

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени магистра
по направлению 03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
магистерская программа «Управление динамическими системами»

Стыковка спутников с нежесткими элементами по сглаженным траекториям

Выполнил:
студент группы М05-872в
Акулов Дмитрий Сергеевич

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Ткачев Степан Сергеевич

Москва, 2020

Аннотация

В диссертации рассматривается задача стыковки микроспутников с нежесткими элементами конструкции по сглаженным траекториям, проходящим через наперед заданные точки. Целью работы является моделирование процесса стыковки и сравнение непрерывного и непрерывно дифференцируемого управления в рамках поставленной задачи. Реализованы алгоритмы построения сглаженной траектории в виде сплайнов четвертой и пятой степеней. Реализован алгоритм построения движения по данным траекториям. Проведено сравнение непрерывного и гладкого управлений. Результаты сравнения демонстрируют, что использование сплайнов более высокого порядка позволяют добиться отсутствия возбуждения высокочастотных колебаний.

Оглавление

Введение	4
1. Построение сглаженных траекторий	6
1.1. Сплайн пятого порядка	6
1.2. Сплайн четвертого порядка	10
2. Построение движения	13
2.1. Макет микроспутника с нежесткими элементами	13
2.2. Уравнения движения	14
3. Моделирование движения	16
3.1. Непрерывное управление	16
3.2. Гладкое управление	18
3.3. Сравнение возникаемых колебаний	20
Заключение	21
Список использованных источников	22

Введение

В настоящее время космические аппараты с нежесткими элементами конструкции широко применяются для решения большого количества прикладных задач. К такому классу аппаратов относятся, например, спутники связи с антеннами большого размера, спутники, оснащенные солнечным парусом или роботизированными манипуляторами. В следствие значительной протяженности нежестких элементов в процессе орбитального и углового маневрирования в них неизбежно возникновение колебаний, которые могут значительно ухудшить точность ориентации всего аппарата или даже привести к потере устойчивости движения. [1] Обычно, гашение низкочастотных колебаний происходит при помощи различных демпфирующих устройств, закрепленных непосредственно на нежестком элементе. Значительный практический интерес представляет задача управления аппаратом только при помощи устройств, расположенных на теле спутника. В [2] показано, что условием отсутствия возбуждения колебаний является гладкость управляющего воздействия. Один из способов получения гладкого управления – построение траектории достаточной степени гладкости, по которой осуществляется движение космического аппарата. Так как координаты центра масс определяются путем интегрирования управления по времени дважды, то, из требования гладкости управления следует требование непрерывности третьей производной во всех точках траектории. Таким образом, следует необходимость поиска траектории в классе C^3 . Способы получения таких траекторий различны. Например, метод корректировки опорных точек, рассмотренный в [3], применение полярных полиномов [4] и сплайны. В данной работе рассматривается способ построения сглаженных траекторий в виде сплайна порядка гладкости C^3 с целью получения гладкого управляющего воздействия из C^1 . Для этого, как было упомянуто ранее, необходимо обеспечить непрерывность третьей производной траектории. Это приводит

к необходимости использования сплайна четвертой степени. Однако, как показано в первой главе данной работы, для того, чтобы удовлетворить всем ограничениям, наложенным на данную траекторию, недостаточно рассматривать сплайн четвертой степени, что приводит к необходимости добавления двух интерполяционных полиномов пятой степени. С целью лучшего поведения спутника в окрестностях начальной и конечной точек траектории, будем задавать крайние сегменты траектории в виде полиномов пятой степени. Также в работе рассматривается задача построения траектории с целью определения непрерывного управляющего воздействия. Для получения непрерывного управления достаточно потребовать непрерывности второй производной траектории. Это позволяет понизить порядок искомого сплайна до четвертого. Тогда, внутренние сегменты сплайна будем искать в виде кубических полиномов, а первый и последний сегмент как полином четвертой степени. Осуществленно моделирование движения микроспутника при различных режимах управления. Моделирование проводилось на основе макета COSMOS [7]. Уравнения движения макета получены в [6].

В работе приведено сравнение возникаемых колебаний при различном порядке гладкости траектории движения макета.

1. Построение сглаженных траекторий

1.1. Сплайн пятого порядка

Для построения гладкого управления построим сглаженную траекторию в виде сплайна четвертого порядка с целью обеспечить непрерывность третьей производной траектории по времени во внутренних точках. Из рассуждений, приведенных ранее, вытекает необходимость поиска крайних сегментов сплайна в виде полинома пятой степени.

