27 июня 2017 года

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Динамика и управление движением космических аппаратов

Методы решения задачи Ламберта и их сравнительный анализ

М.С. Беликова, студентка 4 курса ФУПМ

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., М.Г. Широбоков

Содержание

- Постановка задачи Ламберта
- Теорема Ламберта
- История исследований
- Методы Бэйта, Гудинга и Иццо
- Анализ работы методов
- Оценка времени работы программ

Постановка задачи Ламберта

Дано: 1. начальное $\boldsymbol{r_0}$ и конечное $\boldsymbol{r_1}$ положения КА

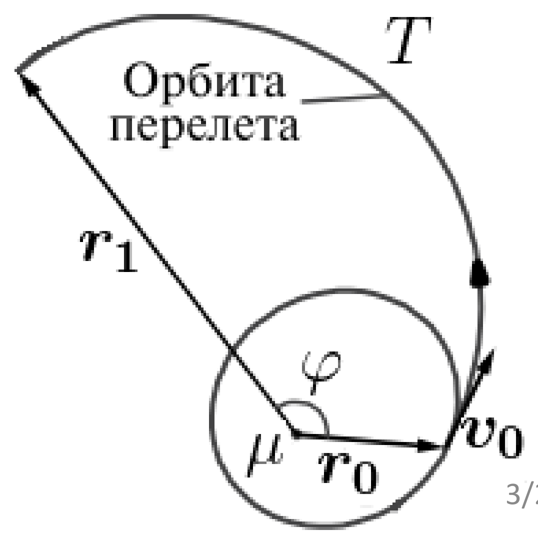
2. направление перелета

3. количество m полных витков вокруг центрального тела

4. время перелета $T = (t_1 - t_0)$

Найти траекторию перелета, удовлетворяющую заданным условиям

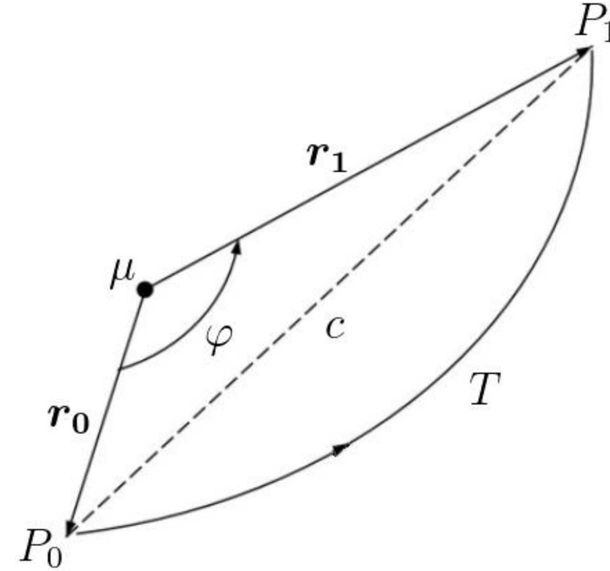
$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r_0} \\ \boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r_1} \end{cases}$$



