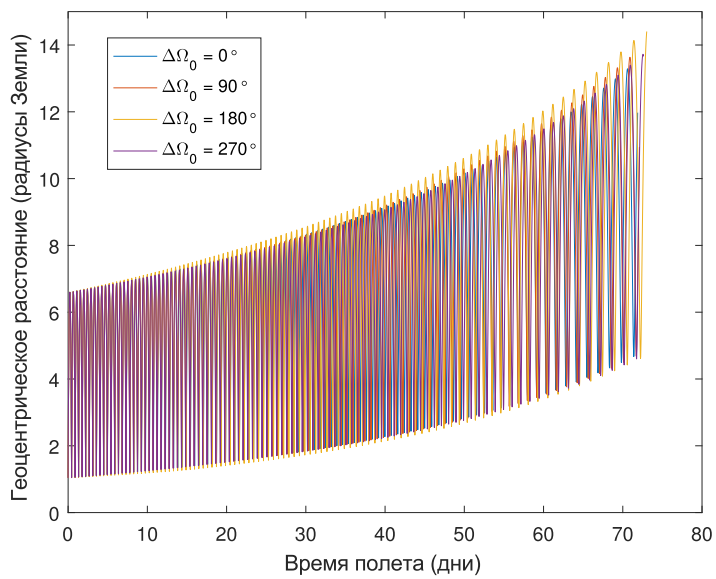
На рисунках 2.7 и 2.8 изображены зависимости расстояния до Земли от времени перелета для ГПО и НКО, соответственно, причем левая часть обоих рисунков отвечает случаю $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$ при различных λ_{S0} , а правая часть рисунков – случаю $\lambda_{S0} = 0$ при различных $\Delta\Omega_0$. Верхние части обоих рисунков построены для мини-аппарата, а нижние – для наноаппарата. Рисунки показывают, что вариация значений $\Delta\Omega_0$ и λ_{S0} для ГПО может изменить время полета на 1–2 дня. Что касается НКО, то вариация λ_{S0} может изменить время полета на 10–15 дней, а вариация $\Delta\Omega_0$ – на 20 дней. Изменчивость времени полета объясняется попаданием аппарата в тень Земли, где он движется без тяги, причем для ГПО этот разброс меньше.

Таблица 2.5

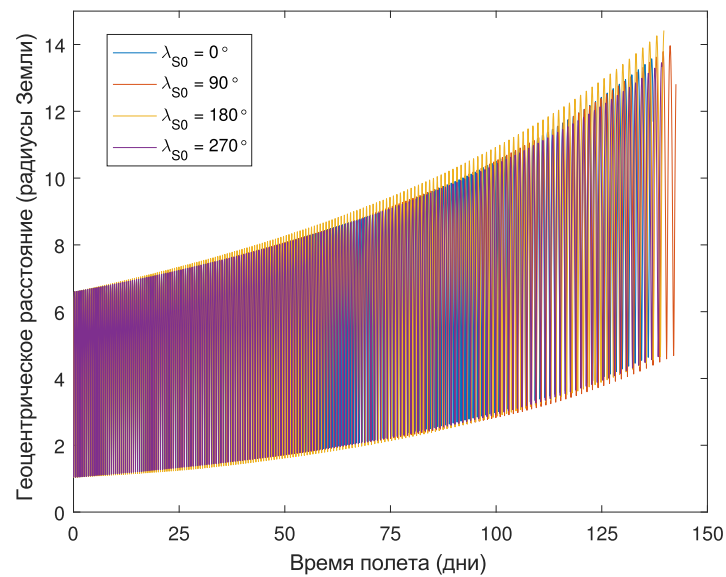
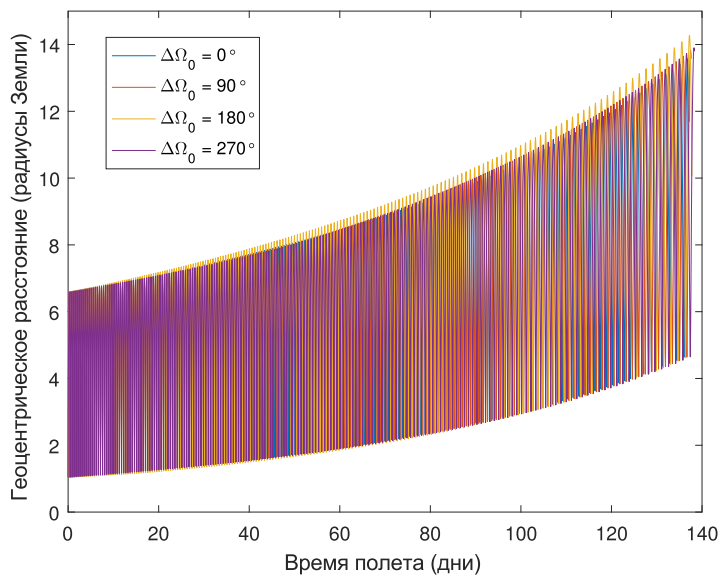
Характеристики перелетов на первом этапе

	ГПО	НКО
Мини-ДУ	$T = 72.3 \pm 2.1$ дней $\Delta M/M_0 = 0.1 \pm 0.0006$ $T_{\text{тень}} = 1.9 \pm 1.9$ дней $T_{\text{max,тень}} = 1.1 \pm 1.1$ ч	$T = 185.7 \pm 5.6$ дней $\Delta M/M_0 = 0.23 \pm 0.002$ $T_{\text{тень}} = 21.9 \pm 4.8$ дней $T_{\text{max,тень}} = 0.8 \pm 0.2$ ч
Нано-ДУ	$T = 139.0 \pm 3.5$ дней $\Delta M/M_0 = 0.05 \pm 0.0003$ $T_{\text{тень}} = 4.1 \pm 2.6$ дней $T_{\text{max,тень}} = 1.3 \pm 0.9$ ч	$T = 366.1 \pm 4.7$ дней $\Delta M/M_0 = 0.13 \pm 0.0003$ $T_{\text{тень}} = 43.2 \pm 4.5$ дней $T_{\text{max,тень}} = 0.8 \pm 0.1$ ч

Мини-ДУ



Нано-ДУ

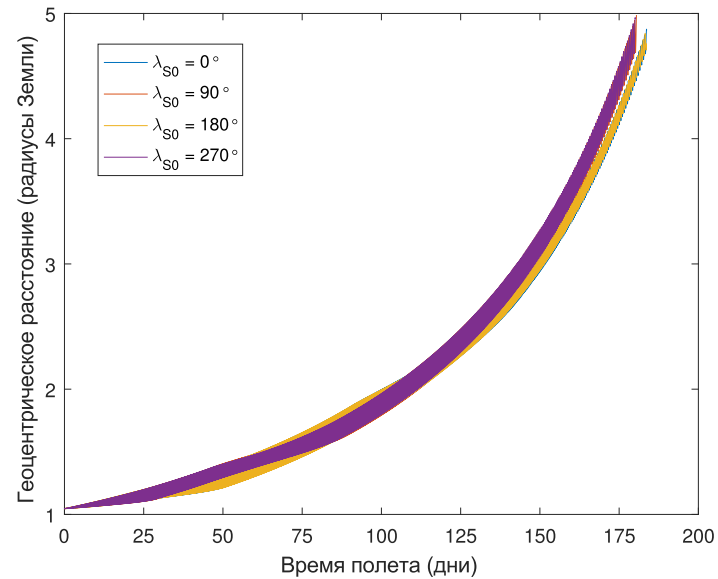
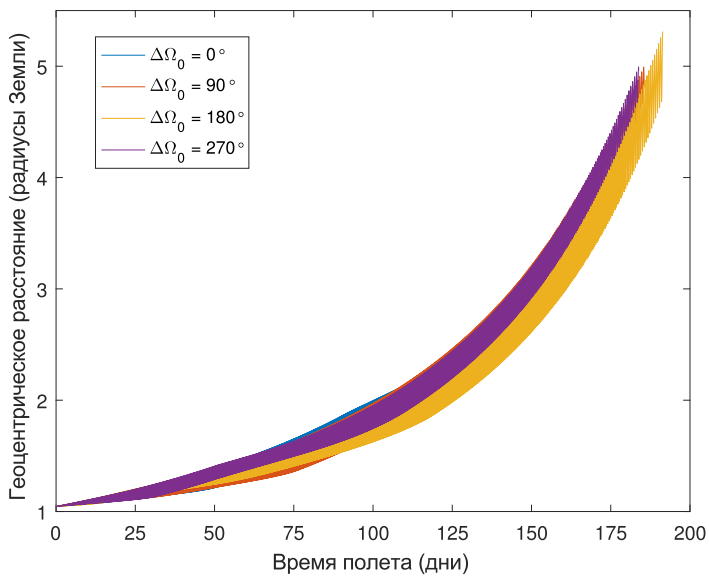


$$\Delta\Omega_0 = 0$$

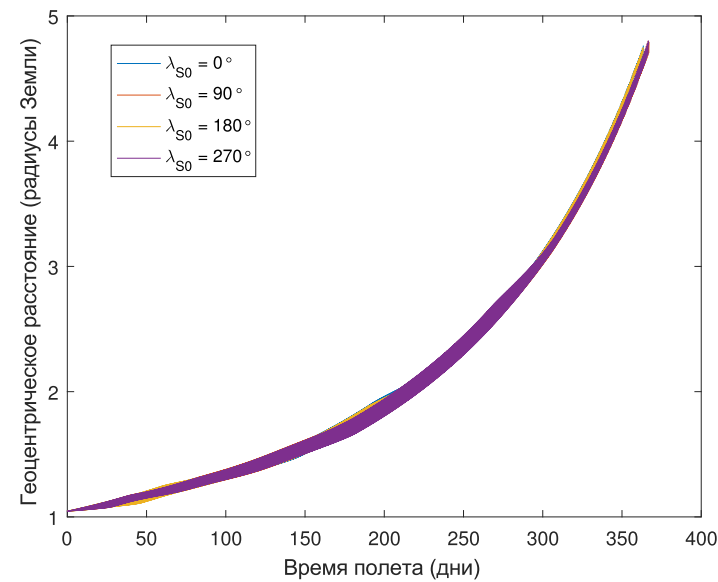
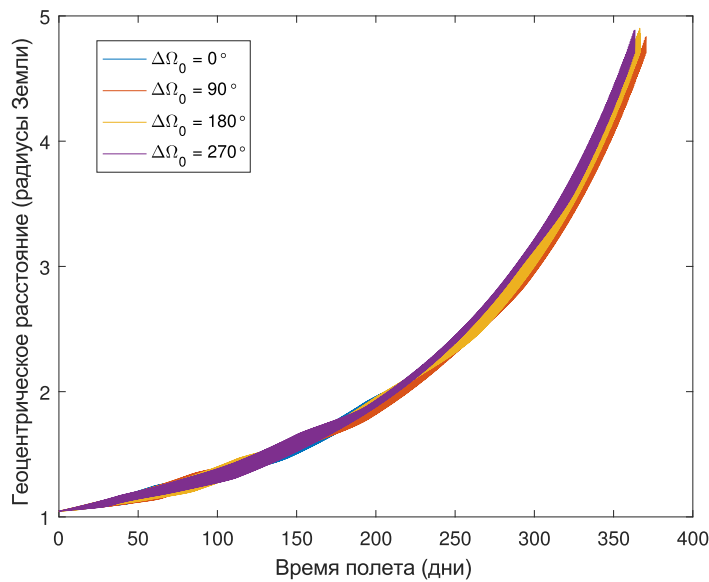
$$\lambda_{S0} = 0$$

Рисунок 2.7 — Геоцентрическое расстояние на первом этапе; старт с ГПО

Мини-ДУ



Нано-ДУ



$$\Delta\Omega_0 = 0$$

$$\lambda_{S0} = 0$$

Рисунок 2.8 — Геоцентрическое расстояние на первом этапе; старт с НКО

2.6.2 Анализ перелетов на третьем этапе

Характеристики всех найденных на третьем этапе перелетов помещены в таблицу 2.6 для гало-орбиты размера $A_z = 35\,000$ км и в таблицу 2.7 для гало-орбиты размера $A_z = 15\,000$ км. Эти данные были получены для мини-аппарата, которому соответствовало ограничение $\Delta v_{\max} = 50$ м/с на маневр. Можно видеть, что к обеим целевым орбитам могут привести резонансные последовательности

$$3 : 1 \rightarrow 5 : 2$$

$$7 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 5 : 2$$

$$10 : 3 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 7 : 3$$

и др.; в таблицах они выделены синим цветом. Можно также выделить некоторые подпоследовательности из более чем двух пар резонансов, характерные для выхода на обе гало-орбиты:

$$11 : 3 \rightarrow 7 : 2 \rightarrow 3 : 1$$

$$11 : 3 \rightarrow 7 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 5 : 2$$

в таблицах они отмечены оранжевым цветом. Наконец, некоторые резонансные последовательности, например

$$3 : 1 \rightarrow 2 : 1$$

$$8 : 3 \rightarrow 2 : 1$$

$$8 : 3 \rightarrow 6 : 3$$

характерны для орбиты размера $A_z = 35\,000$ км, а последовательности

$$3 : 1 \rightarrow 7 : 3$$

$$5 : 2 \rightarrow 6 : 3$$

$$5 : 2 \rightarrow 7 : 3$$

характерны для гало-орбиты размера $A_z = 15\,000$ км.

Что касается результатов для нано-ДУ (Δv_{\max}), то они для краткости здесь не приводятся, однако заметим, что при уменьшении ограничения на Δv вдвое, некоторые резонансные последовательности сохраняются, некоторые исчезают, и могут появиться новые последовательности. Сохранение и появление новых последовательностей объясняется тем, что вышеописанные оптимизационные процедуры содержат ограничения-неравенства, поэтому более жесткие ограничения на затраты характеристической скорости не обязательно приводят к отсеву траекторий, но направляют итерационную процедуру в область решений, необнаруживаемую при менее строгих ограничениях.

Таблица 2.6

Характеристики найденных траекторий на третьем этапе;

галло-орбита размера $A_z = 35\,000$ км; $\Delta v_{\max} = 50$ м/с

φ	последовательность $l : m$	r_π	r_α
0.0	7:2 → 3:1	0.123	0.740
0.0	11:3 → 7:2 → 3:1	0.119	0.722
0.1	10:3 → 3:1	0.169	0.745
0.2	3:1 → 5:2	0.111	0.781
0.2	7:2 → 3:1 → 5:2	0.112	0.757
0.2	11:3 → 7:2 → 3:1 → 5:2	0.100	0.736
0.2	4:1 → 11:3 → 7:2 → 3:1 → 5:2	0.091	0.710
0.4	3:1 → 5:2	0.150	0.790
0.4	7:2 → 3:1 → 5:2	0.125	0.742
0.4	7:2 → 10:3 → 5:2	0.156	0.716
0.5	3:1 → 2:1	0.151	0.802
0.5	7:2 → 3:1 → 2:1	0.114	0.757
0.6	3:1 → 2:1	0.179	0.774
0.6	8:3 → 2:1	0.209	0.733
0.6	7:2 → 3:1 → 2:1	0.141	0.725
0.6	10:3 → 3:1 → 2:1	0.162	0.756
0.6	11:3 → 7:2 → 3:1 → 2:1	0.132	0.705
0.7	3:1 → 2:1	0.158	0.792
0.7	11:3 → 7:2 → 3:1 → 2:1	0.110	0.723
0.8	8:3 → 6:3	0.217	0.788
0.8	8:3 → 7:3	0.253	0.772
0.8	3:1 → 8:3 → 6:3	0.145	0.772
0.8	10:3 → 3:1 → 7:3	0.193	0.714
0.8	3:1 → 8:3 → 7:3	0.213	0.748
0.8	10:3 → 3:1 → 8:3 → 7:3	0.191	0.713

Таблица 2.7

Характеристики найденных траекторий на третьем этапе;

галло-орбита размера $A_z = 15\,000$ км; $\Delta v_{\max} = 50$ м/с

φ	последовательность $l : m$	r_π	r_α
0.3	3:1 → 5:2	0.129	0.778
0.3	7:2 → 3:1 → 5:2	0.122	0.749
0.3	11:3 → 7:2 → 3:1 → 5:2	0.108	0.723
0.4	5:2 → 6:3	0.232	0.772
0.4	5:2 → 7:3	0.259	0.755
0.4	3:1 → 5:2 → 6:3	0.180	0.773
0.4	8:3 → 5:2 → 7:3	0.303	0.745
0.4	7:2 → 3:1 → 5:2 → 6:3	0.139	0.722
0.4	11:3 → 7:2 → 3:1 → 5:2 → 6:3	0.134	0.702
0.6	3:1 → 5:2	0.202	0.754
0.7	3:1 → 7:3	0.190	0.756
0.7	3:1 → 8:3	0.142	0.759
0.7	10:3 → 3:1 → 7:3	0.173	0.736
0.8	3:1 → 7:3	0.191	0.758
0.8	3:1 → 8:3	0.142	0.757
0.8	10:3 → 3:1 → 7:3	0.173	0.737
0.8	11:3 → 7:2 → 3:1 → 8:3	0.135	0.704

На рисунке 2.9 изображены все найденные пары (r_α, r_π) для обеих целевых орбит. Из рисунка следует, что повышающие орбиту резонансные сближения возможны для орбит с перигейным расстоянием выше 34 864 км и апогейным расстоянием выше 269 845 км. На рисунке 2.10 изображен пример траектории перелета на третьем этапе. Траектория соответствует резонансной последовательности $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$, подсчитанной для точки $\varphi = 0.5$ гало-орбиты размера $A_z = 35\,000$ км. На рисунке 2.11 показана та же траектория, но в инерциальной системе координат с началом в центре Земли. Рисунки 2.12 и 2.13 для этого же случая показывают зависимость оскулирующих энергии кеплеровского движения и перигейного расстояния от времени полета на третьем этапе (напомним, что на третьем этапе траектории распространяются назад во времени; $t = 0$ соответствует точке на гало-орбите). Суммарные затраты характеристической скорости составляют 48.60 м/с, время полета 115.4 дня, а расстояния до перигея и апогея в начале третьего этапа равны, соответственно, 57 872 км и 308 332 км. На рисунках 2.14 и 2.15 изображена другая траектория с резонансными сближениями. Она отвечает цепочке резонансов $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$ и приводит на точку $\varphi = 0.2$ гало-орбиты $A_z = 35\,000$ км. Для этой траектории суммарные затраты характеристической скорости равны 48.28 м/с, а время полета 163.4 дня. Расстояния до перигея и апогея в начале третьего этапа равны 41 127 км и 300 600 км, соответственно.

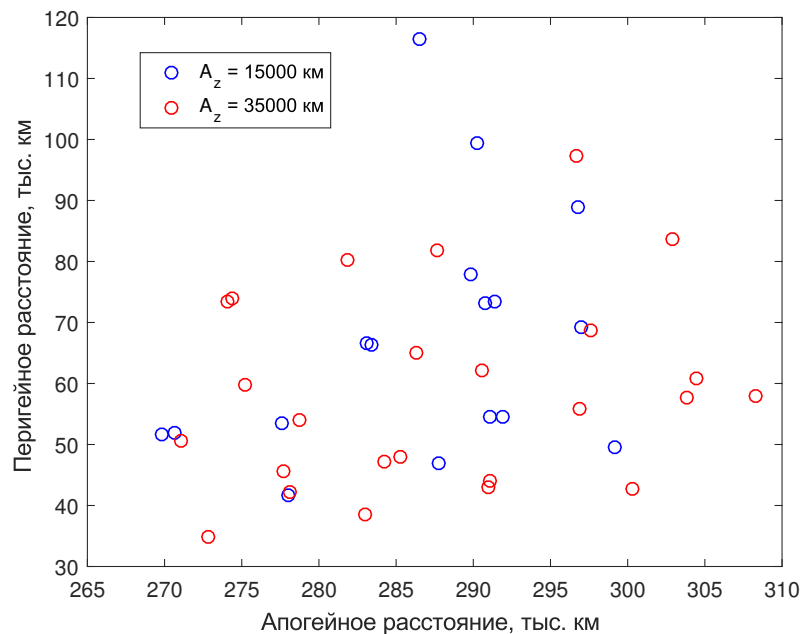


Рисунок 2.9 — Расстояние до перигея и апогея в начале третьего этапа

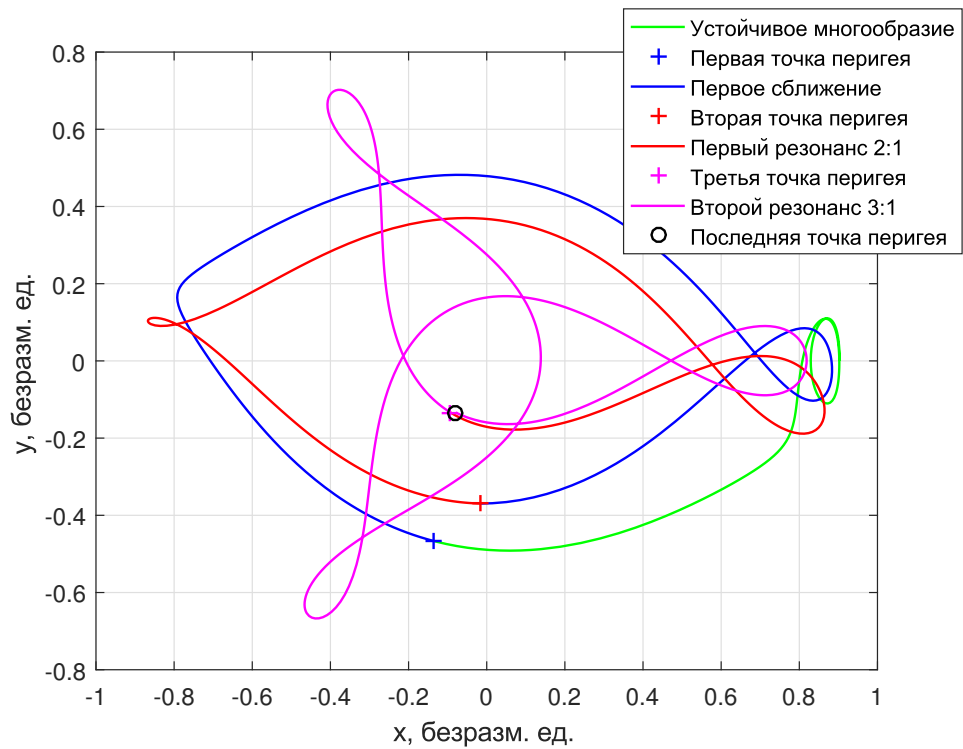


Рисунок 2.10 — Траектория, полученная на третьем этапе для $\varphi = 0.5$ гало-орбиты $A_z = 35\,000$ км, последовательность $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$ (вращающаяся система координат)

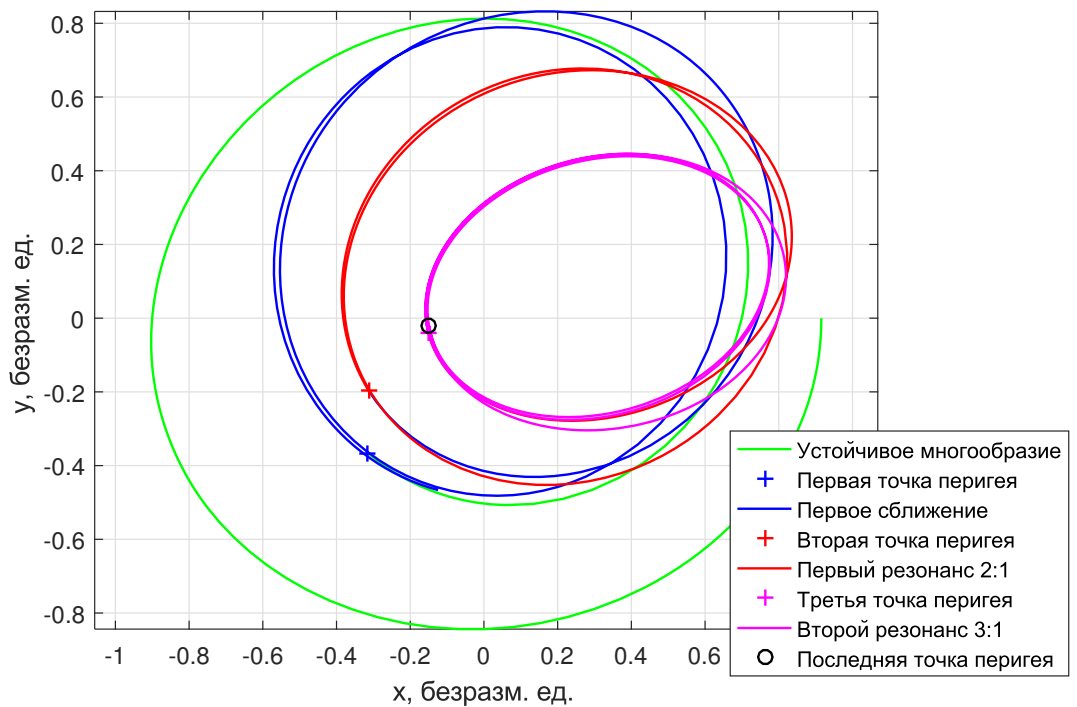


Рисунок 2.11 — Траектория, полученная на третьем этапе для $\varphi = 0.5$ гало-орбиты $A_z = 35\,000$ км, последовательность $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$ (инерциальная система координат с началом в центре Земли)

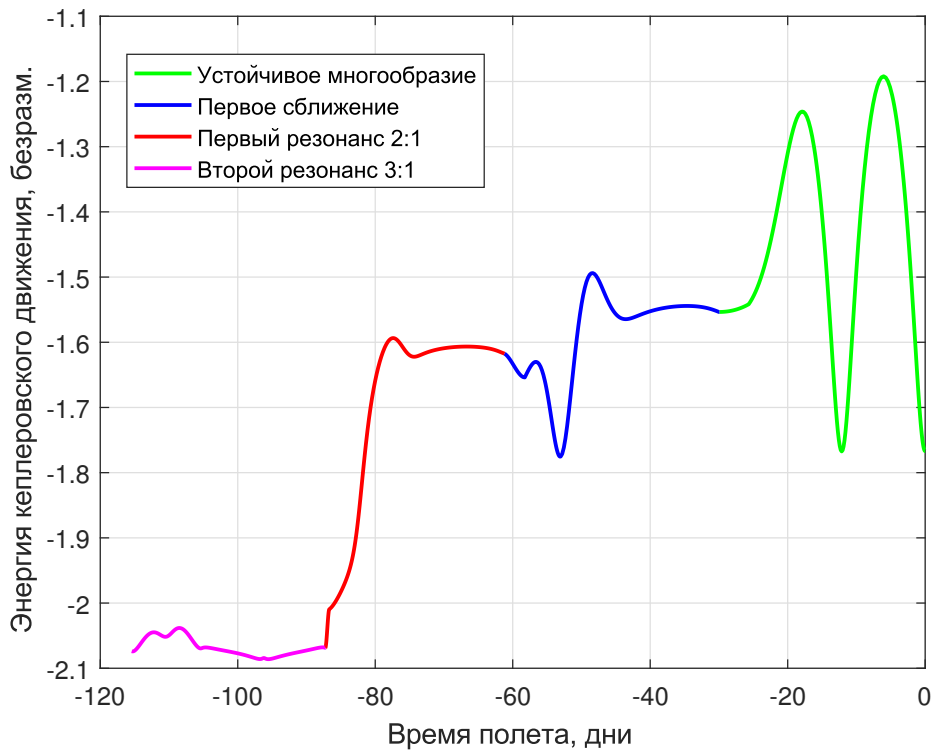


Рисунок 2.12 — Энергия кеплеровского движения по отношению к Земле на третьем этапе; $\varphi = 0.5$, гало-орбита $A_z = 35\,000$ км, последовательность $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$

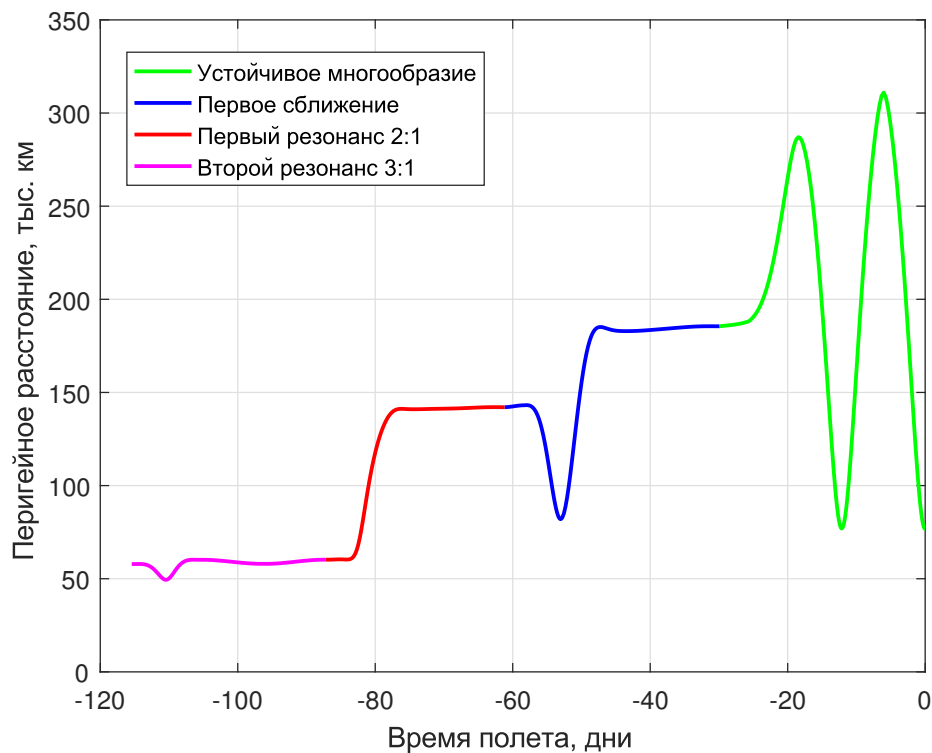


Рисунок 2.13 — Расстояние до перигея на третьем этапе; $\varphi = 0.5$, гало-орбита $A_z = 35\,000$ км, последовательность $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$

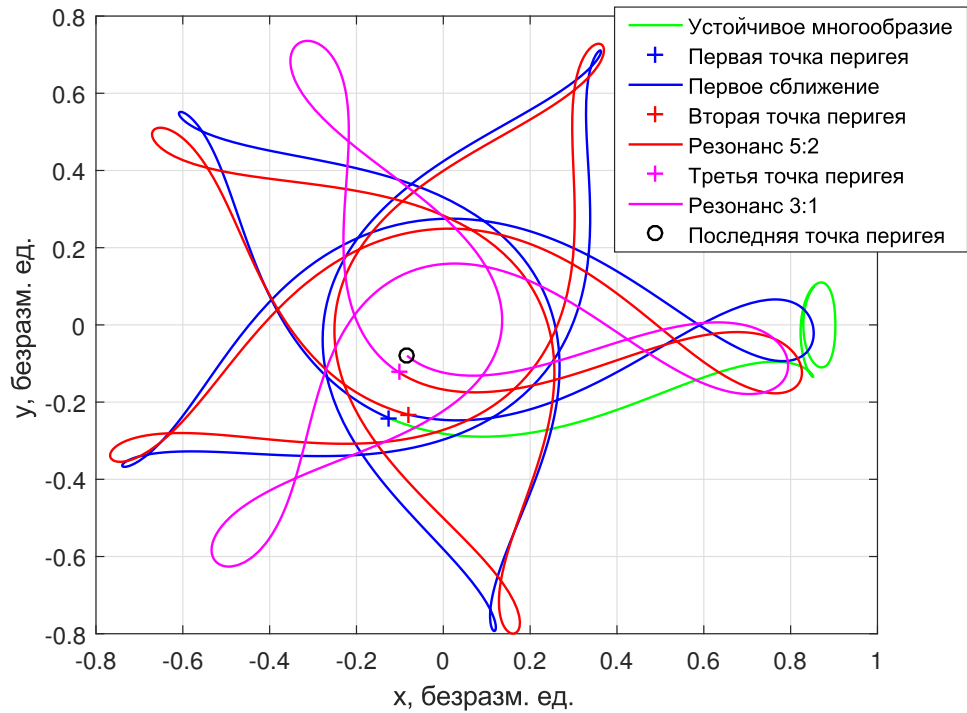


Рисунок 2.14 — Траектория, полученная на третьем этапе для $\varphi = 0.2$ гало-орбиты $A_z = 35\,000$ км, последовательность $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$ (вращающаяся система координат)

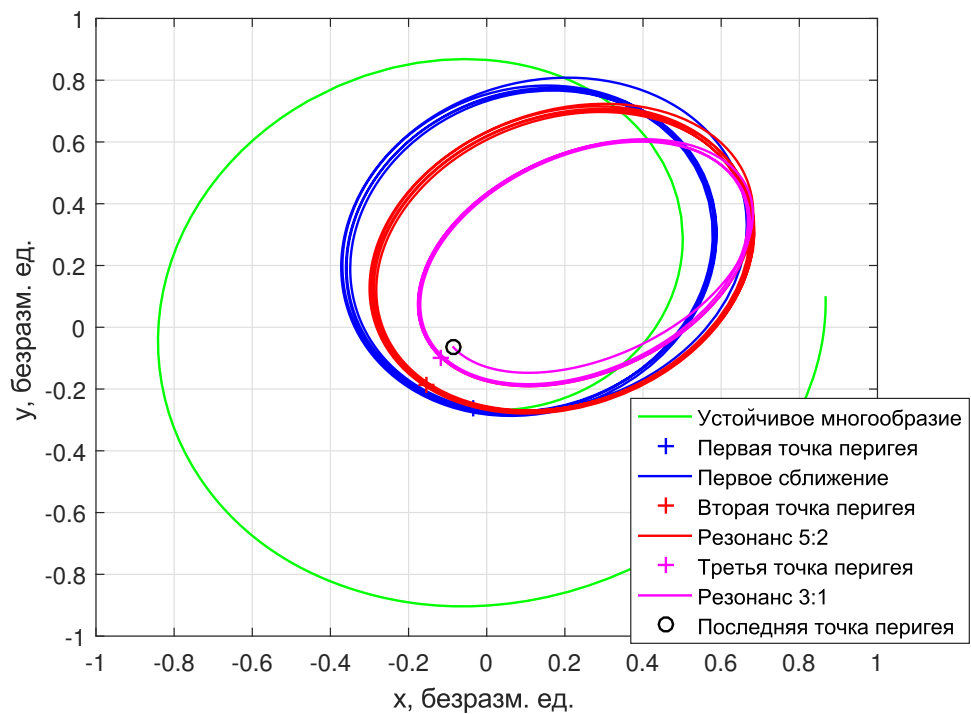


Рисунок 2.15 — Траектория, полученная на третьем этапе для $\varphi = 0.2$ гало-орбиты $A_z = 35\,000$ км, последовательность $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$ (инерциальная система координат с началом в центре Земли)

2.6.3 Анализ целых перелетов

Вариация параметров λ_{S_0} , $\Delta\Omega_0$, φ и резонансных последовательностей дает множество траекторий перелета между выбранной околоземной орбитой и гало-орбитой. А именно, каждая из 16 траекторий, подсчитанных на первом этапе, и отвечающих значениям $\Delta\Omega_0 = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ и $\lambda_{S_0} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ соединялись с каждой из 25 траекторий, полученных на третьем этапе для гало-орбиты размера $A_z = 35\,000$ км, и с каждой из 17 траекторий, полученных для гало-орбиты размера $A_z = 15\,000$ км. Добавим к этому еще две степени свободы в выборе стартовой околоземной орбиты и типа космического аппарата. В рамках данного исследования были проанализированы четыре случая выбора околоземной орбиты, целевой орбиты и космического аппарата, см. рисунок 2.16.

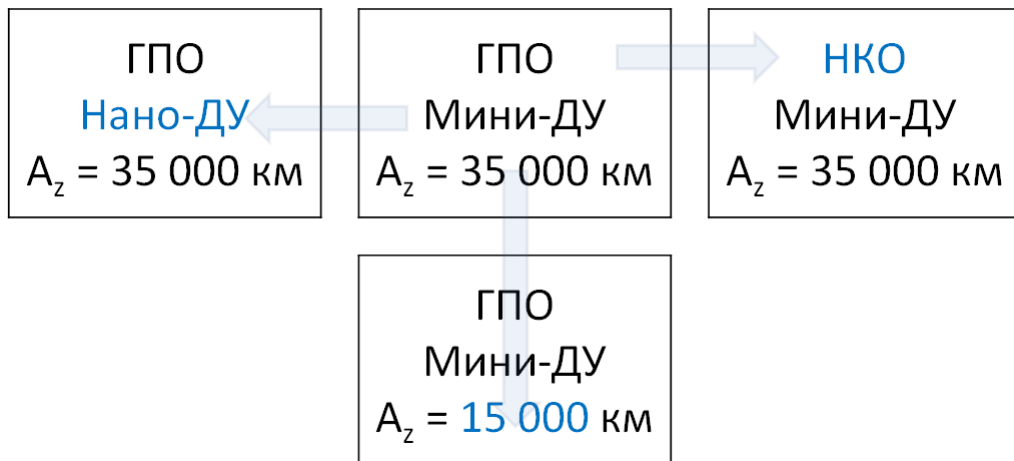


Рисунок 2.16 — Рассматриваемые случаи на втором этапе

Каждой паре параметров $(\lambda_{S_0}, \Delta\Omega_0)$ можно сопоставить набор траекторий, отличающихся перелетом на третьем этапе, и найти траекторию с наименьшим временем перелета с околоземной орбиты на целевую орбиту. Характеристики соответствующих траекторий могут быть собраны в ячейки таблицы, где столбцы отвечают различным значениям λ_{S_0} , а строки – различным значениям $\Delta\Omega_0$ (см. таблицы 2.8–2.11, построенные для четырех вышеназванных случаев). Из таблиц хорошо видно, что лучшими в плане скорости достижения гало-орбиты являются последовательности резонансов $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$ для гало-орбиты $A_z = 35\,000$ км и $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$ для гало-орбиты $A_z = 15\,000$ км, при этом аппарат прилетает на самые южные точки гало-орбиты (наиболее удаленные от плоскости Sxy при отрицательных значениях координаты z). Также оценены

относительные затраты топлива на перелет: около 20% в случаях (ГПО, мини-ДУ, 35 000 км) и (ГПО, мини-ДУ, 15 000 км), около 11% для случая (ГПО, нано-ДУ, 35 000 км) и около 38% в случае (НКО, мини-ДУ, 35 000 км). Как и следовало ожидать, перелет с ГПО на наноаппарате имеет наименьшие затраты среди всех рассчитанных перелетов для других случаев. Перелет на миниаппарате с НКО и высоким наклоном требует наибольших затрат топлива.