Предполагается, что макет проходит через n наперед заданных точек (которые носят название контрольные точки пути или узлы) y_1, y_2, \dots, y_n в соответствующие моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n . Также предполагается, что $0 \leq t_1 < t_2 < \dots \leq t_n$. Тогда, интерполяционные полиномы для искомого сплайна имеют вид:

$$f_1(t) = c_{11} + c_{12}(t-t_1) + c_{13}(t-t_1)^2 + c_{14}(t-t_1)^3 + c_{15}(t-t_1)^4 + c_{16}(t-t_1)^5, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$f_i(t) = c_{i1} + c_{i2}(t-t_i) + c_{i3}(t-t_i)^2 + c_{i4}(t-t_i)^3 + c_{i5}(t-t_i)^4, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$f_{n-1}(t) = c_{n-11} + c_{n-12}(t-t_{n-1}) + c_{n-13}(t-t_{n-1})^2 + c_{n-14}(t-t_{n-1})^3 + c_{n-15}(t-t_{n-1})^4 + c_{n-16}(t-t_{n-1})^5, \quad t \in [t_{n-1}, t_n]$$

Таким образом, задача построения сплайна сводится к нахождению значений коэффициентов $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ij}$, $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, 6$. С учетом требований к рассматриваемой траектории, получаем, что необходимо определить $12 + 5(n-3) = 5n - 3$ коэффициентов. Для этого необходимо задать $5n - 3$ условий на интерполяционный сплайн.

Во-первых, потребуем равенства значений каждого интерполяционного полинома во всех контрольных точках:

$$f_i(t_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$f_i(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2)$$

Далее, потребуем равенства первой, второй и третьей производных во внутренних узлах траектории:

$$f'_i(t_{i+1}) = f'_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3)$$

$$f''_i(t_{i+1}) = f''_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (4)$$

$$f'''_i(t_{i+1}) = f'''_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (5)$$

Таким образом, получили $3(n - 2) + 2(n - 1) = 5n - 8$ условий на рассматриваемый сплайн. Необходимо добавить 5 условий для того, чтобы полученная система уравнений была разрешима относительно значений коэффициентов каждого интерполяционного полинома. Для этого, с учетом специфики рассматриваемой задачи, зададим условия в крайних узлах траектории. Целью стыковки является перевод макета в заданное конечное положение, в котором скорость и ускорение макета будут равны нулю. То есть, $f'_{n-1}(t_n) = 0$, $f''_{n-1}(t_n) = 0$. Так как в задачах стыковки обычно в начальный момент времени макет рассматривается как покоящееся тело, то для того чтобы замкнуть систему уравнений, добавим еще три условия в начальной точке траектории $f'_1(t_1) = 0$, $f''_{n-1}(t_1) = 0$, $f'''_{n-1}(t_1) = 0$. Теперь, имея $5n - 3$ неизвестных и $5n - 3$ уравнений, разрешим эту систему уравнений.

Во-первых, из условия (3) сразу же следует, что $c_{i1} = y_i$, что позволяет исключить из рассматриваемой системы $n - 1$ уравнений и таким образом понизить порядок системы.

Теперь, рассмотрим первый сегмент траектории. Из начальных усло-

Вий $f_1'(t_1) = 0$, $f_{n-1}''(t_1) = 0$, $f_{n-1}'''(t_1) = 0$ следует:

$$\begin{cases} c_{12} = 0 \\ c_{13} = 0 \\ c_{14} = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения: $T_i = t_{i+1} - t_i$, $Y_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ Из условий (2) ~ (5) для первого сегмента следует, что:

$$\begin{cases} c_{15}T_1^4 + c_{16}T_1^5 = Y_1 \\ 4c_{15}T_1^3 + 5c_{16}T_1^4 = c_{22} \\ 4c_{14}T_1^2 + 10c_{16}T_1^3 = c_{23} \\ 4c_{14}T_1 + 10c_{16}T_1^2 = c_{24} \end{cases}$$

Теперь рассмотрим внутренние сегменты траектории. Для них

$$\begin{cases} c_{i2}T_i + c_{i3}T_i^2 + c_{i4}T_i^3 + c_{i5}T_i^4 = Y_i \\ c_{i2} + 2c_{i3}T_i + 3c_{i4}T_i^2 + 4c_{i5}T_i^3 = c_{i2} \\ c_{i3} + 3c_{i4}T_i + 6c_{i6}T_i^2 = c_{i3} \\ c_{i4} + 4c_{i6}T_i = c_{i4} \end{cases}$$

