

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
профиль подготовки «Математическое моделирование,
вычислительная математика и физика»

**Децентрализованное управление группой
низкоорбитальных наноспутников
с солнечными рефлекторами
для формирования изображения
на небосводе**

Выполнил:

студент группы 672

Чернов Кирилл Сергеевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Иванов Данил Сергеевич

Москва, 2020

Аннотация

В работе рассматривается децентрализованное управление движением группы наноспутников с помощью аэродинамических сил для создания требуемой конфигурации полета. Каждый спутник представляет собой 12U CubeSat, на котором установлен солнечный рефлектор. При некотором угловом и орбитальном положении спутников отраженный солнечный свет попадает в нужную точку на Земле и создает изображение в небе для наблюдателя на Земле. Солнечный рефлектор используется одновременно и в качестве паруса для создания необходимой для управления спутником аэродинамической силы. Для формирования требуемого пиксельного изображения задаются опорные относительные траектории аппаратов, к которым с помощью управления стремятся реальные траектории. Опорные траектории рассчитываются как проективные круговые орбиты свободного относительного движения в линейной модели. Разработан алгоритм управления на основе линейно-квадратичного регулятора. При численном исследовании управляемого движения учитывается неоднородность плотности атмосферы, нецентральность гравитационного поля и ошибки в знании параметров аэродинамической силы. Сравниваются два подхода для вычисления управляющего воздействия: с использованием декартовых относительных координат и криволинейных координат. Посредством математического моделирования оценивается время сходимости для формирования изображения и исследуется влияние ошибок в начальной скорости при кластерном запуске группы аппаратов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Постановка задачи.....	7
1.1. Системы координат и модель движения.....	7
1.2. Постановка задачи.....	9
2. Разработка алгоритма управления	11
2.1. Построение опорных траекторий.....	11
2.2. Линейно-квадратичный регулятор для декартовых координат.....	13
2.3. Расчет управления в криволинейных координатах	14
2.4. Значение аэродинамической силы.....	17
3. Численное исследование	20
3.1. Управление с использованием декартовых координат	20
3.2. Управление с использованием криволинейных координат	24
Заключение.....	30
Публикации по теме работы.....	31
Список использованных источников	32

Введение

Для решения современных фундаментальных и прикладных задач в околоземном космическом пространстве все чаще используются распределенные многоэлементные космические системы. Как правило, это несколько космических аппаратов, движущихся на небольшом относительном расстоянии, которые объединены в единую систему и работают для достижения общей цели. Вследствие ограниченного бюджета для миссий с большим количеством аппаратов для построения распределенных систем рассматриваются малые спутники, имеющие жесткие ограничения по массе, размерам, энергетике, бортовым вычислительным мощностям и составу оборудования системы управления. Для низких околоземных орбит для управления относительным движением может использоваться разница действующих на аппараты аэродинамических сил.

Метод управления, основанный на аэродинамической силе сопротивления, был впервые предложен в 1980-х годах Леонардом [1] в предположении дискретного изменения эффективного сечения спутников, летящих в группе. Леонард разработал алгоритм управления на основе пропорционально-дифференцирующего регулятора. Во многих работах применяют различные алгоритмы управления с использованием дифференциального аэродинамического сопротивления: ПИД-регулятор [2], ляпуновское управление [3, 4], скользящее управление [5], оптимальное управление [6] и др. Однако почти все работы рассматривают только два спутника в формации с централизованным управлением. Лишь несколько работ посвящены управлению более чем двумя аппаратами с помощью силы аэродинамического сопротивления. В статье [7] предложены циклические и оптимальные стратегии управления формацией, состоящей из более чем двух спутников. Стабильность и эффективность поддержания формации с учетом возможных столкновений изучается в [8]. В работе [9] рассматривается централизованное управление четырьмя аппаратами с помощью скользящего управления.

Аэродинамическую силу можно разделить на две составляющие – это сила сопротивления, направленная против вектора скорости, и аналог «подъемной» силы, перпендикулярной плоскостям, с которыми сталкиваются молекулы атмосферы. На низких околоземных орбитах взаимодействие воздуха со спутником таково, что максимальное значение силы сопротивления почти на порядок больше, чем значение «подъемной» силы [10], поэтому, как правило, при разработке алгоритмов управления ею пренебрегают. Однако это приводит к потере потенциальной возможности управления движением вне плоскости орбиты, что делает недостижимыми целый ряд относительных траекторий. В настоящей работе используется модель аэродинамической силы, учитывающая как силу сопротивления, так и небольшую по величине «подъемную» силу, что позволяет получить полностью управляемое относительное движение спутников в группе. Впервые использование подъемной составляющей аэродинамической силы было предложено в работе [11], однако рассмотренное управление было релейным. В работе [12] исследуются аспекты реализации алгоритма, предложенного в [11], а также рассматриваются вероятности возможного столкновения во время маневрирования. В работах [13, 14] подъемная составляющая силы использовалась для применения скользящего управления с использованием нейронных сетей. Работы [15, 16] исследуют алгоритмы формирования и поддержания формации из двух спутников с учетом подъемной силы и влияния нецентральности гравитационного поля Земли. В настоящей работе используются результаты, полученные в [16].