Такие таблицы дают глобальную картину решений и могут помочь провести предварительный баллистический анализ миссий.

Таблица 2.8

Характеристики траекторий перелета при различных параметрах запуска (ГПО, мини-ДУ, 35 000 км)

	$\lambda_{S0} = 0^\circ$	$\lambda_{S0} = 90^\circ$	$\lambda_{S0} = 180^\circ$	$\lambda_{S0} = 270^\circ$
$\Delta\Omega_0 = 270^\circ$	$T_{\min} = 252.79$ дней $T_{op} = 136.75$ дней $T_{sh} = 1.68$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1952$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 256.65$ дней $T_{op} = 142.73$ дней $T_{sh} = 1.65$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2038$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 249.92$ дней $T_{op} = 133.70$ дней $T_{sh} = 0.74$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1909$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 241.68$ дней $T_{op} = 126.65$ дней $T_{sh} = 1.67$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1808$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 180^\circ$	$T_{\min} = 260.77$ дней $T_{op} = 137.13$ дней $T_{sh} = 2.19$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1958$ $\varphi = 0.6$ $8 : 3 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 252.95$ дней $T_{op} = 138.82$ дней $T_{sh} = 0.95$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1982$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 251.72$ дней $T_{op} = 136.69$ дней $T_{sh} = 0.45$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1951$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 259.00$ дней $T_{op} = 137.25$ дней $T_{sh} = 2.43$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1959$ $\varphi = 0.6$ $8 : 3 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 90^\circ$	$T_{\min} = 253.22$ дней $T_{op} = 137.94$ дней $T_{sh} = 1.49$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1969$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 251.99$ дней $T_{op} = 136.12$ дней $T_{sh} = 0.99$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1943$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 260.62$ дней $T_{op} = 145.47$ дней $T_{sh} = 1.29$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2077$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 252.35$ дней $T_{op} = 137.55$ дней $T_{sh} = 1.68$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1964$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 0^\circ$	$T_{\min} = 248.00$ дней $T_{op} = 132.67$ дней $T_{sh} = 0.50$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1894$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 252.77$ дней $T_{op} = 136.99$ дней $T_{sh} = 2.22$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1956$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 254.18$ дней $T_{op} = 136.53$ дней $T_{sh} = 2.14$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1949$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 252.93$ дней $T_{op} = 136.06$ дней $T_{sh} = 1.19$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1942$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$

Таблица 2.9

Характеристики траекторий перелета при различных параметрах запуска (ГПО, мини-ДУ, 15 000 км)

	$\lambda_{S0} = 0^\circ$	$\lambda_{S0} = 90^\circ$	$\lambda_{S0} = 180^\circ$	$\lambda_{S0} = 270^\circ$
$\Delta\Omega_0 = 270^\circ$	$T_{\min} = 284.52$ дней $T_{op} = 136.95$ дней $T_{sh} = 0.87$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1955$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 288.90$ дней $T_{op} = 143.24$ дней $T_{sh} = 1.51$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2045$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 288.80$ дней $T_{op} = 140.93$ дней $T_{sh} = 1.09$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2012$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 283.36$ дней $T_{op} = 136.62$ дней $T_{sh} = 1.56$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1950$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$
$\Delta\Omega_0 = 180^\circ$	$T_{\min} = 290.50$ дней $T_{op} = 142.59$ дней $T_{sh} = 2.19$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2035$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 282.74$ дней $T_{op} = 136.98$ дней $T_{sh} = 1.01$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1955$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 283.43$ дней $T_{op} = 136.74$ дней $T_{sh} = 1.59$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1952$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 289.73$ дней $T_{op} = 143.64$ дней $T_{sh} = 2.59$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2050$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$
$\Delta\Omega_0 = 90^\circ$	$T_{\min} = 284.35$ дней $T_{op} = 137.55$ дней $T_{sh} = 0.73$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1963$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 280.86$ дней $T_{op} = 133.29$ дней $T_{sh} = 1.01$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1903$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 290.10$ дней $T_{op} = 143.38$ дней $T_{sh} = 1.52$ часов $\Delta M/M_0 = 0.2047$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 283.24$ дней $T_{op} = 136.98$ дней $T_{sh} = 1.67$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1955$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$
$\Delta\Omega_0 = 0^\circ$	$T_{\min} = 279.30$ дней $T_{op} = 132.26$ дней $T_{sh} = 2.95$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1888$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 284.17$ дней $T_{op} = 136.66$ дней $T_{sh} = 2.35$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1951$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 286.14$ дней $T_{op} = 136.84$ дней $T_{sh} = 2.14$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1953$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$	$T_{\min} = 284.69$ дней $T_{op} = 136.26$ дней $T_{sh} = 1.33$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1945$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 5 : 2$

Таблица 2.10

Характеристики траекторий перелета при различных параметрах запуска (ГПО, нано-ДУ, 35 000 км)

	$\lambda_{S0} = 0^\circ$	$\lambda_{S0} = 90^\circ$	$\lambda_{S0} = 180^\circ$	$\lambda_{S0} = 270^\circ$
$\Delta\Omega_0 = 270^\circ$	$T_{\min} = 363.70$ дней $T_{op} = 267.14$ дней $T_{sh} = 1.95$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1082$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 365.07$ дней $T_{op} = 279.24$ дней $T_{sh} = 2.22$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1131$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 361.83$ дней $T_{op} = 273.70$ дней $T_{sh} = 1.39$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1109$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 372.59$ дней $T_{op} = 284.46$ дней $T_{sh} = 1.52$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1153$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 180^\circ$	$T_{\min} = 343.91$ дней $T_{op} = 256.51$ дней $T_{sh} = 2.18$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1039$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 369.96$ дней $T_{op} = 273.49$ дней $T_{sh} = 2.51$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1108$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 351.68$ дней $T_{op} = 265.07$ дней $T_{sh} = 2.40$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1074$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 353.01$ дней $T_{op} = 257.23$ дней $T_{sh} = 2.05$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1042$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 90^\circ$	$T_{\min} = 375.06$ дней $T_{op} = 278.22$ дней $T_{sh} = 2.50$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1127$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 380.34$ дней $T_{op} = 292.18$ дней $T_{sh} = 2.28$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1184$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 388.94$ дней $T_{op} = 302.27$ дней $T_{sh} = 1.97$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1225$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 374.92$ дней $T_{op} = 278.43$ дней $T_{sh} = 1.42$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1128$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 0^\circ$	$T_{\min} = 377.33$ дней $T_{op} = 289.74$ дней $T_{sh} = 2.36$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1174$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 346.52$ дней $T_{op} = 255.49$ дней $T_{sh} = 2.07$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1035$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 346.72$ дней $T_{op} = 248.06$ дней $T_{sh} = 2.14$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1005$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 354.32$ дней $T_{op} = 265.56$ дней $T_{sh} = 0.63$ часов $\Delta M/M_0 = 0.1076$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$

Таблица 2.11

Характеристики траекторий перелета при различных параметрах запуска (НКО, мини-ДУ, 35 000 км)

	$\lambda_{S0} = 0^\circ$	$\lambda_{S0} = 90^\circ$	$\lambda_{S0} = 180^\circ$	$\lambda_{S0} = 270^\circ$
$\Delta\Omega_0 = 270^\circ$	$T_{\min} = 407.54$ дней $T_{op} = 271.07$ дней $T_{sh} = 1.28$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3870$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 394.10$ дней $T_{op} = 251.63$ дней $T_{sh} = 0.76$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3592$ $\varphi = 0.6$ $8 : 3 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 392.63$ дней $T_{op} = 255.85$ дней $T_{sh} = 1.05$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3653$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 387.55$ дней $T_{op} = 252.21$ дней $T_{sh} = 0.74$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3601$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 180^\circ$	$T_{\min} = 423.13$ дней $T_{op} = 273.75$ дней $T_{sh} = 1.92$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3908$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 406.72$ дней $T_{op} = 269.40$ дней $T_{sh} = 1.03$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3846$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 412.65$ дней $T_{op} = 271.58$ дней $T_{sh} = 2.65$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3877$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 404.55$ дней $T_{op} = 267.19$ дней $T_{sh} = 0.87$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3814$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 90^\circ$	$T_{\min} = 419.60$ дней $T_{op} = 274.14$ дней $T_{sh} = 0.93$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3914$ $\varphi = 0.6$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 415.93$ дней $T_{op} = 279.60$ дней $T_{sh} = 2.19$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3992$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 418.18$ дней $T_{op} = 280.97$ дней $T_{sh} = 0.90$ часов $\Delta M/M_0 = 0.4011$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 410.93$ дней $T_{op} = 274.63$ дней $T_{sh} = 3.75$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3921$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$
$\Delta\Omega_0 = 0^\circ$	$T_{\min} = 404.30$ дней $T_{op} = 268.82$ дней $T_{sh} = 1.18$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3838$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 397.36$ дней $T_{op} = 265.34$ дней $T_{sh} = 1.18$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3788$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 401.40$ дней $T_{op} = 265.99$ дней $T_{sh} = 1.09$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3797$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$	$T_{\min} = 394.17$ дней $T_{op} = 262.29$ дней $T_{sh} = 1.14$ часов $\Delta M/M_0 = 0.3745$ $\varphi = 0.5$ $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$

2.7 Спиральные траектории перелета без использования резонансных сближений с Луной

Методика построения траекторий перелета, изложенная в данной работе, предполагает использование резонансных сближений с Луной для подъема орбиты. Время полета на третьем этапе определяется длиной цепочки резонансов и числом витков вокруг Земли и поэтому варьируется в пределах от нескольких месяцев до года. Интересно определить, насколько быстро можно было бы доставить аппарат на целевую орбиту, не пользуясь резонансными сближениями. Характеристики оптимальной по быстродействию траектории вместе с характеристиками траекторий с резонансными сближениями позволили бы оценить границы Парето-фронта на плоскости $(\Delta M, T)$, где ΔM – масса затраченного топлива на третьем этапе, а T – время полета на третьем этапе.

Для примера разберем ситуацию, когда старт миниаппарата произошел с ГПО, и для определенности примем $\lambda_{S0} = 0^\circ$ и $\Delta\Omega_0 = 0^\circ$. Расчеты с резонансными сближениями показывают, что из всех резонансных последовательностей скорейшей по времени полета является последовательность $3 : 1 \rightarrow 2 : 1$, которая приведет в точку $\varphi = 0.5$ на гало-орбите размера $A_z = 35\,000$ км. Время полета вдоль такой траектории составит 115.4 дней, при этом на маневрирование вблизи точек перигея будет затрачено всего 0.757 кг топлива. Оптимальный по быстродействию перелет в ту же точку займет 38.7 дней (в три раза меньше), однако при этом будет затрачено 17.1 кг топлива. Отметим, что выигрыш в 16 кг при использовании схемы с резонансными сближениями может оказаться чрезвычайно существенным с точки зрения обеспечения аппарата полезной нагрузкой: вся полезная нагрузка на аппарате SMART-1 имела массу 19 кг [27].

2.8 О деградации солнечных панелей и оптимальных по затрату топлива траекториях

Радиационные пояса Ван Аллена оказывают разрушительное воздействие на солнечные батареи МКА. На рисунке 2.17 изображена зависимость энергии, получаемой с панелей солнечных батарей в миссии SMART-1. Резкий спад поступающей энергии в первые два месяца объясняется влиянием радиацион-

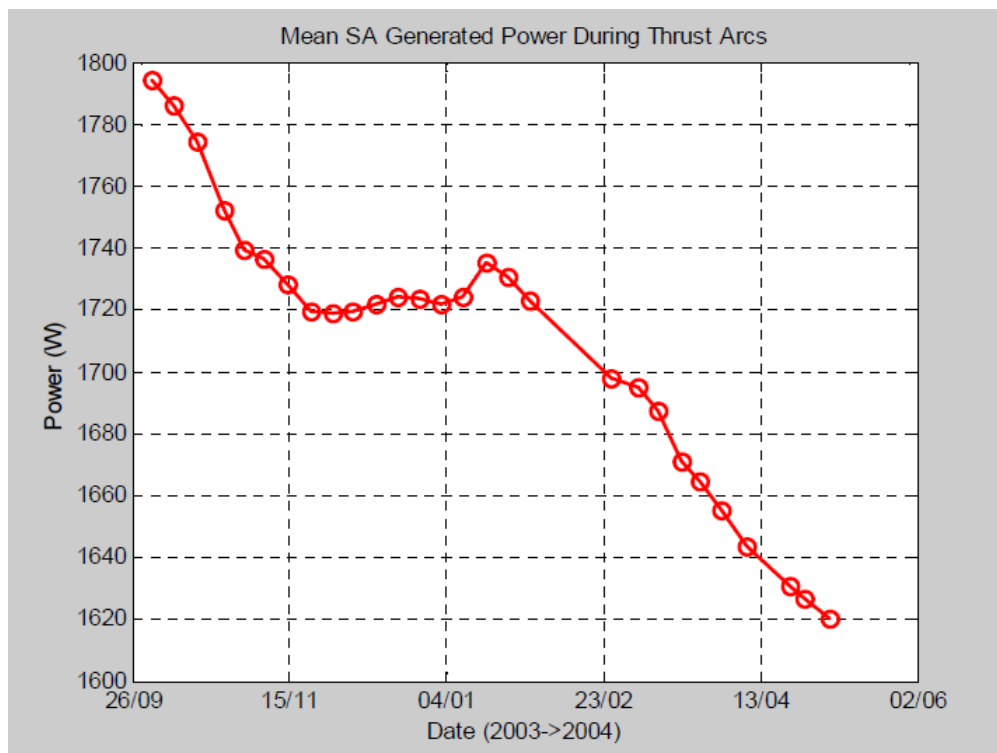


Рисунок 2.17 — Энергия, поступающая с панелей солнечных батарей в рабочем режиме миссии SMART-1 в зависимости от времени полета. Заимствовано из [145]

ных поясов, последующее снижение обусловлено вариацией потока солнечного излучения [145]. Отметим, что, так как в миссии SMART-1 оптимизировались затраты топлива, функционал содержал мощность двигателя как функцию времени. Поэтому зависимость мощности от времени была заранее промоделирована разработчиками миссии SMART-1 и учтена в оптимизационных процедурах построения траектории на каждом из этапов перелета. Всякое отклонение поведения мощности от модели вызывало необходимость перерасчета оптимального управления, так как от этого зависело расположение пассивных участков траектории.

В настоящей же работе на втором этапе перелета оптимизируется время перелета, это дает общую форму закона управления вне зависимости от величины тяги: согласно принципу максимума Понтрягина, она должна быть максимальна по величине в любой момент времени. Мощность как функция времени не входит в какие-либо подынтегральные выражения, и поэтому учет реальной зависимости мощности от времени упрощается и может быть проведен без изменения вышеописанной методики построения траектории. Уточнение получен-

ных в данной работе траекторий с учетом приближенных моделей изменения мощности от времени будет предметом дальнейшего исследования.

Кроме того, в будущем методика будет применена к схеме, когда на втором этапе оптимизируются затраты топлива. Это позволит построить Парето-фронт оптимальных решений в терминах «время полета–затраты топлива» и определить компромиссные решения. Как уже было сказано выше, какая-либо модель деградации солнечных панелей и, соответственно, изменения мощности от времени будет являться обязательным компонентом оптимизационной задачи.

Глава 3. Варианты дальнейших перелетов с орбит вокруг лунной точки либрации L_1

В данной главе описываются варианты дальнейших перемещений МКА в системе Земля–Луна после того, как он прибыл на гало-орбиту вокруг точки либрации EM L_1 . А именно, здесь исследуются перелеты на окологлунные орбиты и на гало-орбиты вокруг точки EM L_2 . Также будут упомянуты варианты перелета к точкам либрации SE L_1 и SE L_2 .

3.1 Введение

Структуры фазового пространства задачи трех тел в настоящее время все чаще используются для проектирования межпланетных траекторий. Отдельное внимание стоит обратить на возможности, которые открываются при выведении аппарата на орбиты вокруг лунной точки либрации L_1 : еще 15 лет назад М. Ло и Ш. Росс высказали предложение об эксплуатации этой точки как природного транспортного узла, из которого доступны тела Солнечной системы [45]. В данной работе нас будут интересовать две реализации этой концепции: перелеты между орбитами точек EM L_1 и EM L_2 , а также перелеты с орбит вокруг EM L_1 и EM L_2 на окологлунные орбиты. Как и везде, аппарат предполагается малым и оснащенным двигателем малой тяги. Напомним, что глава 2 данной диссертации была направлена на разработку методики доставки МКА с типичных околоземных орбит на гало-орбиты вокруг EM L_1 . Перелет к точке либрации EM L_1 разумен в том смысле, что снижает риски проведения последующих операций (полет к Луне или выход за пределы системы Земля–Луна), так как за время движения вдоль квазипериодической орбиты с периодом порядка 12 дней операторы миссии имеют возможность проверить состояние систем аппарата. В данной же главе речь пойдет о дальнейшей судьбе МКА, выведенного на гало-орбиту вокруг EM L_1 . Исследование призвано ответить на ряд вопросов: какие окологлунные орбиты доступны при сходе с гало-орбит вокруг точки EM L_1 , какие орбиты вокруг EM L_2 доступны при сходе с орбит вокруг EM L_1 , если ли окологлунные орбиты, доступные только с орбит вокруг EM L_2 , а не L_1 , и т.д. Особенность задачи в том, чтобы максимально полно воспользоваться

динамикой ограниченной задачи трех тел и таким образом уменьшить затраты топлива на перелет. Так как нас будет интересовать лишь принципиальная возможность перелета на те или иные орбиты, все расчеты будут проводиться в рамках модели CR3BP.

Глава состоит из двух частей. В первой части проводится небольшой обзор методов перелета с гало-орбит вокруг EM L_1 на гало-орбиты вокруг EM L_2 и перелеты с гало-орбит вокруг EM L_2 на гало-орбиты вокруг EM L_1 . Напомним, что в некоторых случаях (см. [146, 147, 43]) было доказано существование т.н. гетероклинических соединений между орбитами вокруг точек L_1 и L_2 – пассивных траекторий перелета между орбитами около этих точек либрации. Гетероклинические соединения находятся в пересечении неустойчивого многообразия орбиты вокруг L_1 и устойчивого многообразия орбиты вокруг L_2 (для перелетов от L_2 к L_1 наоборот) и использовались при возвращении аппарата Genesis с орбиты вокруг точки либрации SE L_1 [148].

Вторая часть главы посвящена перелетам с гало-орбит вокруг EM L_1 и гало-орбит вокруг EM L_2 на окологлуные орбиты. Здесь решаются две задачи: сначала строится множество орбит (неустойчивых), которые доступны при сходе с гало-орбиты вдоль неустойчивого многообразия по баллистической траектории (управление КА не предполагается). Вторая задача состоит в том, чтобы среди полученных орбит выделить те, которые удастся стабилизировать включением двигателя малой тяги в окрестности периселения. Решение этих двух задач дополнит предварительный анализ для гало-орбит вокруг точки EM L_2 , о котором упоминается в монографии Д. Паркера и Р. Андерсона [126]. Дополнение будет состоять в рассмотрении орбит вокруг точки EM L_1 и, самое главное, в построении множества орбит, которые удастся стабилизировать малой тягой.

При построении траекторий перелета на окологлуные орбиты внимание будет уделено возможности выхода на полярные и окологлуные орбиты. Действительно, в настоящее время максимальный интерес исследователей направлен на южный полюс Луны: получены убедительные доказательства наличия водяного льда в кратерах, как следует из результатов анализа грунта и выбросов пыли в целом ряде миссий: Луна-24 (1976), Clementine (1994), Lunar Prospector (1998), Moon Impact Probe (2008) [149], Chandrayaan-1 (2009) [150] и Lunar Crater Observation and Sensing Satellite (2009) [151]. Кратеры в окрестности южного полюса имеют области вечной тени (в них удобно размещать астро-

физические лаборатории), а также возвышенности, почти всегда освещаемые Солнцем – идеальные места для наблюдения за Солнцем и размещения солнечных электростанций. Также можно упомянуть как участки южного полюса, из которых всегда видна Земля (удобно для установления радиосвязи), так и участки, из которых Землю не видно, если нужно избежать радиопомех с Земли. Создание на южном полюсе Луны обитаемой базы уже находится в обсуждении различными космическими агентствами, в том числе и в России [152]. Развертывание спутниковых систем на полярных орбитах, таким образом, является важным шагом на пути к изучению пригодных мест расположения будущих баз, наблюдения за ними и обеспечения связи с Землей. Отметим, что с точки зрения наличия масконов, существенно влияющих на низкие орбиты, удобно выходить не на полярные орбиты, а на околополярные – с наклоном вблизи 85° , как следует из исследований [153]; это так называемые замороженные орбиты (frozen orbits). В настоящей диссертации влияние масконов на траекторию не учитывается, так как рассматривается лишь перелет на окололунную орбиту. Вопросы дальнейшего поддержания орбиты выходят за рамки данной работы.

3.2 Соединения между орбитами вокруг разных точек либрации

3.2.1 Перелеты между гало-орбитами вокруг L_1 и L_2

Методы проектирования перелетов между орбитами вокруг точек L_1 и L_2 преимущественно опираются на эксплуатацию инвариантных многообразий, связанных с этими орбитами.

Наиболее прямолинейный способ расчета перелета состоит в том, чтобы, варьируя точки на исходной и целевой гало-орбитах, найти пересечение между их, соответственно, неустойчивым и устойчивым многообразиями. А именно, пусть $\varphi_1 \in [0, 1]$ обозначает точку на исходной гало-орбите вокруг L_1 и $\varphi_2 \in [0, 1]$ обозначает точку на целевой гало-орбите вокруг L_2 . В точке φ_1 найдем направление вдоль неустойчивого многообразия \mathbf{u}_u^1 и определим фазовое состояние аппарата на нем:

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{x}_0^1 + \varepsilon \mathbf{u}_u^1$$

где \mathbf{x}_0^1 – фазовое состояние, отвечающее точке φ_1 , $\varepsilon = 10^{-6}$ – некоторая малая величина, \mathbf{u}_u^1 – единичный вектор вдоль правой (к Луне) ветви неустойчивого многообразия в точке φ_1 . Верхние индексы всюду обозначают точку либрации, вокруг которой рассматривается орбита. Точно так же найдем направление вдоль левой ветви (от Луны) устойчивого многообразия \mathbf{u}_s^2 в точке φ_2 и определим фазовый вектор на устойчивом многообразии

$$\mathbf{x}_1^2 = \mathbf{x}_0^2 + \varepsilon \mathbf{u}_s^2$$

где \mathbf{x}_0^2 – фазовый вектор, отвечающий точке φ_2 . Распространим траекторию вперед во времени от точки \mathbf{x}_1^1 до пересечения с плоскостью $x = 1 - \mu$. Также распространим траекторию назад во времени от точки \mathbf{x}_1^2 до пересечения с той же плоскостью. Прделаав это с различными точками на исходной и целевой гало-орбитах, получим две кривые в плоскости $x = 1 - \mu$: одна отвечает неустойчивому многообразию, а другая – устойчивому. Рисунок 3.1 показывает, что в координатном пространстве неустойчивое многообразие гало-орбиты вокруг L_1 пересекается с устойчивым многообразием гало-орбиты вокруг L_2 . Сход с одного многообразия на другое в общем случае требует приложения импульса в точке пересечения.

Обозначим $\mathbf{x}_2^1 = [x_2^1, y_2^1, z_2^1, \dot{x}_2^1, \dot{y}_2^1, \dot{z}_2^1]$ полученный фазовый вектор на плоскости $x = 1 - \mu$ при интегрировании из точки φ_1 исходной гало-орбиты, а $\mathbf{x}_2^2 = [x_2^2, y_2^2, z_2^2, \dot{x}_2^2, \dot{y}_2^2, \dot{z}_2^2]$ – полученный фазовый вектор на плоскости $x = 1 - \mu$ при интегрировании из точки φ_2 с целевой гало-орбиты. Чтобы найти целую траекторию перелета, необходимо численно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} y_2^1(\varphi_1) - y_2^2(\varphi_2) &= 0 \\ z_2^1(\varphi_1) - z_2^2(\varphi_2) &= 0 \end{aligned}$$

что успешно может быть выполнено с помощью метода Левенберга–Марквардта. Отметим, что такая процедура поиска перелета между орбитами имеет ограниченный радиус сходимости. Эксперименты показали, что сходимость к решению обеспечивается лишь в случаях, когда начальные приближения для φ_1 и φ_2 отличается от искомым на величину не более 0.2. Поэтому для гарантии алгоритм запускался при различных начальных значениях φ_1 и φ_2 с шагом 0.2.

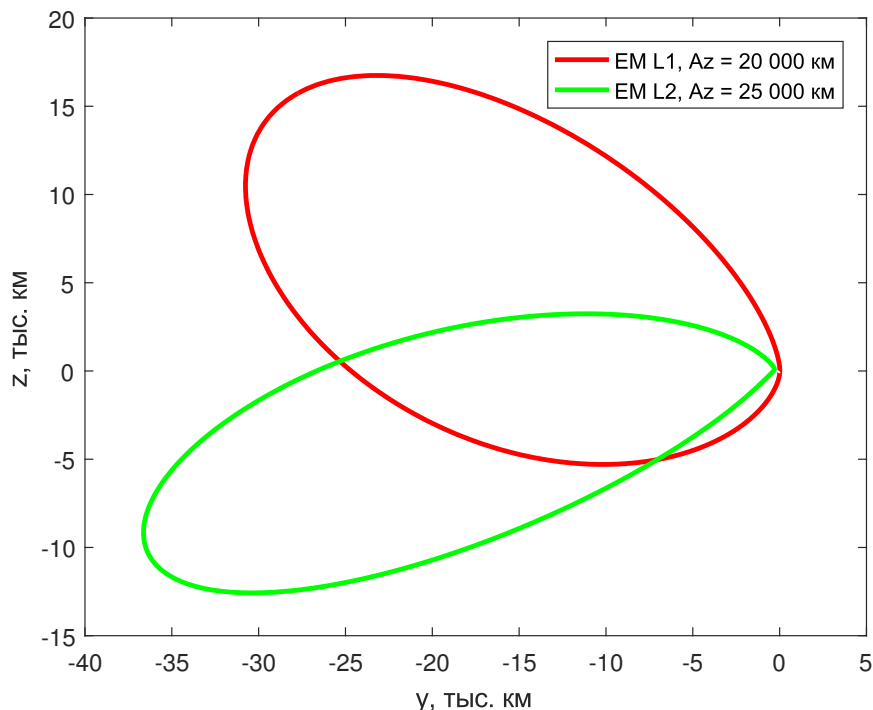


Рисунок 3.1 — Кривые, образующиеся при первом пересечении с плоскостью $x = 1 - \mu$ неустойчивого многообразия гало-орбиты вокруг ЭМ L_1 (красная) и устойчивого многообразия гало-орбиты вокруг ЭМ L_2 (зеленая)

Затраты характеристической скорости рассчитываются по формуле

$$\Delta v = \sqrt{(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2)^2 + (\dot{y}_2^2 - \dot{y}_1^2)^2 + (\dot{z}_2^2 - \dot{z}_1^2)^2}$$

На рисунках 3.2 и 3.3 показаны изолинии затрат характеристической скорости при различных исходной и целевой гало-орбитах; z -амплитуды гало-орбит меняются в пределах от 10 000 до 40 000 км. Рисунок 3.2 соответствует случаю, когда обе гало-орбиты являются северными, а рисунок 3.3 соответствует случаю, когда исходная орбита вокруг L_1 северная, а целевая вокруг L_2 — южная. Пример перелета между гало-орбитами изображен на рисунке 3.4.

Описанный выше алгоритм позволяет получать траектории, которые не совершают виток вокруг Луны, однако можно строить и траектории с полными витками. В этом случае распространять траектории можно не до первого пересечения с плоскостью $x = 1 - \mu$, а до второго, третьего и т.д. Примеры траекторий с витком и без витка можно найти в [154] и [155]. При проектировании траекторий с витками радиус сходимости метода уменьшается, а вычислительная нагрузка возрастает. Более того, возникает вопрос выбора подходящего сече-

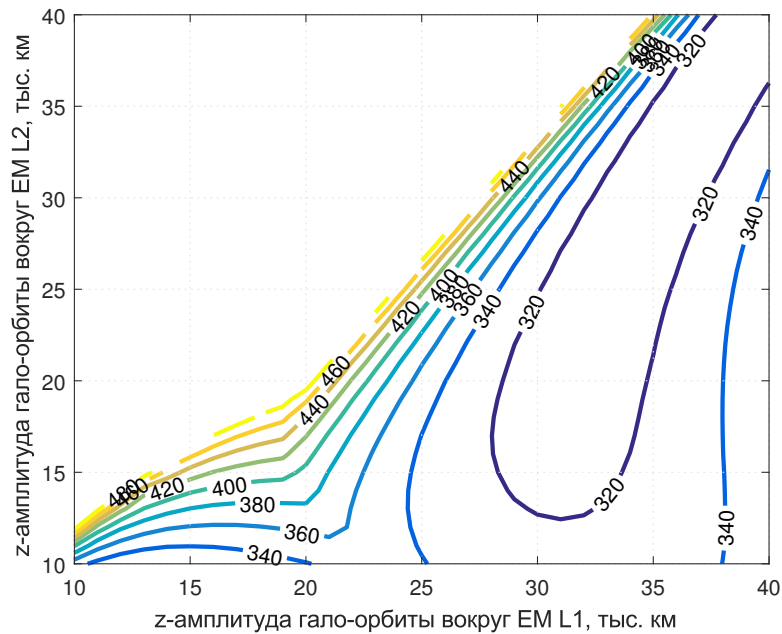


Рисунок 3.2 — Изолинии затрат характеристической скорости (в м/с), требуемых для перелета между северной гало-орбитой вокруг EM L_1 и северной гало-орбитой вокруг EM L_2 для разных значений z -амплитуды орбит (показаны изолинии только до 500 м/с)

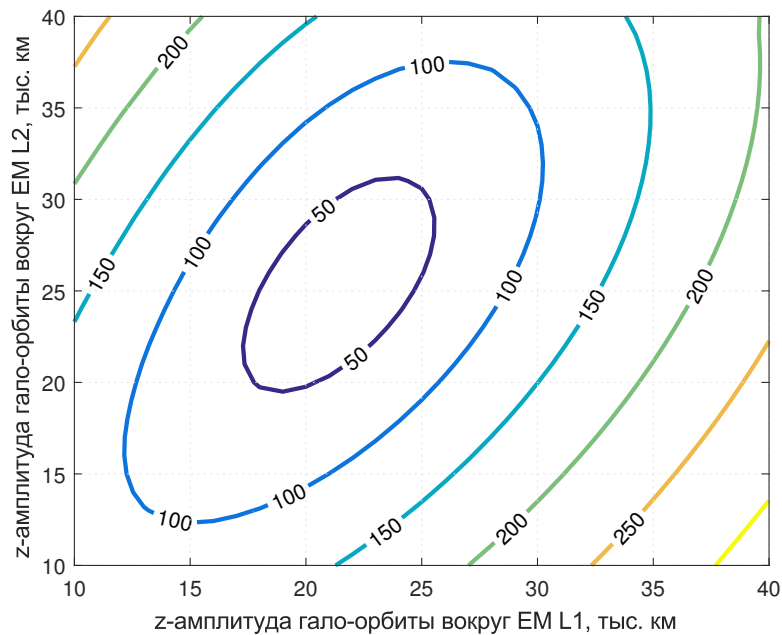


Рисунок 3.3 — Изолинии затрат характеристической скорости (в м/с), требуемых для перелета между северной гало-орбитой вокруг EM L_1 и южной гало-орбитой вокруг EM L_2 для разных значений z -амплитуды орбит

ния Пуанкаре, до которого распространяются многообразия, так как это может существенно отразиться на требуемом значении характеристической скорости.

Для анализа траекторий перелета без витков, с одним витком или двумя и более витками возможен интерактивный подход. А именно, если отобразить на плоскости $x = 1 - \mu$ кривые, соответствующие первому, второму, третьему, и т.д., пересечению многообразий с данной плоскостью, то, визуальное проанализировав рисунок, можно отметить точки в окрестности пересечения кривых и запустить алгоритм Левенберга–Марквардта только для этих точек. Пример кривых для различных значений количества пересечения с плоскостью $x = 1 - \mu$ показан на рисунке 3.5.

Робастные автоматизированные процедуры расчетов соединений между орбитами вокруг точек либрации можно найти в работах [154] и [155]. Расчеты показали существование гетероклинических соединений между северными и южными семействами гало-орбит вокруг одной и той же точки либрации. Гетероклинических соединений между гало-орбитами вокруг различных точек либрации в системе Земля–Луна найдено не было, хотя ранее они были обнаружены между плоскими орбитами Ляпунова [156]. Между гало-орбитами, однако, имеются соединения, требующие на перелет не выше 20 м/с затрат характеристической скорости при времени перелета не более 60 дней, примеры изображены на рисунках 3.6 и 3.7. Интересно отметить, что геометрически динамика способствует перелетам с северных гало-орбит вокруг L_1 на южные гало-орбиты вокруг L_2 (а не на северные вокруг L_2). Выражается это не только в большей экономности в плане затрат топлива на перелет, но и в меньшей длительности перелета. Этот же факт подчеркивается и в работе [157], в которой разработана методика построения перелетов между орбитами различных точек либрации с малой тягой. Здесь траектории являются оптимальными в плане затрат топлива и проектируются для случая перспективных двигателей малой тяги с управляемым удельным импульсом. Примером такого двигателя является Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket (VASIMR), разрабатываемый компанией Ad Astra Rocket Company [158] и Ion Cyclotron Resonance (ICR) Plasma Propulsion Systems [159]. Согласно [157], относительные расходы топлива на перелеты между гало-орбитами составляют от 2% до 10%.

Соединения между орбитами вокруг точек либрации были исследованы и по отношению к другим системам трех тел. Так существование гетероклиниче-

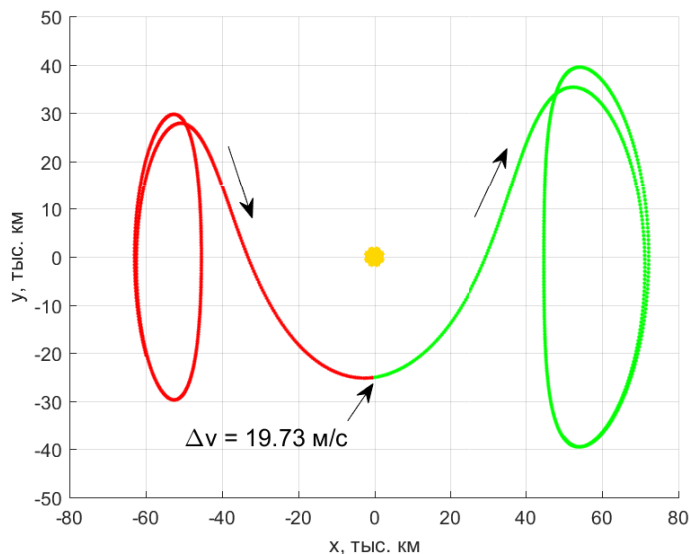
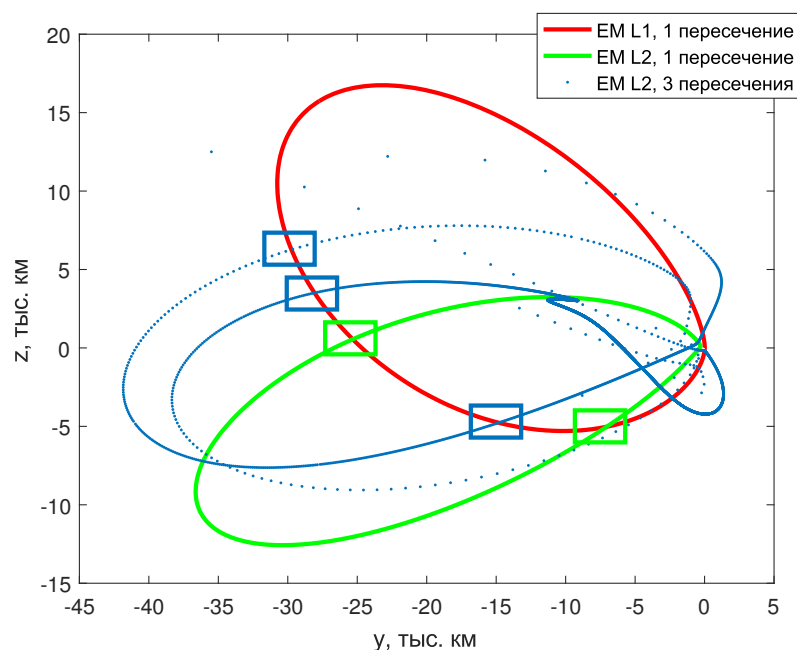


Рисунок 3.4 — Пример перелета между северной гало-орбитой вокруг ЕМ L_1 размера $A_z = 22\,000$ км и южной гало-орбитой вокруг ЕМ L_2 размера $A_z = 26\,000$ км; проекция на плоскость Cxy , начало координат расположено в центре Луны (желтый круг)



Красная и зеленая кривые соответствует первому пересечению неустойчивого и устойчивого многообразий с плоскостью, синяя кривая – третьему пересечению. Прямоугольниками выделены области пересечения кривых, здесь процедура решения системы уравнений гарантированно сойдется

Рисунок 3.5 — Кривые, образующиеся при пересечении с плоскостью $x = 1 - \mu$ неустойчивого многообразия гало-орбиты вокруг ЕМ L_1 и устойчивого многообразия гало-орбиты вокруг ЕМ L_2

ских траекторий между плоскими орбитами Ляпунова в системе Солнце–Юпитер было доказано математически [146], в том числе и с применением доказательных вычислений [147]. Позднее [160, 161, 162] гетероклинические соединения были построены численно между либрационными орбитами в системе Солнце–Земля (в работе [162] гетероклинические соединения между орбитами Лиссажу и квазигало-орбитами строятся и в системе Земля–Луна). Отметим, что траектория возврата на Землю аппарата Genesis проходила вблизи гетероклинического соединения [163] и не требовала детерминированных импульсов.