Для последнего сегмента траектории уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} c_{n-12}T_{n-1} + c_{n-13}T_{n-1}^2 + c_{n-14}T_{n-1}^3 + c_{n-15}T_{n-1}^4 + c_{n-16}T_{n-1}^5 = Y_{n-1} \\ c_{n-12} + 2c_{n-13}T_{n-1} + 3c_{n-14}T_{n-1}^2 + 4c_{n-15}T_{n-1}^3 + 5c_{n-16}T_{n-1}^4 = 0 \\ c_{n-13} + 3c_{n-14}T_{n-1} + 6c_{n-16}T_{n-1}^2 + 10c_{n-16}T_{n-1}^3 = 0 \end{cases}$$

В матричном виде уравнение для коэффициентов интерполяционных поли-

контрольные точки в виде сплайна, у которого крайние сегменты являются полиномами пятой степени, а все внутренние сегменты – полиномы четвертой степени. Построено соответствующее управление.

1.2. Сплайн четвертого порядка

Для построения непрерывного управления интерполируем контрольные точки траектории сплайном четвертого порядка. Внутренние сегменты – полиномы третьей степени, крайние – четвертой. По аналогии со сплайном пятого порядка, сегменты траектории определяются как:

$$f_1(t) = c_{11} + c_{12}(t - t_1) + c_{13}(t - t_1)^2 + c_{14}(t - t_1)^3 + c_{15}(t - t_1)^4, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$f_i(t) = c_{i1} + c_{i2}(t - t_i) + c_{i3}(t - t_i)^2 + c_{i4}(t - t_i)^3, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$f_{n-1}(t) = c_{n-11} + c_{n-12}(t - t_{n-1}) + c_{n-13}(t - t_{n-1})^2 + c_{n-14}(t - t_{n-1})^3 + c_{n-15}(t - t_{n-1})^4, \quad t \in [t_{n-1}, t_n]$$

Необходимо определить $10 + 4(n - 3) = 4n - 2$ коэффициент интерполяционных полиномов. необходимо задать $4n - 2$ условия на сплайн. Аналогично предыдущему параграфу, потребуем равенство значений в узлах траектории, равенство первой и вторых производных. В крайних точках траектории потребуем равенство нулю первых и вторых производных сплайна.

$$f_i(t_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (6)$$

$$f_i(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (7)$$

$$f'_i(t_{i+1}) = f'_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (8)$$

$$f''_i(t_{i+1}) = f''_{i+1}(t_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (9)$$

$$f'_1(t_1) = 0, \quad f''_1(t_1) = 0, \quad f'_{n-1}(t_n) = 0, \quad f''_{n-1}(t_n) = 0 \quad (10)$$

Имеем $2(n-1) + 2(n-2) + 4 = 4n - 2$ условия, следовательно, система замкнута относительно коэффициентов интерполяционных полиномов.

Аналогично, из условия (6) сразу следует, что $c_{i1} = y_i$. Для первого сегмента траектории из начальных условий $f_1'(t_1) = 0$, $f_1''(t_1) = 0$ следует:

$$\begin{cases} c_{12} = 0 \\ c_{13} = 0 \end{cases}$$

Из условий (6) ~ (9) для первого сегмента следует, что:

$$\begin{cases} c_{14}T_1^3 + c_{15}T_1^4 = Y_1 \\ 3c_{14}T_1^2 + 4c_{15}T_1^3 = c_{22} \\ 3c_{14}T_1 + 6c_{15}T_1^2 = c_{23} \end{cases}$$

Для внутренних сегментов:

$$\begin{cases} c_{i2}T_i + c_{i3}T_i^2 + c_{i4}T_i^3 = Y_i \\ c_{i2} + 2c_{i3}T_i + 3c_{i4}T_i^2 = c_{i2} \\ c_{i3} + 3c_{i4}T_i = c_{i3} \end{cases}$$

Для последнего сегмента траектории уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} c_{n-12}T_{n-1} + c_{n-13}T_{n-1}^2 + c_{n-14}T_{n-1}^3 + c_{n-15}T_{n-1}^4 = Y_{n-1} \\ c_{n-12} + 2c_{n-13}T_{n-1} + 3c_{n-14}T_{n-1}^2 + 4c_{n-15}T_{n-1}^3 = 0 \\ c_{n-13} + 3c_{n-14}T_{n-1} + 6c_{n-16}T_{n-1}^2 = 0 \end{cases}$$

В матричном виде уравнение для коэффициентов интерполяционных поли-

2. Построение движения

2.1. Макет микроспутника с нежесткими элементами

Тело макета представляет собой восьмиугольную призму с радиусом описанной окружности 15 см и высотой 40 см. Масса всего макета составляет 5.2 кг. Нежесткие элементы идентичны и расположены симметрично относительно тела макета. Масса каждого стержня составляет 0.3 кг. Длина каждого стержня – 1.2 м.