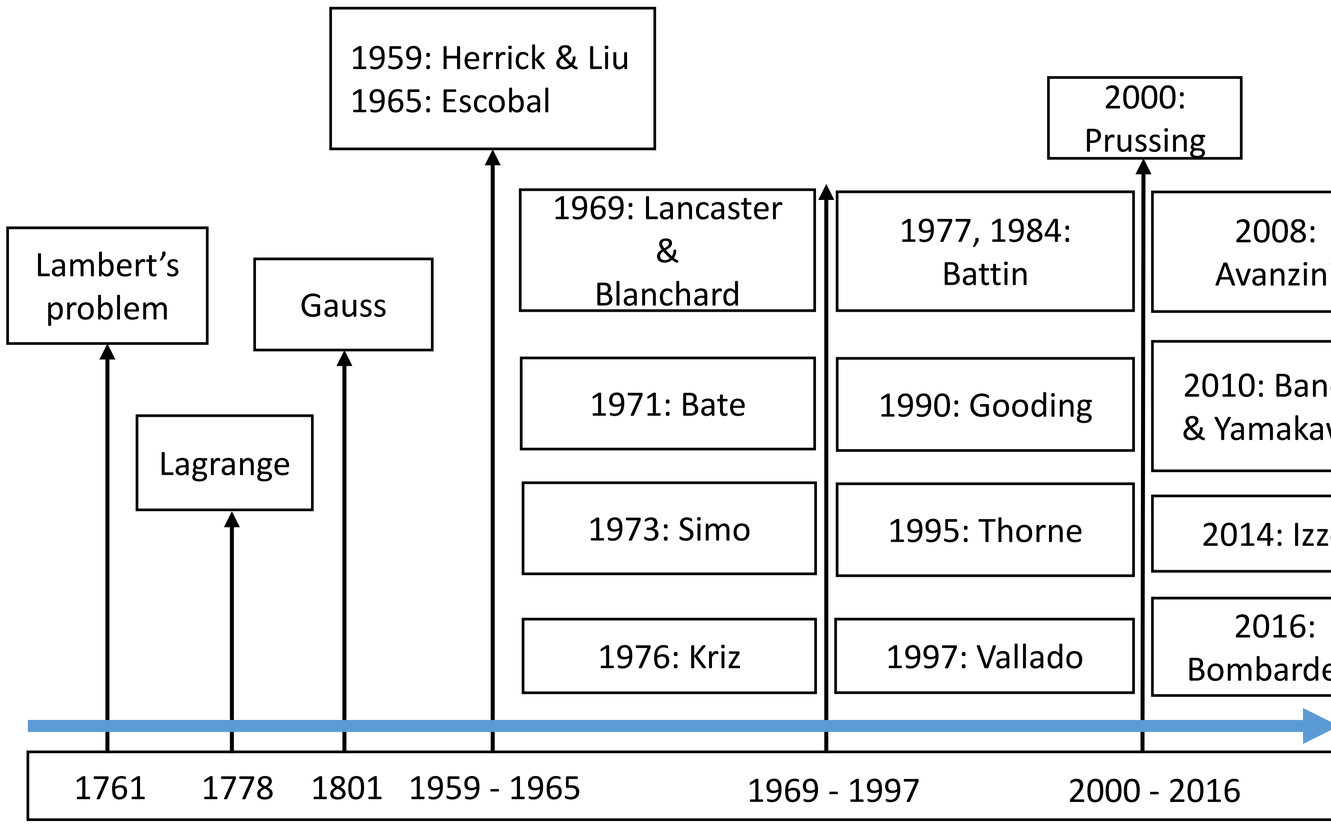
Теорема Ламберта

Время перелета T между заданными точками есть функция большой полуоси a, суммы расстояний $r_0 + r_1$ от притягивающего центра до начальной и конечной точек и длины хорды c, их соединяющей