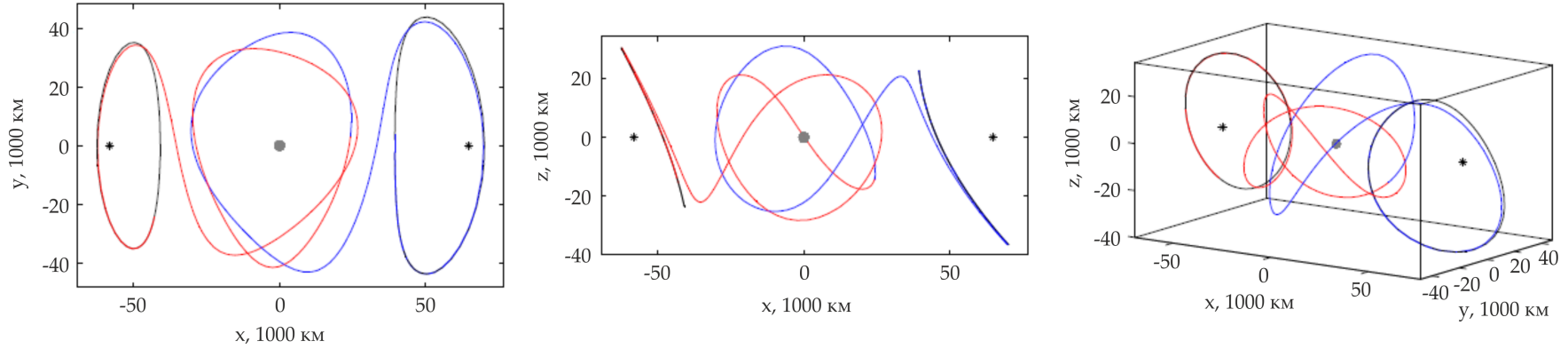


Рисунок 3.6 — Пример перелета между северной гало-орбитой вокруг ЭМ L_1 размера $A_z = 26\,000$ км и южной гало-орбитой вокруг ЭМ L_2 размера $A_z = 38\,000$ км; проекция на плоскость Cxy , начало координат расположено в центре Луны (серый круг); затраты характеристической скорости составляют 13.9150 м/с, время перелета 51.0004 дней. Адаптировано из [155]

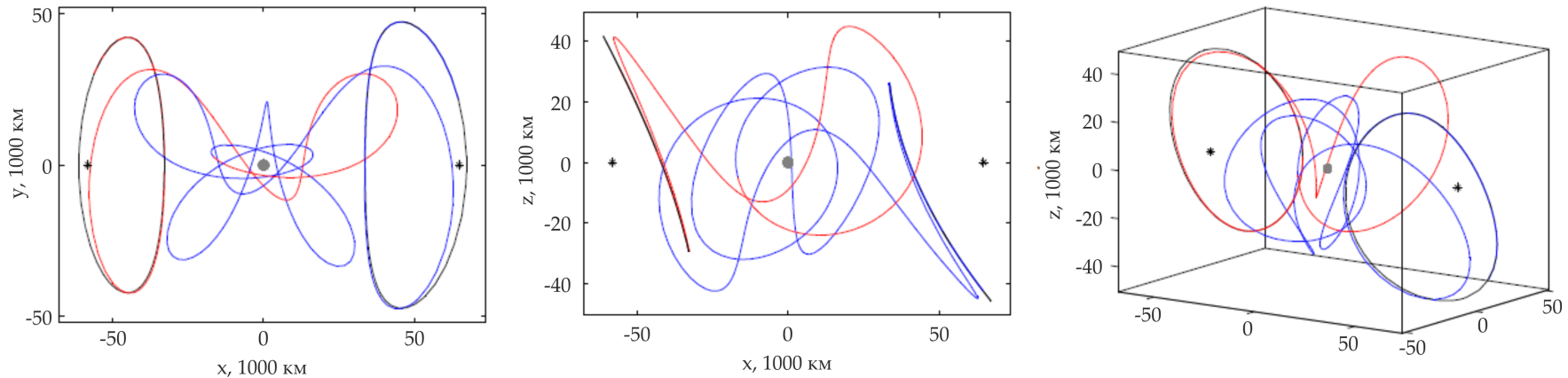


Рисунок 3.7 — Пример перелета между северной гало-орбитой вокруг ЭМ L_1 размера $A_z = 40\,000$ км и южной гало-орбитой вокруг ЭМ L_2 размера $A_z = 42\,000$ км; проекция на плоскость Cxy , начало координат расположено в центре Луны (серый круг); затраты характеристической скорости составляют 3.5776 м/с, время перелета 59.7738 дней. Адаптировано из [155]

3.2.2 Перелеты между системами трех тел

Хорошо известно, что устойчивые и неустойчивые многообразия различных систем трех тел с общими главными телами могут пересекаться в координатном пространстве (см. рисунок 3.8). Это открывает возможности перемещения между системами трех тел вдоль инвариантных многообразий, что сужает пространство решений.

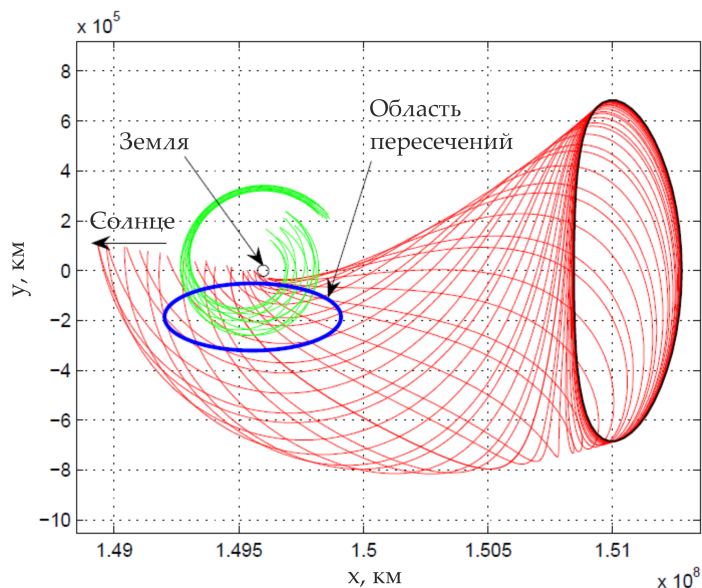


Рисунок 3.8 — Пересечения в координатном пространстве неустойчивого многообразия системы Земля–Луна и устойчивого многообразия системы Солнце–Земля. Адаптировано из [46]

Перелеты между системами Земля–Луна и Солнце–Земля вдоль инвариантных многообразий либрационных орбит затрагивались во многих работах. Небольшая разница между уровнями энергии лунных точек либрации и точек либрации L_1/L_2 системы Солнце–Земля приводит к существованию пересекающихся в координатном пространстве и близких по энергии инвариантных многообразий из разных систем. Сравнительно недавно были даже обнаружены пассивные перелеты между системой Земля–Луна и Солнце–Земля [53, 48]. В таблице 3.1 перечислены некоторые из найденных пар гало-орбит в системе Земля–Луна и Солнце–Земля, между которыми существуют пассивные траектории перелета. Таким образом, методология построения пассивных траекторий, представленная в статье [53] может использоваться при проектировании миссий с МКА.

Таблица 3.1

Гало-орбиты в системах Земля–Луна и Солнце–Земля, которые соединяются пассивными траекториями перелета. Адаптировано из [53]

Тип перелета	A_z в системе Земля–Луна	A_z в системе Солнце–Земля	Δv , м/с
EM $L_2 \rightarrow$ SE L_2	25 000 км	163 000 км	0
EM $L_2 \rightarrow$ SE L_2	26 000 км	167 900 км	0
EM $L_2 \rightarrow$ SE L_2	27 000 км	171 800 км	0
SE $L_2 \rightarrow$ EM L_2	25 000 км	163 900 км	0
EM $L_2 \rightarrow$ SE L_1	25 000 км	162 600 км	0
SE $L_1 \rightarrow$ EM L_2	25 000 км	163 000 км	0

Не менее интересным для приложений является использование инвариантных многообразий с целью перемещения по Солнечной системе – концепция, которая получила название Межпланетный суперхайвей или Межпланетная транспортная сеть [164]. В отличие от пары систем Земля–Луна и Солнце–Земля многообразия систем Солнце–планета для планет внутренней группы не пересекаются в координатном пространстве. Поэтому траектория перелета разбивается на несколько участков, один из которых соединяет многообразия разных систем, например, Солнце–Земля и Солнце–Марс [49, 51]. Например, перелет вдоль неустойчивого многообразия плоской орбиты Ляпунова вокруг SE L_2 на круговую орбиту вокруг Марса радиуса 10 000 км займет 700 дней и порядка 20% относительных затрат топлива при ускорении тяги $2.5 \cdot 10^{-4}$ м/с². Использование гравитационного маневра у Луны способно снизить время перелета до 496 дней, затраты на перелет остаются приблизительно теми же. Заметим, что здесь многообразия системы Солнце–Марс не используются. Дальнейшее понижение затрат топлива возможно, если в качестве целевых орбит рассматривать т.н. удаленные проградные орбиты [49] – периодические орбиты вокруг меньшего главного тела (в данном случае – Марса) хилловского приближения или модели ограниченной задачи трех тел, относящиеся к g -семейству по классификации Энона [165]. В зависимости от интеграла Якоби эти орбиты могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Интересно отметить, что при $C_J < 4.5$ (в хилловском приближении) данный тип орбит обладает инвариантными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями, точно так же как и

либрационные орбиты вокруг точек либрации. При проектировании траекторий перелета достаточно соединять неустойчивое многообразие какой-нибудь либрационной орбиты из системы Солнце–Земля и устойчивое многообразие удаленной проградной орбиты вокруг Марса. В этом случае относительные затраты на перелет составят 15% при том же ускорении тяги, а время на перелет будет составлять 715 дней без гравитационного маневра у Луны и 543 дня с гравитационным маневром. Управление всюду полагалось непрерывным и направленным вдоль вектора скорости во вращающейся системе координат, чтобы максимально быстро увеличить интеграл Якоби, и вдоль скорости в инерциальной системе координат, чтобы повысить гелиоцентрическую орбиту до орбиты Марса вокруг Солнца.

Перелеты к Венере вдоль инвариантных многообразий изучались в работе [52]. Рассматривалась следующая схема: аппарат изначально находится на геопереходной орбите, затем начинает раскручивать траекторию малой тягой, пока не выйдет на неустойчивое многообразие некоторой плоской орбиты Ляпунова вокруг $SE L_1$, затем осуществляет перелет на устойчивое многообразие некоторой плоской орбиты Ляпунова вокруг L_2 системы Солнце–Венера, далее следует баллистический захват планетой и, наконец, скрутка до круговой орбиты высотой 250 км. В процессе расчетов было найдено множество траекторий перелета, оптимальный по времени перелет занимает 4.77 лет и требует относительных затрат топлива порядка 16.4% при ускорении тяги $2.0 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$. Оптимальный по затратам топлива перелет займет 9.8 лет и требует относительных затрат топлива порядка 15.2%. Отмечается, что комбинация траекторий с малой тягой и инвариантных многообразий позволяет сохранить 19% затраченного топлива, хотя времени на перелет уходит как минимум на 2 года больше. Управление строилось аналогично тому, как это делалось для перелета к Марсу [49]: вектор тяги направлен вдоль скорости (во вращающейся системе координат или инерциальной, в зависимости от рассматриваемого участка траектории).

Перелеты между различными системами Солнце–планета возможны и с применением солнечного паруса¹, как следует из недавней работы Ж. Хайлигера, Д. Минготти и К. МакИннеса [55]. Например, перелет между Землей и

¹Перспективная технология солнечного паруса активно отрабатывается последнее время и является чрезвычайно актуальной для миссий с МКА; см. например успешную миссию к Венере с МКА Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation Of the Sun (IKAROS) [166].

Марсом занимает порядка 912 дней, если не накладываются ограничений на управление парусом, и 1017 дней, если отклонение вектора нормали паруса от вектора направления на Солнце не превосходит 7.5° . Другой пример – траектория между Землей и Меркурием: в задаче без ограничений на управление парусом перелет занимает 808 дней, в то время как с ограничениями – 936 дней. Эти характеристики траектории соответствуют оптимальным по времени перелета траекториям.

Ранее уже было замечено, что многообразия систем Солнце–планета для планет внутренней группы не пересекаются в координатном пространстве. Однако для планет внешней группы это не так, см. рисунок 3.9. Каждая точка на графике соответствует некоторой орбите с указанными оскулирующими значениями большой полуоси и эксцентриситета. Зелеными точками показаны оскулирующие параметры траекторий на гиперболических многообразиях, связанных с орбитами вокруг точки L_2 , черным цветом – с орбитами вокруг точки L_1 . Хорошо видно, что многообразия различных систем пересекаются, это дает возможность построения низкоэнергетических (почти пассивных) перелетов между системами трех тел. Также видно, что потенциально можно строить низкоэнергетические траектории от пояса Койпера до пояса астероидов.

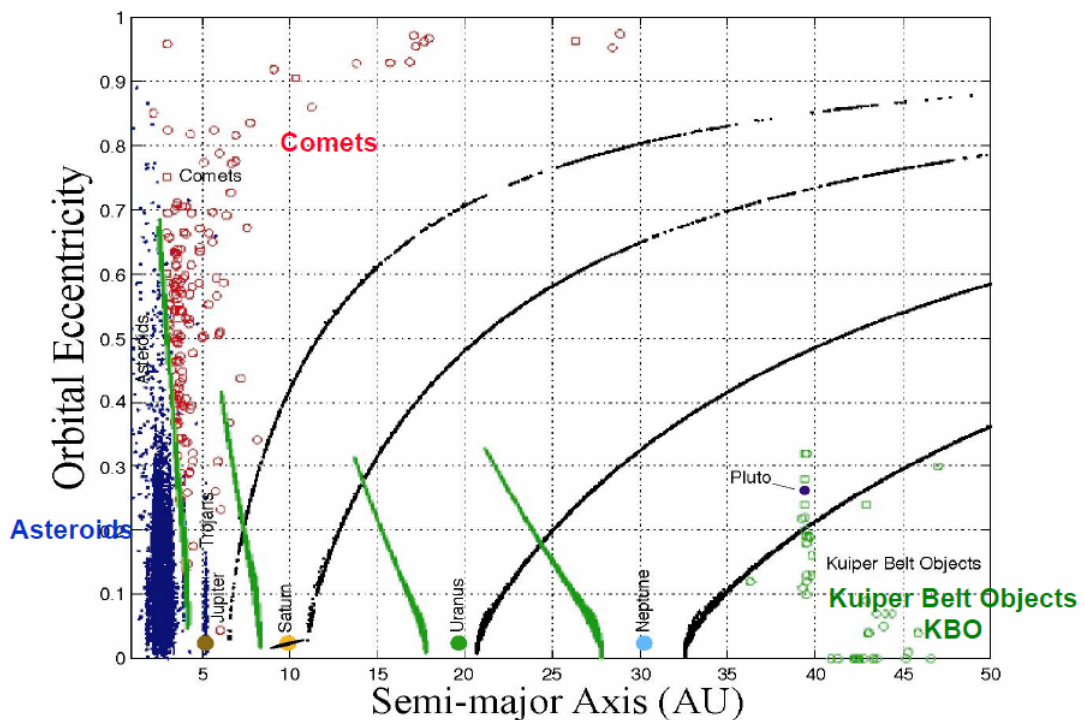


Рисунок 3.9 — Оскулирующие параметры траекторий на гиперболических многообразиях, ассоциированных с коллинеарными точками либрации планет внешней группы. Заимствовано из [44]

3.3 Перелет на окололунные орбиты

Перейдем теперь к изучению перелетов между гало-орбитами вокруг ЕМ L_1 и ЕМ L_2 и окололунными орбитами.

3.3.1 Оскулирующие окололунные орбиты из неустойчивого многообразия гало-орбит

Рассмотрим гало-орбиту вокруг точки ЕМ L_1 или ЕМ L_2 . Точки на гало-орбите будем по-прежнему обозначать параметром $\varphi \in [0,1]$. Пусть выбрана точка φ , тогда ей соответствует некоторый фазовый вектор \mathbf{x}_0 . Пусть \mathbf{u}_u – единичный вектор вдоль неустойчивого многообразия в точке \mathbf{x}_0 , тогда

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_u$$

при малых ε приближенно находится на неустойчивом многообразии. Ветвь многообразия определяется знаком ε (считается, что знак первой компоненты \mathbf{u}_u фиксирован и положителен): если $\varepsilon > 0$, то многообразие распространяется в направлении оси Cx , иначе – в противоположном направлении. По абсолютной величине ε обычно выбирается равным 10^{-6} .

Под точкой периселения будем понимать такую точку на траектории, в которой достигается локальный минимум расстояния до Луны. Дополнительно потребуем также, чтобы эта точка была достаточно близка к Луне (в данной работе это 10 радиусов Луны, т.е. 17 374 км).

Итак, пусть есть вектор \mathbf{x}_1 на неустойчивом многообразии гало-орбиты. Если распространить траекторию вперед во времени, то первым произойдет одно из следующих событий:

- 1) аппарат достиг точки периселения;
- 2) аппарат столкнулся с Луной;
- 3) аппарат покинул окрестность Луны и пересек горловину точки L_1 ;
- 4) аппарат покинул окрестность Луны и пересек горловину точки L_2 .

Если произошло одно из событий 2–4, то траектория далее не распространяется, никакие результаты для данной траектории не сохраняются. Если же произошло событие 1, то рассчитываются параметры оскулирующей окололун-

ной орбиты, которые записываются в общую базу данных. Эти параметры соответствуют первому пролету Луны. Далее траектория снова распространяется вперед во времени до тех пор, пока не будет выполнено одно из вышеперечисленных условий. Если произошло одно из событий 2–4, то распространение траектории на этом заканчивается, и в базе данных сохраняется лишь сведения о первом пролете Луны. Если же произошло событие 1, то рассчитываются новые параметры оскулирующей окололунной орбиты. Эти параметры соответствуют второму пролету Луны. Далее траектория снова распространяется вперед во времени, и процедура расчетов и записи результатов повторяются вновь. Практика показала, что такая процедура обязательно остановится, т.е. рано или поздно будет выполнено одно из условий 2–4. Поэтому никакие ограничения на время полета или количество пролетов Луны не ставятся.

Так как в процессе расчета расстояние до Луны варьируется в больших пределах и возможны траектории столкновения с Луной, решено было регуляризовать уравнения движения модели CR3BP, воспользовавшись преобразованием Сундмана [167]. А именно, в качестве независимой переменной была выбрана переменная s , связанная со временем t выражением

$$dt = r_2 \cdot ds$$

где r_2 – расстояние до центра Луны. Уравнения движения в этом случае станут

$$d\mathbf{x}/ds = r_2 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$dt/ds = r_2$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \mathcal{U}_x + 2\dot{y}, \mathcal{U}_y - 2\dot{x}, \mathcal{U}_z]$ – правая часть немодифицированных уравнений в модели CR3BP. Регуляризация уравнений позволила воспользоваться классическим методом интегрирования Рунге–Кутты четвертого порядка с постоянным шагом, который был выбран равным $\Delta s = 1/16$, что приблизительно соответствует 1 часу в окрестности точки либрации L_1 или L_2 .

Расчеты были проведены для северных гало-орбит вокруг EM L_1 и EM L_2 . Семейство состояло из 70 гало-орбит с z -амплитудами 1 000 км, 2 000 км, и так далее вплоть до 70 000 км. На каждой гало-орбите было выбрано 1000 точек, из которых вдоль неустойчивого многообразия распространялись траектории. Причем для гало-орбит вокруг L_1 была выбрана правая ветвь многообразия, а

для гало-орбит вокруг L_2 – левая ветвь многообразия. Окололунные орбиты, которые получаются при сходе с южного семейства гало-орбит, имеют те же самые параметры, что орбиты при сходе с северных гало-орбит, за исключением долготы восходящего узла и аргумента перицентра, которые отличаются от соответствующих значений на 180° .

На рисунке 3.10 показаны расстояние до периселения и наклонение оскулирующих орбит, получающихся при первом пролете Луны в точке периселения при сходе с гало-орбит вокруг ЕМ L_1 . Цветами выделены точки, соответствующие гало-орбите с z -амплитудой 15 000 км (зеленый), 25 000 км (красный) и 35 000 км (розовый). Эти результаты показывают, что достижимы окололунные орбиты с произвольным наклоном от 0° до 126° при рассмотрении схода вдоль неустойчивого многообразия с гало-орбит размеров от 1 000 км до 70 000 км, причем чем крупнее гало-орбита, тем более высокое наклонение можно получить. Отметим, что наклоны вблизи 90° удастся получить лишь для гало-орбит размера не ниже 30 000 км. Аналогичная картина получена для гало-орбит вокруг ЕМ L_2 , см. рисунок 3.11. Здесь достижимы орбиты с наклонами до 120° , а выход на полярные орбиты возможен лишь с гало-орбит размера не ниже 45 000 км.

Рисунки 3.12, 3.13, 3.14 и 3.15 показывают, сколько витков вокруг Луны совершает аппарат прежде чем он столкнется с ее поверхностью или покинет окрестность Луны через точку L_1 или L_2 . Эти данные относятся к сходу с гало-орбит вокруг L_1 . Данные для гало-орбит вокруг L_2 собраны вместе на рисунке 3.16.

Из полученных результатов следует одно важное наблюдение: околополярные орбиты с низким перигеем более устойчивы (совершают больше витков). Сравнивая рисунки 3.15 и 3.16, можно также обратить внимание, что сталкивающихся с Луной траекторий намного больше для случая схода с гало-орбит вокруг L_1 , а не L_2 .

Все полученные здесь орбиты являются в значительной степени оскулирующими: вариации расстояния до периселения за виток могут составить от 10 000 км до 15 000 км, а наклонение может измениться на десятки и даже сотню градусов. В связи с этим обстоятельством встает вопрос о возможности стабилизации таких орбит малой тягой.

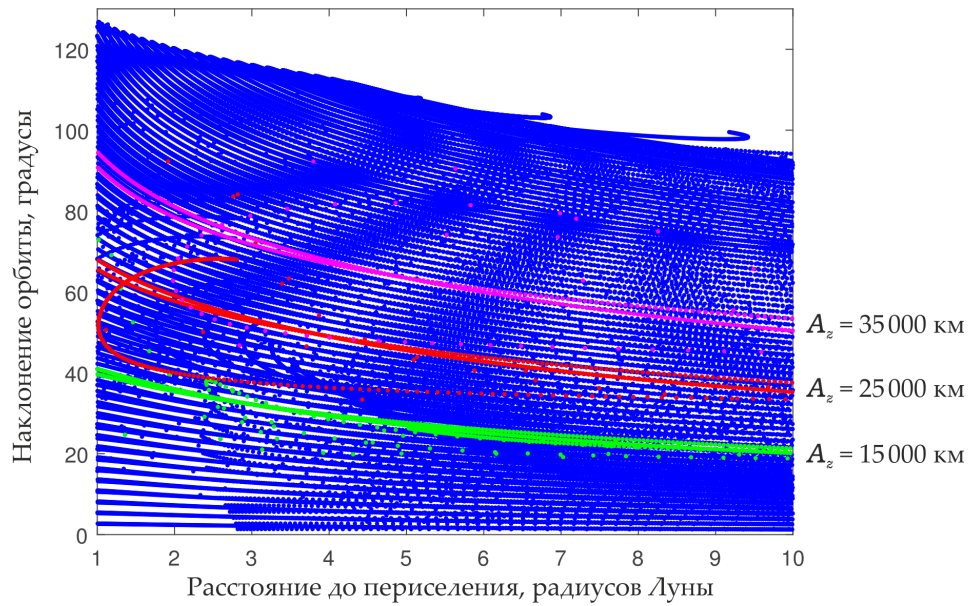


Рисунок 3.10 — Расстояние до периселения и наклонение оскулирующих орбит, получающихся при первом пролете Луны в точке периселения при движении вдоль неустойчивого многообразия гало-орбит вокруг ЕМ L_1 . Цветами выделены точки, соответствующие гало-орбитам с z -амплитудами 15 000 км (зеленый), 25 000 км (красный) и 35 000 км (розовый)

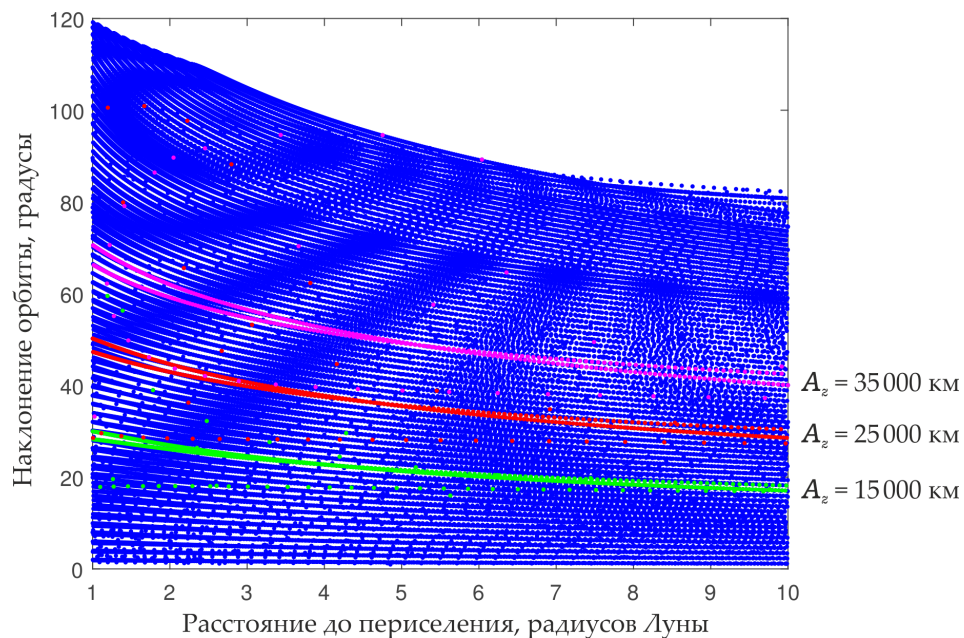


Рисунок 3.11 — Расстояние до периселения и наклонение оскулирующих орбит, получающихся при первом пролете Луны в точке периселения при движении вдоль неустойчивого многообразия гало-орбит вокруг ЕМ L_2 . Цветами выделены точки, соответствующие гало-орбитам с z -амплитудами 15 000 км (зеленый), 25 000 км (красный) и 35 000 км (розовый)

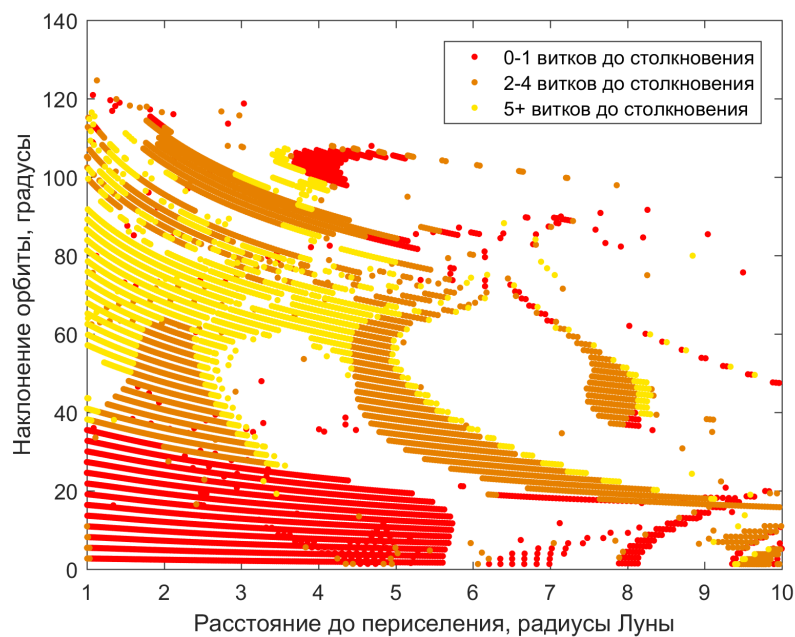


Рисунок 3.12 — Количество витков вокруг Луны, которое совершает аппарат после первого пролета Луны до столкновения с ее поверхностью. Данные для получены для случая гало-орбит вокруг ЕМ L_1

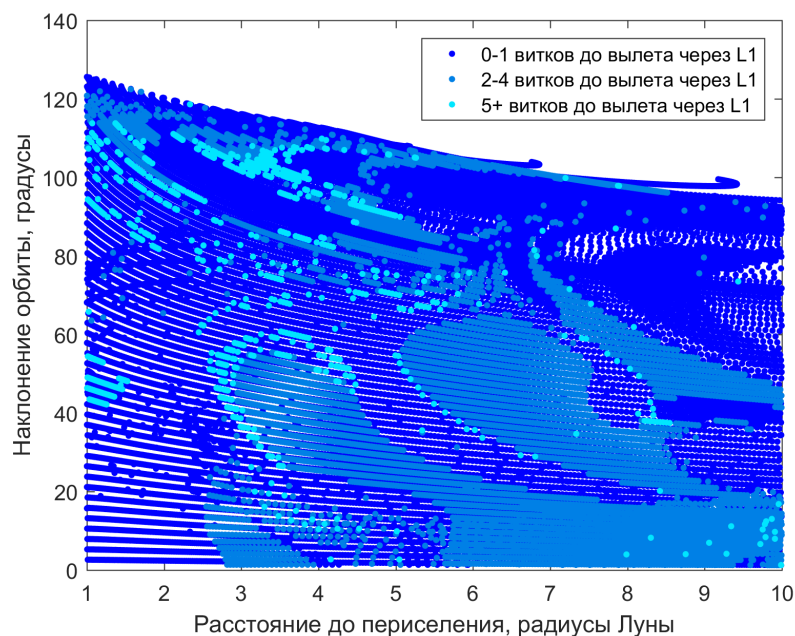


Рисунок 3.13 — Количество витков вокруг Луны, которое совершает аппарат после первого пролета Луны до вылета через точку L_1 . Данные для получены для случая гало-орбит вокруг ЕМ L_1

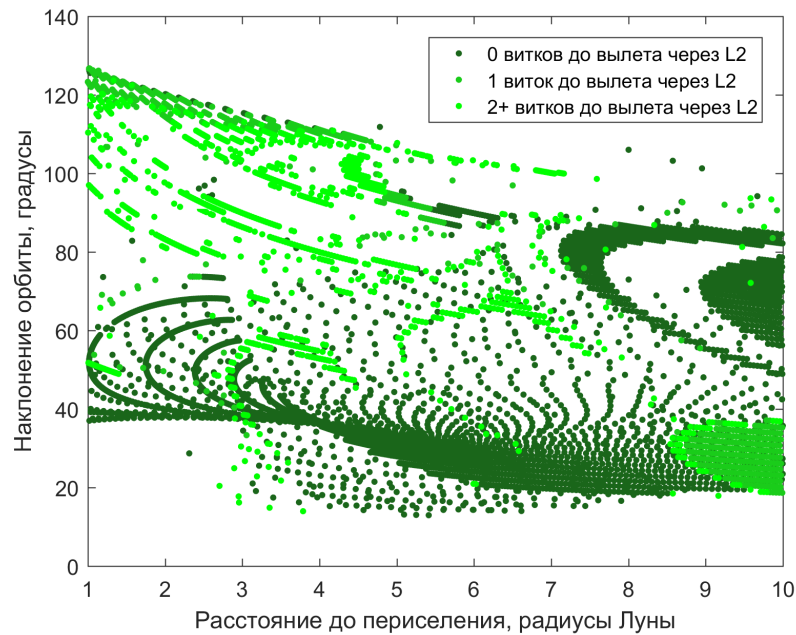


Рисунок 3.14 — Количество витков вокруг Луны, которое совершает аппарат после первого пролета Луны до вылета через точку L_2 . Данные для получены для случая гало-орбит вокруг EM L_1

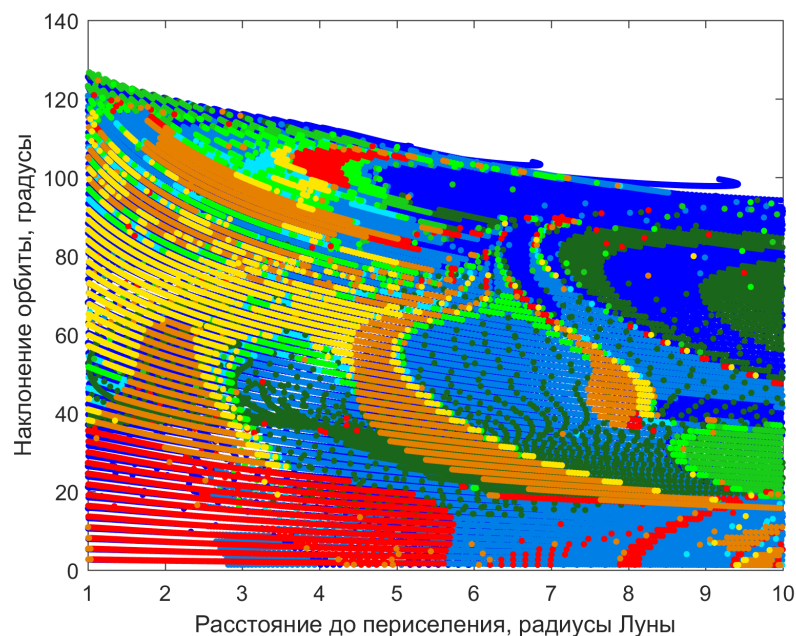


Рисунок 3.15 — Объединенные рисунки 3.12, 3.13 и 3.14. Более яркие области (оранжевый, светло зеленый, голубой) отвечают более устойчивым траекториям, которые совершают несколько витков вокруг Луны, прежде чем столкнуться с ее поверхностью, либо выйти из окрестности Луны через точки L_1 или L_2

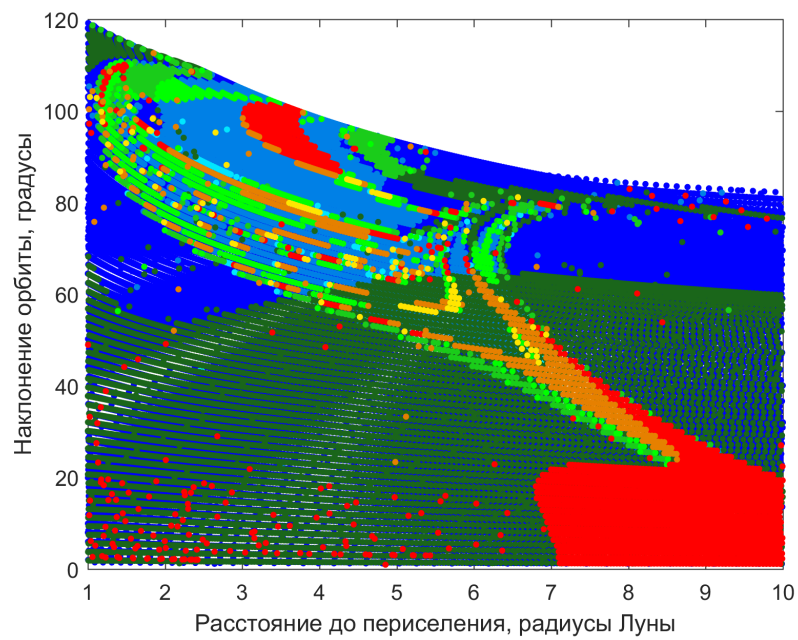


Рисунок 3.16 — Объединенные рисунки для гало-орбит вокруг L_2 . Более яркие области (оранжевый, светло-зеленый, голубой) отвечают более устойчивым траекториям, которые совершают несколько витков вокруг Луны, прежде чем столкнуться с ее поверхностью, либо выйти из окрестности Луны через точки L_1 или L_2

3.3.2 Стабилизация окололунных орбит малой тягой

Стабилизация орбиты малой тягой выполняется следующим образом: всякий раз, когда аппарат подлетает к Луне на достаточно близкое расстояние r_{\max} (10 радиусов Луны, в данной работе), двигатель создает тягу против скорости КА в инерциальной системе отсчета. В некоторый момент это расстояние до апоиселения опустится ниже значения r_{\max} , и тогда тяга будет включена постоянно. Распространение траектории заканчивается в момент, когда максимальная вариация наклона и расстояния до периселения около своих средних значений за последовательные два витка не будет меньше заранее заданной величины: 1° для наклона и 1 000 км для расстояния до периселения. В какой-то момент, впрочем, может оказаться, что тяги недостаточно для стабилизации траектории, и аппарат соударяется с Луной либо вылетает из окрестности Луны через точку L_1 или L_2 . Такие траектории не сохраняются, так как нас будут интересовать лишь стабилизированные траектории. Более того, устанавливается ограничение и на время стабилизации: оно не должно превышать 10 оборотов Луны вокруг Земли.

Результаты были получены для МКА массой 250 кг, оснащенного двигателем малой тяги СПД-100В, а также для МКА массой 9 кг с двигателем из серии ВТ-3. Те же МКА были рассмотрены и в главе 2 данной диссертации, исключение составляет лишь масса аппаратов: в этой главе учитывается, что некоторая доля исходной массы была затрачена на доставку МКА с околоземной орбиты на гало-орбиту – порядка 50 кг для миниаппарата и 1 кг для наноаппарата (см. таблицы 2.8 и 2.10).