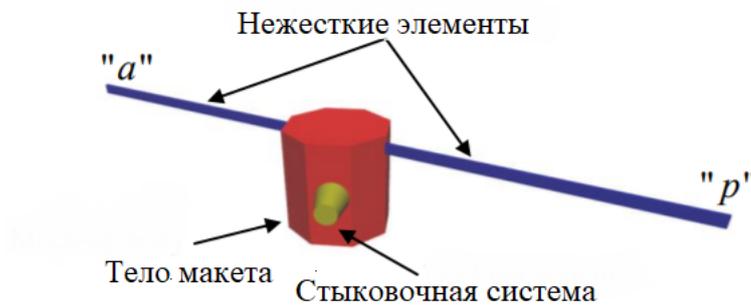


Рисунок 1 – Макет микроспутника с нежесткими элементами

2.2. Уравнения движения

Уравнения движения получены в [5]. Приведем их ниже без вывода:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (11)$$

где \mathbf{x} - вектор состояния макета, его вид: $\mathbf{x} = [x \ y \ \varphi \ q_a \ q_p \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\varphi} \ \dot{q}_a \ \dot{q}_p]^T$,

где x, y - горизонтальная и вертикальная координаты центра масс всего макета, φ - угол между осью макета и горизонтальную, в рассматриваемой задаче выбран таким образом, что $\varphi(0) = 0$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & \mathbf{E}_{5 \times 5} \\ 0_{2 \times 5} & 0_{2 \times 5} \\ [0_{3 \times 2} \ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_f] & 0_{3 \times 5} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 3} \\ [\mathbf{E}_{2 \times 2} \ O_{2 \times 1}] \\ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}_f, \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ T_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} J & S_w & S_w \\ S_w & (1 - \frac{A^2}{m}) & \frac{A^2}{m} \\ S_w & \frac{A^2}{m} & (1 - \frac{A^2}{m}) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{A_1}{m} & -\frac{A_2}{m} & 0 \\ \frac{A_1}{m} & \frac{A_2}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega \end{bmatrix}$$

Где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ - вектор смещения нежестких элементов, $A = A_1^2 + A_2^2$,

$\dot{\varphi}$ - угловая скорость макета, q_a, q_p - амплитуды колебаний соответствующего нежесткого элемента, J - момент инерции тела макета, S_w - некоторый "относительный" момент инерции нежестких элементов, Ω - квадрат собственных частот колебаний, m - масса всего макета. Также, учитывая, что

$\mathbf{r} = [x, y]^T$, добавим еще одно уравнение

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r} + \frac{1}{m} \mathbf{A}(q_p - q_a)$$

Это выражение определяет координаты центра масс тела макета, которые используются при моделировании движения. Интегрируя уравнение (11), определим движение макета.

3. Моделирование движения

При моделировании движения макета использованы следующие величины: $m = 5.2$ кг – масса всего макета, $L = 1.2$ м – длина стержней, моделирующих нежесткие элементы конструкции (антенну и солнечную панель), $J = 0.15$ кг · м², $\mathbf{A} = [0.001 \ 0.15]^T$ – вектор смещений стержней, $\omega_0 = 0.1$ Гц – главная собственная частота. Контрольные точки заданы следующими величинами: $X = [2 \ 1.65 \ 1.15 \ 0.7 \ 0]$, $Y = [1.5 \ 1.155 \ 0.45 \ 0.25 \ 0]$, $\varphi = [0 \ 30 \ 45 \ 60 \ 90]$ в соответствующие моменты времени $t = [0 \ 50 \ 100 \ 150 \ 200]$ Вектор состояния в начальный момент времени имеет вид: $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