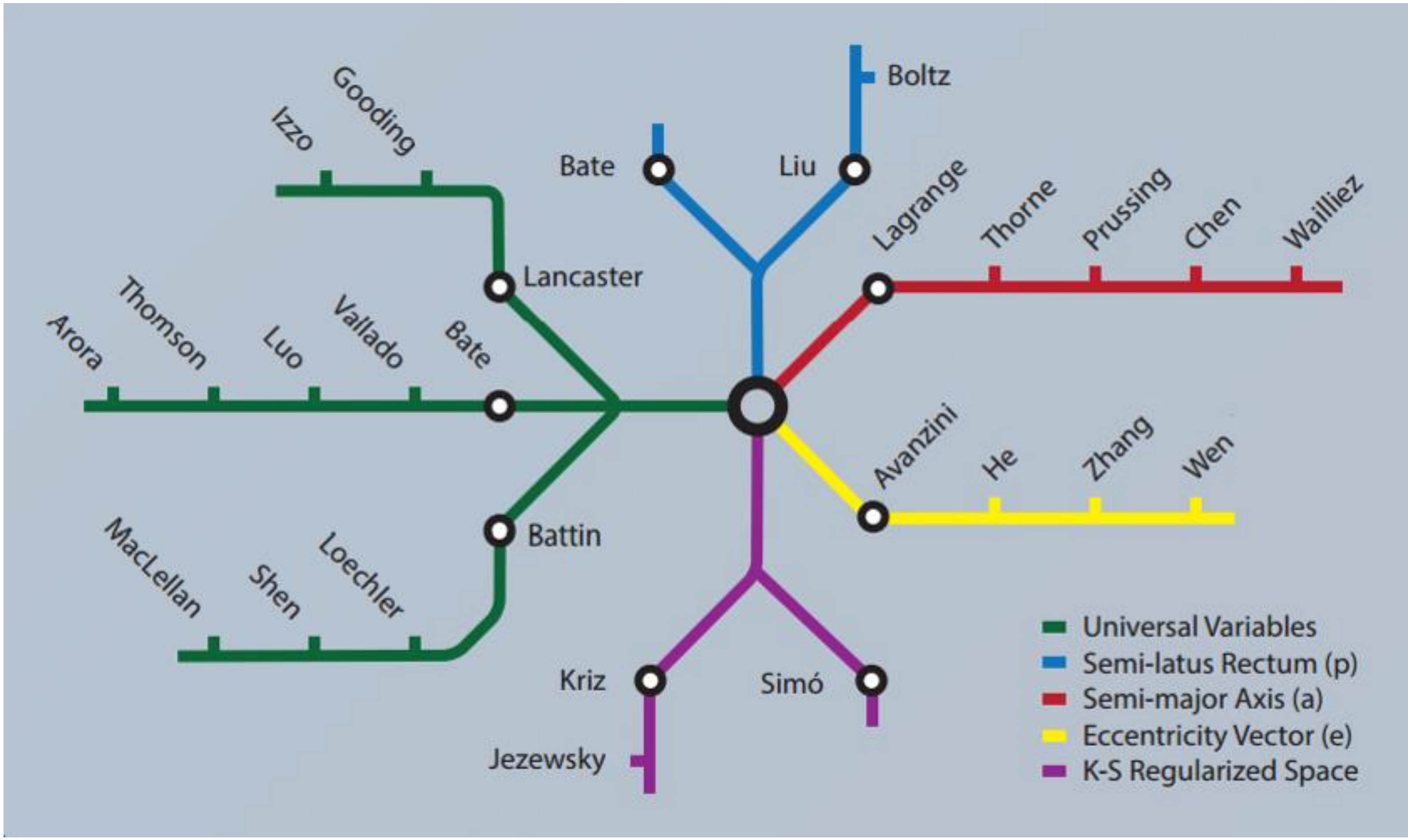
$$T = T(a, r_0 + r_1, c)$$



История исследований задачи Ламберта



Различные подходы к решению задачи Ламберта[1]



[1]Sangra D., Fantino E., «Review of Lambert's problem».
25th International Symposium on Space Flight Dynamics ISSFD , Oct. 2015.

Класс методов универсальной переменной[1,2,3]

	Области сходимости	Скорость работы
Метод Бэйта (1971)	❌Не желательно использовать для гиперболических орбит и больших значений угловой дальности	✓ Высокая
Метод Гудинга (1990)	✓ Нет ограничений	✓ Высокая
Метод Иццо (2010)	❌Возможны неудачи при больших значениях числа витков	✓ Очень высокая

[1]Wagner S.A., «Automated trajectory design for impulsive and low thrust interplanetary mission analysis» (2014). Graduate Theses and Dissertations. Iowa State University.
[2]Sangra D., Fantino E., «Review of Lambert's problem». *25th International Symposium on Space Flight Dynamics ISSFD* , Oct. 2015.
[3]Izzo, D. ESA Advanced Concepts team. Code used available in MGA.M, on http://www.esa.int/gsp/ACT/inf/op/globopt.htm. Last retreived Nov, 2009.

Процедура решения задачи Ламберта

1. Вычисление необходимых параметров, определяемых входными данными
2. Выбор начального приближения для переменной x
3. Итерационное решение уравнения времени перелета

   Расчеты продолжаются до тех пор, пока для некоторого n не будет выполнено $\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| < \varepsilon$

   или пока не превышено максимальное число итераций
4. Вычисление векторов скоростей в начале и конце перелета

Метод Бэйта

s - универсальная переменная: $\dot{s} = \dfrac{1}{r}$

$$\chi_0 = \sqrt{\mu} s$$

$$x = -hs^2; \quad c_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!}$$ функции Штумпфа

$$\begin{cases} \boldsymbol{r_1} = f\boldsymbol{r_0} + g\boldsymbol{v_0} \\ \boldsymbol{v_1} = \dot{f}\boldsymbol{r_0} + \dot{g}\boldsymbol{v_0} \end{cases}$$

$$f = 1 - \frac{\chi_0}{r_0} c_2 \qquad g = T - \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}} c_3$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_0 r_1} \chi_0 (x c_3 - 1) \qquad \dot{g} = 1 - \frac{\chi_0^2}{r_1} c_2$$

$$y \equiv \frac{r_0 r_1 (1 - \cos\varphi)}{p}, \quad A \equiv \frac{\sqrt{r_1 r_0} \sin\varphi}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}$$

$$F(x) = T - \frac{\chi_0^3}{\sqrt{\mu}} c_3(x) - \frac{A\sqrt{y(x)}}{\sqrt{\mu}} = 0$$

Метод Гудинга

$$\begin{cases} \cos\frac{(\alpha+\beta)}{2} = e\cos\frac{E_0+E_1}{2}, 0 \le \alpha+\beta \le 2\pi \\ \alpha-\beta = E_1 - E_0 - 2m\pi, 0 \le \alpha-\beta \le 2\pi \end{cases}$$

Уравнения Ламберта для эллиптического движения:

$$\begin{cases} T\sin^3(\frac{\alpha}{2}) = 2\pi m + \alpha - \beta - \sin(\alpha) + \sin(\beta) \\ \sin(\frac{\beta}{2}) = q\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{cases}$$

$$-\pi \le \beta \le \pi; 0 \le \alpha \le 2\pi$$

$$T = (t_2 - t_1)\sqrt{\frac{\mu}{(\frac{s}{2})^3}}$$ Безразмерное время перелета

Замена

$$x = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow F(x) = T - \frac{2}{U(x)}(x - qz(x) - d(x)) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2F_nF'_n}{2(F'_n)^2 - F_nF''_n}$$ итерационная схема Хэлли