Для миниаппарата на гало-орбите вокруг точки L_1 удастся стабилизировать 25.16% траекторий, для наноаппарата – 15.49% траекторий. Что касается гало-орбит вокруг точки L_2 , то для миниаппарата стабилизируются 31.52% траекторий, а для наноаппарата – 6.07% траекторий. На рисунке 3.17 показаны орбиты, найденные при пассивном распространении траекторий, и те из них, которые удастся стабилизировать с помощью мини-ДУ на миниаппарате. Похожая картина распределения стабилизируемых орбит была найдена и для наноаппарата. Отметим, что пока орбита не стабилизирована, ее орбитальные параметры претерпевают значительные изменения. Финальные, стабилизированные, параметры для случая миниаппарата при сходе с гало-орбит вокруг L_1

изображены на рисунке 3.18. Из рисунка 3.18 видно, что в большом количестве существуют околополярные траектории, актуальные для современных практических задач. Аналогичные результаты были получены для миниаппарата при сходе с гало-орбит вокруг L_2 , см. рисунки 3.19 и 3.20. Приведем также результаты для наноаппарата при сходе с гало-орбит вокруг L_1 (рисунки 3.21 и 3.22) и L_2 (рисунки 3.23 и 3.24). Отметим, что в последнем случае, несмотря на малое относительное число стабилизируемых орбит, существует крупное множество достижимых околополярных орбит.

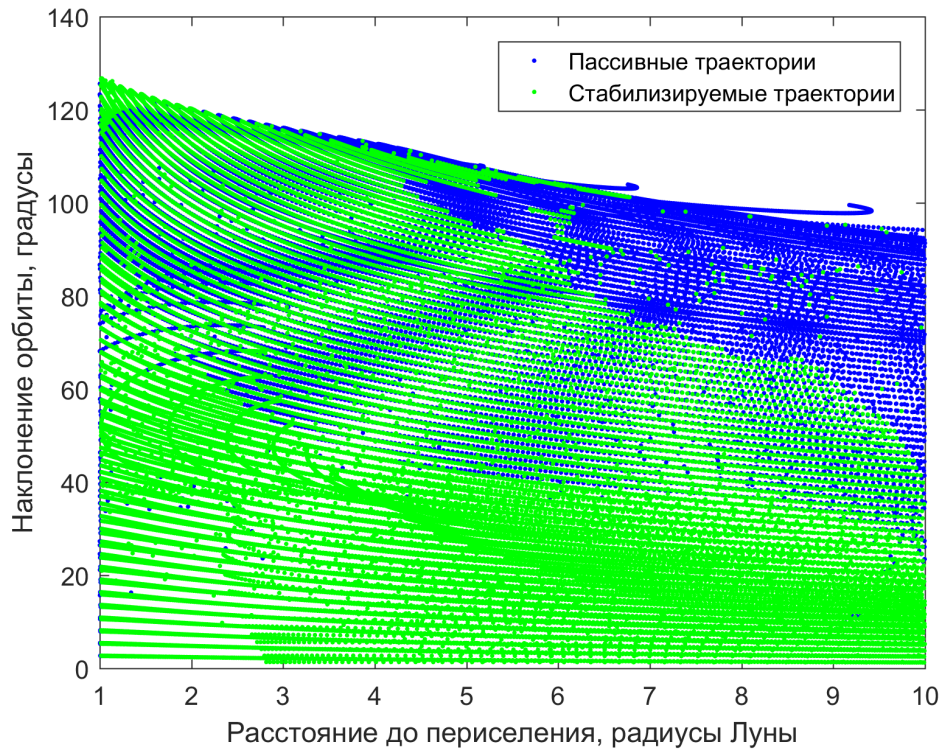


Рисунок 3.17 — Орбиты, найденные при пассивном распространении траекторий с гало-орбит вокруг L_1 (синие), и те из них, которые удается стабилизировать с помощью мини-ДУ (зеленые)

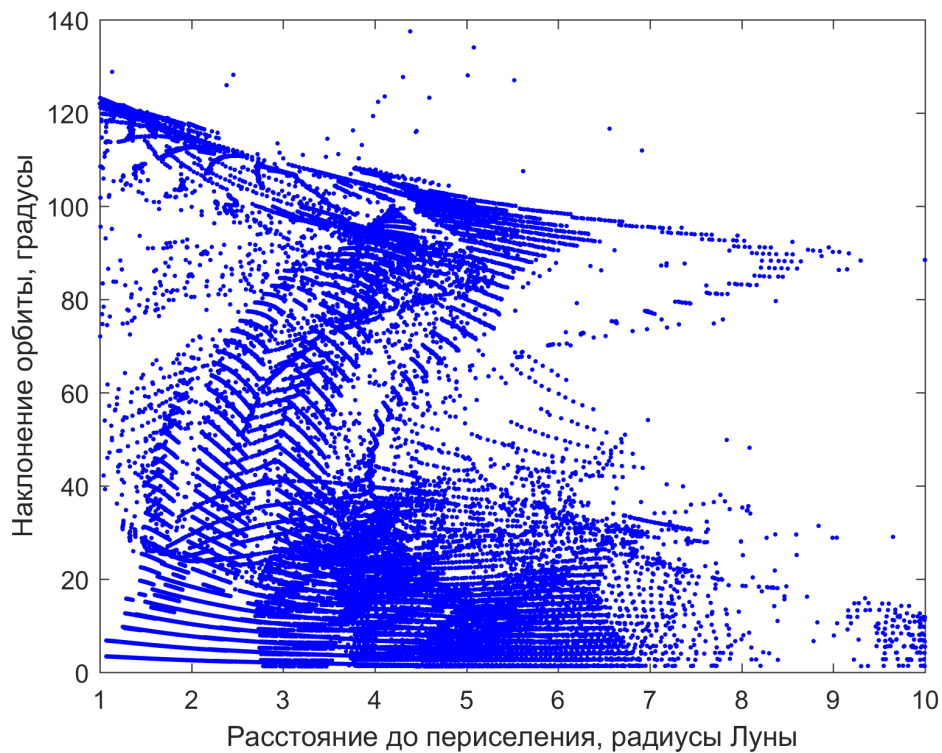


Рисунок 3.18 — Стабилизированные окололунные орбиты при сходе с гало-орбит вокруг EM L_1 на миниаппарате

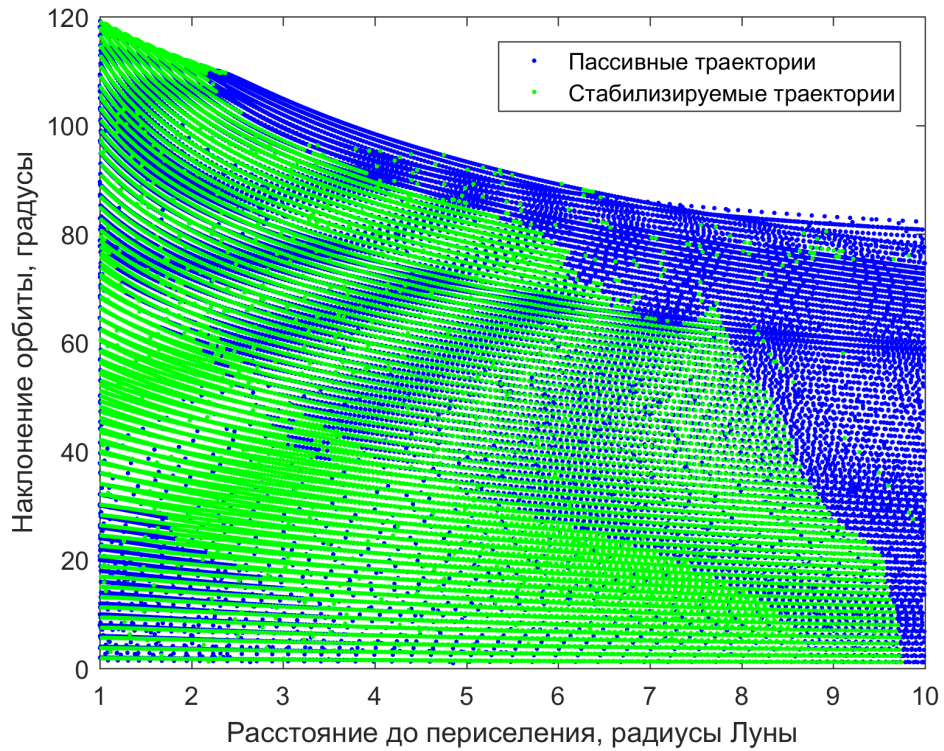


Рисунок 3.19 — Орбиты, найденные при пассивном распространении траекторий с гало-орбит вокруг L_2 (синие), и те из них, которые удается стабилизировать с помощью мини-ДУ (зеленые)

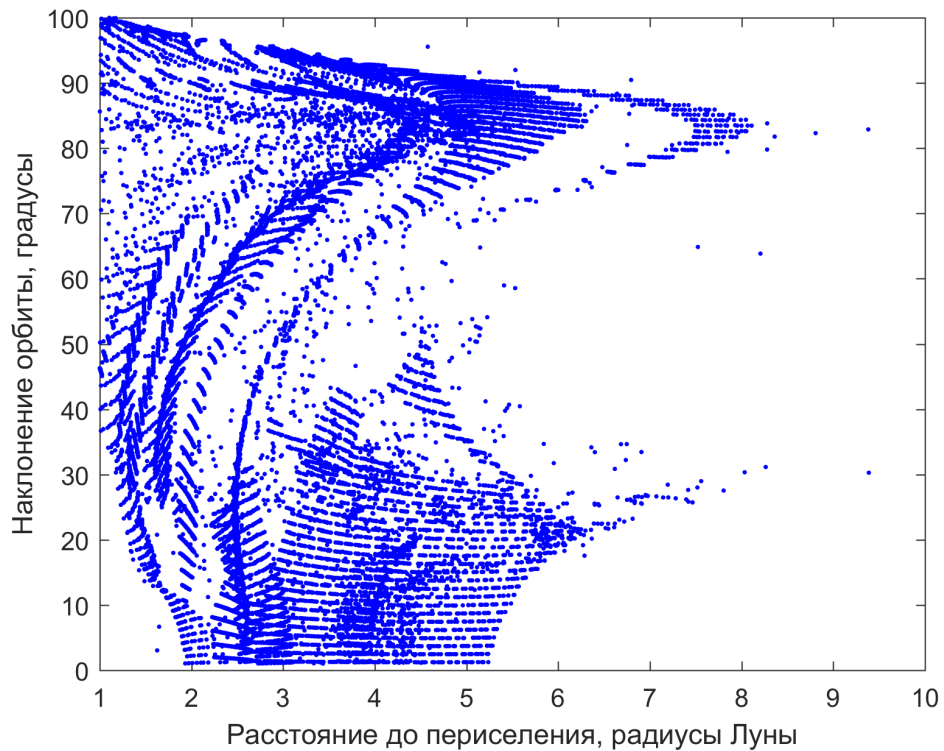


Рисунок 3.20 — Стабилизированные окололунные орбиты при сходе с гало-орбит вокруг EM L_2 на миниаппарате

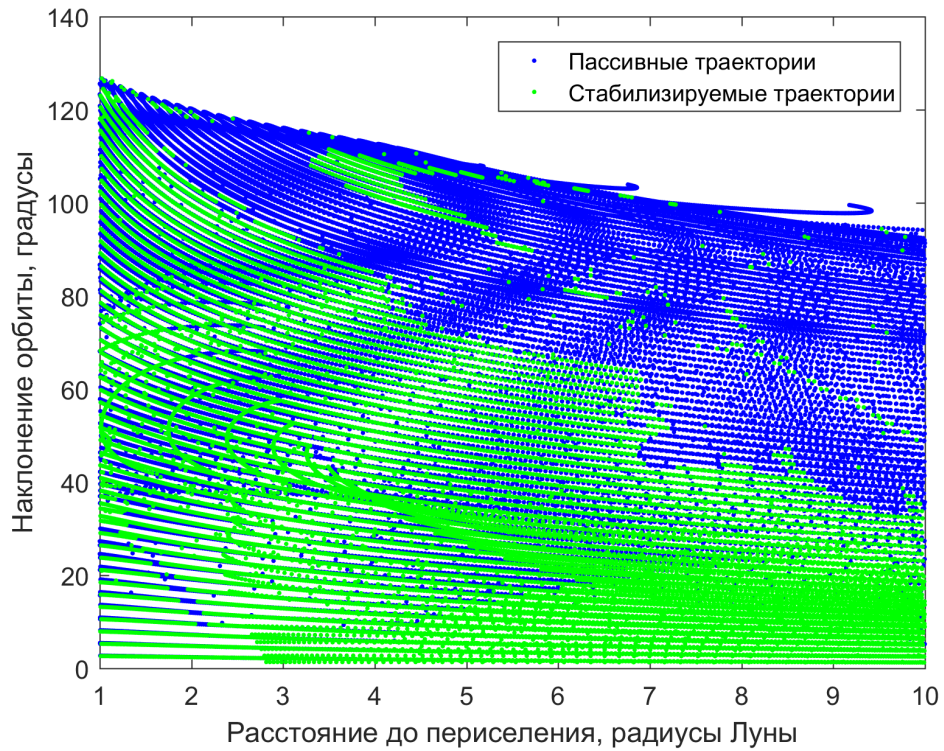


Рисунок 3.21 — Орбиты, найденные при пассивном распространении траекторий с гало-орбит вокруг L_1 (синие), и те из них, которые удается стабилизировать с помощью нано-ДУ (зеленые)

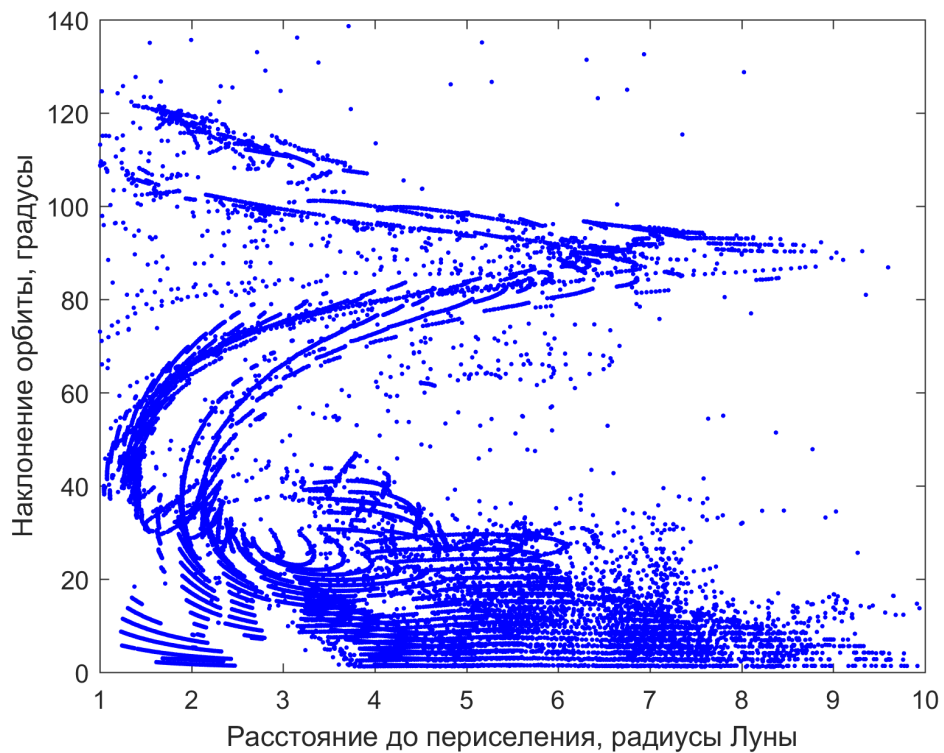


Рисунок 3.22 — Стабилизированные окололунные орбиты при сходе с гало-орбит вокруг EM L_1 на наноаппарате

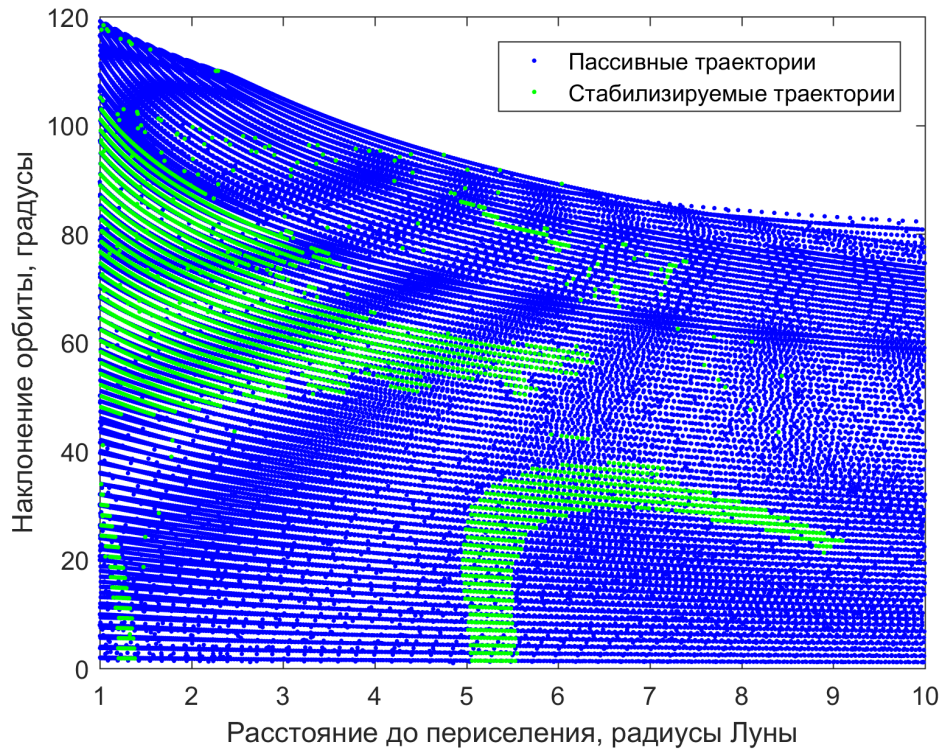


Рисунок 3.23 — Орбиты, найденные при пассивном распространении траекторий с гало-орбит вокруг L_2 (синие), и те из них, которые удается стабилизировать с помощью нано-ДУ (зеленые)

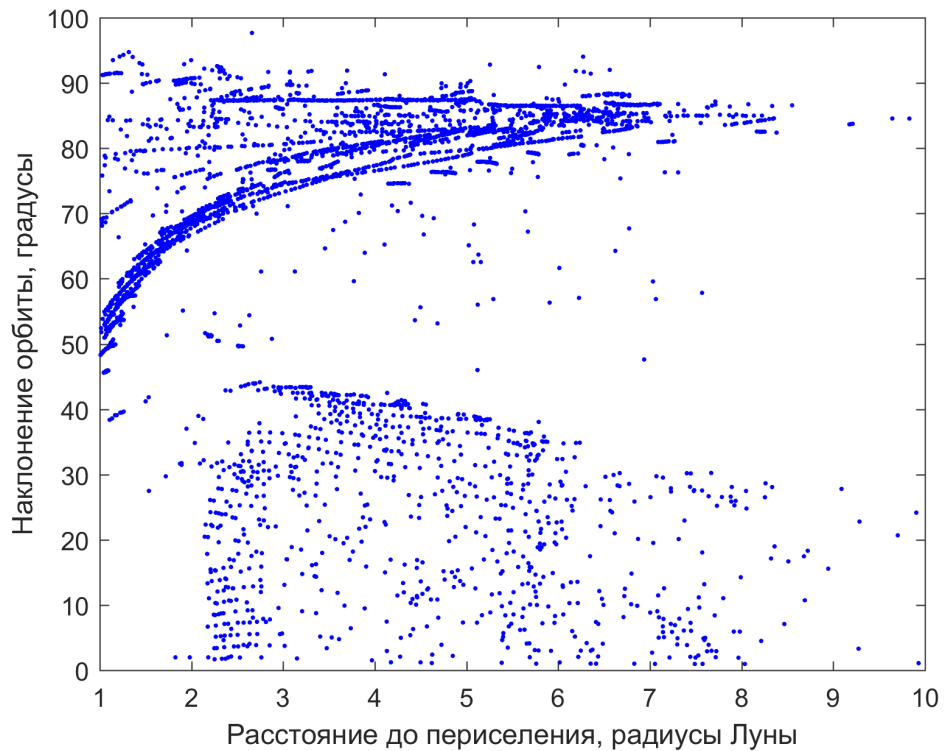


Рисунок 3.24 — Стабилизированные окололунные орбиты при сходе с гало-орбит вокруг EM L_2 на наноаппарате

Глава 4. Смена номинальной орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации в случае нештатной задержки коррекции

Данная глава посвящена анализу возможных преимуществ смены номинальной орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации в случае нештатной задержки коррекции. Такая задержка может быть вызвана, например, потерей связи с КА или выходом из строя маршевого двигателя. Для определенности полагается, что 1) задержка коррекции является временной и управление становится доступным после задержки, 2) двигатель не производит тягу во время задержки. В главе анализируются затраты на возвращение КА на исходную орбиту в зависимости от длительности задержки, размеров и типа исходной орбиты, системы трех тел и точки либрации. Более того, подбирается и другая орбита, перелет на которую был бы оптимальным в смысле затрат топлива на перелет. Характеристики перелета на новую орбиту сравниваются с характеристиками перелета на исходную орбиту. Задача изучается преимущественно со статистической точки зрения. Управление предполагается импульсным. В качестве номинальных орбит рассмотрены гало-орбиты и квазигало-орбиты вокруг точек либрации L_1/L_2 систем Земля–Луна и Солнце–Земля.

4.1 Введение

Как уже было отмечено в разделе 1.1.8, динамика в окрестности точек либрации является неустойчивой. На практике это отражается в необходимости точно определять орбиту и регулярно корректировать движение, чтобы удерживать КА около номинальной орбиты. Статистические оценки оптимальных годовых затрат на поддержание, а также периодичности коррекций исследовались во многих работах: например, М. Л. Лидова [85], А. Ю. Когана [87], Э. Густафсона и Д. Ширса [168], С. Рено и Д. Ширса [169]. Эти исследования показали, что оптимальный период коррекции близок либо к характерному времени удаления от точки либрации λ^{-1} , либо к характеристическому времени α^{-1} распада орбиты, где характеристическая экспонента $\alpha = \ln \mu_1 / P_{\text{ref}}$, μ_1 – максимальное собственное значение матрицы монодромии $\Phi(T, 0)$, P_{ref} – период орбиты. Обе оценки дают период коррекции порядка 25 дней для системы Солнце–Земля и

порядка 40 часов для системы Земля–Луна, однако если принять во внимание, что бóльший интервал между коррекциями дает возможность точнее определить орбиту, то оптимальный (в смысле оптимизации среднегодовых затрат топлива) период между коррекциями оказывается намного больше: порядка 52 дней в системе Солнце–Земля и порядка 4 дней в системе Земля–Луна [85]. Типичные значения Δv на поддержание орбиты в различных миссиях показаны в Таблице 1.3. Заметим, что различия в значениях Δv обусловлены многими факторами: система трех тел, метод поддержания, требования к системе ориентации КА и системе управления, типы и размеры орбит и др.

Если по каким-то причинам маневр коррекции пропущен, траектория КА быстро отклоняется от номинальной орбиты и направляется в окрестность одного из главных тел. Поэтому выход из строя маршевого двигателя или потеря связи с КА могут привести к пропуску коррекции и нарушить сценарий миссии.

Исследование, проведенное М. Тафаццолли [170], показало, что 59% всех нештатных ситуаций на борту КА в рабочем режиме были связаны с системой управления орбитальным и угловым движением КА и системой электропитания. Выход из строя таких систем угрожает полной потерей миссии в результате отсутствия возможности управления КА. Согласно исследованию [170], многих проблем удалось бы избежать при более тщательном тестировании аппарата перед запуском, дублировании и резервировании компонент, а также обеспечении гибкости смены управления аппаратом после нештатной ситуации. Последний пункт рекомендаций предполагает и предварительный расчет возможных вариантов развития событий после нештатной ситуации, предварительный поиск возможных решений проблемы и оценку затрат на усилия по прекращению проблемы («спасению миссии»).

Текущее исследование относится к этому пункту рекомендаций и касается случая, когда потеря управления аппаратом является лишь временной. Временная потеря управления неоднократно случалась на практике. Например, в 1998 г. аппарат SOHO (миссия к SE L_1) неожиданно лишился всех своих гироскопов, в результате чего ориентировался к Солнцу ребрами своих солнечных панелей [171]. На два месяца связь с аппаратом была потеряна. Когда же она была восстановлена, на аппарат было успешно загружена новая программа управления угловым движением с помощью двигателей ориентации. Через некоторое время была скорректирована и орбита аппарата, причем произошло

это незадолго до момента, когда отклонение КА от номинальной орбиты стало бы слишком большим для спасения миссии.

Задача минимизации последствий нештатного выключения двигателя в межпланетных полетах на этапе проектирования номинальной траектории уже рассматривалась ранее (см., например, недавнюю работу [172] по максимизации допустимой продолжительности нештатного выключения двигателя). Задачи спасения миссий вокруг либрационных орбит, насколько известно автору диссертации, до сих пор не ставились.

Во время пассивного движения аппарата без управления траектория может существенно отдалиться от исходной орбиты. Возврат на нее может оказаться слишком затратным с точки зрения последующего продолжения миссии с поддержанием траектории. Поэтому предлагается найти такую новую орбиту, перелет на которую был бы оптимален в смысле затрат топлива, чтобы максимально продлить время жизни КА на орбите. Новая орбита может отличаться в размерах по сравнению с исходной орбитой, однако зачастую цели миссий вокруг точек либрации позволяют слегка изменить размеры номинальной орбиты, и этим можно воспользоваться для экономии топлива. В данной главе изучается вопрос, насколько выигрышным по затратам топлива оказывается перелет на новую орбиту по сравнению с перелетом на исходную орбиту, как зависит этот выигрыш от длительности задержки коррекции и как сильно по размерам отличаются новая и исходная орбиты. Для этого проводится серия испытаний Монте–Карло, а также отдельно изучается худшая ситуация, когда в момент сбоя коррекции аппарат находится на неустойчивом многообразии исходной орбиты. В качестве номинальных орбит сначала рассматриваются гало-орбиты вокруг L_1/L_2 систем Земля–Луна и Солнце–Земля, а затем описанная методика применяется для квазигало-орбит. Результаты, полученные изначально в рамках модели CR3BP, затем адаптируются к эфемеридной модели движения тел Солнечной системы.

4.2 Постановка оптимизационной задачи для гало-орбит

Рассмотрим гало-орбиту вокруг точки L_1 или L_2 . Пусть $\mathbf{x}_{\text{ref}} = [\mathbf{r}_{\text{ref}}, \mathbf{v}_{\text{ref}}]$ обозначает фазовое состояние, соответствующее некоторой точке на орбите, а фактическое фазовое состояние аппарата $\mathbf{x}_0 = [\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0]$ в начальный момент

времени $t = t_0$ смещено от \mathbf{x}_{ref} в некотором направлении \mathbf{e} (рисунок 4.1)

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{ref}} + \mathbf{e}$$

Это смещение является результатом двух факторов: навигационной неопределенности состояния КА и его удаления от неустойчивой номинальной орбиты в процессе своего пассивного движения с момента предыдущего импульса коррекции. Предположим, что коррекция траектории была запланирована в точке \mathbf{x}_0 в момент $t = t_0$, но по каким-то причинам маневр коррекции не состоялся.

Пусть в течение времени $t_d = t_1 - t_0$ аппарат движется без управления, и его траектория отклоняется от номинальной орбиты. Пусть в момент времени t_1 управление аппаратом вновь становится доступным. Будем рассматривать две опции перелета: возвращение на исходную орбиту и поиск новой орбиты, перелет на которую был бы оптимальным в плане затрат топлива. Цель последующего исследования состоит в том, чтобы поставить две соответствующие оптимизационные задачи, решить их и сравнить результаты. В обоих случаях, оптимизационная задача имеет общий вид

$$J(\mathbf{y}) \rightarrow \min, \mathbf{l}_b \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{u}_b$$

где $J = J(\mathbf{y})$ – целевая функция, \mathbf{y} – вектор оптимизационных переменных, а \mathbf{l}_b и \mathbf{u}_b обозначают соответственно нижнюю и верхнюю границу значений



Рисунок 4.1 — Схематическая иллюстрация двухимпульсного перелета с исходной орбиты на новую орбиту, проекция на плоскость Cxy

переменных в \mathbf{y} . В данной работе перелеты на исходную и на новую орбиту считаются двухимпульсными.

Рассмотрим оптимизационные задачи более детально. Хорошо известно, что гало-орбиты образуют однопараметрическое семейство периодических траекторий, причем z -амплитуда может использоваться для задания определенной орбиты семейства. Точки на гало-орбите будем обозначать переменной $\varphi \in [0, 1]$, причем $\varphi = 0$ будет соответствовать точке с максимальной координатой z .

Пусть $\mathbf{x}_1 = [\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1^-]$ – фазовое состояние¹ в момент $t = t_1$. Рассмотрим целевую гало-орбиту с z -амплитудой равной A_z и точку φ на ней; пусть $\mathbf{x}_2 = [\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2^+]$ – фазовое состояние, соответствующее этой точке. После того как время перелета $T = t_2 - t_1$ выбрано, можно решить двухточечную краевую задачу между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и вычислить требуемые для перелета скорости \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^- . Затраты на перелет считаются как сумма затрат характеристической скорости $\Delta v_1 = |\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-|$ и $\Delta v_2 = |\mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_2^-|$, поэтому целевая функция $J = \Delta v_1 + \Delta v_2$. В случае, когда подбирается новая орбита, имеем $\mathbf{y} = [A_z, T, \varphi]$. Если рассматривается перелет на исходную орбиту, то амплитуда $A_z = A_{\text{ref}}$ фиксирована и вектор оптимизационных переменных $\mathbf{y} = [T, \varphi]$.

Теперь, когда переменные оптимизации определены, укажем их область допустимых значений.

1) В данной работе $A_z > 0$ отвечает северным гало-орбитам и $A_z < 0$ – южным гало-орбитам. Чтобы сохранить неизменным тип орбиты, необходимо ограничить A_z на интервале $[0, A_{\text{max}}]$ для $A_{\text{ref}} > 0$ и на интервале $[-A_{\text{max}}, 0]$ для $A_{\text{ref}} < 0$, где $A_{\text{max}} > 0$ – максимально допустимое значение z -амплитуды (35 000 км в системе Земля–Луна и 900 000 км в системе Солнце–Земля). Величина A_{max} вводится из-за того, что выбранный порядок аппроксимации гало-орбит не достаточен для получения орбиты с большими значениями z -амплитуды. Отметим, наконец, что специфические для каждой миссии требования к размерам орбиты могут быть также выражены в виде ограничений на A_z . В данной работе такие дополнительные ограничения не ставятся, чтобы проанализировать максимально возможное изменение орбиты при реализации предлагаемой стратегии.

¹Здесь и далее знаки минус и плюс в надстрочных индексах обозначают скорости КА до и после маневра, соответственно. Например, \mathbf{v}_1^- обозначает скорость в точке \mathbf{r}_1 перед первым импульсом, а \mathbf{v}_1^+ – скорость в точке \mathbf{r}_1 после первого импульса.

2) Время перелета T ограничивается неотрицательными значениями, $T \geq 0$. Если $T = 0$ для $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, то перелет трактуется как одноимпульсный и $\Delta v_1 = |\mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_1^-|$, $\Delta v_2 = 0$. Если же $T = 0$, но $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$, то считается $\Delta v_1 = \Delta v_2 = +\infty$.

3) По определению $\varphi \in [0, 1]$, но учет этого ограничения в постановке оптимизационной задачи не является ни необходимым (так как φ и $\varphi + 1$ определяют одну и ту же точку на орбите), ни желательным с точки зрения последующей итерационной процедуры численного метода оптимизации. Поэтому будем считать, что $-\infty < \varphi < +\infty$.

Принимая вышесказанное во внимание, можно выписать границы значений оптимизируемых переменных:

$$\mathbf{l}_b = [0, 0, -\infty], \quad \mathbf{u}_b = [A_{\max}, +\infty, +\infty]$$

для $A_{\text{ref}} > 0$ или

$$\mathbf{l}_b = [-A_{\max}, 0, -\infty], \quad \mathbf{u}_b = [0, +\infty, +\infty]$$

для $A_{\text{ref}} < 0$ в случае перелета на новую орбиту и

$$\mathbf{l}_b = [0, -\infty], \quad \mathbf{u}_b = [+ \infty, + \infty]$$

в случае перелета на исходную орбиту.

Поиск оптимального решения производится с помощью алгоритма последовательного квадратичного программирования, реализованного в функции FMINCON математического пакета MATLAB (R2015a). При этом сначала оптимизируется перелет на исходную орбиту. Начальное приближение вектора оптимизируемых переменных выбирается равным

$$\mathbf{y}_0 = [0.25P_{\text{ref}}, t_d/P_{\text{ref}} + \varphi_{\text{ref}} + 0.25] \quad (4.1)$$

где P_{ref} – период исходной орбиты, φ_{ref} – точка на исходной гало-орбите, рядом с которой произошел сбой коррекции (т.е. точка \mathbf{x}_0). Этот вектор был получен вручную методом проб и ошибок. В большинстве случаев итерационная процедура сходится к решению с относительной погрешностью 10^{-3} за 4–10 итераций. Рисунок 4.2 показывает линии уровня целевой функции на плоскости (T, φ) для случая, когда вектор отклонения \mathbf{e} от исходной орбиты направлен

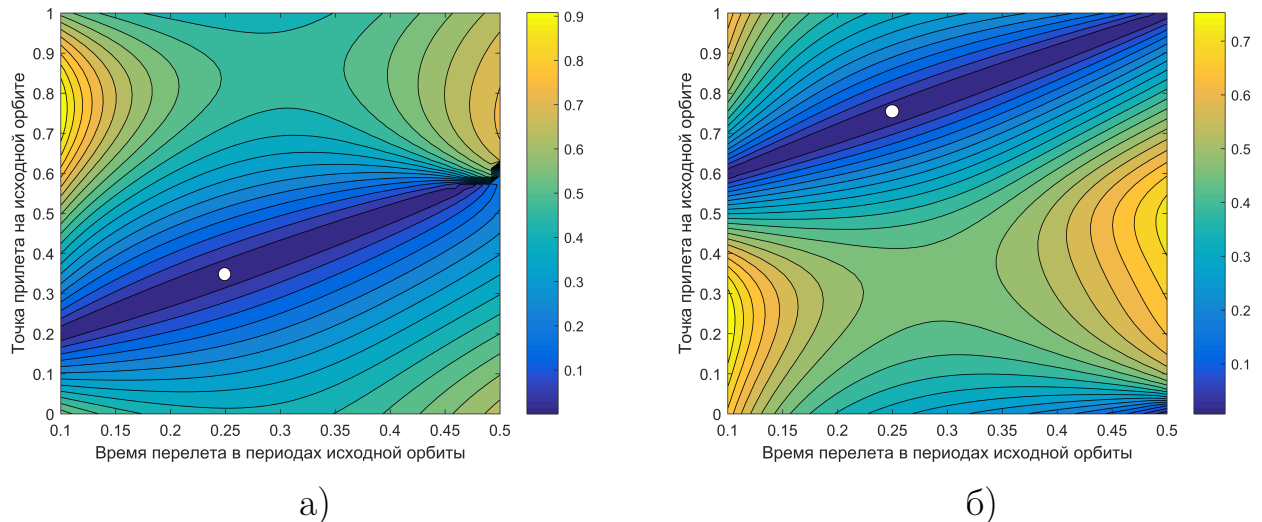


Рисунок 4.2 — Линии уровня целевой функции (в м/с) на плоскости (T, φ) и начальное приближение (белый круг) для случая гало-орбиты вокруг точки Земля–Луна L_1 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км и времени задержки, равным а) $t_d = 0.1$ периодов исходной орбиты, и б) $t_d = 0.5$ периодов исходной орбиты. Начальное отклонение от исходной орбиты направлено вдоль неустойчивого многообразия

вдоль неустойчивого многообразия; из рисунка видно, что начальное приближение близко к оптимальному значению, причем эта близость сохраняется для всех рассматриваемых в данной работе орбит, обеих точек либрации и систем трех тел.

После расчета оптимального перелета на исходную орбиту выполняется расчет оптимального перелета на новую орбиту. В этом случае начальное приближение принимается равным

$$\mathbf{y}_0 = [A_{\text{ref}}, \mathbf{y}_{\text{ref}}]$$

где \mathbf{y}_{ref} — решение, полученное в задаче перелета на исходную орбиту. Другими словами, оптимальный перелет на исходную орбиту служит начальным приближением для более общей оптимизационной процедуры перелета на новую орбиту.

Гало-орбиты аппроксимируются рядами Фурье 9-го порядка, полученными методом Линдштедта–Пуанкаре. Решение двухточечной краевой задачи, которая дает значения Δv_1 и Δv_2 , получается с использованием метода параллельной пристрелки. В качестве начального приближения для этого используется

решение двухточечной краевой задачи в задаче двух тел (задача Ламберта) с m_2 в качестве центрального тела.

4.3 Результаты перелетов на гало-орбиты

В качестве исходных орбит рассмотрим несколько гало-орбит вокруг точек L_1 и L_2 систем Земля–Луна и Солнце–Земля. Из характеристик перелета будем анализировать затраты Δv_{ref} на перелет на исходную орбиту, затраты Δv_{best} на перелет на новую орбиту, выигрыш по скорости $\Delta v_g = \Delta v_{\text{ref}} - \Delta v_{\text{best}}$ при перелете на новую орбиту по сравнению с перелетом на исходную орбиту, относительный выигрыш по скорости

$$\rho = \frac{\Delta v_{\text{ref}} - \Delta v_{\text{best}}}{\Delta v_{\text{ref}}} \cdot 100\%$$

разницу $\Delta A_z = A_{\text{best}} - A_{\text{ref}}$ между z -амплитудой A_{best} новой орбиты и z -амплитудой A_{ref} исходной орбиты, а также относительное изменение амплитуд $\alpha = \Delta A_z / A_{\text{ref}} \cdot 100\%$.