Управление группой спутников может быть централизованным или децентрализованным. В первом случае в группе есть один выделенный («материнский») спутник, движение которого отслеживают остальные спутники. В случае децентрализованного подхода все аппараты индивидуально принимают решение об управлении на основе движения остальных аппаратов. Децентрализованный подход имеет преимущества по сравнению с централизованным в случае достаточно большого количества

аппаратов в группе, когда возникают затруднения при получении информации о движении всех аппаратов.

В настоящей работе рассматривается группа микроспутников, оснащенных парусами, которые могут использоваться в качестве отражателей солнечного света. При соответствующих угловом и орбитальном положении спутников отраженный солнечный свет формирует пиксельное изображение, которое можно наблюдать с поверхности Земли невооруженным глазом. Таким образом, групповой полет может служить, например, космическим средством массовой информации, транслирующим логотипы или сообщения.

Для поддержания определенной ориентации изображения в орбитальной системе координат требуется постоянное управление спутниками с помощью двигателей, что приводит к чрезмерному расходу топлива [17]. Другой подход заключается в том, чтобы позволить изображению вращаться в орбитальной системе координат с орбитальным периодом. В целях реализации подхода для каждого спутника выбираются такие начальные условия, которые обеспечивают его движение по круговой проективной относительной орбите [18]. Таким образом, каждый «пиксель» изображения движется в орбитальной системе координат в соответствии с линейными уравнениями относительного свободного движения. Эти траектории относительного движения можно рассматривать как опорные; сходимость к ним должна обеспечить система управления движением.

Работа состоит из введения и трех глав. В первой главе формулируется постановка решаемой задачи: вводятся системы координат и рассматриваемая модель движения спутников. Во второй главе описан алгоритм управления спутниками для решения поставленной задачи. В третьей главе приводятся результаты численного моделирования.

1. Постановка задачи

1.1. Системы координат и модель движения

В работе используются следующие системы координат:

- $O_I XYZ$ – ИСК – инерциальная система координат. Точка O_I в центре Земли, ось $O_I X$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $O_I Z$ направлена вдоль оси вращения Земли, ось $O_I Y$ дополняет систему до правой тройки.
- $Oxyz$ – ОСК – орбитальная система координат. Точка O движется по круговой орбите, ось Oz направлена вдоль вектора $O_I O$, ось Oy – вдоль вектора орбитального кинетического момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки.
- $O_I E_{i1} E_{i2} E_{i3}$ – ОСК $_i$ – орбитальная система координат, построенная по вектору состояния i -го спутника: ось $O_I E_{i3}$ направлена по радиус-вектору спутника, ось $O_I E_{i2}$ – вдоль вектора орбитального кинетического момента, ось $O_I E_{i1}$ дополняет систему до правой тройки.
- $C_i x_{i1} x_{i2} x_{i3}$ – ССК – связанная с i -м спутником система координат. Точка C_i находится в центре масс спутника, оси системы совпадают с главными центральными осями аппарата.

При расчете опорных относительных траекторий спутников используется линейная модель движения, которая описывается уравнениями Хилла–Клохесси–Уилтшира [19]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_{ij} + 2\omega\dot{z}_{ij} = u_x^j, \\ \ddot{y}_{ij} + \omega^2 y_{ij} = u_y^j, \\ \ddot{z}_{ij} - 2\omega\dot{x}_{ij} - 3\omega^2 z_{ij} = u_z^j. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $[x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^T = \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ – разность радиус-векторов j -го и i -го спутников, записанных в ОСК, ω – орбитальная угловая скорость, $[u_x^j, u_y^j, u_z^j]^T = \mathbf{u}^j$ – вектор управления.

Решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_{ij}(t) = -3C_1^{ij}\omega t + 2C_2^{ij}\cos(\omega t) - 2C_3^{ij}\sin(\omega t) + C_4^{ij}, \\ y_{ij}(t) = C_5^{ij}\sin(\omega t) + C_6^{ij}\cos(\omega t), \\ z_{ij}(t) = 2C_1^{ij} + C_2^{ij}\sin(\omega t) + C_3^{ij}\cos(\omega t), \end{cases} \quad (2)$$

где константы $C_1^{ij}, \dots, C_6^{ij}$ зависят от начальных данных:

$$\begin{aligned} C_1^{ij} &= \frac{\dot{x}_{ij}(0)}{\omega} + 2z_{ij}(0), & C_2^{ij} &= \frac{\dot{z}_{ij}(0)}{\omega}, & C_3^{ij} &= -2\frac{\dot{x}_{ij}(0)}{\omega} - 3z_{ij}(0), \\ C_4^{ij} &= -2\frac{\dot{z}_{ij}(0)}{\omega} + x_{ij}(0), & C_5^{ij} &= \frac{\dot{y}_{ij}(0)}{\omega}, & C_6^{ij} &= y_{ij}(0). \end{aligned} \quad (3)$$

Если задать все параметры $C_1^{ij} = 0$, то относительное движение будет представлять собой замкнутые эллипсы. Подбором констант можно добиться таких траекторий, которые в проекции на плоскость Oxy , т.е. для наблюдателя с Земли, будут окружностями – так называемые проективные круговые орбиты.

При численном моделировании интегрирование уравнений движения производится в нелинейной модели

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{\mu_g \mathbf{r}_i}{r_i^3} + \mathbf{f}_i^\Sigma, \quad \mathbf{f}_i^\Sigma = \mathbf{f}_i^{\text{grav}} + \mathbf{f}_i^{\text{aero}}, \quad (4)$$

где $\mu_g = 3.986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Земли, \mathbf{r}_i – радиус-вектор i -го спутника в ИСК. В модели (4) учитывается нецентральность гравитационного поля Земли: потенциал раскладывается до второй гармоники, и тогда

$$\mathbf{f}_i^{\text{grav}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{r_i^5} x_i \left(\frac{5z_i^2}{r_i^2} - 1 \right) \\ \frac{\delta}{r_i^5} y_i \left(\frac{5z_i^2}{r_i^2} - 1 \right) \\ \frac{\delta}{r_i^5} z_i \left(\frac{5z_i^2}{r_i^2} - 3 \right) \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{3}{2} J_2 \mu_g R_E^2, \quad J_2 = 1082.23 \cdot 10^{-6}, \quad (5)$$

где средний радиус Земли $R_E = 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$.

Также учитывается аэродинамическая сила, действующая на спутник:

$$\mathbf{f}_i^{\text{aero}} = -\frac{1}{m_i} \rho(\mathbf{r}_i) v_i^2 S_i \left[(1 - \varepsilon) (\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{e}_v + 2\varepsilon (\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)^2 \mathbf{n}_i + (1 - \varepsilon) \frac{V}{v_i} (\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \right], \quad (6)$$

в которой первое слагаемое соответствует силе сопротивления, а второе и третье – подъемной силе. Здесь m_i – масса спутника, ρ – плотность атмосферы, v_i – модуль скорости аппарата, S_i – площадь паруса, \mathbf{e}_v – единичный вектор вдоль скорости, \mathbf{n}_i – единичный вектор нормали к поверхности паруса. Формула (6) и параметры ε и $\eta = V/v$ получены В.В. Белецким [10]. Приближенные значения коэффициентов $\varepsilon \approx 0.1$, $\eta \approx 0.1$. Благодаря подъемной составляющей аэродинамической силы, которая примерно на порядок меньше силы торможения, становится возможным создать управляющее воздействие на относительное движение вне плоскости орбиты и, следовательно, добиться требуемой траектории в трехмерном пространстве.

1.2. Постановка задачи

Рассматривается группа аппаратов на низкой околоземной орбите с установленными на них плоскими солнечными отражателями, которые также используются для создания требуемой аэродинамической силы. Исходными данными задачи является изображение, которое необходимо сформировать на небе с помощью отраженного от рефлекторов солнечного света. Для этого изображение разбивается на пиксели, в качестве которых выступают космические аппараты. Таким образом, космическими аппаратами после запуска необходимо управлять так, чтобы получить требуемое изображение. Вектор состояния точки отделения спутников от ракеты-носителя, заданный в ИСК, считается известным. Запуск спутников предполагается кластерным: известны скорость их отделения, интервал между запусками спутников и ошибки в скорости отделения. Считается, что относительное движение всех аппаратов известно всем аппаратам благодаря межспутниковой связи и

установленной системе определения относительного движения, которая может быть основана, например, на обработке видеоизображения.