Метод Иццо

$$F(x) = T - \frac{2}{U(x)}(x - qz(x) - d(x)) = 0$$

$$F'(x_0) \approx \frac{0 - F(x_1)}{x_0 - x_1} \approx \frac{F(x_2) - 0}{x_2 - x_0}$$

$$x_0 \approx \frac{x_1 F(x_2) - x_2 F(x_1)}{F(x_2) - F(x_1)}$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{x_1^{(n)} F(x_2^{(n)}) - x_2^{(n)} F(x_1^{(n)})}{F(x_2^{(n)}) - F(x_1^{(n)})}$$

$$x_1^{(n+1)} = x_2^{(n)}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$x_1^{(0)} = x_1; x_2^{(0)} = x_2$$

Постановка задачи

Оценить области сходимости и эффективность каждого метода отдельно для случаев безвитковых и многовитковых перелетов

Система единиц:

$R_0 = 6378.1$ км – единица расстояния

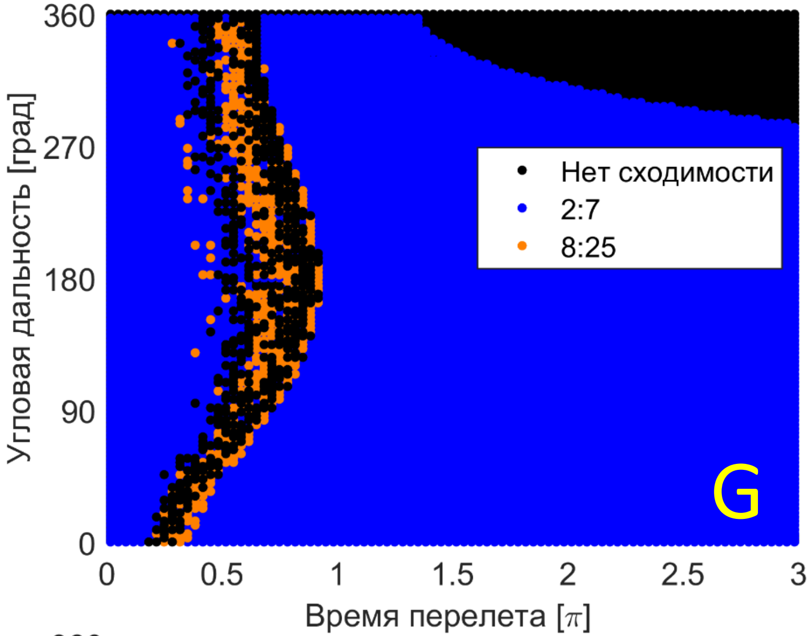
$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}} \approx 7.9$ км/ с – единица скорости

$T_0 = \frac{R_0}{V_0} \approx 806.8$ с – единица времени

Параметры вычислительной машины

- Параметры компьютера: операционная система Windows 10
- Процессор Intel® Core ™ i3 – 3120M,
- Тактовая частота 2.5 ГГц
- Оперативная память 6.0 ГБ
- Расчеты были проведены в среде Microsoft Visual Studio Community 2015 на языке C
- Генерация начальных данных и отрисовка проведены в среде MATLAB R2015a