Также исследуем две опции выбора вектора отклонения \mathbf{e} . Сначала, чтобы изучить заведомо худший сценарий развития событий, направим вектор отклонения вдоль неустойчивого многообразия гало-орбиты. В другой опции, чтобы получить статистическую информацию об эффективности стратегии поиска лучшей запасной орбиты, вектор отклонения будем трактовать как случайный вектор с нормальным распределением и проведем серию испытаний Монте–Карло. Результаты расчетов приводятся ниже.

4.3.1 Отклонение вдоль неустойчивого многообразия

Направим вектор отклонения вдоль вектора неустойчивого многообразия $\mathbf{e} = k\mathbf{u}_u$, а абсолютную величину отклонения k выберем так, чтобы вектор отклонения лежал на поверхности наиболее вероятного эллипсоида рассеивания:

$$E_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} = c\}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \sigma_v^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Наиболее вероятный эллипсоид рассеивания соответствует такой c , которая максимизирует плотность распределения случайной величины $Q = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}$ для \mathbf{X} из многомерного нормального распределения $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$; σ_r и σ_v – стандартные отклонения по положению и скорости, соответственно, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ – единичная матрица размера 3×3 , $\mathbf{O}_{3 \times 3}$ – нулевая матрица размера 3×3 . Так как Q имеет распределение хи-квадрат с 6 степенями свободы, ее плотность равна

$$f_{\chi^2(6)}(q) = \frac{1}{16} q^2 \exp(-q/2), \quad q \geq 0$$

и принимает максимум в точке $q_{\max} = 4$. Тогда из равенств $c = q_{\max}$, $\mathbf{e}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{e} = c$ и $\mathbf{e} = k \mathbf{u}_u$, можно окончательно получить

$$\mathbf{e} = \frac{2}{\sqrt{\mathbf{u}_u^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{u}_u}} \mathbf{u}_u$$

В данной работе выбраны значения $\sigma_r = 5$ км и $\sigma_v = 5$ см/с для системы Земля–Луна и $\sigma_r = 100$ км и $\sigma_v = 10$ см/с для системы Солнце–Земля. Эти значения в 5–10 раз больше значений, которые могут быть получены современными средствами внешнетраекторных измерений, так как включают в себя не только навигационные ошибки определения траектории, но и отклонение от исходной неустойчивой орбиты в процессе движения с момента последнего импульса коррекции. Анализ чувствительности результатов к значениям σ_r и σ_v проводится в следующем разделе.

На рисунке 4.3 показан пример оптимального перелета на исходную орбиту и оптимального перелета на новую найденную орбиту. Данный пример рассчитан для исходной гало-орбиты с амплитудой $A_z = 15\,000$ км вокруг точки L_1 системы Земля–Луна; сбой коррекции происходит в точке с максимальной z -амплитудой ($\varphi_{\text{ref}} = 0$), первая компонента \mathbf{u}_u отрицательна (ветвь неустойчивого многообразия распространяется в сторону Земли), а задержка коррекции составляет 0.8 периода исходной орбиты.

В качестве исходных орбит рассматривались несколько гало-орбит с z -амплитудами 5 000 км, 10 000 км, 15 000 км, 20 000 км (в системе Земля–Луна) и 50 000 км, 100 000 км, 150 000 км, 200 000 км (в системе Солнце–Земля)². Резуль-

²В некоторых случаях меньшие по размеру орбиты оказываются непрактичными, так как может потребоваться минимальное угловое расстояние между КА и Солнцем (Солнце–Земля L_1) или между КА и Луной (Земля–Луна L_2). Например, в миссии SOHO требовалось избегать область в 4.5° от Солнца, что отвечало минимальной величине $A_z = 120\,000$ км.

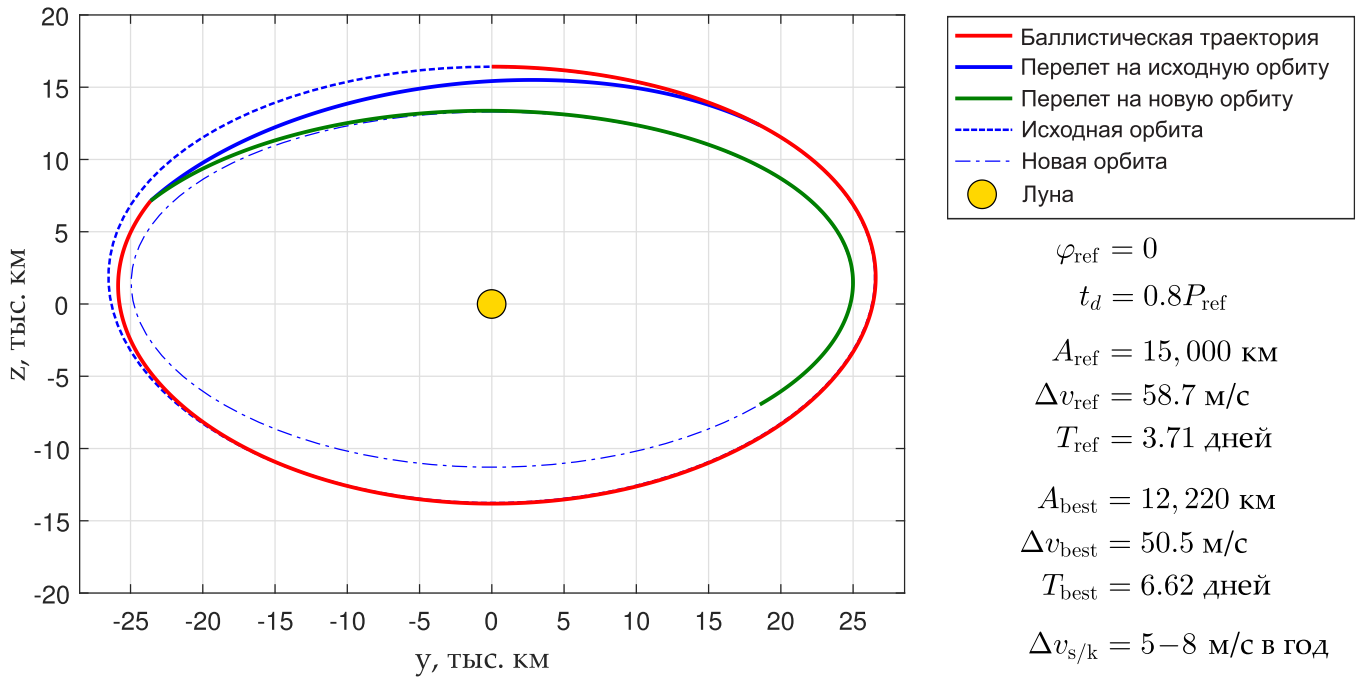


Рисунок 4.3 — Оптимальные перелеты на исходную гало-орбиту вокруг ЕМ L_1 с $A_z = 15\,000$ км и на новую гало-орбиту в проекциях на плоскость Syz (вид с Земли); изображение Луны соответствует ее размерам

таты представлены в таблицах 4.1–4.4. На каждой гало-орбите варьировались \mathbf{x}_{ref} (по 10 точек на каждой орбите) и направление ветви $\pm \mathbf{u}_u$ вдоль неустойчивого многообразия. Так как северные и южные гало-орбиты являются зеркальным отражением друг друга по отношению к плоскости Sxy , полученные результаты справедливы для обоих типов орбит.

Расчеты показали, что выигрыш по скорости ничтожен для $t_d \leq 0.5P_{\text{ref}}$. Это значит что если задержка коррекции заняла меньше половины периода орбиты, КА может с тем же успехом быть возвращен на исходную орбиту. Характеристическая скорость Δv_{ref} растет экспоненциально с ростом t_d и может достигнуть сотен метров в секунду как в системе Земля–Луна, так и в системе Солнце–Земля. Поэтому расчеты максимальных значений ρ , Δv_g и α для формирования таблиц 4.1–4.4 проводились при ограничениях $0.5P_{\text{ref}} \leq t_d \leq 0.9P_{\text{ref}}$ и $\Delta v_{\text{ref}} \leq 60 \text{ м/с}$. В скобках указаны значения Δv_g , ρ и $|\Delta A_z|$, которые соответствуют максимальным значениям ρ , Δv_g и α , соответственно. Результаты в таблицах 4.1–4.4 ясно показывают, что максимальный выигрыш по скорости и максимальный относительный выигрыш по скорости увеличиваются с ростом размера исходной орбиты, а максимальное относительное изменение амплитуды уменьшается с ростом размера исходной орбиты. Из таблицы 4.1

Таблица 4.1

Характеристики перелетов для гало-орбит вокруг EM L_1 , отклонение вдоль неустойчивого многообразия; $\sigma_r = 5$ км, $\sigma_v = 5$ см/с

A_z , км	$\max \rho (\Delta v_g)$	$\max \Delta v_g (\rho)$	$\max \alpha (\Delta A_z)$
5 000	9.1% (2.7 м/с)	3.4 м/с (6.8%)	37.9% (1 893 км)
10 000	12.1% (3.5 м/с)	4.7 м/с (8.1%)	38.0% (3 800 км)
15 000	14.0% (7.9 м/с)	8.1 м/с (13.8 %)	20.1% (3 014 км)
20 000	15.8% (5.6 м/с)	7.5 м/с (15.3 %)	13.4% (2 687 км)
25 000	17.9% (2.4 м/с)	9.2 м/с (16.8 %)	9.8% (2 462 км)

Таблица 4.2

Характеристики перелетов для гало-орбит вокруг EM L_2 , отклонение вдоль неустойчивого многообразия; $\sigma_r = 5$ км, $\sigma_v = 5$ см/с

A_z , км	$\max \rho (\Delta v_g)$	$\max \Delta v_g (\rho)$	$\max \alpha (\Delta A_z)$
5 000	8.6% (5.0 м/с)	5.0 м/с (8.6%)	49.8% (2 488 км)
10 000	12.7% (7.4 м/с)	7.4 м/с (12.7%)	34.1% (3 413 км)
15 000	14.5% (4.2 м/с)	8.3 м/с (13.8%)	31.8% (4 770 км)
20 000	16.5% (4.4 м/с)	8.6 м/с (16.0%)	21.9% (4 375 км)
25 000	18.4% (4.3 м/с)	7.8 м/с (17.4%)	15.5% (3 884 км)

Таблица 4.3

Характеристики перелетов для гало-орбит вокруг SE L_1 , отклонение вдоль неустойчивого многообразия; $\sigma_r = 100$ км, $\sigma_v = 10$ см/с

A_z , км	$\max \rho (\Delta v_g)$	$\max \Delta v_g (\rho)$	$\max \alpha (\Delta A_z)$
50 000	5.2% (0.9 м/с)	2.4 м/с (4.5%)	56.7% (28 345 км)
100 000	8.0% (2.8 м/с)	3.3 м/с (5.6%)	25.5% (25 526 км)
150 000	9.3% (3.3 м/с)	4.2 м/с (8.3%)	23.3% (34 949 км)
200 000	11.1% (3.9 м/с)	5.0 м/с (9.8%)	20.9% (41 954 км)
250 000	12.4% (4.4 м/с)	5.4 м/с (10.7%)	18.8% (47 014 км)

Таблица 4.4

Характеристики перелетов для гало-орбит вокруг SE L_2 , отклонение вдоль неустойчивого многообразия; $\sigma_r = 100$ км, $\sigma_v = 10$ см/с

A_z , км	$\max \rho (\Delta v_g)$	$\max \Delta v_g (\rho)$	$\max \alpha (\Delta A_z)$
50 000	5.2% (0.4 м/с)	2.2 м/с (4.4%)	57.4% (28 703 км)
100 000	7.5% (2.5 м/с)	3.3 м/с (6.5%)	24.6% (24 604 км)
150 000	9.5% (3.2 м/с)	4.0 м/с (8.2%)	22.4% (33 637 км)
200 000	10.9% (3.7 м/с)	4.8 м/с (10.2%)	20.2% (40 472 км)
250 000	12.1% (4.1 м/с)	5.1 м/с (10.7%)	18.1% (45 362 км)

следует, что для гало-орбиты с $A_{\text{ref}} = 5\,000$ км выигрыш по скорости может составить 3.4 м/с, что отвечает 8-месячным затратам на поддержание орбиты вокруг L_1 аппарата ARTEMIS P2 (см. таблицу 1.3). Относительное изменение z -амплитуды орбиты для этого случая составило 16.8% (около 840 км). Далее, согласно таблице 4.3, выигрыш по скорости может достигнуть 3.3 м/с для $A_{\text{ref}} = 100\,000$ км, что отвечает 1.5-годовому поддержанию орбиты вокруг L_1 аппарата SOHO (таблица 1.3). Амплитуда орбиты в этом случае изменится на 7.1% (около 7\,100 км). Таким образом, перелет на новую орбиту вместо исходной может существенно увеличить продолжительность миссии и сократить негативное влияние задержки коррекции.

Зависимости $\Delta v_{\text{ref}}(t_d)$, $\Delta v_g(t_d)$, $\rho(t_d)$ и $\Delta A_z(t_d)$ на интервале $0.1P_{\text{ref}} \leq t_d \leq 0.9P_{\text{ref}}$ изображены на рисунках 4.4–4.7 (Земля–Луна L_1) и рисунках 4.8–4.11 (Солнце–Земля L_2). Для случаев Земля–Луна L_2 и Солнце–Земля L_1 были получены очень похожие зависимости, они здесь не приводятся. Результаты изображены для северных гало-орбит с z -амплитудами 15\,000 км (система Земля–Луна) и 150\,000 км (система Солнце–Земля). Для каждой гало-орбиты было рассмотрено пять состояний \mathbf{x}_{ref} при $\varphi_{\text{ref}} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$; первая компонента каждого \mathbf{u}_u отрицательная. Рисунки 4.4 и 4.8 подтверждают экспоненциальный рост Δv_{ref} . Зависимость $\Delta v_g(t_d)$ ведет себя более сложным образом: рост сменяется убыванием, а максимальное значение Δv_g строго зависит от \mathbf{x}_{ref} . Рисунки 4.5 и 4.9 показывают, что при $t_d \leq 0.5P_{\text{ref}}$ выигрыш по скорости не превосходит 0.5 м/с. Из рисунков 4.6 и 4.10 можно также видеть, что кривая относительного выигрыша сдвигается с изменением \mathbf{x}_{ref} , т.е. относительный выигрыш принимает почти равные значения при $t_d + \varphi_{\text{ref}} = \text{const}$.

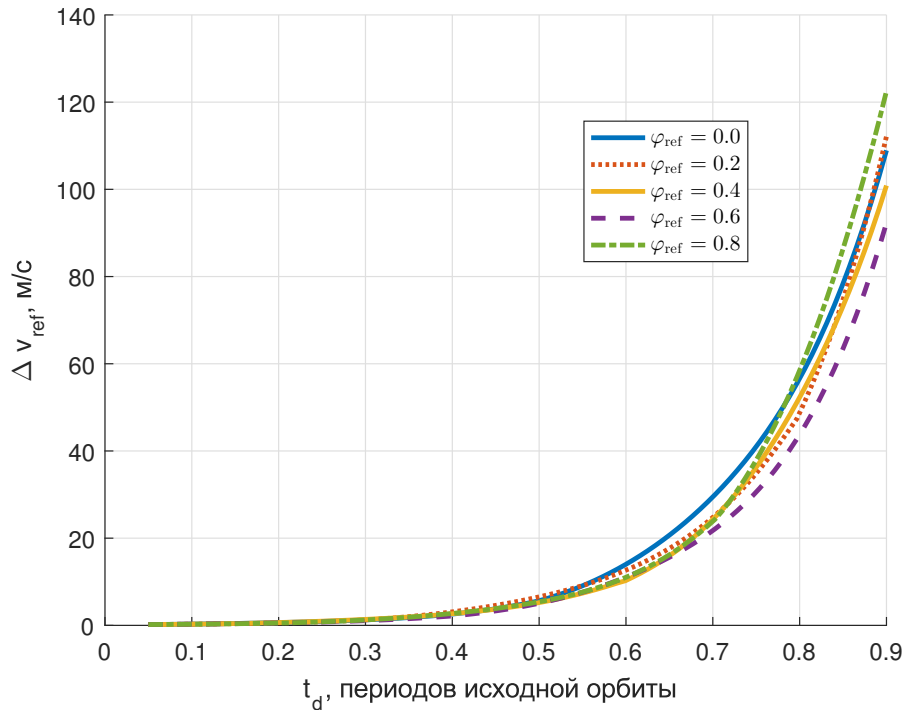


Рисунок 4.4 — Характеристическая скорость перелета на исходную гало-орбиту; EM L_1 , $A_{ref} = 15\,000$ км, $\varphi_{ref} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

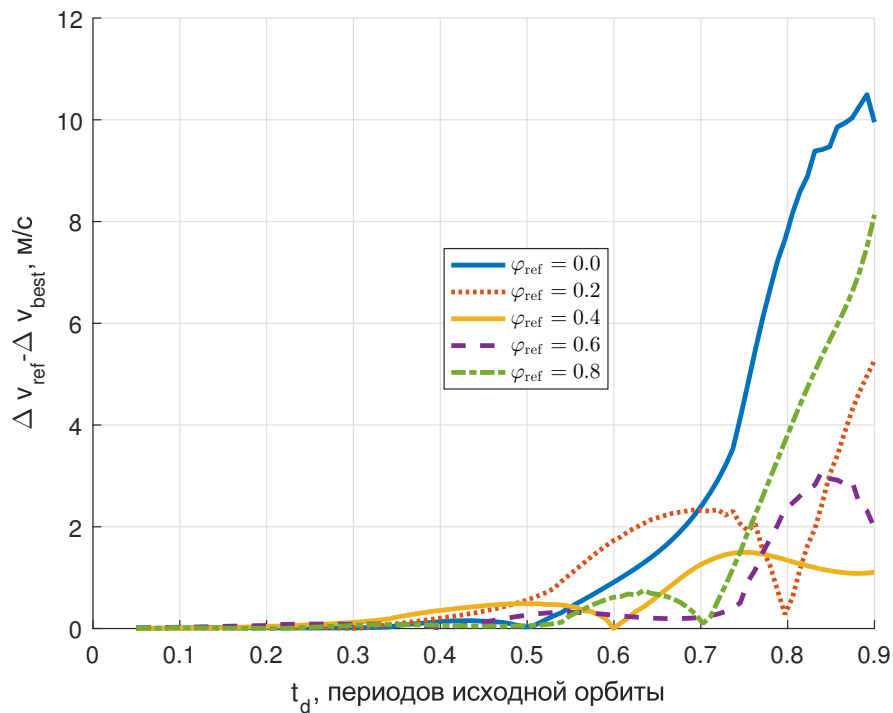


Рисунок 4.5 — Разница характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и на новую гало-орбиту; EM L_1 , $A_{ref} = 15\,000$ км, $\varphi_{ref} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

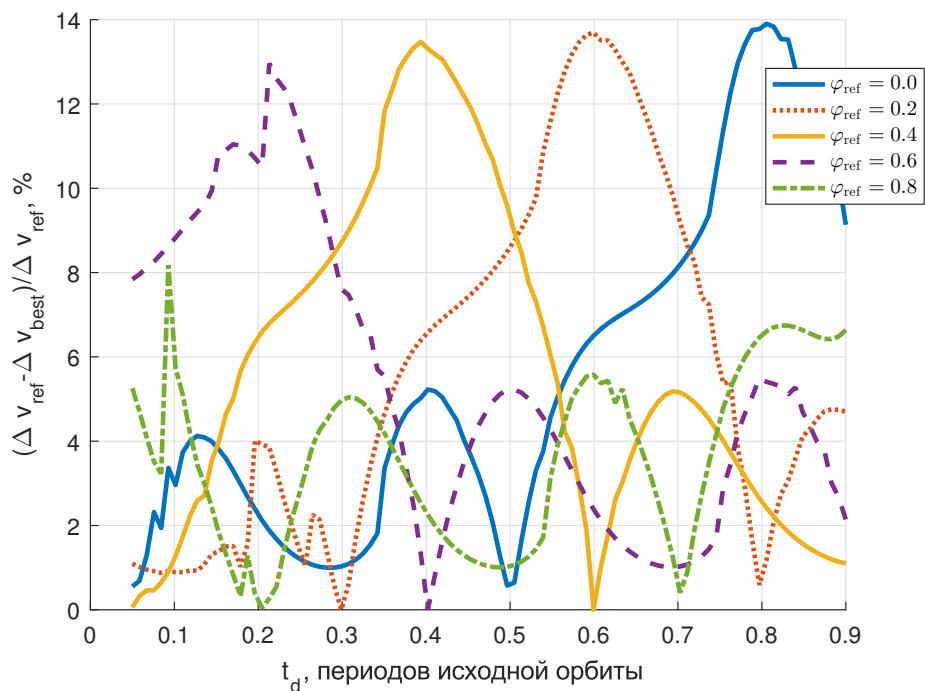


Рисунок 4.6 — Относительная разница характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и на новую гало-орбиту; ЭМ L_1 , $A_{ref} = 15\,000$ км, $\varphi_{ref} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

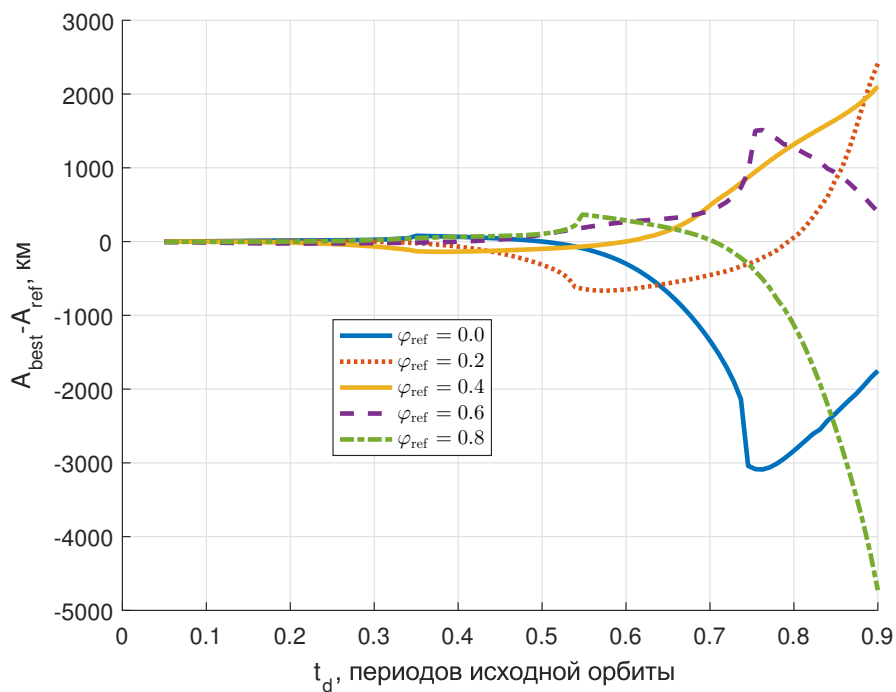


Рисунок 4.7 — Разница между z -амплитудами новой гало-орбиты и исходной гало-орбиты; ЭМ L_1 , $A_{ref} = 15\,000$ км, $\varphi_{ref} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

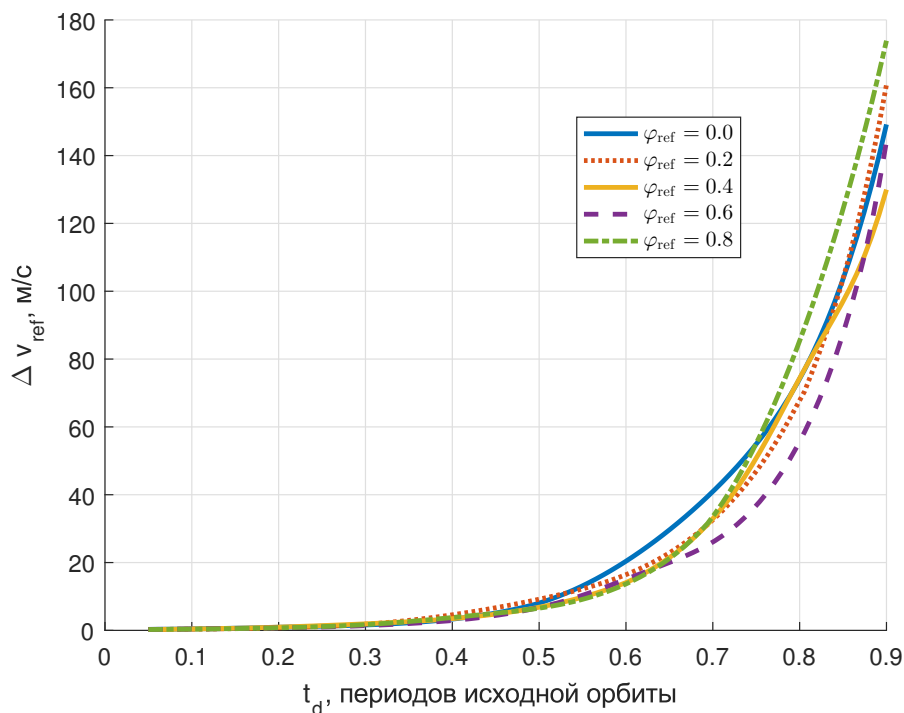


Рисунок 4.8 — Характеристическая скорость перелета на исходную гало-орбиту; SE L_2 , $A_{ref} = 150\,000$ км, $\varphi_{ref} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

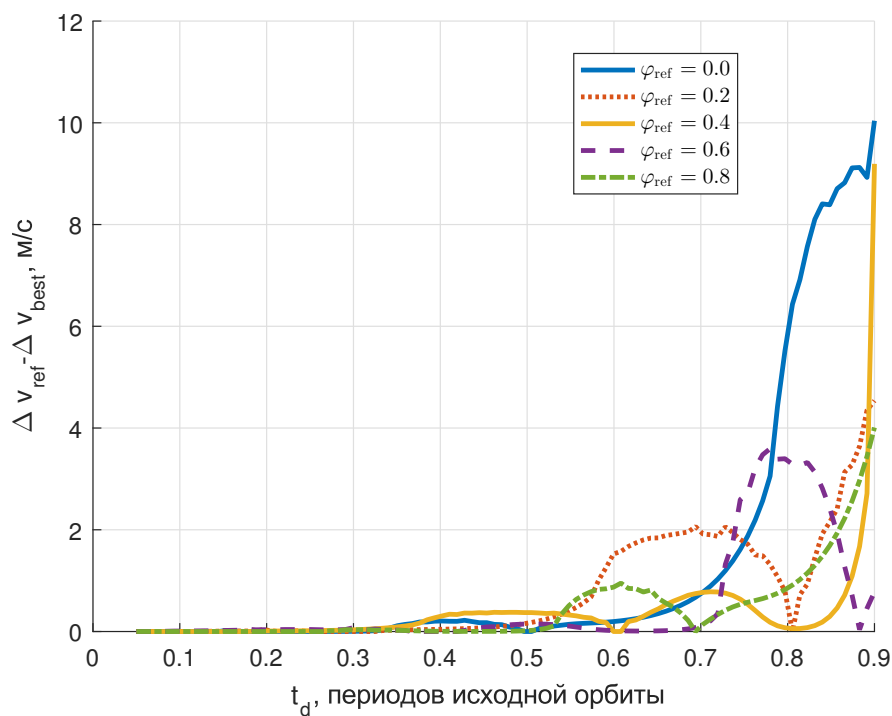


Рисунок 4.9 — Разница характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и на новую гало-орбиту; SE L_2 , $A_{ref} = 150\,000$ км, $\varphi_{ref} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

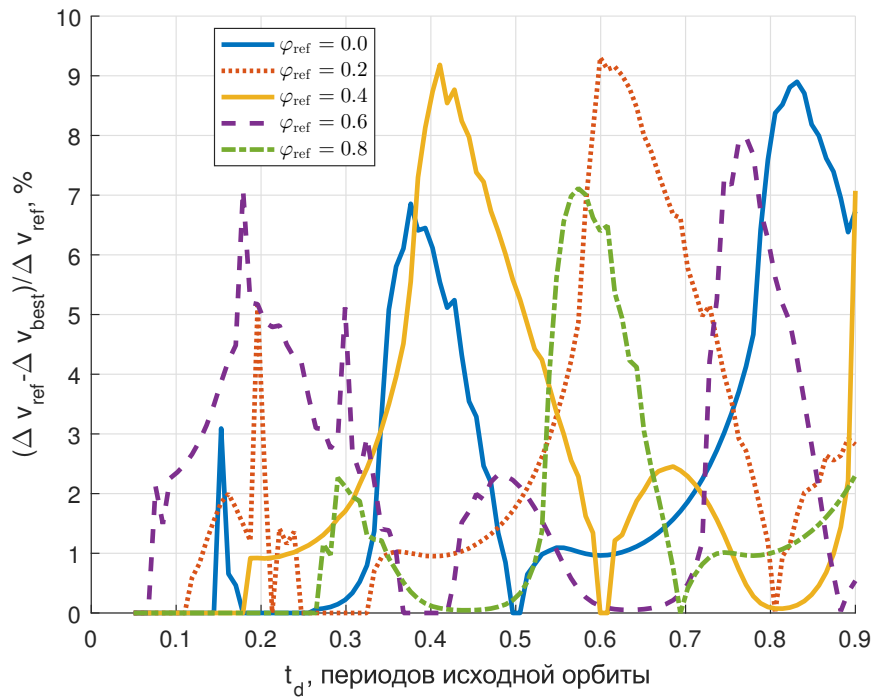


Рисунок 4.10 — Относительная разница характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и на новую гало-орбиту; SE L_2 , $A_{\text{ref}} = 150\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

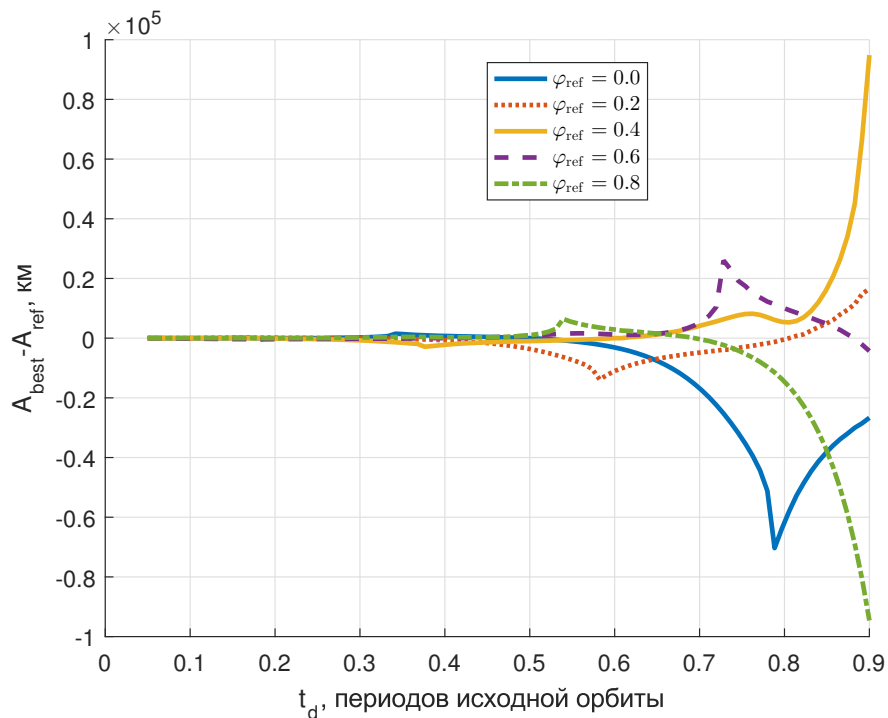


Рисунок 4.11 — Разница между z -амплитудами новой гало-орбиты и исходной гало-орбиты; SE L_2 , $A_{\text{ref}} = 150\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

4.3.2 Серия испытаний Монте–Карло

Перейдем теперь к статистическим оценкам характеристик перелета. В четырех сериях из 200 испытаний Монте–Карло для каждой из гало-орбит вокруг L_1/L_2 Земля–Луна ($A_{\text{ref}} = 15\,000$ км) и гало-орбит вокруг L_1/L_2 Солнце–Земля ($A_{\text{ref}} = 150\,000$ км) вектор отклонения \mathbf{e} трактовался как нормальный случайный вектор $N(\mathbf{0}, \Sigma)$ с нулевыми средними и диагональной ковариационной матрицей Σ из уравнения (4.2). Как и в предыдущем случае, $\sigma_r = 5$ км и $\sigma_v = 5$ см/с для системы Земля–Луна и $\sigma_r = 100$ км и $\sigma_v = 10$ см/с для системы Солнце–Земля.

Результаты испытаний Монте–Карло для $\varphi_{\text{ref}} = 0$ представлены в виде диаграмм размаха, изображенных на рисунках 4.12–4.15 (система Земля–Луна) и рисунках 4.16–4.19 (система Солнце–Земля). Диаграммы размаха были созданы с помощью средства BOXPLOT из MATLAB Statistics Toolbox. Каждый прямоугольник содержит 50% данных, полученных для соответствующего времени задержки t_d , «усы» за прямоугольниками содержат оставшиеся 50% данных за исключением наиболее удаленных значений, называемых выбросами. Красная черта в прямоугольнике обозначает медиану. Нижняя и верхняя границы прямоугольника соответствует 0.25- и 0.75-процентилям, соответственно.