Требуется построить управление спутниками для того, чтобы привести группу спутников из начального состояния после запуска в требуемое положение для формирования изображения. Для управления предполагается использовать разницу действующих на аппараты аэродинамических сил, величина которой меняется благодаря изменению углового положения плоских рефлекторов относительно набегающего потока.

2. Разработка алгоритма управления

2.1. Построение опорных траекторий

В настоящей работе в качестве изображения выбрана надпись из нескольких букв. Начертание всех букв русского и английского алфавитов можно представить в виде объединения вертикальных, горизонтальных и наклонных линий разной длины и с различным углом наклона, а также дуг окружностей. Для всех элементов был разработан способ аппроксимации изображения по пикселям, который показан на рисунке 1.

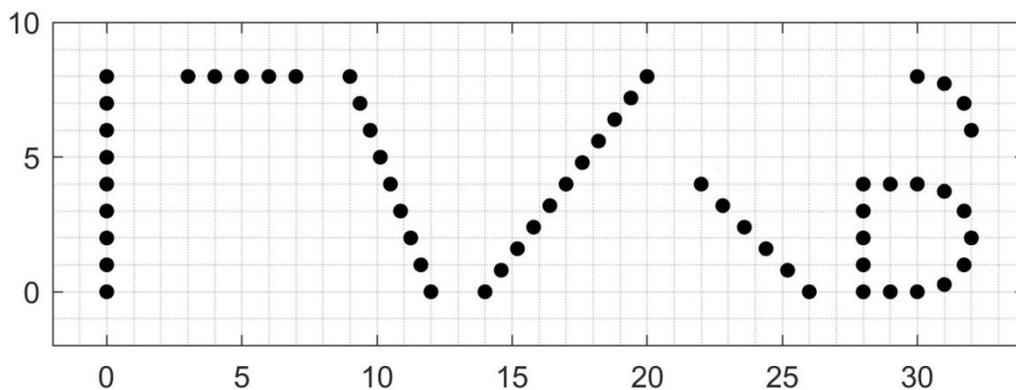


Рисунок 1. Пикселизация прямых и окружностей

Расстояния между пикселями в вертикальных и горизонтальных линиях одинаковы и равны некоторому масштабному коэффициенту. Все буквы имеют одинаковую высоту, но ширина у некоторых символов различается (например, у букв «С» и «Ш»). Таким образом, известны желаемые относительные координаты всех пар спутников.

В линейной модели Хилла–Клохесси–Уилтшира (1)–(3) траектории спутников относительно центра масс системы являются замкнутыми, только если $C_1^{ij} = 0$. В этом случае они представляют собой эллипсы. Пусть в начальный момент времени было несколько точек, лежащих на прямых, которые пересекаются под прямым углом. Тогда в другой момент времени при движении по эллипсам угол между прямыми будет не $\pi/2$ (рисунок 2а). Это значит, что наблюдатель, смотрящий перпендикулярно плоскости

рисунка, увидит деформированную надпись. Но такого не произойдет, если проекции траекторий на плоскость, перпендикулярную взгляду наблюдателя, будут окружностями (рисунок 2б). Сами траектории при этом могут лежать в другой плоскости и быть эллипсами.

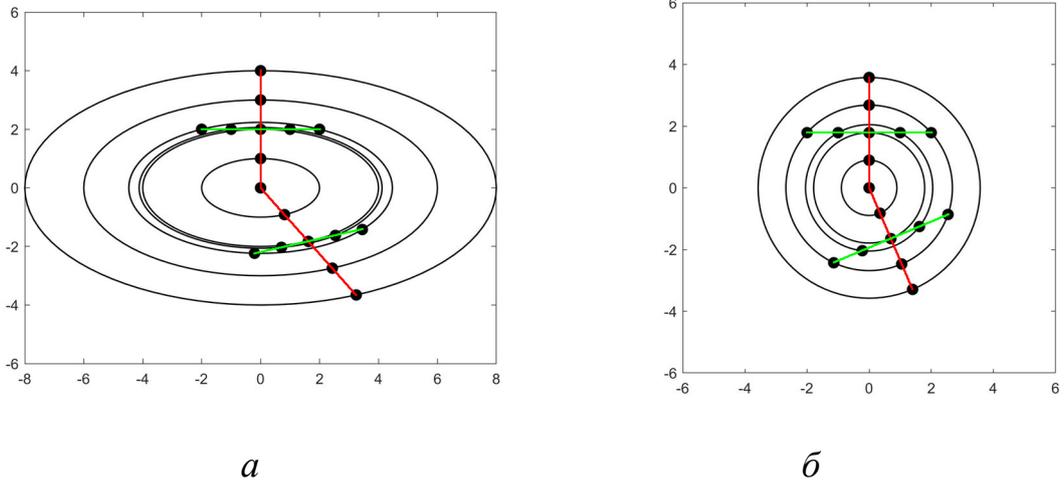


Рисунок 2. Изображение в плоскости, перпендикулярной взгляду наблюдателя

Пусть наблюдатель, стоящий на поверхности Земли, смотрит вертикально вверх. Тогда нужная плоскость задается уравнением $z = \text{const}$. Проекция траекторий на эту плоскость являются окружностями при условии