Области сходимости при фиксированном отношении длин радиус-векторов

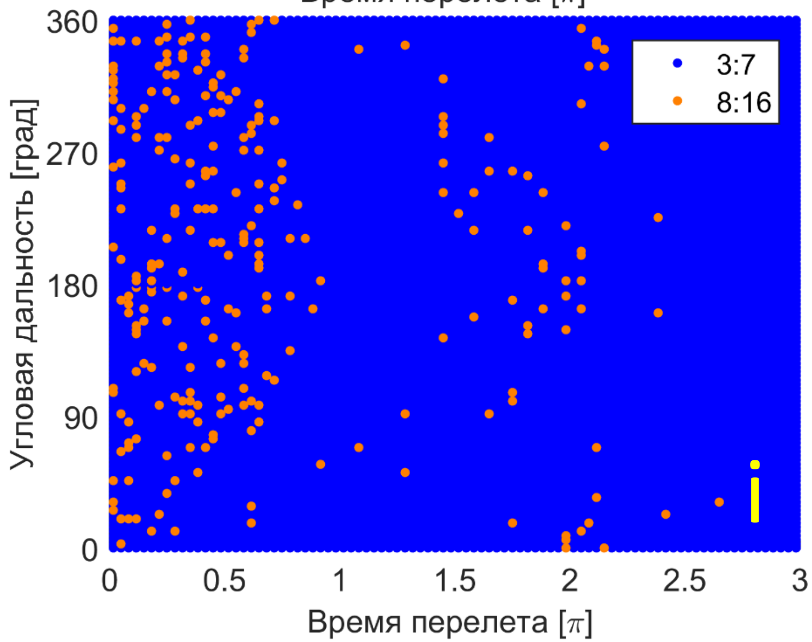


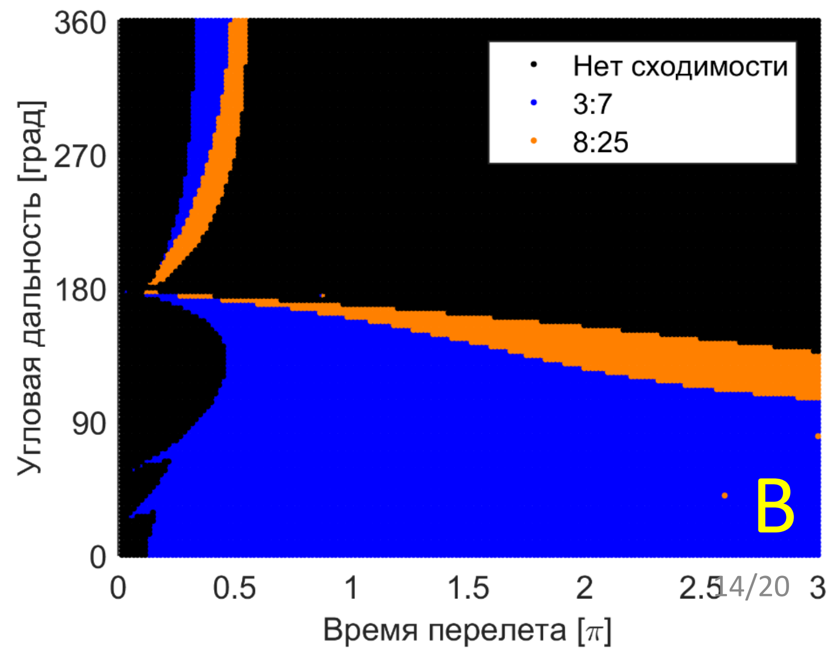
Параметры задачи:

1) $\boldsymbol{r_0} = [1.1; 0.05; 0]$
2) $r_1/r_0 = 2$
3) Количество витков $m = 0$

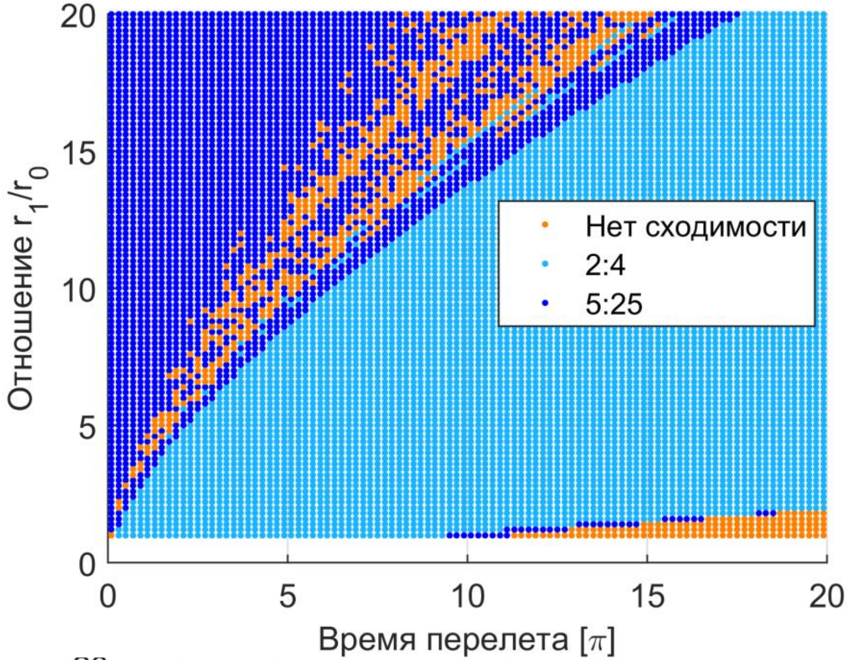
Варьируемые параметры:

1) $T = (\pi/60 : \pi/60 : 3\pi)$
2) $\varphi = (0 : 0.05 : 2\pi)$





Эффективность методов при фиксированной угловой дальности

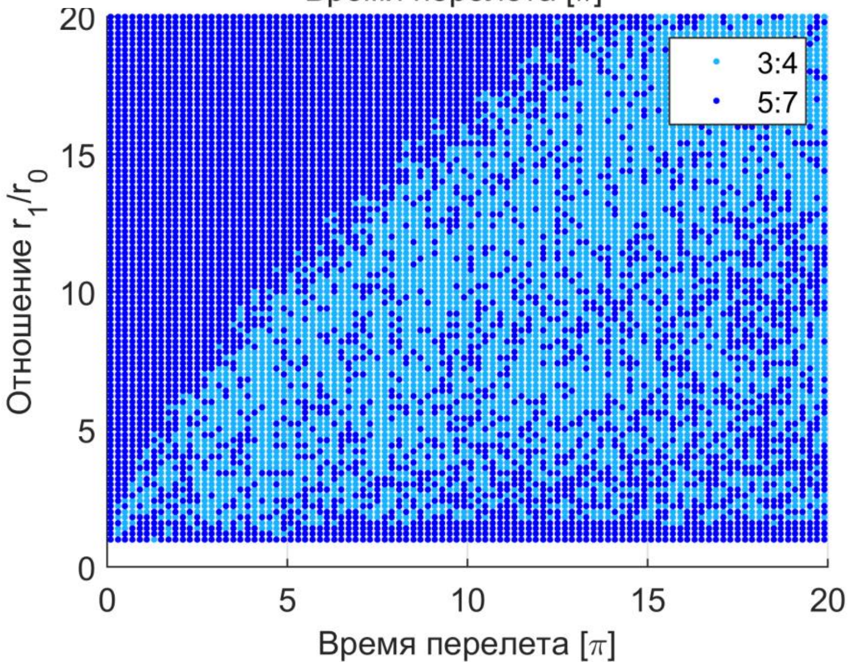


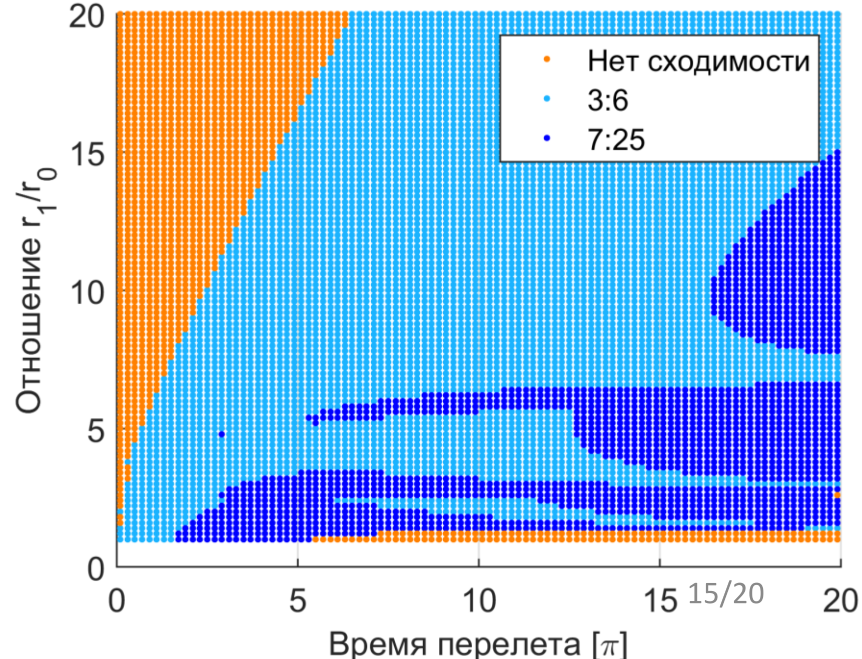
Параметры задачи:

1) $\boldsymbol{r_0} = [1.1; 0.05; 0]$
2) $\varphi = \pi/6$
3) Количество витков $m = 0$

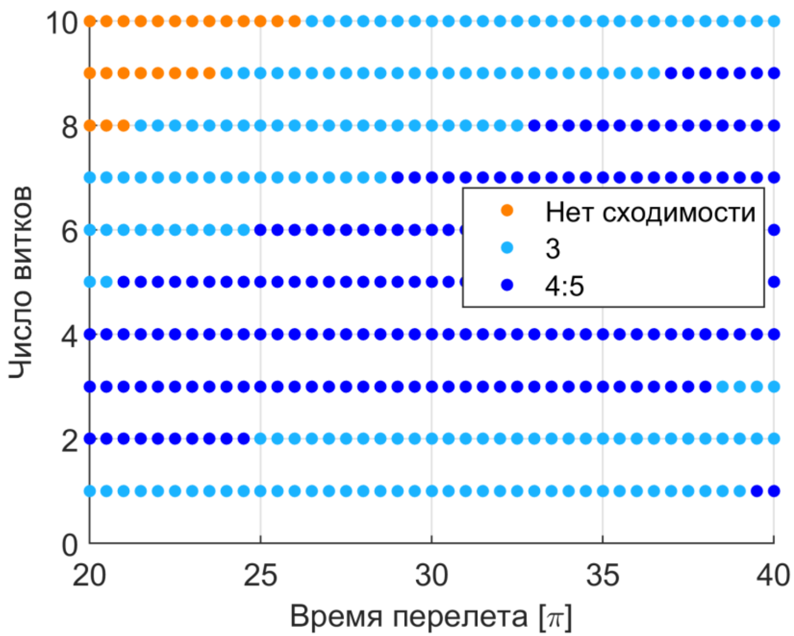
Варьируемые параметры:

1) $T = (\pi/10 : \pi/5 : 20\pi)$
2) $r_1/r_0 = (1 : 0.2 : 20)$





Многовитковый случай

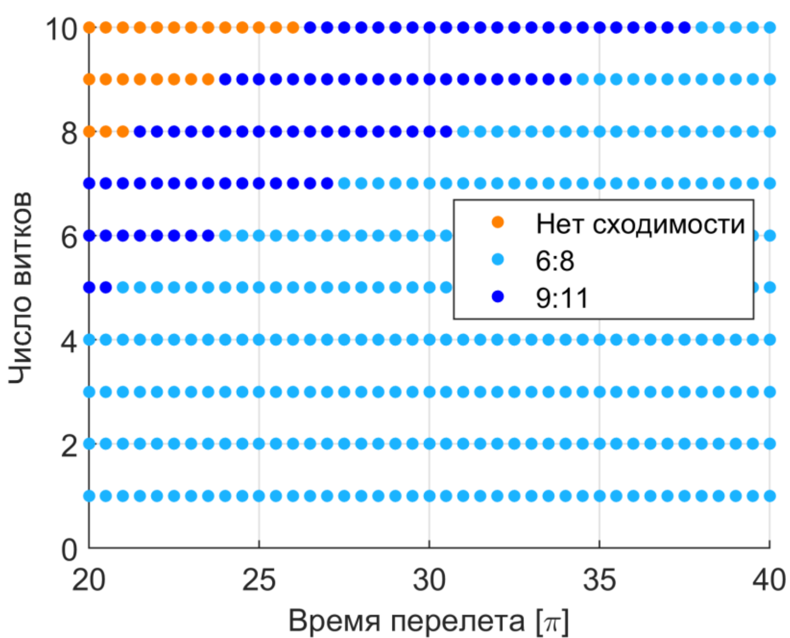


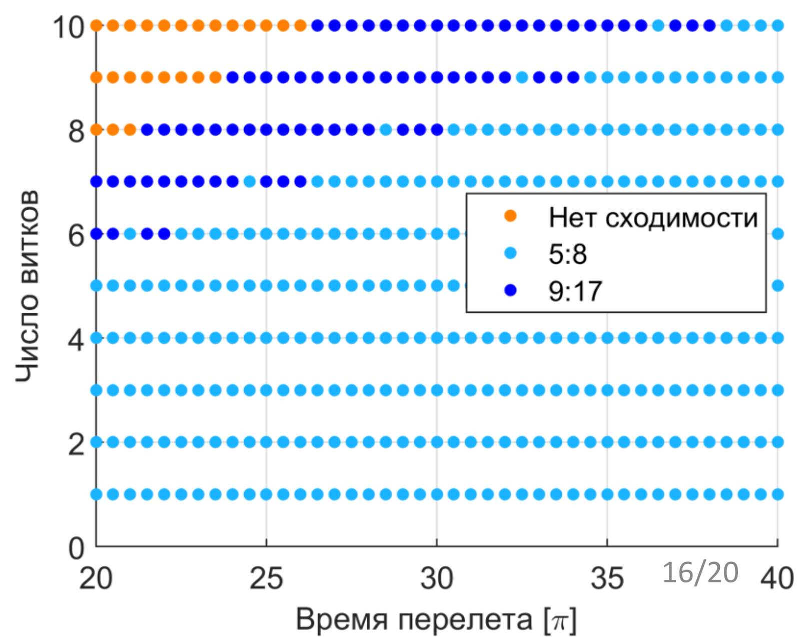
Параметры задачи:

1) $\boldsymbol{r_0} = [1.1; 0.05; 0]$
2) $r_1/r_0 = 2$
3) $\varphi = \pi/6$

Варьируемые параметры:

1) $m = 1 : 10$
2) $T = (20\pi : \pi/2 : 40\pi)$





Сравнительная характеристика

	Области сходимости	Эффективность
Метод Бэйта	✗ Расходится при больших значениях угловой дальности	✓ Средняя (6 - 7 итераций)
Метод Гудинга	✗ Есть небольшие области расходимости	✓ Высокая (3 - 5 итераций)
Метод Иццо	✓ Нет ограничений	✓ Средняя (6 - 7 итераций)

Характерное время работы методов, в секундах

	Intel® Core™ i3	К-100 (последовательно)	К-100 (параллельно)
Метод Гудинга	1.092 ± 0.023	✓ 0.145 ± 0.002	✓ 0.068 ± 0.026
Метод Иццо	✓ 0.547 ± 0.015	0.233 ± 0.002	0.093 ± 0.028
Метод Бэйта	0.811 ± 0.012	0.292 ± 0.002	0.126 ± 0.041

Заключение

- Проведен обзор известных методов решения задачи Ламберта. Обзор показал, что наиболее эффективными методами являются методы универсальной переменной. Из них были рассмотрены методы Бэйта, Гудинга и Иццо
- Определены области сходимости методов. Наибольшая область сходимости у метода Иццо, наименьшая – у метода Бэйта. С точки зрения количества итераций наиболее эффективен метод Гудинга
- Произведена оценка времени работы методов на персональном компьютере и на многопроцессорной вычислительной машине К-100. Самым быстрым на К-100 оказался метод Гудинга

Апробация работы

Беликова М.С., Широбоков М.Г. «Методы решения задачи Ламберта» // Труды 59-й научной конференции МФТИ с международным участием, Москва--Долгопрудный--Жуковский, 21-26 ноября 2016 года.