Рисунки 4.12, 4.14, 4.16, 4.18 показывают, что выигрыш по скорости ничтожен для $t_d \leq 0.5P_{\text{ref}}$ во всех испытаниях. При $t_d = 0.8P_{\text{ref}}$ медиана относительного выигрыша достигает максимального значения: перелеты на лучшую запасную орбиту с вероятностью почти 100% сохраняют 14% от Δv_{ref} для системы Земля–Луна и 9% от Δv_{ref} для системы Солнце–Земля. Однако, при $t_d = 0.8P_{\text{ref}}$ абсолютная величина выигрыша превышает 3 м/с лишь в 50% испытаний для EM L_1 и 25% испытаний для EM L_2 . Что касается системы Солнце–Земля, выигрыш больше чем 1.7 м/с случается в 75% испытаний как для L_1 , так и для L_2 при $t_d = 0.8P_{\text{ref}}$. Следует также заметить, что для больших t_d относительный выигрыш имеет небольшой размах значений (рисунки 4.13, 4.15, 4.17, 4.19), в то время как по абсолютной величине для того же t_d рисунки 4.12, 4.14, 4.16, 4.18 показывают большой размах. Большой размах по абсолютным значениям следует из факта, что при моделировании испытаний Монте–Карло около исходной орбиты проходят много близких к ней траекторий. В этих случаях новая орбита также близка к исходной, разница в исполнении переле-

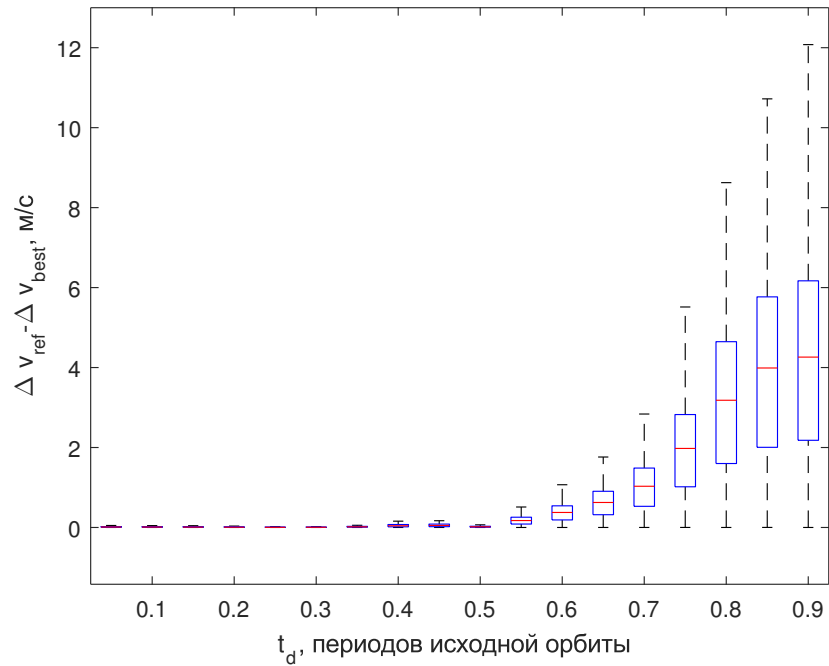


Рисунок 4.12 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; EM L_1 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

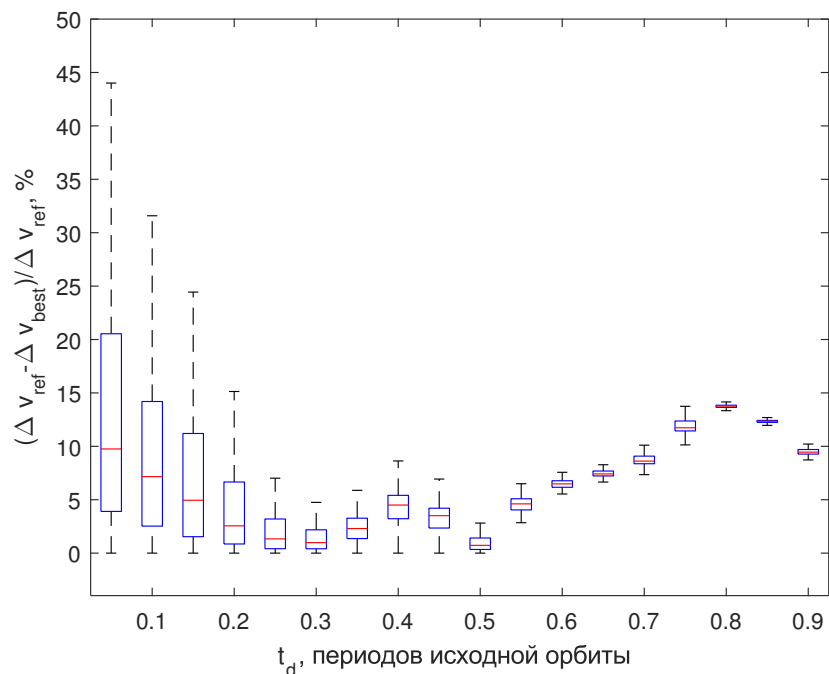


Рисунок 4.13 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; EM L_1 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

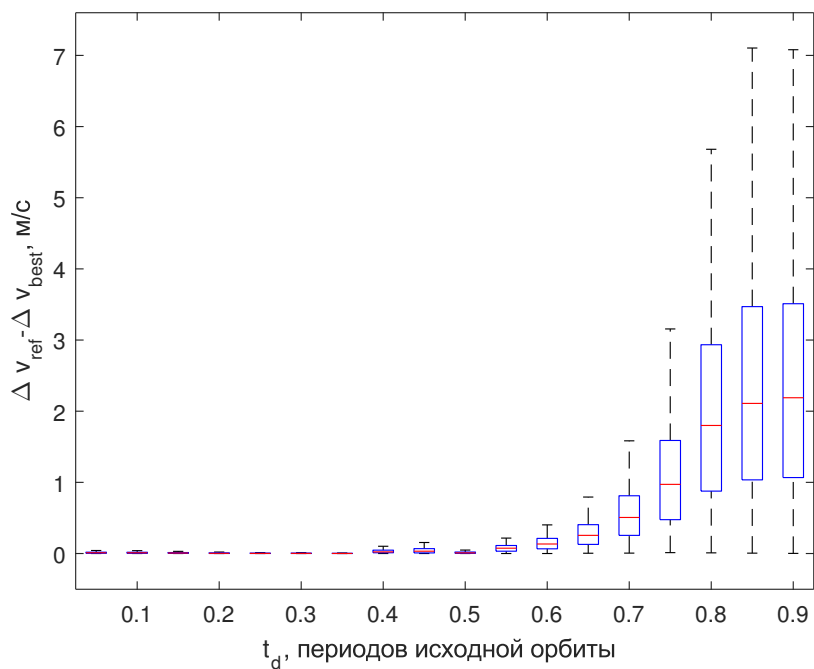


Рисунок 4.14 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; EM L_2 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

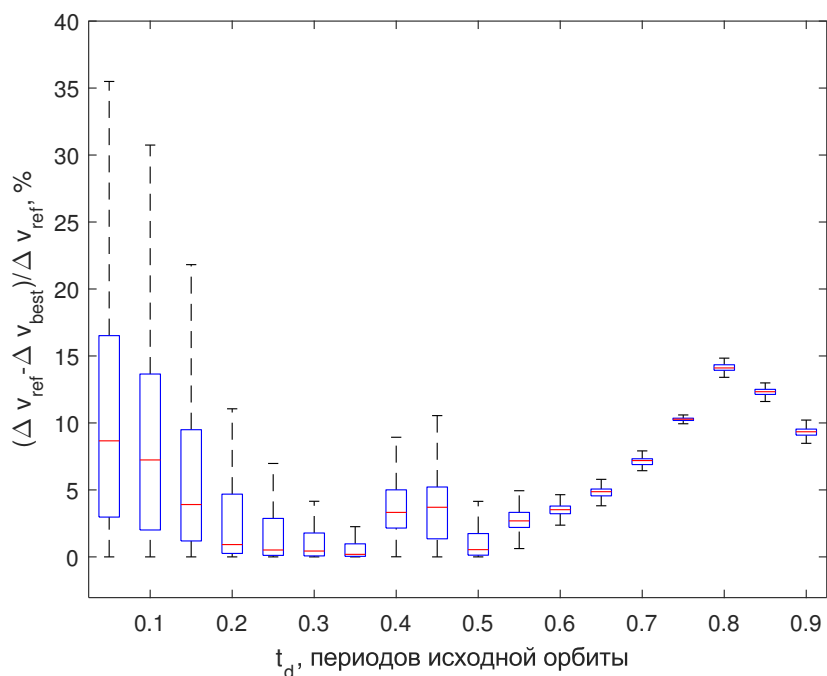


Рисунок 4.15 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; EM L_2 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

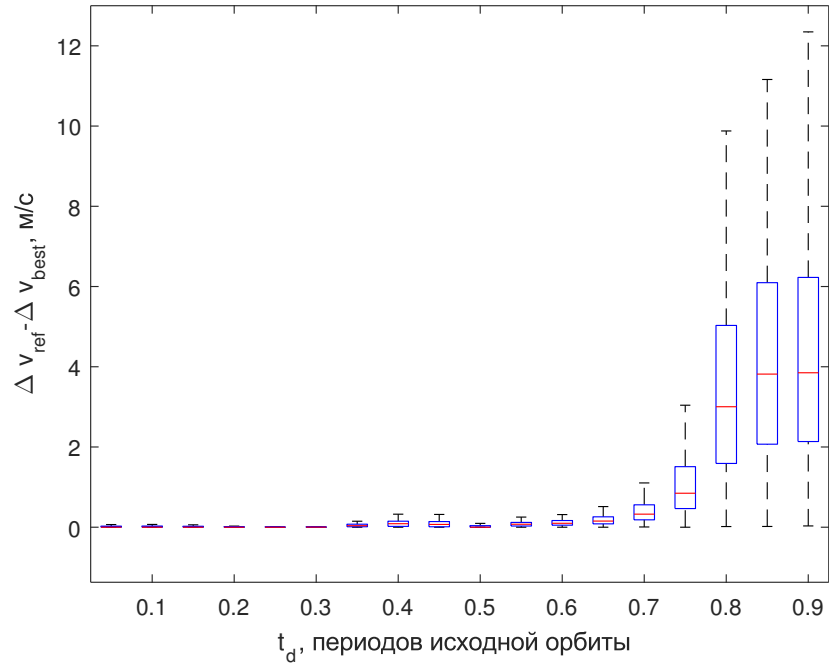


Рисунок 4.16 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; SE L_1 , $A_{\text{ref}} = 150\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

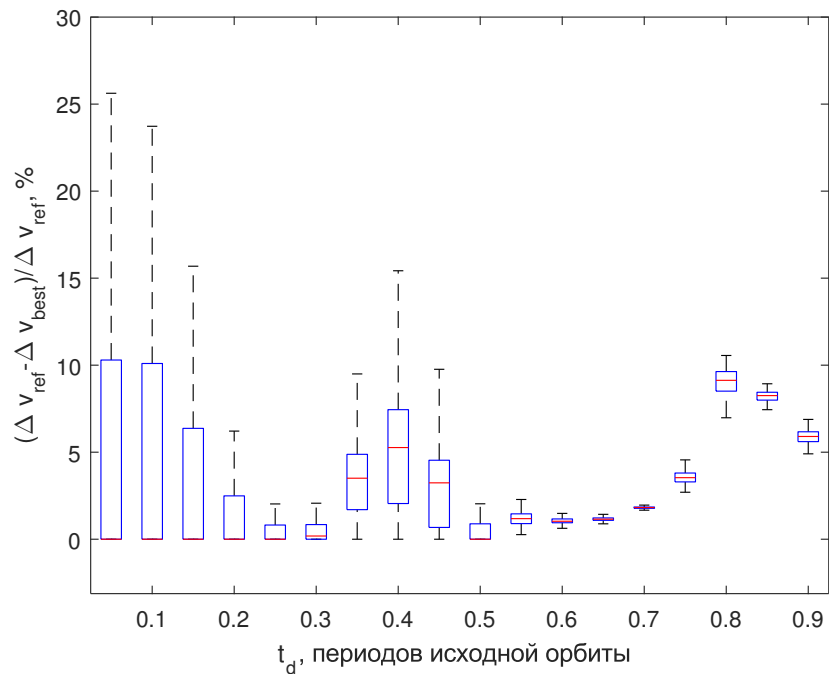


Рисунок 4.17 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; SE L_1 , $A_{\text{ref}} = 150\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

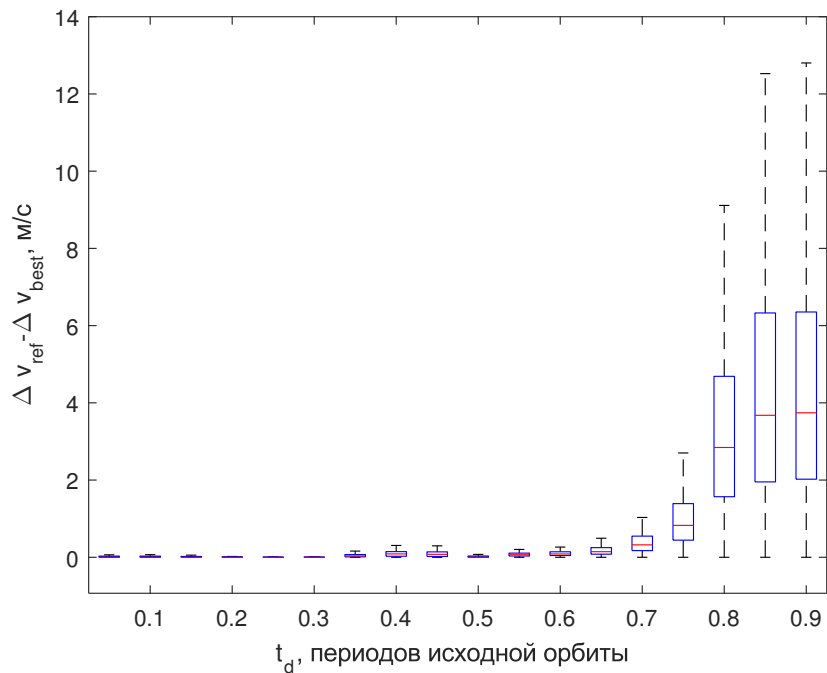


Рисунок 4.18 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; SE L_2 , $A_{\text{ref}} = 150\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

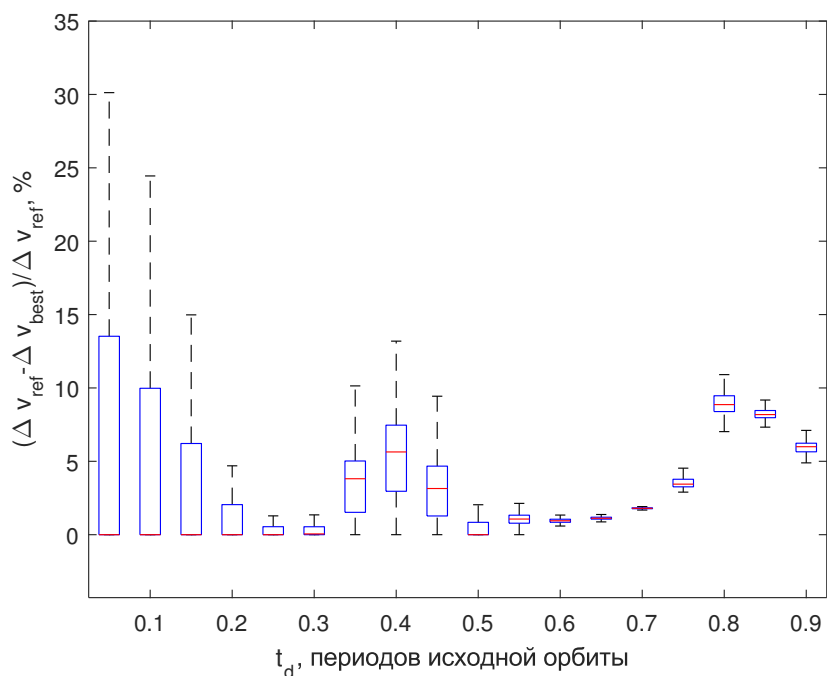


Рисунок 4.19 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту; SE L_2 , $A_{\text{ref}} = 150\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

та несущественная, поэтому затраты Δv_{ref} на возвращение на исходную орбиту также малы. Это делает отношение ρ далеким от нуля в некоторых случаях ($0.5P_{\text{ref}} \leq t_d \leq 0.9P_{\text{ref}}$).

4.4 Постановка оптимизационной задачи для квазигало-орбит

Исследование было проведено и для более общего случая, когда номинальными орбитами являются квазигало-орбиты. Как уже было отмечено, каждая гало-орбита порождает семейство квазигало-орбит с одним и тем же интегралом Якоби и параметризующихся размером внутренней полости (размером сечения орбиты с плоскостью, ортогональной гало-орбите в выбранной точке). В разделе 1.1.6 было показано, как можно строить такие торы вокруг произвольных гало-орбит в системах Земля–Луна и Солнце–Земля. Фазовый вектор на торе может быть параметризован двумя параметрами: φ (вдоль гало-орбиты) и θ (вдоль кривой в сечении Пуанкаре). Зависимость $\mathbf{x}(\varphi, \theta)$ для каждой интересующей квазигало-орбиты может быть рассчитана численным интегрированием. В данном исследовании, для ускорения работы оптимизационных процедур семейство квазигало-орбит дискретизируется, т.е. представляется в виде конечного набора квазигало-орбит, отличающихся размером A_z образующей гало-орбиты с тем же значением интеграла Якоби и размером внутренней полости S . Зависимости $\mathbf{x}(\varphi, \theta)$ для каждой пары (A_z, S) предварительно аппроксимируются кубическими сплайнами. Таким образом, в общем случае фазовый вектор задается функцией четырех параметров

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(A_z, S, \varphi, \theta)$$

где A_z и S принимают конечное множество значений, а параметры φ и θ принимают непрерывное множество значений на отрезке $[0, 1]$. Теперь можно перейти непосредственно к постановке оптимизационной задачи для квазигало-орбит.

Пусть $\mathbf{x}_{\text{ref}} = \mathbf{x}_{\text{ref}}(A_{\text{ref}}, S_{\text{ref}}, \varphi_{\text{ref}}, \theta_{\text{ref}})$ обозначает точку на исходной квазигало-орбите. Фактическое положение КА в начальный момент времени $t = t_0$ смещено от \mathbf{x}_{ref} на некоторый вектор отклонения \mathbf{e} :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\text{ref}} + \mathbf{e}$$

Пусть в момент времени $t = t_0$ был запланирован маневр коррекции, но по каким-то причинам он был пропущен, и в течение времени $t_d = t_1 - t_0$ аппарат движется по баллистической траектории. Допустим, что в момент t_1 управление орбитальным движением КА доступно. Встают две задачи: возвращение на исходную квазигало-орбиту и подбор другой квазигало-орбиты, перелет на которую является оптимальным в плане затрат топлива. Как и раньше, в обоих случаях оптимизационная задача имеет вид

$$J(\mathbf{y}) \rightarrow \min, \mathbf{l}_b \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{u}_b \quad (4.3)$$

Пусть $\mathbf{x}_1 = [\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1^-]$ – фазовое состояние аппарата в момент $t = t_1$, а $\mathbf{x}_2 = [\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2^+]$ – фазовое состояние в момент $t = t_2$ на целевой орбите. Решая двухточечную краевую задачу между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , можно вычислить требуемые для двухимпульсного перелета скорости \mathbf{v}_1^+ и \mathbf{v}_2^- и вычислить значение оптимизируемого функционала

$$J = |\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-| + |\mathbf{v}_2^+ - \mathbf{v}_2^-|$$

Если оптимизируется перелет на исходную орбиту, то $\mathbf{y} = [T, \varphi, \theta]$. Если же подбирается новая орбита, то будем считать, что $A_z = A_{\text{ref}}$, т.е. будем искать орбиту внутри семейства квазигало-орбит, отвечающих одной и той же гало-орбите размера A_{ref} . В таком случае $\mathbf{y} = [S, \varphi, \theta]$. Что касается ограничений на значения переменных \mathbf{y} , то для случая перелета на исходную орбиту были выбраны

$$\mathbf{l}_b = [0, -\infty, -\infty], \mathbf{u}_b = [+\infty, +\infty, +\infty]$$

а для случая перелета на новую орбиту были выбраны

$$\mathbf{l}_b = [S_{\min}, -\infty, -\infty], \mathbf{u}_b = [S_{\max}, +\infty, +\infty]$$

где S_{\min} и S_{\max} – соответственно минимально и максимально возможные значения параметра S из предварительно заданного конечного множества \mathcal{S} , причем $S_{\text{ref}} \in \mathcal{S}$.

Решения оптимизационных задач ищутся с помощью алгоритма последовательного квадратичного программирования. Сначала оптимизируется перелет на минимальную по размерам орбиту из семейства, т.е. на орбиту с $S = S_{\min}$.

Начальное приближение вектора переменных \mathbf{y} выбирается равным

$$\mathbf{y}_0 = [0.25P_{\text{ref}}, t_d/P_{\text{ref}} + \varphi_{\text{ref}} + 0.25, 0]$$

где P_{ref} – период гало-орбиты размера A_{ref} . Проверка показала, что значение функционала слабо зависит от переменной θ , поэтому для определенности в \mathbf{y}_0 она выбирается равным нулю. Что касается первых двух компонент \mathbf{y}_0 , то они соответствуют начальному приближению, которое использовалось для перелета на исходную гало-орбиту (см. формулу (4.1)). После того, как было получено оптимальное решение \mathbf{y}_{min} для перелета на квазигало-орбиту размера S_{min} , начинается процедура поиска оптимального перелета на следующую по размерам квазигало-орбиту, причем за начальное приближение берется вектор \mathbf{y}_{min} . Эта процедура повторяется для каждого S , а затем выбирается решение, соответствующее минимальному значению функционала.

4.5 Результаты перелетов на квазигало-орбиты

Результаты даны для семейства квазигало-орбит вокруг гало-орбиты размера $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км около точки ЕМ L_1 . Семейство квазигало-орбит состоит из 50 орбит с z -амплитудами (максимальным удалением от плоскости Cxy) в диапазоне от 15 000 км до 19 000 км. Рисунок 4.20 показывает квазигало-орбиты с минимальным и максимальным размером внутренней полости. В качестве исходной орбиты рассматриваются три орбиты: малая ($A_z = 15\,003$ км), средняя ($A_z = 16\,133$ км) и крупная ($A_z = 17\,400$ км). При подборе лучшей орбиты перелета перебираются все орбиты семейства. Результаты серии испытаний Монте–Карло для каждой из исходных орбит представлены в таблицах. При проведении серии испытаний Монте–Карло считалось, что сбой коррекции происходит вблизи точки с $\varphi_{\text{ref}} = 0$ и $\theta_{\text{ref}} = 0$.

Диаграммы размаха абсолютного и относительного выигрыша характеристической скорости в результате перелета на новую квазигало-орбиту вместо исходной изображены на рисунках 4.21–4.22 (малая исходная квазигало-орбита), рисунках 4.23–4.24 (средняя исходная квазигало-орбита) и 4.25–4.26 (крупная исходная квазигало-орбита). Сравнивая рисунки 4.21–4.22 с соответствующими рисунками 4.12–4.13 можно сделать вывод, что перелет на квазигало-орбиту (с

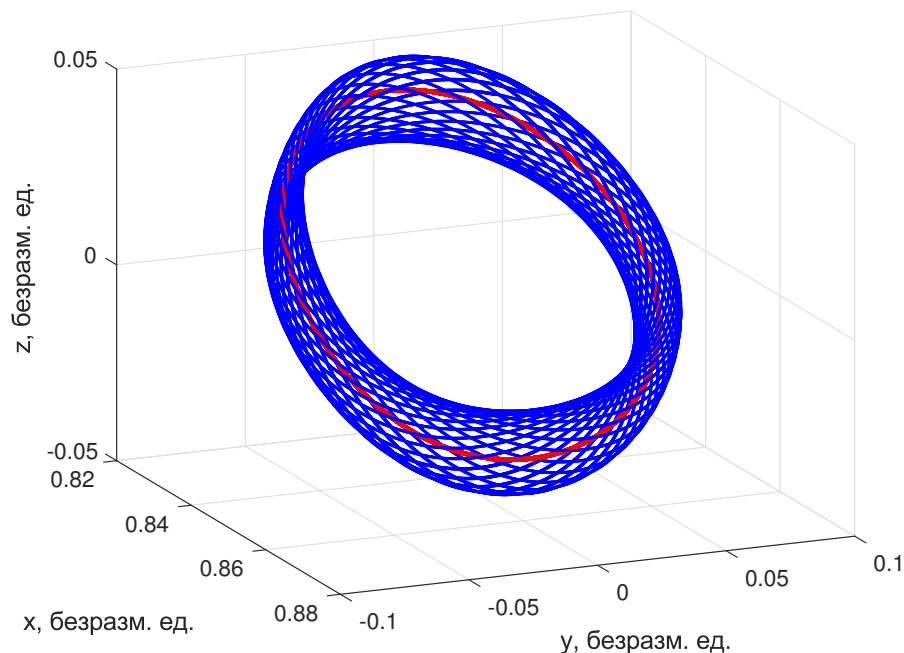


Рисунок 4.20 — Минимальная (красная) и максимальная (синяя) по величине квазигало-орбиты в рассматриваемом семействе; минимальная квазигало-орбита совпадает с образующей гало-орбитой с z -амплитудой $A_z = 15\,000$ км вокруг точки EM L_1

той же образующей гало-орбитой) вместо перелета на новую гало-орбиту может оказаться выгоднее на 1–3 м/с; это касается случаев длительной задержки коррекции, $t_d \geq 0.7P_{\text{ref}}$. В целом же картины диаграмм размаха очень похожи. При $t_d = 0.75P_{\text{ref}}$ выигрыш может составить до 8 м/с, при $t_d = 0.8P_{\text{ref}}$ – до 10 м/с и при $t_d = 0.9P_{\text{ref}}$ – до 15 м/с. Все это означает, что при временах задержки от $0.5P_{\text{ref}}$ перелет на новую орбиту может увеличить время жизни аппарата на орбите более чем на год.

С увеличением размера исходной квазигало-орбиты картина качественно и количественно меняется. Для средней квазигало-орбиты выигрыш может составить более 7 м/с при $t_d \geq 0.8P_{\text{ref}}$, но не более 6 м/с для меньших времен задержки коррекции. Отсюда можно сделать вывод, что время жизни аппарата может возрасти на величину порядка года при $t_d \geq 0.8P_{\text{ref}}$. Для крупной исходной квазигало-орбиты величина выигрыша еще меньше – не превышает 4 м/с при $t_d \leq 0.85P_{\text{ref}}$. Это означает, что при таких временах задержки коррекции время жизни аппарата может быть увеличено не более чем на 5 месяцев.

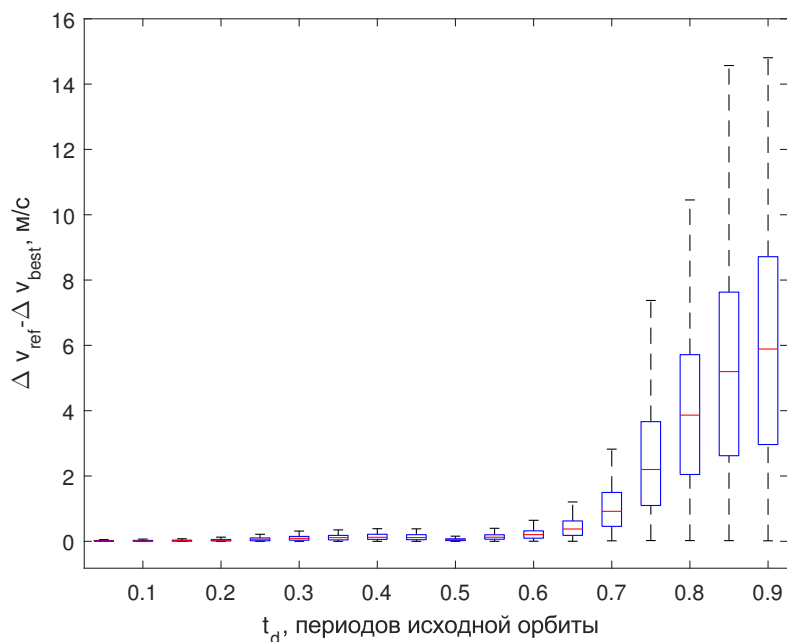


Рисунок 4.21 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную квазигало-орбиту и новую квазигало-орбиту; z -амплитуда образующей гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км, для исходной квазигало-орбиты $A_z = 15\,003$ км; EM L_1

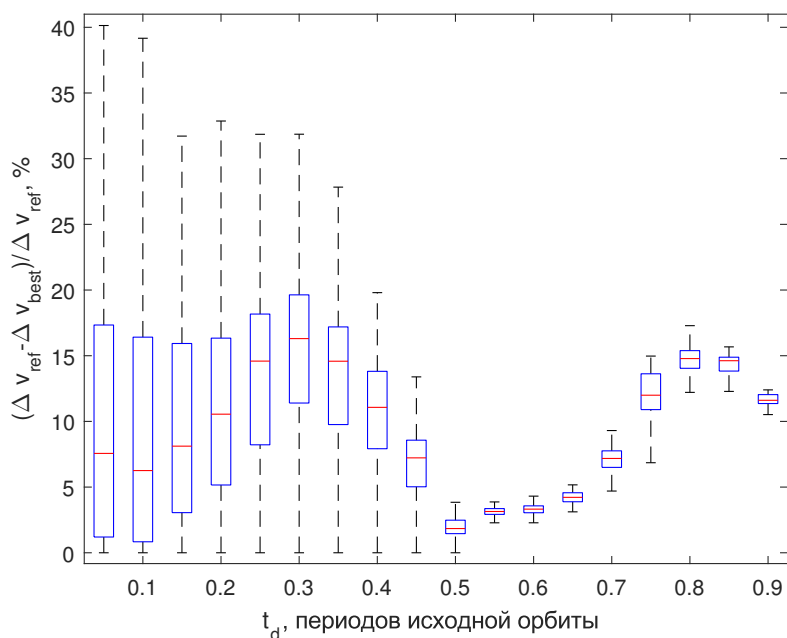


Рисунок 4.22 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную квазигало-орбиту и новую квазигало-орбиту; z -амплитуда образующей гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км, для исходной квазигало-орбиты $A_z = 15\,003$ км; EM L_1

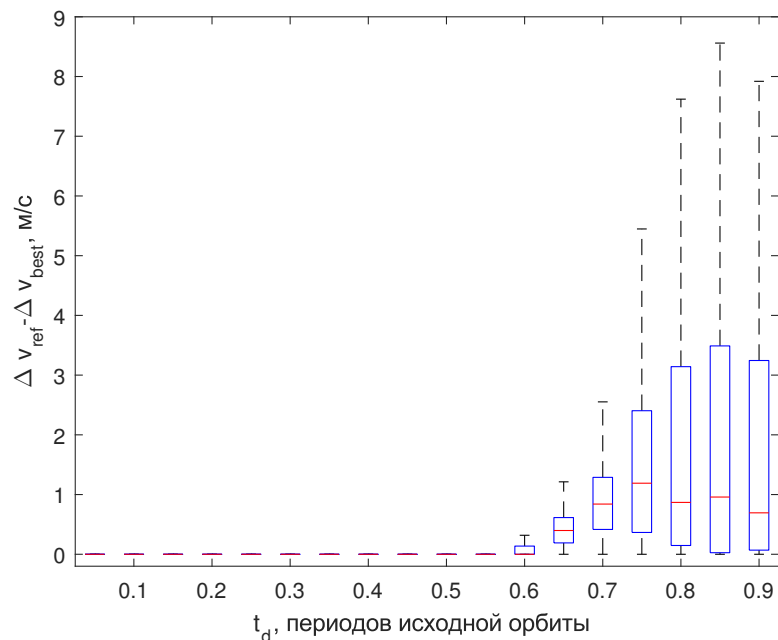


Рисунок 4.23 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную квазигало-орбиту и новую квазигало-орбиту; z -амплитуда образующей гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км, для исходной квазигало-орбиты $A_z = 16\,133$ км; EM L_1

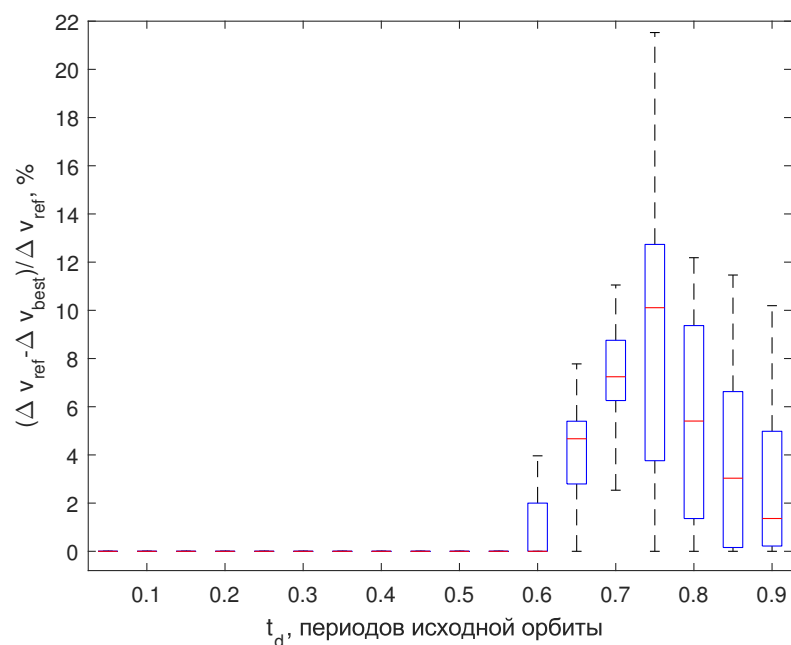


Рисунок 4.24 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную квазигало-орбиту и новую квазигало-орбиту; z -амплитуда образующей гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км, для исходной квазигало-орбиты $A_z = 16\,133$ км; EM L_1

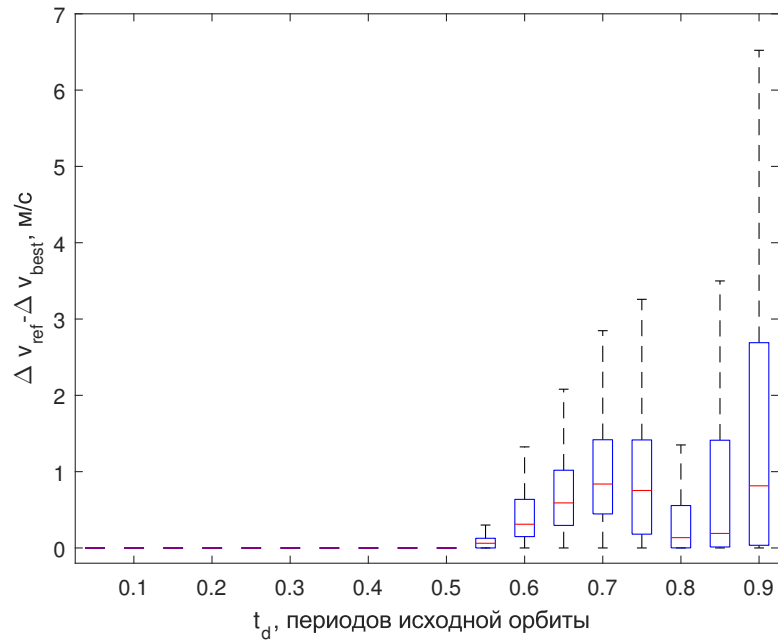


Рисунок 4.25 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную квазигало-орбиту и новую квазигало-орбиту; z -амплитуда образующей гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км, для исходной квазигало-орбиты $A_z = 17\,400$ км; EM L_1

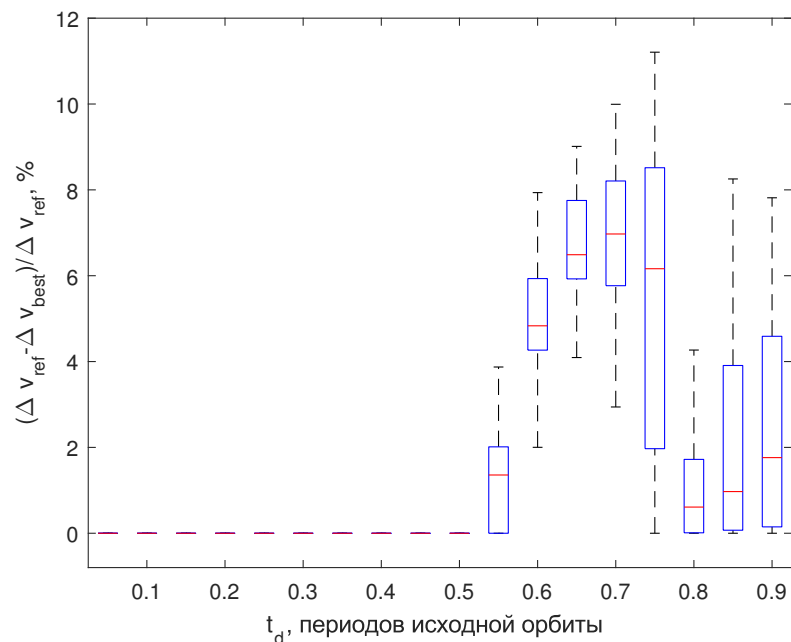


Рисунок 4.26 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную квазигало-орбиту и новую квазигало-орбиту; z -амплитуда образующей гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км, для исходной квазигало-орбиты $A_z = 17\,400$ км; EM L_1

4.6 Несколько слов о задаче с орбитами Лиссажу

Исследование может быть успешно проведено и для другого типа квазипериодических орбит – орбит Лиссажу. Как и в случае гало-орбит, ряды Фурье, полученные с помощью метода Линдштедта–Пуанкаре, служат удобной формой приближенного описания подобных орбит: точка фазового пространства, принадлежащая орбите Лиссажу, описывается четырьмя параметрами:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(A_x, A_z, \varphi, \theta)$$

В этом плане задача перелета на орбиту Лиссажу аналогична задаче перелета на квазигало-орбиту. С другой стороны она проще, так как все переменные являются непрерывными, а приближенные зависимости $\mathbf{x} = \mathbf{x}(A_x, A_z, \varphi, \theta)$ описываются явными формулами. Результаты исследований для орбит Лиссажу в данной работе не приводятся, однако, так как такие результаты представляют интерес с практической точки зрения, работа в этом направлении будет продолжена в будущем.

4.7 Адаптация траекторий перелета к эфемеридной модели движения тел Солнечной системы

В данном разделе покажем, как можно выполнить адаптацию траектории перелета на исходную и новую орбиты в рамках эфемеридной модели. Для примера разберем наиболее возмущенную систему трех тел – систему Земля–Луна. Таблица 4.5 показывает характерные величины возмущений в окрестности точки EM L_1 по отношению к силе гравитационного притяжения Луны. Видно, что наибольшее влияние на траекторию аппарата оказывает эксцентricность орбиты Луны ($e \approx 0.05$). Выражается это в том, что «оскулирующая» гало-орбита существенно перемещается со временем вдоль линии Земля–Луна (несколько тысяч километров). Гравитационное возмущение от Солнца, а также сила светового давления оказывают гораздо меньшее влияние на движение аппарата. Однако в данной работе они также учитываются, как и гравитационное притяжение к Юпитеру.

Адаптация траекторий из модели CR3BP к эфемеридной модели движения тел Солнечной системы выполняется согласно алгоритму, описанному в разделе 1.3. При этом для корректной трансляции траектории перелета в эфемеридную модель переводу подвергается совокупность четырех траекторий: исходной гало-орбиты, траектории пассивного движения без управления, траектории перелета на новую гало-орбиту и новой гало-орбиты. При трансляции гало-орбит точки фазового пространства модели CR3BP берутся на нескольких витках: это вынуждает метод параллельной пристрелки проектировать данный вид траекторий на центральное многообразие и превращает траекторию в квазипериодическую. Отметим также, что в процессе уточнения значения импульсов могут сильно возрасти по сравнению со значениями, полученными в модели CR3BP. Поэтому к уравнениям метода пристрелки добавляются условия-ограничения на величины импульсов: для перелета на исходную орбиту они не должны превышать значения, полученные в рамках модели CR3BP:

$$\Delta v_1 \leq \Delta v_{1,CR3BP}, \quad \Delta v_2 \leq \Delta v_{2,CR3BP}$$

Формально это означает добавление вспомогательных переменных β_1 и β_2 и переход от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам:

$$\Delta v_1 + \beta_1^2 = \Delta v_{1,CR3BP}, \quad \Delta v_2 + \beta_2^2 = \Delta v_{2,CR3BP}$$

Что касается перелета на новую орбиту, то в качестве ограничения сверху берется минимальное из значений импульсов перелета на новую орбиту (из CR3BP)

Таблица 4.5

Порядки возмущений в системе Земля–Луна

Источник/тип возмущения	Порядок величины по отношению к силе гравитационного притяжения к Луне
Эксцентриситет орбиты Луны	1E-01
Гравитация Солнца	1E-03
Световое давление	1E-05
Гравитация Юпитера	1E-07

и исходную орбиту (из эфемеридной модели). По шагам адаптацию целой траектории можно представить следующим образом.

1) Создать несколько копий исходной гало-орбиты в модели CR3BP, распространив ее как вперед, так и назад во времени. Перевести связанные с исходной орбитой фазовые векторы в систему координат, связанную с Луной, и уточнить их до эфемеридной модели методом параллельной пристрелки. При этом потребовать всюду гладкость полученной траектории.

2) Выразить вектор отклонения \mathbf{e} в системе координат, связанной с Луной, и добавить его к нужному фазовому вектору на гало-орбите в эфемеридной модели. Далее проинтегрировать уравнения движения в эфемеридной модели на выбранном интервале времени задержки коррекции.