3.1. Непрерывное управление

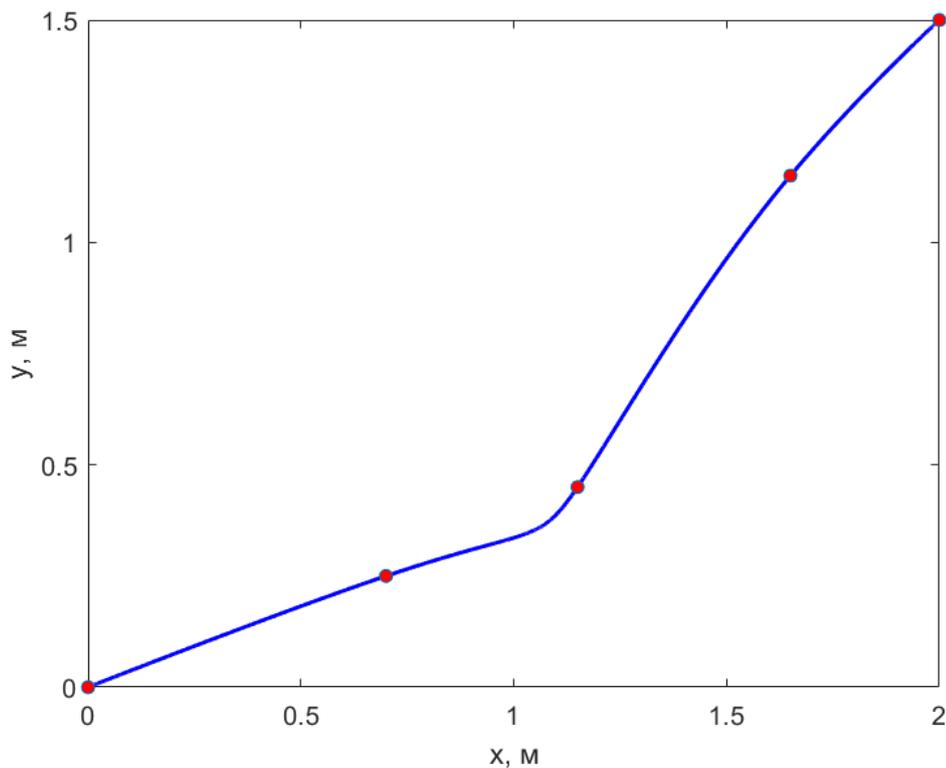


Рисунок 2 – Траектория, сглаженная сплайном 4 порядка.

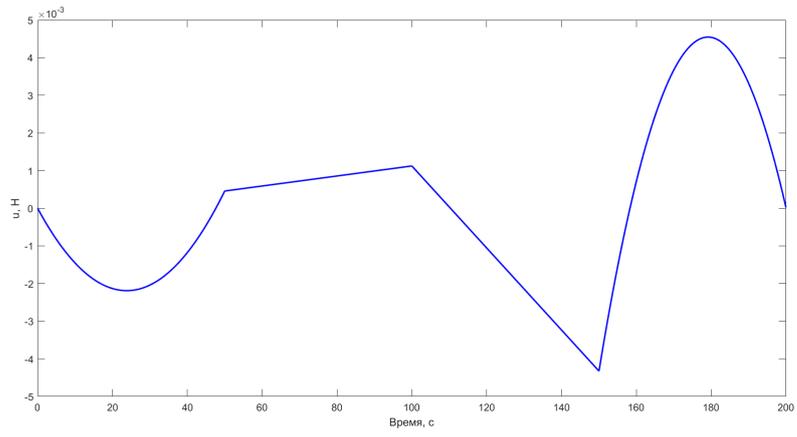


Рисунок 3 – Управление по оси X.

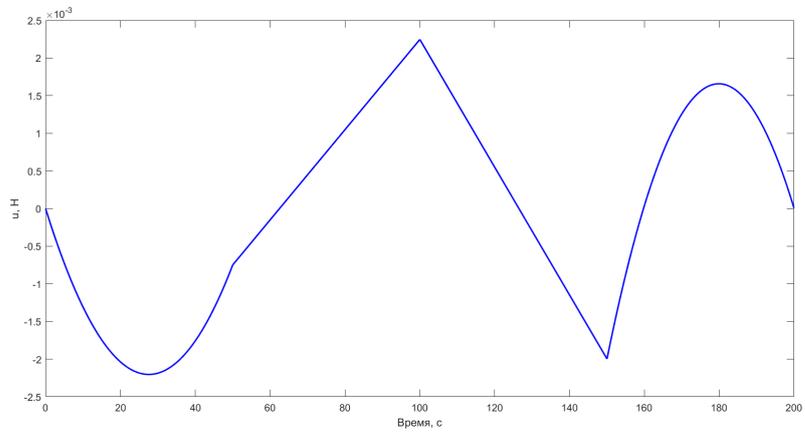


Рисунок 4 – Управление по оси Y.