Беликова М.С. «Методы решения задачи Ламберта и их сравнительный анализ» // Семинар кафедры математического моделирования и прикладной математики, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 15 мая 2017 года

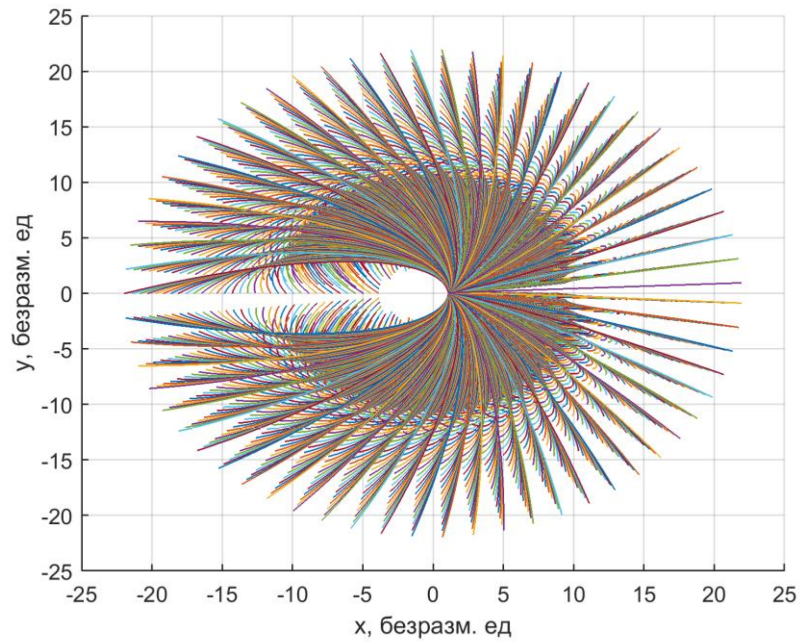
Спасибо за внимание!

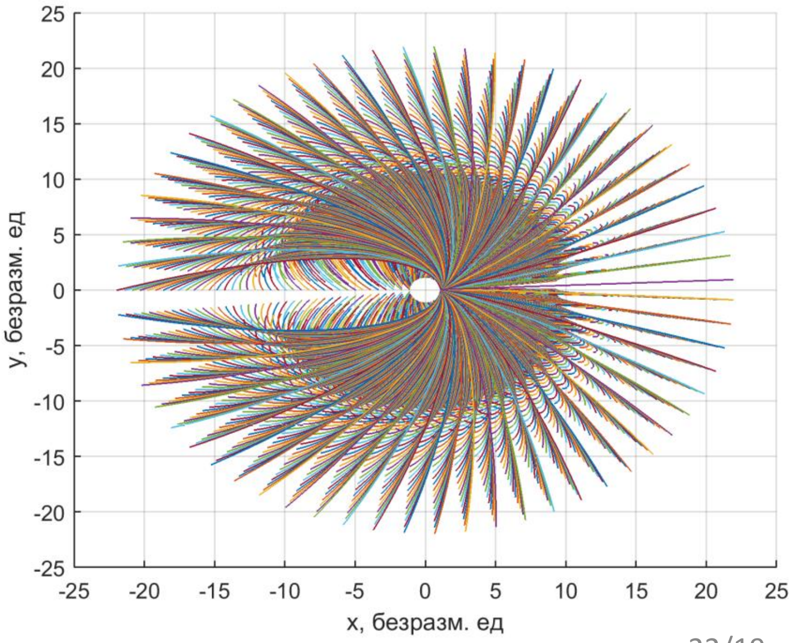
Демонстрация работы методов Гудинга и Иццо

Параметры задачи:

1) $\boldsymbol{r_0} = [1.1; 0.05; 0]$
2) Направление перелета: короткий путь
3) Количество витков $m = 0$
4) Время перелета $T = 20\pi$

Варьируемые параметры: $r_1/r_0 = (1 : 0.5 : 20)$, $\varphi = (0 : 0.1 : 2\pi)$





Демонстрация работы методов Иццо и Бэйта

Параметры задачи:

1) $\boldsymbol{r_0} = [1.1; 0.05; 0]$
2) Направление перелета: короткий путь
3) Количество витков $m = 0$
4) Время перелета $T = 20\pi$

Варьируемые параметры: $r_1/r_0 = (1 : 0.5 : 20)$, $\varphi = (0 : 0.1 : 2\pi)$