3) Взять траекторию перелета на целевую орбиту, полученную ранее в модели CR3BP, и создать несколько копий целевой орбиты с началом в точке, где кончается траектория перелета. Такая объединенная траектория переводится в систему координат, связанную с Луной, и затем уточняется методом параллельной пристрелки. При этом гладкость траектории требуется всюду, кроме первой точки (точки приложения первого импульса) и определенной промежуточной точки (точки приложения второго импульса): в этих случаях требуется лишь непрерывность траектории, а величины импульсов ограничены значениями, указанными выше. Для улучшения свойств сходимости методу параллельной пристрелки позволяет варьировать не только фазовые векторы на траектории, но и соответствующие моменты времени.

4) Повторить пункты 1–3 для всех интересующих случаев с различными исходными гало-орбитами, векторами отклонения и временами задержки коррекции.

Результаты адаптации траекторий перелета в случае исходной гало-орбиты с амплитудой $A_z = 15\,000$ км для различных точек сбоя и времен задержки коррекции можно найти в таблице 4.6. Хорошо видно, что адаптация траекторий понижает затраты на перелет как на исходную орбиту, так и на новую орбиту, при этом относительная величина выигрыша в эфемеридной модели больше, чем в CR3BP. Отметим, что понижение затрат при переходе к эфемеридной модели является следствием правильной эксплуатации возмущений в системе Земля–Луна, главным образом проистекающих от эксцентricности орбиты Луны и гравитационного притяжения Солнца. Такие эффекты пониже-

ния затрат уже были задокументированы ранее различными исследователями: в качестве примера см. работу К. Хауэлл и М. Какои [48] где были найдены пассивные траектории перелета между гало-орбитами систем Земля–Луна и Солнце–Земля в эфемеридной модели, в то время как в модели сопряженных задач трех тел такие перелеты требуют ненулевых затрат топлива.

К эфемеридной модели были также адаптированы результаты испытаний Монте-Карло для случая гало-орбиты с амплитудой 15 000 км вокруг точки EM L_1 , диаграммы размаха приведены на рисунках 4.27 и 4.28. Результаты подтверждают, что как абсолютный, так и относительный выигрыш по скорости в эфемеридной модели становятся выше, чем в модели CR3BP.

Пример траектории перелета в эфемеридной модели приведен на рисунке 4.29 (начало координат расположено в центре Луны). Здесь исходная орбита имеет амплитуду $A_z = 15\,000$ км, сбой коррекции происходит в точке с $\varphi_{\text{ref}} = 0$ на левой ветви неустойчивого многообразия, а время задержки коррекции составляет $t_d = 0.8P_{\text{ref}}$. Перелет на новую орбиту требует $\Delta v_{\text{Ephem}}^{\text{best}} = 27.6262$ м/с, время перелета $T_{\text{Ephem}}^{\text{best}} = 163.4431$ ч, амплитуда новой орбиты $A_{\text{Ephem}}^{\text{best}} = 12\,170$ км.

Таблица 4.6

Результаты адаптации перелетов на гало-орбиты к эфемеридной модели;
 исходная орбита: северная гало-орбита с амплитудой $A_z = 15\,000$ км;
 сбой коррекции на левой ветви неустойчивого многообразия

φ_{ref}	t_d/P_{ref}	$\Delta v_{\text{CR3BP}}^{\text{ref}}$, М/с	$\Delta v_{\text{Ephem}}^{\text{ref}}$, М/с	$\Delta v_{\text{CR3BP}}^{\text{best}}$, М/с	$\Delta v_{\text{Ephem}}^{\text{best}}$, М/с	ρ_{CR3BP}	ρ_{Ephem}
0.0	0.25	0.9047	0.9047	0.8939	0.8552	1.2006%	5.4705%
0.0	0.50	5.6362	3.8318	5.6362	3.8314	0.0000%	0.0121%
0.0	0.80	56.6247	37.9082	48.7070	27.6262	13.9829%	27.1236%
0.2	0.25	0.8423	0.8423	0.8309	0.8196	1.3594%	2.6966%
0.2	0.50	6.5429	6.0314	5.9803	3.8095	8.5998%	36.8401%
0.2	0.80	48.7434	32.3698	48.4170	31.5764	0.6696%	2.4512%
0.4	0.25	0.9648	0.9648	0.8925	0.8223	7.4927%	14.7635%
0.4	0.50	5.2289	3.4869	4.7399	2.7490	9.3524%	21.1616%
0.4	0.80	52.2940	37.5588	50.9540	32.8765	2.5626%	12.4666%
0.6	0.25	0.7724	0.7724	0.6841	0.6649	11.4283%	13.9139%
0.6	0.50	5.0713	4.6934	4.8062	4.1785	5.2275%	10.9717%
0.6	0.80	43.7610	31.8308	41.3512	26.6942	5.5067%	16.1371%
0.8	0.25	0.8173	0.8173	0.7930	0.7832	2.9834%	4.1759%
0.8	0.50	5.4075	4.4529	5.3516	4.1474	1.0333%	6.8605%
0.8	0.80	58.4593	44.7867	54.6497	36.7154	6.5168%	18.0217%

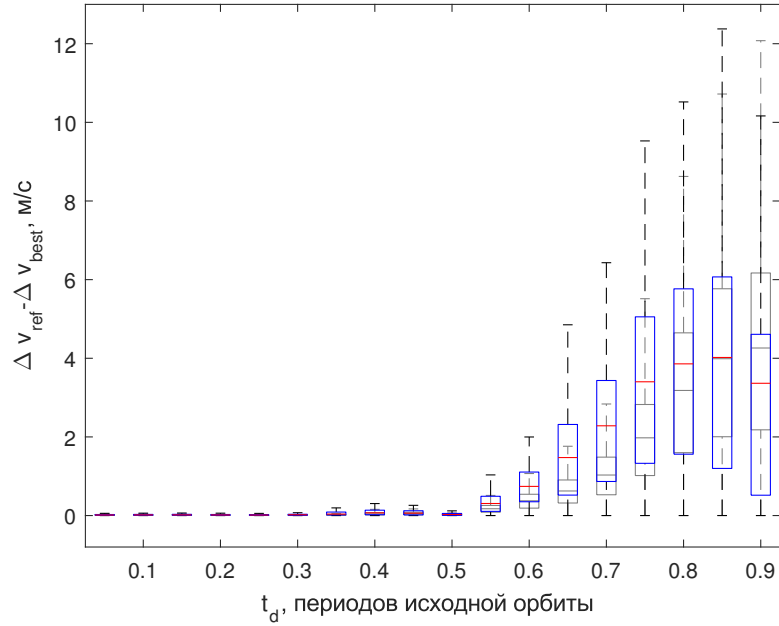


Рисунок 4.27 — Диаграмма размаха для разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту после адаптации к эфемеридной модели (результаты до адаптации показаны серым цветом); EM L_1 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$

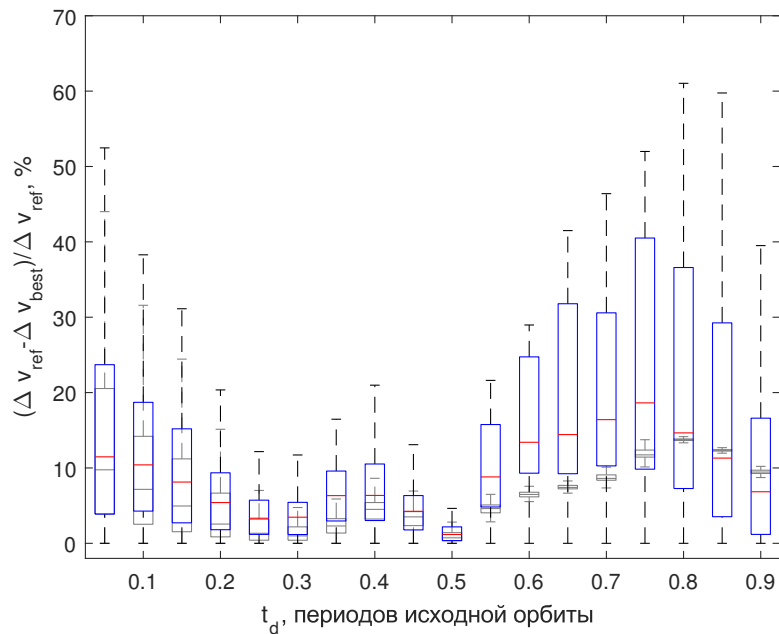
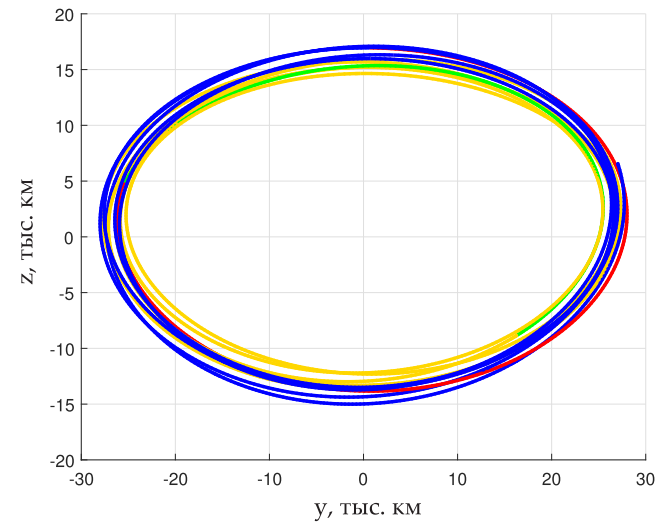
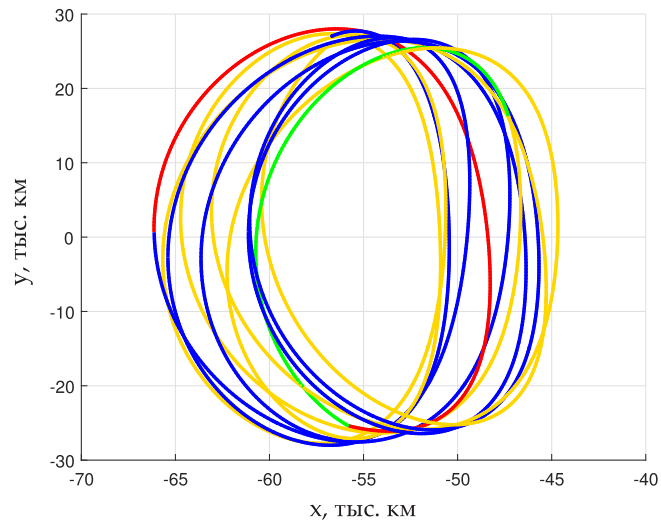


Рисунок 4.28 — Диаграмма размаха для относительной разности характеристических скоростей перелета на исходную гало-орбиту и новую гало-орбиту после адаптации к эфемеридной модели (результаты до адаптации показаны серым цветом); EM L_1 , $A_{\text{ref}} = 15\,000$ км, $\varphi_{\text{ref}} = 0$



- Исходная гало-орбита
- Баллистическая траектория
- Траектория перелета
- Новая гало-орбита

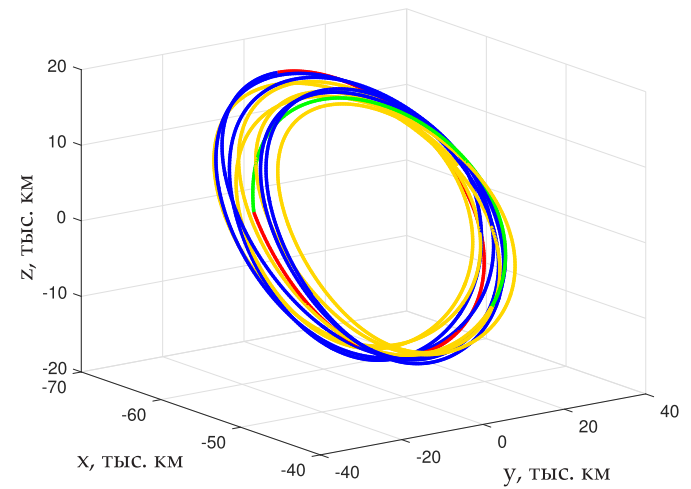
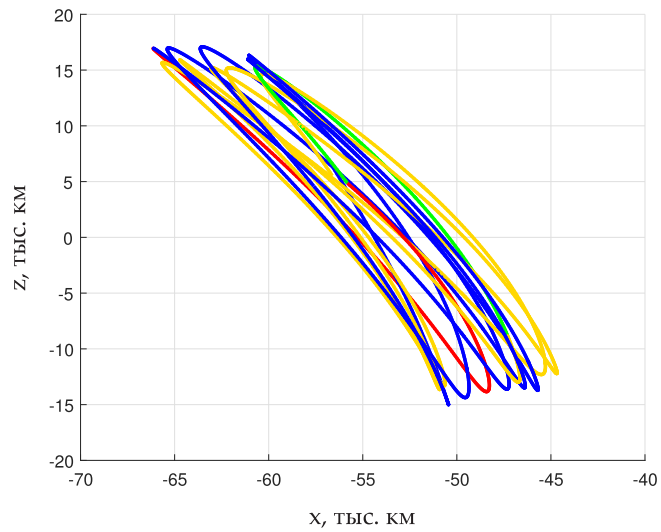


Рисунок 4.29 – Пример траектории перелета на новую гало-орбиту в эфемеридной модели; z -амплитуда исходной гало-орбиты $A_{\text{ref}} = 15,000$ км; сбой коррекции в точке $\varphi_{\text{ref}} = 0$, время задержки коррекции $t_d = 0.8P_{\text{ref}}$, EM L_1

Заключение

Появление подходящих технологий и одновременное развитие математического аппарата сделали возможными полеты МКА в дальний космос: уже в 2018 году ожидается запуск десятка наноаппаратов к Луне и астероидам ближайшего околоземного пространства. Поскольку важнейшей особенностью МКА являются жесткие ограничения на массу топлива на перелет и маневрирование, необходима своевременная разработка методов проектирования траекторий МКА в дальний космос и оценка возможностей проведения миссии с точки зрения орбитальной динамики. Эти возможности появляются благодаря богатой структуре фазового пространства в модели ограниченной задачи трех тел: периодические и квазипериодические орбиты вокруг точек либрации, связанные с ними устойчивые и неустойчивые многообразия, резонансные сближения с возмущающим телом, граница слабой устойчивости и др. Эксплуатация динамических эффектов ощутимо снижает затраты топлива на перелет, делает современные миссии осуществимыми.

Три отдельные задачи были рассмотрены в данном исследовании: 1) перелет на либрационную орбиту вокруг точки L_1 системы Земля–Луна с околоземной орбиты, 2) перелеты на окололунные орбиты с либрационных орбит вокруг L_1 и L_2 системы Земля–Луна и 3) смена номинальной орбиты вокруг точки либрации в случае нештатной задержки коррекции. Перечислим основные выводы исследования.

Для наиболее важных для практики случаев, когда аппарат выведен на низкую околоземную орбиту или геопереходную орбиту, разработана методика построения и анализа спиральных траекторий перелета к лунной точке либрации L_1 с использованием резонансных сближений с Луной. И хотя общая идея построения траектории похожа на ту, что использовалась при проектировании миссии SMART-1, предлагаемая методика дает автоматизированную процедуру расчета траекторий перелета вне зависимости от исходной и терминальной орбит, даты и времени старта. Такая методика предоставляет возможность анализа всех резонансных последовательностей, приводящих к повышению орбиты почти без затрат топлива. Проанализированы случаи различных стартовых и терминальных орбит, а также двух типовых ДУ малой тяги. Во всех случаях были получены характеристики траекторий перелета, они сгруппированы в

таблицы, где каждой ячейке отвечает дата старта и ориентация околоземной орбиты. Найдены оптимальные последовательности резонансных сближений для различных целевых гало-орбит.

Многочисленные работы показали возможности бестопливного перемещения между системами Земля–Луна и Солнце–Земля. В данном же исследовании были показаны возможности при перелете на окололунные орбиты. Для этого сначала построено множество оскулирующих окололунных орбит, получаемых при сходе вдоль неустойчивых многообразий гало-орбит вокруг точек L_1 и L_2 , а затем построено множество стабилизированных малой тягой окололунных орбит для случаев обеих точек либрации и двух аппаратов – в классе мини и в классе нано.

Наконец, оценены преимущества смены номинальной орбиты вокруг коллинеарной точки либрации с точки зрения затрат топлива, требуемых на спасение миссии после временной задержки коррекции траектории. Задержка может быть вызвана поломкой маршевого двигателя или потерей связи с КА. Результаты для систем Земля–Луна и Солнце–Земля показывают, что смена орбиты может продлить время жизни КА на несколько месяцев и даже лет.

Список сокращений и условных обозначений

A_x	=	x -амплитуда орбиты вокруг точки либрации
A_y	=	y -амплитуда орбиты вокруг точки либрации
A_z	=	z -амплитуда орбиты вокруг точки либрации
C	=	барицентр системы главных тел m_1 и m_2
C_J	=	интеграл Якоби в задаче трех тел
$Cxyz$	=	вращающаяся система координат в задаче трех тел
$\mathbf{I}_{n \times n}$	=	единичная матрица размера $n \times n$
$\mathbf{O}_{n \times m}$	=	нулевая матрица размера $n \times m$
x, y, z	=	координаты вращающейся системы координат в задаче трех тел
Δv	=	характеристическая скорость
μ	=	массовый параметр системы трех тел
ACE	=	Advanced Composition Explorer
ARTEMIS	=	Acceleration, Reconnection, Turbulence and Electrodynamics of the Moon's Interaction with the Sun
BFGS	=	Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (algorithm)
CNSA	=	China National Space Administration
CR3BP	=	Circular Restricted Three-Body Problem
CuSP	=	CubeSat for Solar Particles
DEMETER	=	Detection of Electro-Magnetic Emissions Transmitted from Earthquake Regions
DESTINY	=	Demonstration and Experiment of Space Technology for INterplanetary voYage
DSCOVR	=	Deep Space Climate Observatory
EM	=	Earth–Moon (system)
ESA	=	European Space Agency
GRAIL	=	Gravity Recovery and Interior Laboratory
Herschel	=	Herschel Space Observatory
IKAROS	=	Interplanetary Kite-craft Accelerated by Radiation Of the Sun
INSPIRE	=	Interplanetary Nano-Spacecraft Pathfinder in Relevant Environment (mission)

iROCC	=	Interplanetary Radio Occultation CubeSat Constellation
ISEE-3	=	International Sun–Earth Explorer 3
JPL	=	Jet Propulsion Laboratory
LQR	=	Linear Quadratic Regulator
NASA	=	National Aeronautics and Space Administration
NLP	=	Nonlinear Programming
NOAA	=	National Oceanic and Atmospheric Administration
OLFAR	=	Orbiting Low Frequency Antennas for Radio Astronomy (project)
PARASOL	=	Polarization & Anisotropy of Reflectances for Atmospheric Sciences coupled with Observations from a Lidar
SE	=	Sun–Earth (system)
SMART-1	=	Small Missions for Advanced Research in Technology-1
SOHO	=	Solar and Heliospheric Observatory
SPIRALE	=	Système Préparatoire Infra-Rouge pour l'ALerte
SQP	=	Sequential Quadratic Programming
STARS	=	Space Tethered Autonomous Robotic Satellite
WMAP	=	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe
WNISAT-1	=	Weather News Inc. Satellite 1
ГПО	=	геопереходная орбита
КА	=	космический аппарат
МКА	=	малый космический аппарат
МНСК	=	Международная небесная система координат
НКО	=	низкая круговая орбита

Литература

1. Doncaster B., Shulman J. 2016 Nano/Microsatellite Market Forecast. SpaceWorks Enterprises, Inc. (SEI), Atlanta, GA. 2016.
2. URL: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/v-w-x-y-z/wnisat-1>.
3. URL: <http://www.sputnix.ru/ru/projects/microsatellite-demonstrator>.
4. URL: http://www.laspacespace.ru/rus/zond_pp.php.
5. URL: <https://demeter.cnes.fr/en/DEMETER/index.htm>.
6. URL: http://www.nasa.gov/mission_pages/hurricanes/features/parasol.html.
7. Академический микроспутник Чибис-М / Л. М. Зеленый, А. В. Гуревич, С. И. Климов [и др.] // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 1. С. 1–13.
8. URL: <http://www.sinp.msu.ru/ru/project/17429>.
9. URL: http://space.skyrocket.de/doc_sdat/astrid-1.htm.
10. URL: http://space.skyrocket.de/doc_sdat/astrid-2.htm.
11. URL: <http://www.iki.rssi.ru/resonance/>.
12. URL: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/p/picard>.
13. URL: http://space.skyrocket.de/doc_sdat/spirale-1.htm.
14. URL: http://samspacem.ru/products/satellites_of_scientific_purpose/mka_aist.
15. URL: <http://sat.sibsau.ru/>.
16. Satellite CONDOR UNAM-MAI: Technical scientific cooperation / J. A. R. Aguilar, S. R. Nieves, E. S. Medina et al. // Proceedings of 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. 2013. P. 1037–1040.
17. URL: <http://ecoruspace.me/>

18. URL: <http://news.tpu.ru/news/2016/04/04/24987/>.
19. URL: <http://radioskaf.ru/>.
20. URL: <http://cosmos.msu.ru/index.php?link=/microsat.html>.
21. Interplanetary Radio Occultation CubeSat Constellation / K. Cahoy, I. Beerer, A. Marinan [и др.] // 1st Annual Interplanetary CubeSat Workshop. Cambridge, MA: 2012.
22. Astronomical antenna for a space based low frequency radio telescope / K. A. Quillien, S. Engelen, E. K. A. Gill [и др.] // AIAA/USU Conference on Small Satellites. Logan, UT: 2013.
23. URL: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/s/stars>.
24. Глобальный мониторинг Земли и планет солнечной системы с помощью сетевых структур на основе микро и нано космических аппаратов / А. Н. Липатов, А. К. Тоньшев, В. Ю. Горетов [и др.] // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2010. Т. 7, № 2. С. 174–181.
25. Исследование солнечно-земных связей на микро-, нано- и пикоспутниках / под ред. А. А. Петруковича. Материалы научной сессии Секции солнечно-земных связей Совета по космосу Российской академии наук. Москва, ИКИ РАН, 2015.
26. Rayman M. D., Varghese P. The deep space 1 extended mission // Acta Astronautica. 2001. Vol. 48, no. 5. P. 693–705.
27. SMART-1 Mission Description and Development Status / G. Racca, A. Marini, L. Stagnaro et al. // Planetary and space science. 2002. Vol. 50, no. 14. P. 1323–1337.
28. Singer J., Pelfrey J., Norris G. Enabling Science and Deep Space Exploration through Space Launch System (SLS) Secondary Payload Opportunities // SpaceOps 2016. Kaejeon; Korea, Republic of: 2016.
29. Hitt D., Robinson K. F., Creech S. D. Space Launch System: A New Opportunity for SmallSats // Interplanetary CubeSat Workshop. Oxford; United Kingdom: 2015.

30. LunarCube: A Deep Space 6U CubeSat with Mission Enabling Ion Propulsion Technology / M. Tsay, J. Frongillo, K. Hohman [и др.] // AIAA/USU Conference on Small Satellites. Technical Session XI: Advanced Technologies III, SSC15-XI-1. 2015. URL: <http://digitalcommons.usu.edu/smallsat/2015/all2015/71/>.
31. Lunar Flashlight: Illuminating the Moon's South Pole / P. O. Hayne, B. A. Cohen, B. T. Greenhagen [и др.] // Lunar and Planetary Science Conference. The Woodlands, TX; United States: 2016.
32. Near-earth asteroid scout / L. McNutt, L. Johnson, D. Clardy [и др.] // AIAA Space 2014 Conference. San Diego, CA; United States: 2014.
33. Sanchez H., Lewis B., Hanel R. BioSentinel: Mission Development of a Radiation Biosensor to Gauge DNA Damage and Repair Beyond Low Earth Orbit on a 6U Nanosatellite // AIAA/USU Conference on Small Satellites. Logan, UT; United States: 2015.
34. URL: <http://www.nasa.gov/feature/goddard/2016/heliophysics-cubesat-to-launch-on-nasa-s-sls>.
35. URL: <http://www.nasa.gov/feature/lunah-map-university-built-cubesat-to-map-water-ice-on-the-moon>.
36. URL: <http://www.jpl.nasa.gov/cubesat/missions/inspire.php>.
37. DESTINY Mission Description and its Value / Y. Kawakatsu, K. Nishiyama, I. Funaki [и др.] // 29th International Symposium on Space Technology and Science. 2013.
38. Dynamical Systems, the Three-body Problem and Space Mission Design / W.S. Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden [и др.]. Springer, 2008. С. 26–34.
39. Belbruno E., Miller J. Sun-perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1993. Vol. 16, no. 4. P. 770–775.
40. Out-of-Plane Extension of Resonant Encounters for Escape and Capture / E.M. Alessi, C. Colombo, J.P. Sanchez Cuartielles [и др.] // 64th International Astronautical Congress. Paper IAC-13.C1.9.1. Beijing, China: 2013.

41. Perozzi Ettore, Ferraz-Mello Sylvio. *Space Manifold Dynamics: Novel Spaceways for Science and Exploration*. New York: Springer, 2010. C. 258.
42. Conley C. Low Energy Transit Orbits in the Restricted Three-Body Problems // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1968. Vol. 16, no. 4. P. 732–746.
43. Ross S. D. Cylindrical manifolds and tube dynamics in the restricted three-body problem. PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA. 2004.
44. Lo M. W. The interplanetary superhighway and the origins program // *Aerospace Conference Proceedings*. T. 7. IEEE, 2002. C. 7–3543–7–3562 vol. 7.
45. Lo M. W., Ross S. The Lunar L1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond // *AIAA Space 2001 Conference*. Albuquerque, New Mexico: 2001. C. 10.
46. Alonso G.P. The Design of System-to System Transfer Arcs Using Invariant Manifolds in the Multi-Body Problem. PhD Thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA. 2006.
47. On Target for Venus-Set Oriented Computation of Energy Efficient Low Thrust Trajectories / M. Dellnitz, O. Junge, M. Post et al. // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2006. Vol. 95, no. 1-4. P. 357–370.
48. Howell K. C., Kakoi M. Transfers Between the Earth–Moon and Sun–Earth Systems Using Manifolds and Transit Orbits // *Acta Astronautica*. 2006. Vol. 59, no. 1. P. 367–380.
49. Mingotti G., Gurfil P. Mixed Low-Thrust Invariant-Manifold Transfers to Distant Prograde Orbits Around Mars // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. Vol. 33, no. 6. P. 1753–1764.
50. Interplanetary Transfers Between Halo Orbits: Connectivity Between Escape and Capture Trajectories / M. Nakamiya, H. Yamakawa, D. Scheeres et al. // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. Vol. 33, no. 3. P. 803–813.

51. Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F. Earth–Mars transfers with Ballistic Escape and Low-Thrust Capture // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. Vol. 110, no. 2. P. 169–188.
52. Finocchietti C., Pergola P., Andrenucci M. Venus Transfer Design by Combining Invariant Manifolds and Low-Thrust Arcs // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 94, no. 1. P. 351–362.
53. Kakoi M., Howell K., Folta D. Access to Mars from Earth–Moon libration point orbits: manifold and direct options // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 102. P. 269–286.
54. Shang H., Wang S., Cui P. Fast Low-Energy Halo-to-Halo Transfers Between Sun–Planet Systems // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2014. Vol. 27, no. 2. P. 338–348.
55. Heiligers J., Mingotti G., McInnes C. Optimal Solar Sail Transfers Between Halo Orbits of Different Sun-Planet Systems // *Advances in Space Research*. 2015. Vol. 55, no. 5. P. 1405–1421.
56. URL: <http://www.laspaces.ru/projects/planets/luna-resurs-pa/>.
57. URL: <http://www.laspaces.ru/projects/planets/luna-resurs-oa/>.
58. URL: <http://www.laspaces.ru/projects/planets/luna-grunt/>.
59. URL: <http://www.laspaces.ru/projects/planets/luna-glob/>.
60. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. С. 134–135.
61. Meyer K. R., Hall G. R., Offin D. C. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem. Springer, 2009. С. 219–220.
62. Moser J. On the Generalization of a Theorem of A. Liapounoff // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1958. Vol. 11, no. 2. P. 257–271.
63. Elemental Periodic Orbits Associated with the Libration Points in the Circular Restricted 3-Body Problem / E. J. Doedel, V. A. Romanov, R. C. Paffenroth

- et al. // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, no. 08. P. 2625–2677.
64. Richardson D. L. Analytic Construction of Periodic Orbits About the Collinear Points // Celestial Mechanics. 1980. Vol. 22, no. 3. P. 241–253.
65. Earth–Moon Libration Point Orbit Stationkeeping: Theory, Modeling, and Operations / D. C. Folta, T. A. Pavlak, A. F. Haapala et al. // Acta Astronautica. 2014. Vol. 94, no. 1. P. 421–433.
66. Richardson D. L. Halo Orbit Formulation for the ISEE-3 Mission // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1980. Vol. 3, no. 6. P. 543–548.
67. Howell K. C. Three-Dimensional, Periodic, Halo Orbits // Celestial Mechanics. 1984. Vol. 32, no. 1. P. 53–71.
68. Dynamics and Mission Design Near Libration Point Orbits — Volume I: Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points / G. Gómez, J. Llibre, R. Matínez [и др.]. World Scientific, 2001. Т. 2. С. 62–68.
69. Dynamics and Mission Design Near Libration Points — Volume III: Advanced Method for Collinear Points / G. Gómez, À. Jorba, C. Simó [и др.]. World Scientific, 2001. Т. 4. С. 33–52.
70. Howell K. C., Pernicka H. J. Numerical Determination of Lissajous Trajectories in the Restricted Three-Body Problem // Celestial Mechanics. 1987. Vol. 41, no. 1-4. P. 107–124.
71. Pavlak T. A. Mission Design Applications in the Earth–Moon System. MS Thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA. 2010.
72. Kolenen E., Kasdin N. J., Gurfil P. Multiple Poincaré Sections Method for Finding the Quasiperiodic Orbits of the Restricted Three Body Problem // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2012. Vol. 112, no. 1. P. 47–74.
73. Pontani M., Conway B. A. Particle Swarm Optimization Applied to Space Trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33, no. 5. P. 1429–1441.

74. Martin C., Conway B. A., Ibáñez P. Optimal Low-Thrust Trajectories to the Interior Earth-Moon Lagrange Point // *Space Manifold Dynamics*. Springer, 2010. С. 161–184.
75. Ильин И. С., Сазонов В. В., Тучин А. Г. Гало-орбиты в окрестности точки либрации L2 системы Солнце-Земля // *Космические исследования*. 2014. Т. 52, № 3. С. 201–217.
76. Olikara Z. P., Scheeres D. J. Numerical Method for Computing Quasi-Periodic Orbits and Their Stability in the Restricted Three-Body Problem // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2012. Vol. 145. P. 911–930.
77. Schilder F., Osinga H. M., Vogt W. Continuation of Quasi-Periodic Invariant Tori // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2005. Vol. 4, no. 3. P. 459–488.
78. Baresi N., Olikara Z., Scheeres D. J. Survey of Numerical Methods for Computing Quasi-Periodic Invariant Tori in Astrodynamics // *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*. Napa, CA, USA: 2016. С. 22.
79. Gómez G., Masdemont J. J., Simó C. Quasihalo Orbits Associated with Libration Points // *Journal of the Astronautical Sciences*. 1998. Vol. 46, no. 2. P. 135–176.
80. Optimal Transfer to Solar-Terrestrial Collinear Libration Points / N. Eismont, A. Ledkov, R. Nazirov [и др.] // *SpaceOps 2012*. Stockholm, Sweden: 2012.
81. Баллистическое проектирование траекторий перелёта с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки L2 системы Солнце – Земля / И. С. Ильин, Заславский Г. С., Лавренов С. М. [и др.] // *Космические исследования*. 2014. Т. 52, № 6. С. 476–488.
82. Ильин И. С. Квазипериодические орбиты в окрестности точки либрации L2 системы Солнце-Земля и траектории перелета к ним в российских космических проектах: дис. ... канд. ф.-м. наук: 01.02.01, М., 2015. 153 с.
83. Farquhar R. W. The Utilization of Halo Orbits in Advanced Lunar Operations // *NASA X-551-70-449*. 1970.

84. Лидов М. Л., Лукьянов С. С., Тесленко Н. М. Автоматическая станция в окрестности лунной либрационной точки L_2 . 1. Предварительный анализ схемы запуска и управления на гало-орбите // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1974. Т. 116.
85. Лидов М. Л., Лукьянов С. С. Статистические оценки в задаче управления движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Космические исследования. 1976. Т. 14, № 6. С. 922–935.
86. Лидов М. Л., Ляхова В. А. Гарантирующий синтез управления для стабилизации движения космического аппарата в окрестности неустойчивых точек либрации // Космические исследования. 1992. Т. 30, № 5. С. 579–595.
87. Коган А. Ю. Об оптимальной программе импульсных коррекций неустойчивых периодических орбит // Космические исследования. 1992. Т. 30, № 5. С. 712–714.
88. Эльясберг П. Е., Тимохова Т. А. Управление движением космического аппарата в окрестности коллинеарного центра либрации в ограниченной эллиптической задаче трех тел // Космические исследования. 1986. Т. 24, № 4. С. 497–512.
89. Farquhar R.W. Station-keeping in the Vicinity of Collinear Libration Points with an Application to a Lunar Communications Problem // Space Flight Mechanics Specialist Symposium. Т. 11 из *Paper AAS 66-132*. Denver, CO, United States: American Astronautical Society, New York, 1967. С. 519–535.
90. Farquhar R. W. The Control and Use of Libration-Point Satellites // NASA TR R-346. 1970.
91. Farquhar R. W. Limit-cycle Analysis of a Controlled Libration-Point Satellite // The Journal of the Astronautical Sciences. 1970. Vol. 17. P. 267–291.
92. Farquhar R. W. Comments on Optimal Controls for Out-of-Plane Motion about the Translunar Libration Point // Journal of Spacecraft and Rockets. 1971. Vol. 8, no. 7. P. 815–816.

93. Colombo G. The Stabilization of an Artificial Satellite at the Inferior Conjunction Point of the Earth–Moon System // Smithsonian Contributions to Astrophysics. 1963. Vol. 6. P. 213–222.
94. Euler E. A., Yu E. Y. Optimal Station-Keeping at Collinear Points // Journal of Spacecraft and Rockets. 1971. Vol. 8, no. 5. P. 513–516.
95. Breakwell J. V., Kamel A. A., Ratner M. J. Station-Keeping for a Translunar Communication Station // Celestial Mechanics. 1974. Vol. 10, no. 3. P. 357–373.
96. Wiesel W., Shelton W. Modal Control of an Unstable Periodic Orbit // The Journal of the Astronautical Sciences. 1983. Vol. 31. P. 63–76.
97. Station Keeping of a Quasiperiodic Halo Orbit Using Invariant Manifolds / C. Simó, G. Gómez, J. Llibre [и др.] // Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics. European Space Agency, Darmstadt, Germany: 1986. C. 65–70.
98. On the Optimal Station Keeping Control of Halo Orbits / C. Simó, G. Gómez, J. Llibre et al. // Acta Astronautica. 1987. Vol. 15, no. 6. P. 391–397.
99. Keeter T. M. Station-Keeping Strategies for Libration Point Orbits: Target Point and Floquet Mode Approaches. MS Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA. 1994.
100. Nazari M., Anthony W., Butcher E. A. Continuous Thrust Stationkeeping in Earth–Moon L_1 Halo Orbits Based on LQR control and Floquet Theory // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Paper AIAA 2014-4140. San Diego, CA; United States: 2014. C. 1–18.
101. Ghorbani M., Assadian N. Optimal Station-Keeping Near Earth–Moon Collinear Libration Points Using Continuous and Impulsive Maneuvers // Advances in Space Research. 2013. Vol. 52, no. 12. P. 2067–2079.
102. Ulybyshev Y. Long-Term Station Keeping of Space Station in Lunar Halo Orbits // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. Vol. 38, no. 6. P. 1063–1070.

103. Jones B. L., Bishop R. H. H_2 optimal halo orbit guidance // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1993. Vol. 16, no. 6. P. 1118–1124.
104. Kulkarni J. E., Campbell M. E. Asymptotic Stabilization of Motion About an Unstable Orbit: Application to Spacecraft Flight in Halo Orbit // American Control Conference. Boston, MA; United States: 2004. C. 1025–1030.
105. Kulkarni J. E., Campbell M. E., Dullerud G. E. Stabilization of Spacecraft Flight in Halo Orbits: An H_∞ Approach // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2006. Vol. 14, no. 3. P. 572–578.
106. Howell K. C., Pernicka H. J. Station-Keeping Method for Libration Point Trajectories // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1993. Vol. 16, no. 1. P. 151–159.
107. Howell K. C., Gordon S. C. Orbit Determination Error Analysis and a Station-Keeping Strategy for Sun–Earth L_1 Libration Point Orbits // The Journal of the Astronautical Sciences. 1994. Vol. 42, no. 2. P. 207–228.
108. Station-Keeping of Real Earth-Moon Libration Point Orbits Using Discrete-Time Sliding Mode Control / Y. Lian, G. Gómez, J. J. Masdemont et al. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. Vol. 19, no. 10. P. 3792–3807.
109. Shirobokov M., Trofimov S., Ovchinnikov M. Survey of Station-Keeping Techniques for Libration Point Orbits // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. P. 1–21.
110. Farquhar R. W. The Flight of ISEE-3/ICE: Origins, Mission History, and a Legacy // The Journal of the Astronautical Sciences. 2001. Vol. 49, no. 1. P. 23–74.
111. Dunham D. W., Roberts C. E. Stationkeeping Techniques for Libration-Point Satellites // The Journal of the Astronautical Sciences. 2001. Vol. 49, no. 1. P. 127–144.
112. Roberts C. E. Long Term Missions at the Sun–Earth Libration Point L_1 : ACE, SOHO, and WIND // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Paper AAS 11-485. Girdwood, AK; United States: 2011. C. 1–2.