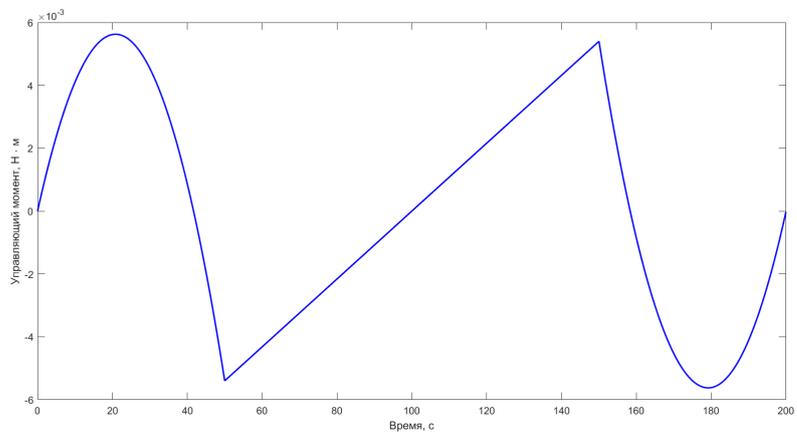


Рисунок 5 – Управление угловым движением макета.

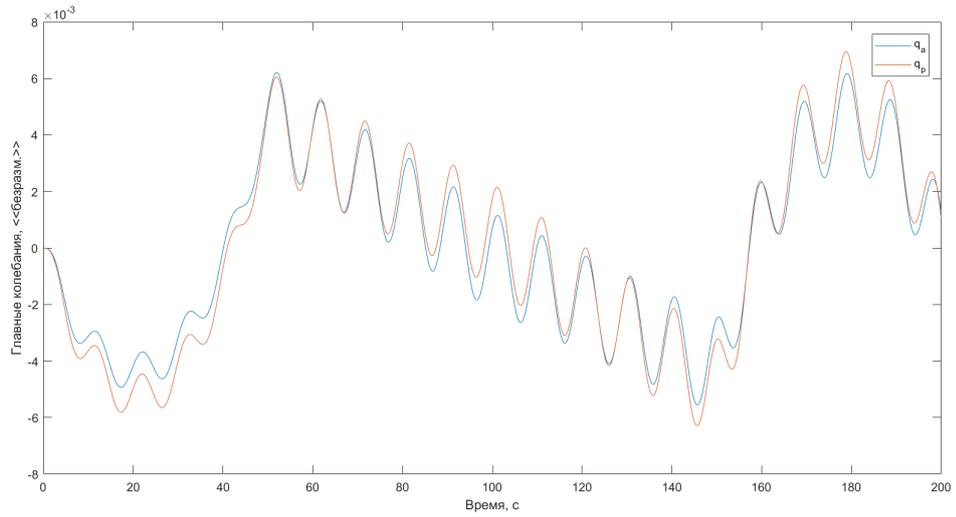


Рисунок 6 – Зависимость главных колебаний от времени.

3.2. Гладкое управление

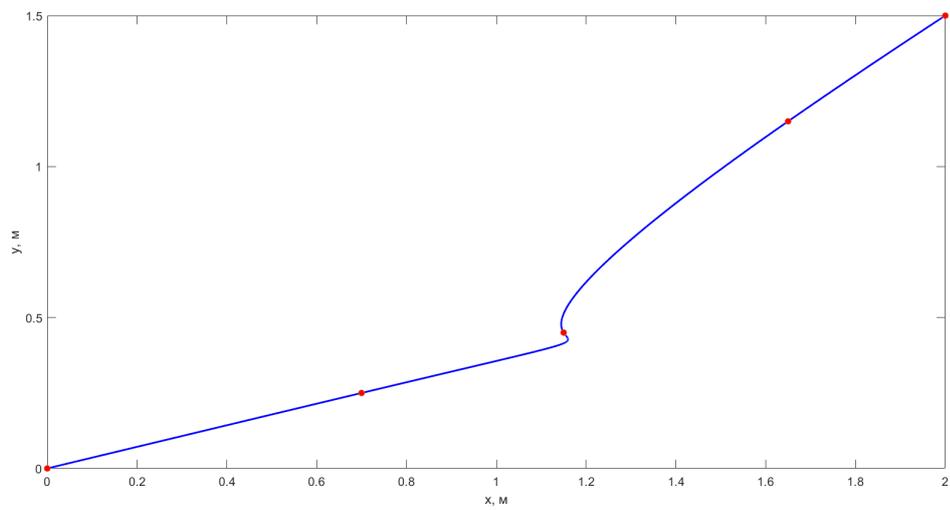


Рисунок 7 – Траектория, сглаженная сплайном пятого порядка.