113. Roberts C. E. The SOHO Mission L_1 Halo Orbit Recovery From the Attitude Control Anomalies of 1998 // Libration Point Orbits and Applications Conference. Parador d'Aiguablava, Girona, Spain: 2003. C. 171–217.
114. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP): Explanatory Supplement / под ред. М. Limon, Е. Wollack, С. L. Bennett [и др.]. Greenbelt, MD, NASA/GSFC, 2003.
115. Genesis Earth Return: Refined Strategies and Flight Experience / K. E. Williams, G. D. Lewis, R. S. Wilson et al. // Advances in the Astronautical Sciences. 2005. Vol. 120. P. 249–268.
116. Genesis Halo Orbit Station Keeping Design / K. Williams, B. T. Barden, K. C. Howell [и др.] // International Symposium: Spaceflight Dynamics. Biarritz, France: 2000.
117. Herschel Observers' Manual. HERSCHEL-HSC-DOC-0876, Version 5.0.3. 2014.
118. Planck 2013 Results. I. Overview of Products and Scientific Results. ArXiv e-prints (2013), arXiv:1303.5062. 2013.
119. Chang'e-2 Satellite Lagrange L_2 Point Mission / H. Huang, W. Zhou, L. Meng [и др.] // 63rd International Astronautical Congress. Paper IAC-12.A3.2B.6. Naples, Italy: 2012.
120. Renk F., Landgraf M. Gaia: Trajectory Design with Tightening Constraints // 24th International Symposium on Space Flight Mechanics. Laurel, MD; United States: 2014. C. 1–18.
121. URL: <http://www.spaceflight101.net/change-5-test-mission-updates.html>.
122. Roberts C. E., Case S., Reagoso J. Lissajous Orbit Control for the Deep Space Climate Observatory Sun–Earth L_1 Libration Point Mission // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Paper AAS 15-611. Vail, CO; United States: 2015. C. 1–20.
123. LISA Pathfinder Mission Operations Concept and Launch Early Orbit Phase-In-Orbit Experience / A. Rudolph, I. Harrison, F. Renk [и др.] // SpaceOps Conference. Paper AIAA 2016-2412. Daejeon, Korea: 2016.

124. URL: <http://sci.esa.int/lisa-pathfinder/31436-overview>.
125. Sorensen D. Minimization of a large-scale quadratic functions subject to a spherical constraint // *SIAM Journal on Optimization*. 1997. Vol. 7, no. 1. P. 141–161.
126. Parker J. S., Anderson R. L. *Low-energy lunar trajectory design*. John Wiley & Sons, 2014.
127. Lunar Flashlight: Mapping Lunar Surface Volatiles Using a CubeSat / P. O. Hayne, B. A. Cohen, R. G. Sellar [и др.] // Annual Meeting of the Lunar Exploration Analysis Group. LPI Contribution No. 1748. Laurel, MD, USA: 2013. С. 7045.
128. Ozimek M. T., Howell K. C. Low-Thrust Transfers in the Earth-Moon System, Including Applications to Libration Point Orbits // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. Vol. 33, no. 2. P. 533–549.
129. URL: <http://www.nasa.gov/feature/goddard/lunar-icecube-to-take-on-big-mission-from-small-package>.
130. Concurrent Mission Design of NEA Scout & Lunar Flashlight, Solar Sail CubeSat Missions / G. Carlisle, D. Landau, D. Grebow [и др.] // *SOSTC Improving Space Operations Workshops*. 2015.
131. Colombo C., Novak D., Heiligers J. Low-thrust trajectories design for the European Student Moon Orbiter mission // 58th International Astronautical Congress. Paper IAC-07-E2. 2.07. Hyderabad, India: 2007.
132. CIRA-2012: COSPAR international reference atmosphere – 2012. Models of the Earth’s Upper Atmosphere. 2012. P. 20–24.
133. Коган А. Ю., Котин В. А. Резонансные эффекты при движении с малой тягой в системе Земля–Луна // *Космические исследования*. 1987. Т. 25, № 3. С. 374–383.
134. Bollt E. M., Meiss J. D. Targeting chaotic orbits to the Moon through recurrence // *Physics Letters A*. 1995. Vol. 204, no. 5-6. P. 373–378.

135. Schroer C. G., Ott E. Targeting in Hamiltonian systems that have mixed regular/chaotic phase spaces // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1997. Vol. 7, no. 4. P. 512–519.
136. Macau E. E. N. Using Chaos to Guide a Spacecraft to the moon // *Acta Astronautica*. 2000. Vol. 47, no. 12. P. 871–878. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576500001259>.
137. Ross S., Scheeres D. Multiple Gravity Assists, Capture, and Escape in the Restricted Three-Body Problem // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2007. Vol. 6, no. 3. P. 576–596.
138. Lantoine G., Russell R. P., Campagnola S. Optimization of Low-Energy Resonant Hopping Transfers Between Planetary Moons // *Acta Astronautica*. 2011. Vol. 68, no. 7. P. 1361–1378.
139. Campagnola S., Russell R. P. Endgame Problem Part 2: Multibody Technique and the Tisserand–Poincaré graph // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. Vol. 33, no. 2. P. 476–486.
140. Gembicki F. W. Vector optimization for control with performance and parameter sensitivity indices. PhD Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, USA. 1974.
141. Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // *Космические исследования*. 2004. Т. 42, № 3. С. 260–279.
142. Kluever C. A. Low-thrust trajectory optimization using orbital averaging and control parameterization // *Spacecraft Trajectory Optimization* / под ред. В. А. Conway. Cambridge University Press, 2010. С. 112–138.
143. Константинов М. С., Мин Т. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО // *Вестник Московского авиационного института*. 2009. Т. 16, № 5.
144. Петухов В.Г. Робастное квазиоптимальное управление с обратной связью для перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и

- круговой орбитами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 50–58.
145. SMART-1 electric propulsion operations / D. Milligan, D. Gestal, O. Camino [и др.] // 40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. Paper AIAA 2004-3436. Fort Lauderdale, Florida: 2004.
 146. Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics / W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden et al. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2000. Vol. 10, no. 2. P. 427–469.
 147. Wilczak D., Zgliczynski P. Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three-body problem – a computer assisted proof // Communications in mathematical physics. 2003. Vol. 234, no. 1. P. 37–75.
 148. Genesis mission design / M. W. Lo, B. G. Williams, W. E. Bollman [и др.] // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. Paper AIAA 98-4468. Boston, MA, USA: 1998.
 149. URL: <http://www.planetary.org/blogs/emily-lakdawalla/2010/2430.html>.
 150. Character and Spatial Distribution of OH/H₂O on the Surface of the Moon Seen by M³ on Chandrayaan-1 / C. M. Pieters, J. N. Goswami, R. N. Clark et al. // Science. 2009. Vol. 326, no. 5952. P. 568–572.
 151. URL: https://www.nasa.gov/mission_pages/LCROSS/main/index.html.
 152. URL: <http://www.laspaces.ru/projects/planets/moon-base/>.
 153. Lara M., De Saedeleer B., Ferrer S. Preliminary design of low lunar orbits // 21st International Symposium on Space Flight Dynamics. Toulouse, France: 2009.
 154. Haapala A. F., Howell K. C. A Framework for Constructing Transfers Linking Periodic Libration Point Orbits in the Spatial Circular Restricted Three-Body Problem // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 05. P. 1630013.

155. Haapala A. F. Trajectory design in the spatial circular restricted three-body problem exploiting higher-dimensional Poincare maps. PhD Thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA. 2014.
156. Canalias E., Masdemont J. J. Homoclinic and Heteroclinic Transfer Trajectories Between Planar Lyapunov Orbits in the Sun-Earth and Earth-Moon Systems // Discrete and continuous dynamical systems. 2006. Vol. 14, no. 2. P. 261–279.
157. Stuart J. R., Ozimek M. T., Howell K. C. Fuel-optimal, low-thrust transfers between libration point orbits // AIAA/AAS Astrodynamics specialists conference. Toronto, Canada: 2010.
158. “VASIMR Technology,” Ad Astra Rocket Company. URL: <http://www.adastrarocket.com/aarc/Technology>.
159. Komurasaki K., Arakawa Y., Takegahara H. An Overview of Electric and Advanced Propulsion Activities in Japan // Third International Conference of Spacecraft Propulsion. Cannes, France: 2000. C. 27–39.
160. Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem / G. Gómez, W. S. Koon, M. W. Lo et al. // Nonlinearity. 2004. Vol. 17, no. 5. P. 1571–1606.
161. Masdemont J. J. High-order expansions of invariant manifolds of libration point orbits with applications to mission design // Dynamical Systems. 2005. Vol. 20, no. 1. P. 59–113.
162. Olikara Z. P. Computation of quasi-periodic tori and heteroclinic connections in astrodynamics using collocation techniques. PhD Thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, USA. 2016.
163. The Genesis Trajectory and Heteroclinic Cycles / W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden et al. // Astrodynamics 1999. Advances in Astronautical Sciences. 1999. no. 103. P. 2327–2343.
164. Ross S. D. The Interplanetary Transport Network: Some mathematical sophistication allows spacecraft to be maneuvered over large distances using little or no fuel // American Scientist. 2006. Vol. 94, no. 3. P. 230–237.

165. Hénon M. Numerical exploration of the restricted problem, V // *Astronomy and Astrophysics*. 1969. Vol. 1. P. 223–238.
166. Flight status of IKAROS deep space solar sail demonstrator / Y. Tsuda, O. Mori, R. Funase et al. // *Acta Astronautica*. 2011. Vol. 69, no. 9–10. P. 833–840.
167. Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. С. 31–37.
168. Gustafson E. D., Scheeres D. J. Optimal Timing of Control-Law Updates for Unstable Systems with Continuous Control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2009. Vol. 32, no. 3. P. 878–887.
169. Renault C. A., Scheeres D. J. Statistical Analysis of Control Maneuvers in Unstable Orbital Environments // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2003. Vol. 26, no. 5. P. 758–769.
170. Tafazoli M. A study of on-orbit spacecraft failures // *Acta Astronautica*. 2009. Vol. 64, no. 2–3. P. 195–205.
171. Vandenbussche F. SOHO's Recovery – An Unprecedented Success Story // *ESA bulletin*. 1999. no. 97. P. 39–47.
172. Нгуен Д. Н. Проектирование траекторий межпланетных перелетов КА с электроракетной двигательной установкой с учетом нештатного временного выключения двигателя: дис. ... канд. техн. наук: 05.07.09. М., 2015. 122 с.

Приложение А

Таблицы коэффициентов разложения гало-орбит вокруг точек
либрации Земля–Луна L_1/L_2 в ряды Фурье

Таблица А.1

Коэффициенты d_{ij} и f_{ij} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_1

i	j	d_{ij}	f_{ij}
0.0	0.0	1.0000000	0.0000000
0.0	2.0	0.0827776	-2.4137666
2.0	0.0	-1.7491128	28.7977103
0.0	4.0	0.0426084	-0.5280831
2.0	2.0	0.9887830	-7.3709446
4.0	0.0	4.8093580	-133.3126348
0.0	6.0	-0.0045887	0.0753076
2.0	4.0	1.7429649	-27.7461021
4.0	2.0	-17.4303258	373.4246523
6.0	0.0	-12.0651314	12.7008536
0.0	8.0	-0.0216453	0.2992532
2.0	6.0	-0.4068570	-2.7538834
4.0	4.0	27.4857428	-215.2519557
6.0	2.0	-51.3473522	-398.3972665
8.0	0.0	14.3282973	292.4116436

Таблица А.2

Коэффициенты d_{ij} и f_{ij} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_2

i	j	d_{ij}	f_{ij}
0.0	0.0	1.0000000	0.0000000
0.0	2.0	0.1468623	-1.2871562
2.0	0.0	-0.3476725	8.8894961
0.0	4.0	0.1136756	-1.1269101
2.0	2.0	-0.0580051	8.7881620
4.0	0.0	-0.4914156	-18.2015467
0.0	6.0	0.0495443	-0.5876833
2.0	4.0	1.1991039	-7.9375055
4.0	2.0	-4.9879535	75.6481950
6.0	0.0	0.6923493	-73.9864189
0.0	8.0	-0.0189854	0.0492740
2.0	6.0	2.1184929	-25.9627912
4.0	4.0	-3.6655133	189.7068105
6.0	2.0	-14.6494041	-345.8047903
8.0	0.0	0.9942575	260.7854253

Таблица А.3

Коэффициенты x_{ijk} и y_{ijk} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_1

i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}	i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}
1.0	0.0	1.0	-0.5000000	-1.7932501	6.0	0.0	6.0	-2.0938658	1.9969964
0.0	2.0	0.0	0.2155901	0.0000000	1.0	6.0	1.0	0.0000000	-0.2493250
0.0	2.0	2.0	0.0432487	0.0228805	1.0	6.0	3.0	0.0318964	-0.0015730
2.0	0.0	0.0	2.3419514	0.0000000	1.0	6.0	5.0	-0.0008445	-0.0001436
2.0	0.0	2.0	-0.4786830	0.2415815	1.0	6.0	7.0	-0.0009071	0.0001307
1.0	2.0	1.0	0.0000000	0.5480612	3.0	4.0	1.0	0.0000000	8.1760716
1.0	2.0	3.0	-0.0377252	0.0226155	3.0	4.0	3.0	-0.8048716	0.6128576
3.0	0.0	1.0	0.0000000	2.1769495	3.0	4.0	5.0	0.0962058	-0.0020117
3.0	0.0	3.0	0.4554601	-0.6033020	3.0	4.0	7.0	0.0443384	-0.0186967
0.0	4.0	0.0	-0.0158252	0.0000000	5.0	2.0	1.0	0.0000000	-16.4453324
0.0	4.0	2.0	-0.0153641	-0.0116754	5.0	2.0	3.0	7.7973269	-8.5410133
0.0	4.0	4.0	-0.0027318	-0.0008687	5.0	2.0	5.0	-0.5947934	-0.0344466
2.0	2.0	0.0	-0.1177925	0.0000000	5.0	2.0	7.0	-0.7025372	0.4911728
2.0	2.0	2.0	0.5466943	0.2717857	7.0	0.0	1.0	0.0000000	4.7605244
2.0	2.0	4.0	0.0981573	-0.0280772	7.0	0.0	3.0	4.0887267	-8.3780094
4.0	0.0	0.0	-8.5237097	0.0000000	7.0	0.0	5.0	-9.2557096	10.0769244
4.0	0.0	2.0	1.4502479	-1.3140542	7.0	0.0	7.0	3.6289447	-3.5722477
4.0	0.0	4.0	-0.7968553	0.7040305	0.0	8.0	0.0	-0.0041501	0.0000000
1.0	4.0	1.0	0.0000000	0.3536982	0.0	8.0	2.0	0.0018427	0.0023858
1.0	4.0	3.0	0.0126953	-0.0016132	0.0	8.0	4.0	0.0005032	0.0001742
1.0	4.0	5.0	0.0056600	-0.0014560	0.0	8.0	6.0	-0.0000465	-0.0000257
3.0	2.0	1.0	0.0000000	-3.9614551	0.0	8.0	8.0	-0.0000342	-0.0000073
3.0	2.0	3.0	-0.4028490	0.1274605	2.0	6.0	0.0	0.3215332	0.0000000
3.0	2.0	5.0	-0.1664304	0.1038018	2.0	6.0	2.0	-0.4549355	-0.2396715
5.0	0.0	1.0	0.0000000	-5.9483154	2.0	6.0	4.0	-0.0789085	0.0388051
5.0	0.0	3.0	-2.0151085	3.1139525	2.0	6.0	6.0	0.0078658	0.0034212
5.0	0.0	5.0	1.1971600	-1.2298127	2.0	6.0	8.0	0.0035821	-0.0006115
0.0	6.0	0.0	-0.0192034	0.0000000	4.0	4.0	0.0	-10.7345617	0.0000000
0.0	6.0	2.0	-0.0051648	-0.0024912	4.0	4.0	2.0	9.0107802	0.6457213
0.0	6.0	4.0	0.0006660	0.0003773	4.0	4.0	4.0	1.9247499	-1.6523746
0.0	6.0	6.0	0.0002776	0.0000687	4.0	4.0	6.0	-0.2323380	-0.0235219
2.0	4.0	0.0	-0.6385506	0.0000000	4.0	4.0	8.0	-0.1144384	0.0521406
2.0	4.0	2.0	0.1335723	-0.4461492	6.0	2.0	0.0	-20.5991326	0.0000000
2.0	4.0	4.0	-0.0634457	-0.0237368	6.0	2.0	2.0	-17.6157512	-18.4689041
2.0	4.0	6.0	-0.0185942	0.0040064	6.0	2.0	4.0	-17.7487055	15.3616952
4.0	2.0	0.0	12.4747707	0.0000000	6.0	2.0	6.0	0.4278443	0.5586886
4.0	2.0	2.0	-3.5932658	4.2161558	6.0	2.0	8.0	1.4663837	-1.0488754
4.0	2.0	4.0	0.6195583	0.0444064	8.0	0.0	0.0	-37.7433436	0.0000000
4.0	2.0	6.0	0.3563303	-0.2107073	8.0	0.0	2.0	-11.0216723	7.4286141
6.0	0.0	0.0	25.3251430	0.0000000	8.0	0.0	4.0	-14.1921547	15.3842860
6.0	0.0	2.0	-2.2517185	2.5804350	8.0	0.0	6.0	19.5766868	-19.5435110
6.0	0.0	4.0	4.8557585	-4.7990712	8.0	0.0	8.0	-6.6143085	6.4171460

Таблица А.4

Коэффициенты x_{ijk} и y_{ijk} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_1
(продолжение)

i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}	i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}
1.0	8.0	1.0	0.0000000	-0.2721154	5.0	4.0	7.0	0.3948221	-0.0008251
1.0	8.0	3.0	-0.0082390	-0.0013227	5.0	4.0	9.0	0.2741954	-0.1484595
1.0	8.0	5.0	-0.0051988	-0.0001593	7.0	2.0	1.0	0.0000000	41.7568954
1.0	8.0	7.0	0.0000286	0.0000369	7.0	2.0	3.0	5.1525689	26.4846647
1.0	8.0	9.0	0.0001523	-0.0000131	7.0	2.0	5.0	35.7028421	-32.2026860
3.0	6.0	1.0	0.0000000	2.8298189	7.0	2.0	7.0	0.7510240	-1.9604886
3.0	6.0	3.0	1.0790223	-0.0232555	7.0	2.0	9.0	-3.0204316	2.2928913
3.0	6.0	5.0	0.2849441	-0.1172850	9.0	0.0	1.0	0.0000000	69.2425897
3.0	6.0	7.0	-0.0176023	-0.0030266	9.0	0.0	3.0	18.6313302	-9.6470755
3.0	6.0	9.0	-0.0107526	0.0034384	9.0	0.0	5.0	34.0384248	-40.0520634
5.0	4.0	1.0	0.0000000	-13.3278588	9.0	0.0	7.0	-39.9248458	40.5016883
5.0	4.0	3.0	-14.6529804	4.7856574	9.0	0.0	9.0	12.1994479	-11.9284029
5.0	4.0	5.0	-5.0574278	3.8254820					

Таблица А.5

Коэффициенты z_{ijk} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_1

i	j	k	z_{ijk}	i	j	k	z_{ijk}
0.0	1.0	1.0	0.5000000	6.0	1.0	5.0	0.1803533
1.0	1.0	0.0	0.8937312	6.0	1.0	7.0	1.2328687
1.0	1.0	2.0	-0.1489552	1.0	7.0	0.0	0.2466716
0.0	3.0	1.0	0.0000000	1.0	7.0	2.0	-0.0447757
0.0	3.0	3.0	-0.0105862	1.0	7.0	4.0	-0.0144251
2.0	1.0	1.0	0.0000000	1.0	7.0	6.0	0.0003029
2.0	1.0	3.0	0.2231541	1.0	7.0	8.0	0.0003849
1.0	3.0	0.0	-0.4933843	3.0	5.0	0.0	-15.0822133
1.0	3.0	2.0	0.0652501	3.0	5.0	2.0	3.4327526
1.0	3.0	4.0	0.0167878	3.0	5.0	4.0	0.4969015
3.0	1.0	0.0	6.9990979	3.0	5.0	6.0	-0.0520043
3.0	1.0	2.0	-0.8193717	3.0	5.0	8.0	-0.0214197
3.0	1.0	4.0	-0.2714354	5.0	3.0	0.0	102.8135107
0.0	5.0	1.0	0.0000000	5.0	3.0	2.0	-28.2222318
0.0	5.0	3.0	0.0034893	5.0	3.0	4.0	-4.9050111
0.0	5.0	5.0	0.0008464	5.0	3.0	6.0	0.7682019
2.0	3.0	1.0	0.0000000	5.0	3.0	8.0	0.3810363
2.0	3.0	3.0	-0.2065786	7.0	1.0	0.0	-143.9508546
2.0	3.0	5.0	-0.0420972	7.0	1.0	2.0	13.0372856
4.0	1.0	1.0	0.0000000	7.0	1.0	4.0	12.8237416
4.0	1.0	3.0	0.7080387	7.0	1.0	6.0	0.8043054
4.0	1.0	5.0	0.4392373	7.0	1.0	8.0	-2.1907214
1.0	5.0	0.0	-0.3887049	0.0	9.0	1.0	0.0000000
1.0	5.0	2.0	0.1204878	2.0	7.0	1.0	0.0000000
1.0	5.0	4.0	-0.0043613	4.0	5.0	1.0	0.0000000
1.0	5.0	6.0	-0.0024158	6.0	3.0	1.0	0.0000000
3.0	3.0	0.0	-2.3734358	8.0	1.0	1.0	0.0000000
3.0	3.0	2.0	-1.2532887	0.0	9.0	3.0	-0.0001446
3.0	3.0	4.0	0.2670407	0.0	9.0	5.0	-0.0001685
3.0	3.0	6.0	0.0839156	0.0	9.0	7.0	0.0000150
5.0	1.0	0.0	14.5160262	0.0	9.0	9.0	0.0000123
5.0	1.0	2.0	7.2690347	2.0	7.0	3.0	0.1573014
5.0	1.0	4.0	-0.5877796	2.0	7.0	5.0	0.0408217
5.0	1.0	6.0	-0.7064089	2.0	7.0	7.0	-0.0029943
0.0	7.0	1.0	0.0000000	2.0	7.0	9.0	-0.0015688
0.0	7.0	3.0	0.0014454	4.0	5.0	3.0	-5.9469314
0.0	7.0	5.0	-0.0002092	4.0	5.0	5.0	-1.1213180
0.0	7.0	7.0	-0.0000945	4.0	5.0	7.0	0.1366850
2.0	5.0	1.0	0.0000000	4.0	5.0	9.0	0.0569933
2.0	5.0	3.0	-0.1514665	6.0	3.0	3.0	36.9677303
2.0	5.0	5.0	0.0246702	6.0	3.0	5.0	10.6712024
2.0	5.0	7.0	0.0080670	6.0	3.0	7.0	-1.2372996
4.0	3.0	1.0	0.0000000	6.0	3.0	9.0	-0.8116278
4.0	3.0	3.0	2.0143191	8.0	1.0	3.0	-4.5496675
4.0	3.0	5.0	-0.4953732	8.0	1.0	5.0	-20.1667567
4.0	3.0	7.0	-0.1824736	8.0	1.0	7.0	-3.4671993
6.0	1.0	1.0	0.0000000	8.0	1.0	9.0	4.0239426
6.0	1.0	3.0	-8.0715018				

Таблица А.6

Коэффициенты x_{ijk} и y_{ijk} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_2

i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}	i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}
1.0	0.0	1.0	-0.5000000	-1.4563018	6.0	0.0	6.0	0.8534723	-0.8074849
0.0	2.0	0.0	-0.2702265	0.0000000	1.0	6.0	1.0	0.0000000	0.3194971
0.0	2.0	2.0	-0.0604066	-0.0385086	1.0	6.0	3.0	0.0378423	0.0133542
2.0	0.0	0.0	-1.7519487	0.0000000	1.0	6.0	5.0	0.0030997	-0.0006808
2.0	0.0	2.0	0.4089373	-0.2363551	1.0	6.0	7.0	-0.0006465	-0.0000693
1.0	2.0	1.0	0.0000000	0.0232573	3.0	4.0	1.0	0.0000000	-0.7653820
1.0	2.0	3.0	-0.0454354	0.0016324	3.0	4.0	3.0	-0.8326862	0.2067725
3.0	0.0	1.0	0.0000000	1.0499350	3.0	4.0	5.0	-0.0840278	0.0759530
3.0	0.0	3.0	0.3468159	-0.3418245	3.0	4.0	7.0	0.0263484	-0.0057955
0.0	4.0	0.0	-0.0168889	0.0000000	5.0	2.0	1.0	0.0000000	-0.9109747
0.0	4.0	2.0	0.0146979	0.0164248	5.0	2.0	3.0	3.2352770	-2.4928759
0.0	4.0	4.0	0.0024282	0.0010301	5.0	2.0	5.0	0.7203776	-0.9800633
2.0	2.0	0.0	-1.1665609	0.0000000	5.0	2.0	7.0	-0.3256345	0.1845580
2.0	2.0	2.0	-0.1503726	-0.3294511	7.0	0.0	1.0	0.0000000	-0.9378220
2.0	2.0	4.0	-0.0758535	0.0135019	7.0	0.0	3.0	0.7808218	-0.7899640
4.0	0.0	0.0	1.7966205	0.0000000	7.0	0.0	5.0	-2.3146225	2.3195263
4.0	0.0	2.0	-0.5810996	0.7116320	7.0	0.0	7.0	1.2578596	-1.2004960
4.0	0.0	4.0	0.4505327	-0.4094786	0.0	8.0	0.0	0.0192873	0.0000000
1.0	4.0	1.0	0.0000000	0.5061765	0.0	8.0	2.0	0.0041605	0.0003332
1.0	4.0	3.0	-0.0057922	0.0124643	0.0	8.0	4.0	-0.0005022	-0.0004384
1.0	4.0	5.0	0.0052522	0.0003481	0.0	8.0	6.0	-0.0001165	-0.0000230
3.0	2.0	1.0	0.0000000	-2.4966433	0.0	8.0	8.0	0.0000168	0.0000054
3.0	2.0	3.0	0.0804915	-0.3478268	2.0	6.0	0.0	1.1480075	0.0000000
3.0	2.0	5.0	-0.1163656	0.0447909	2.0	6.0	2.0	-0.0884147	0.5903494
5.0	0.0	1.0	0.0000000	-0.9870646	2.0	6.0	4.0	0.0881275	0.0171226
5.0	0.0	3.0	-0.8867500	0.9517191	2.0	6.0	6.0	0.0106321	-0.0038637
5.0	0.0	5.0	0.5995747	-0.5648434	2.0	6.0	8.0	-0.0019866	0.0000418
0.0	6.0	0.0	0.0197300	0.0000000	4.0	4.0	0.0	-11.2210998	0.0000000
0.0	6.0	2.0	0.0155896	0.0131855	4.0	4.0	2.0	-1.0779410	-5.3273350
0.0	6.0	4.0	0.0005172	-0.0000300	4.0	4.0	4.0	-1.4403923	0.4054676
0.0	6.0	6.0	-0.0001814	-0.0000644	4.0	4.0	6.0	-0.2073344	0.1774032
2.0	4.0	0.0	0.4512183	0.0000000	4.0	4.0	8.0	0.0548256	-0.0173655
2.0	4.0	2.0	-0.5326440	0.0668866	6.0	2.0	0.0	-5.5512667	0.0000000
2.0	4.0	4.0	-0.0270096	0.0325284	6.0	2.0	2.0	3.7088892	8.5603626
2.0	4.0	6.0	0.0124161	-0.0009697	6.0	2.0	4.0	5.1504255	-3.8758214
4.0	2.0	0.0	-8.8650388	0.0000000	6.0	2.0	6.0	1.4888855	-1.7646132
4.0	2.0	2.0	2.2039272	-1.4220900	6.0	2.0	8.0	-0.5576340	0.3480781
4.0	2.0	4.0	0.3029109	-0.5678700	8.0	0.0	0.0	-3.7536272	0.0000000
4.0	2.0	6.0	-0.1935198	0.0937926	8.0	0.0	2.0	0.8084758	-0.9610068
6.0	0.0	0.0	0.1095691	0.0000000	8.0	0.0	4.0	1.4829626	-1.6046114
6.0	0.0	2.0	0.4284945	-0.5024831	8.0	0.0	6.0	-3.8762583	3.8502006
6.0	0.0	4.0	-1.4095841	1.4437464	8.0	0.0	8.0	1.9089551	-1.8315609

Таблица А.7

Коэффициенты x_{ijk} и y_{ijk} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_2
(продолжение)

i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}	i	j	k	x_{ijk}	y_{ijk}
1.0	8.0	1.0	0.0000000	-0.2256978	5.0	4.0	7.0	-0.4757224	0.3968282
1.0	8.0	3.0	0.0353388	-0.0005404	5.0	4.0	9.0	0.1113521	-0.0440442
1.0	8.0	5.0	-0.0030049	-0.0016201	7.0	2.0	1.0	0.0000000	41.0815601
1.0	8.0	7.0	-0.0006619	0.0000208	7.0	2.0	3.0	-2.9448150	9.6029115
1.0	8.0	9.0	0.0000833	0.0000108	7.0	2.0	5.0	8.0189777	-6.1771257
3.0	6.0	1.0	0.0000000	9.4867165	7.0	2.0	7.0	2.9411916	-3.2222328
3.0	6.0	3.0	-0.6826535	0.8593094	7.0	2.0	9.0	-0.9640903	0.6452416
3.0	6.0	5.0	0.1901816	0.0145561	9.0	0.0	1.0	0.0000000	2.9862843
3.0	6.0	7.0	0.0312552	-0.0140346	9.0	0.0	3.0	1.4241293	-1.6093346
3.0	6.0	9.0	-0.0052879	0.0007091	9.0	0.0	5.0	3.0671974	-3.1974891
5.0	4.0	1.0	0.0000000	-49.0809329	9.0	0.0	7.0	-6.5899047	6.5138431
5.0	4.0	3.0	2.5106423	-7.2333572	9.0	0.0	9.0	2.9609219	-2.8538441
5.0	4.0	5.0	-2.4705866	0.8287234					

Таблица А.8

Коэффициенты z_{ijk} до 9-го порядка аппроксимации. Земля–Луна L_2

i	j	k	z_{ijk}	i	j	k	z_{ijk}
0.0	1.0	1.0	0.5000000	6.0	1.0	5.0	0.0779512
1.0	1.0	0.0	-1.1497511	6.0	1.0	7.0	0.5564030
1.0	1.0	2.0	0.1916252	1.0	7.0	0.0	0.3688088
0.0	3.0	1.0	0.0000000	1.0	7.0	2.0	-0.1088696
0.0	3.0	3.0	-0.0087677	1.0	7.0	4.0	0.0110197
2.0	1.0	1.0	0.0000000	1.0	7.0	6.0	0.0015147
2.0	1.0	3.0	0.1865917	1.0	7.0	8.0	-0.0002295
1.0	3.0	0.0	0.2161077	3.0	5.0	0.0	6.6610143
1.0	3.0	2.0	-0.0090506	3.0	5.0	2.0	0.0190509
1.0	3.0	4.0	-0.0161119	3.0	5.0	4.0	-0.4726693
3.0	1.0	0.0	-4.2821178	3.0	5.0	6.0	-0.0502366
3.0	1.0	2.0	0.3879169	3.0	5.0	8.0	0.0118688
3.0	1.0	4.0	0.2123839	5.0	3.0	0.0	-73.8743280
0.0	5.0	1.0	0.0000000	5.0	3.0	2.0	5.3388852
0.0	5.0	3.0	-0.0006667	5.0	3.0	4.0	3.4147652
0.0	5.0	5.0	0.0005725	5.0	3.0	6.0	0.3692076
2.0	3.0	1.0	0.0000000	5.0	3.0	8.0	-0.1794887
2.0	3.0	3.0	0.0138149	7.0	1.0	0.0	57.3402094
2.0	3.0	5.0	-0.0309975	7.0	1.0	2.0	-2.8216078
4.0	1.0	1.0	0.0000000	7.0	1.0	4.0	-2.9524931
4.0	1.0	3.0	0.2996094	7.0	1.0	6.0	-0.1592188
4.0	1.0	5.0	0.2766036	7.0	1.0	8.0	0.8343900
1.0	5.0	0.0	0.7484300	0.0	9.0	1.0	0.0000000
1.0	5.0	2.0	-0.1544801	2.0	7.0	1.0	0.0000000
1.0	5.0	4.0	-0.0063404	4.0	5.0	1.0	0.0000000
1.0	5.0	6.0	0.0018427	6.0	3.0	1.0	0.0000000
3.0	3.0	0.0	-6.2139899	8.0	1.0	1.0	0.0000000
3.0	3.0	2.0	1.5190643	0.0	9.0	3.0	0.0020466
3.0	3.0	4.0	0.0714734	0.0	9.0	5.0	-0.0000465
3.0	3.0	6.0	-0.0559126	0.0	9.0	7.0	-0.0000440
5.0	1.0	0.0	-2.5364333	0.0	9.0	9.0	0.0000050
5.0	1.0	2.0	-2.1578764	2.0	7.0	3.0	-0.2257778
5.0	1.0	4.0	0.2038606	2.0	7.0	5.0	0.0324628
5.0	1.0	6.0	0.3832173	2.0	7.0	7.0	0.0054258
0.0	7.0	1.0	0.0000000	2.0	7.0	9.0	-0.0007910
0.0	7.0	3.0	0.0019603	4.0	5.0	3.0	0.6135426
0.0	7.0	5.0	0.0002685	4.0	5.0	5.0	-0.8857682
0.0	7.0	7.0	-0.0000499	4.0	5.0	7.0	-0.1195671
2.0	5.0	1.0	0.0000000	4.0	5.0	9.0	0.0265810
2.0	5.0	3.0	-0.2513878	6.0	3.0	3.0	5.9999039
2.0	5.0	5.0	-0.0190861	6.0	3.0	5.0	5.4808479
2.0	5.0	7.0	0.0049872	6.0	3.0	7.0	0.7528008
4.0	3.0	1.0	0.0000000	6.0	3.0	9.0	-0.3203694
4.0	3.0	3.0	2.1686384	8.0	1.0	3.0	-2.4639261
4.0	3.0	5.0	0.1710929	8.0	1.0	5.0	-4.0991745
4.0	3.0	7.0	-0.1004883	8.0	1.0	7.0	-0.6191555
6.0	1.0	1.0	0.0000000	8.0	1.0	9.0	1.2827865
6.0	1.0	3.0	-2.2429576	0.0	0.0	0.0	0.0000000

Приложение Б

Связь между равноденственными орбитальными переменными и фазовым состоянием

Пусть даны положение \mathbf{r} и скорость \mathbf{v} аппарата и требуется вычислить равноденственные орбитальные элементы h , e_x , e_y , i_x , i_y и истинную долготу L . В тех случаях, когда существуют долгота восходящего узла Ω и аргумент перицентра ω , равноденственные орбитальные элементы можно получить из соотношений

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{a(1 - e^2)/\mu} \\ e_x &= e \cos(j\Omega + \omega) \\ e_y &= e \sin(j\Omega + \omega) \\ i_x &= (\tan(i/2))^j \cos \Omega \\ i_y &= (\tan(i/2))^j \sin \Omega \\ L &= j\Omega + \omega + \vartheta \end{aligned}$$

которые связывают их с классическими орбитальными элементами a , e , ω , i , Ω и истинной аномалией ϑ ; здесь μ – гравитационный параметр, а параметр j называется ретроградным фактором:

$$j = \begin{cases} +1, & 0 \leq i \leq \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < i \leq \pi \end{cases}$$

Классические орбитальные элементы и истинная аномалия, в свою очередь, связаны с положением \mathbf{r} и скоростью \mathbf{v} . Отметим, что равноденственные элементы с ретроградным фактором корректно определены для всех типов орбит и не приводят к каким-либо вырождениям уравнений движения.

В общем случае, включающем орбиты с неопределенными Ω и ω , алгоритм расчета равноденственных элементов следующий: сначала вычисляется орбитальный момент $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = [c_x, c_y, c_z]$, и тогда

$$h = \frac{c}{\mu}, \quad i_x = -\frac{j c_y}{c + j c_z}, \quad i_y = \frac{c_x}{c + j c_z}, \quad j = \text{sgn } c_z$$

Далее рассчитываются вектор Лапласа

$$\mathbf{A} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{v} \times \mathbf{c}$$

и вспомогательные векторы $\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]$ и $\mathbf{g} = [g_x, g_y, g_z]$ по формулам

$$f_x = c - \frac{c_x^2}{c + jc_z}, \quad f_y = -\frac{c_x c_y}{c + jc_z}, \quad f_z = -jc_x$$

$$g_x = -\frac{jc_x c_y}{c + jc_z}, \quad g_y = j \left[c - \frac{c_y^2}{c + jc_z} \right], \quad g_z = -c_y$$

После этого вычисляются остальные переменные

$$e_x = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{f}}{c\mu}, \quad e_y = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}}{c\mu}, \quad L = \text{atan2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{f})$$

Функция `atan2` – это функция арктангенса, которая использует информацию о знаках входных переменных, чтобы корректно определить квадрант вычисляемого угла. Реализацию этой функции можно найти в любом из основных языках программирования общего и специального назначения (C/C++, Fortran, Java, Python, MATLAB, Mathematica и др.).

Рассмотрим теперь обратные преобразования от элементов h, e_x, e_y, i_x, i_y, L к положению \mathbf{r} и скорости \mathbf{v} . В этом случае сначала вычисляются упомянутые выше векторы \mathbf{f} и \mathbf{g}

$$\mathbf{f} = \frac{\mu h}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 \\ 2ji_x i_y \\ -2ji_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mu h}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} 2i_x i_y \\ j(1 - i_x^2 + i_y^2) \\ 2ji_x \end{bmatrix}$$

Тогда положение и скорость КА вычисляются по формулам

$$\mathbf{r} = \frac{h(\mathbf{f} \cos L + \mathbf{g} \sin L)}{1 + e_x \cos L + e_y \sin L}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{g}(e_x + \cos L) - \mathbf{f}(e_y + \sin L)}{\mu h^2}$$