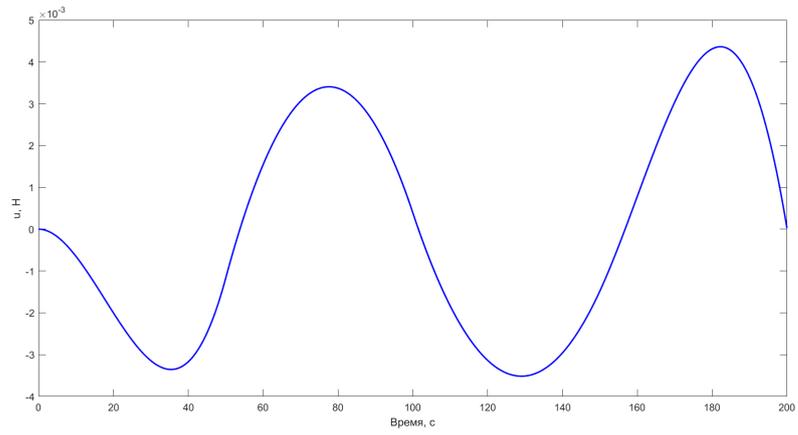


Рисунок 8 – Управление по оси X.

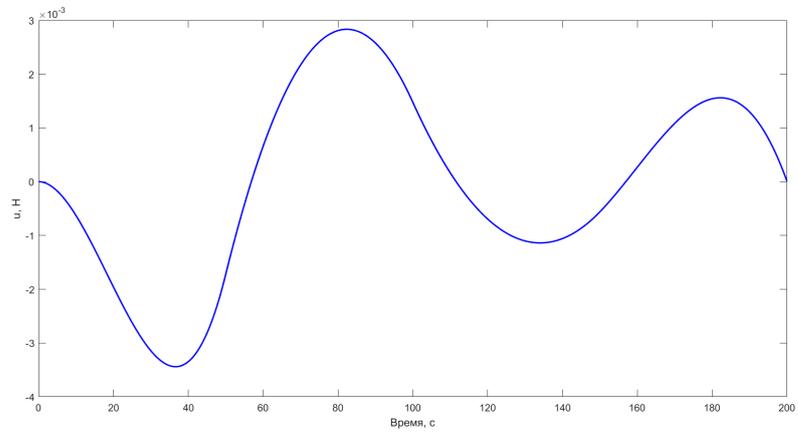


Рисунок 9 – Управление по оси Y.

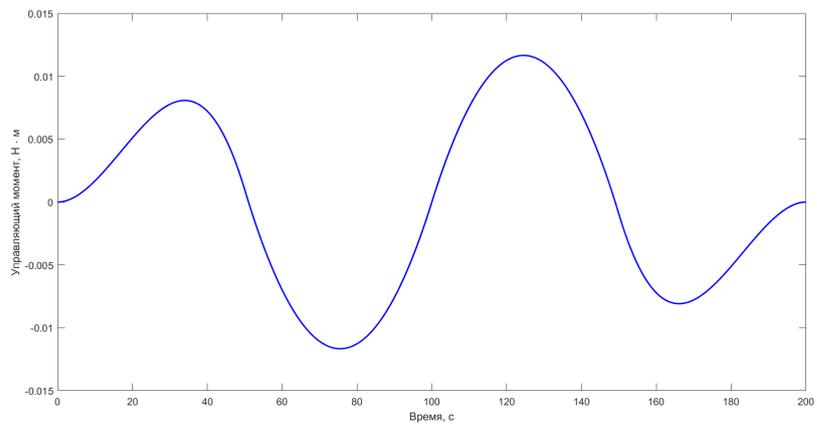


Рисунок 10 – Управление угловым движением макета.

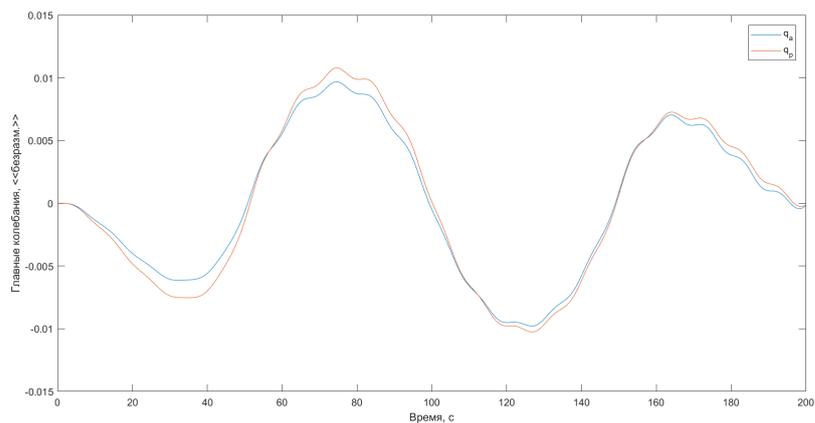


Рисунок 11 – Зависимость главных колебаний от времени.

3.3. Сравнение возникаемых колебаний

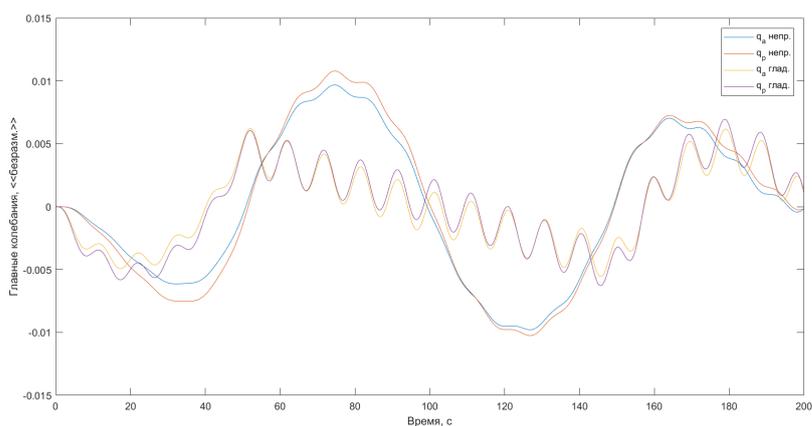


Рисунок 12 – Зависимость главных колебаний от времени.

Как видно из 12, использование непрерывного управления порождает высокочастотные колебания в нежестких элементах. Использование же гладкого управления позволяет избежать появления "плохих" высокочастотных колебаний. Таким образом, задание достаточно гладкой траектории – один из способов добиться невозбуждения высокочастотных колебаний в нежестких элементах конструкции макета.

Заключение

В работе представлены алгоритмы построения сглаженных траекторий в виде сплайнов четвертой и пятой степеней. Проведено моделирование движения макета по данным траекториям. В результате сравнения колебаний в нежестких элементах конструкции сделан вывод о том, что задание траектории более высокого порядка гладкости позволяет осуществлять непрерывное управление, что приводит к невозбуждению высокочастотных колебаний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М., Маркеев А.П., Соколов Б.Н., Шаранюк А.В. *Механика больших космических конструкций*. М.: Факториал, 1997.
- [2] Jae-Jun Kim., Brij N.Agrawal *Experiments on Jerk-Limited Slew Maneuvers of a Flexible Spacecraft*, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit , Keystone, Colorado 21-24 August 2006;
- [3] Gilimyanov R.F., Pesterev A.V., Rapoport L.B *Smoothing curvature of trajectories constructed by noisy measurements in path planning problems for wheeled robots*, J. of Computer and Systems Sciences International, 2008, Vol. 47, No. 5, pp. 812–819.
- [4] Jung D., Tsiotras P. *On-line path generation for unmanned aerial vehicles using B-spline path templates* J. of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, vol. 36, no. 6, pp. 1642–1653.
- [5] Иванов Д.С., Коптев М.Д., Ткачев С.С, Шачков М.О. *Стыковка макетов микроспутников с нежесткими элементами конструкции на аэродинамическом столе*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, №110, 9 с.
- [6] Ткачев С.С, Ролдугин Д.С., Овчинников М.Ю. *Стенд КОСМОС для моделирования движения макетов системы управления микроспутников и обзор мировых аналогов*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, №138, 4 с.
- [7] Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С *Уравнения движения спутника с нежесткими элементами конструкции*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2015, №58, 12 с.

- [8] Yisheng , G., Kazuhito, Y., Olivier, S., Abderrahmane, K. *On Robotic Trajectory Planning Using Polynomial Interpolations*, 2005 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics , Shatin, China, 5-9 July 2005; pp. 111-116.
- [9] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. М.: Физматлит, 2010.