$$x_{ij}^2(t) + y_{ij}^2(t) = \text{Radius}^2 = x_{ij}^2(0) + y_{ij}^2(0). \quad (7)$$

Пусть $C_4^{ij} = 0$: в этом случае центр окружностей не будет смещен по оси x . Из уравнения (7) получается зависимость C_5^{ij}, C_6^{ij} от C_2^{ij}, C_3^{ij} :

$$C_5^{ij} = 2C_2^{ij}, \quad C_6^{ij} = 2C_3^{ij}.$$

Из $C_1^{ij} = 0$ и выражений (3) следует $C_3^{ij} = z_{ij}(0)$. Следствием $C_4^{ij} = 0$ и (3) является $C_2^{ij} = x_{ij}(0) / 2$. Окончательно

$$\begin{aligned} C_1^{ij} &= 0, & C_2^{ij} &= \frac{x_{ij}(0)}{2}, & C_3^{ij} &= z_{ij}(0), \\ C_4^{ij} &= 0, & C_5^{ij} &= x_{ij}(0), & C_6^{ij} &= 2z_{ij}(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $C_6^{ij} = y_{ij}(0)$, траектории будут находиться в плоскости $y = 2z$.

Подставив (8) в (2), мы получаем относительные опорные траектории $\mathbf{x}_{ij}^{\text{des}}(t)$ всех пар спутников в ОСК.

2.2. Линейно-квадратичный регулятор для декартовых координат

Для построения управления используется алгоритм на основе линейно-квадратичного регулятора. Рассматривается расчет управляющих воздействий с использованием декартовых координат спутников в орбитальной системе координат и в криволинейных координатах. Далее проводится сравнение применения двух подходов к расчету управления.

Перепишем уравнения (1) в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}}_{ij} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{ij} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{ij} \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ij} \\ \mathbf{v}_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Опорные траектории удовлетворяют уравнению

$$\dot{\mathbf{x}}_{ij}^{\text{des}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{ij}^{\text{des}}. \quad (10)$$

Введем невязку $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^{\text{des}}$. Линейно-квадратичный регулятор находит такую матрицу \mathbf{K} , что при $\mathbf{u}^{ij} = \mathbf{K}\mathbf{e}_{ij}$ достигается минимум функционала

$$J = \int_0^{+\infty} (\mathbf{e}_{ij}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{u}_{ij}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{ij}) dt. \quad (11)$$

на траекториях [20]. При этом $\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, где матрица \mathbf{P} является решением уравнения Риккати $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$. Весовые матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} являются параметрами задачи, и значения их элементов подбираются вручную так, чтобы реализованное управление не приходило в насыщение.

Итак, задав матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{R} и зная в некоторый момент времени невязку \mathbf{e}_{ij} , можно получить нужное в этот момент времени управление \mathbf{u}^{ij} .

Чтобы найти управление для i -го спутника \mathbf{u}_i , необходимо усреднить \mathbf{u}^{ij} по j . Поскольку зависимость между \mathbf{u}^{ij} и \mathbf{e}_{ij} линейная, то при малых \mathbf{e}_{ij} величина \mathbf{u}^{ij} будет тоже малой. Поэтому для ускорения процесса сходимости в случае, если траектории некоторых пар спутников уже близки к опорным, а другие еще нет, усреднение проводится не по всем j , а по тем, для которых позиционная часть (первые три компоненты) \mathbf{e}_{ij} больше заданного порога Err :

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j \in J_i} \mathbf{u}^{ij} / N_{J_i}, \quad J_i = \{j : |\mathbf{e}_{ij}^{\text{rad}}| > \text{Err}\}, \quad N_{J_i} = |J_i| \quad (12)$$

Если же для всех j невязка меньше этого порога, то усреднение проводится по всем j .

2.3. Расчет управления в криволинейных координатах

Поскольку расстояние между крайними спутниками только в одной букве порядка 5 км, то было предложено вместо линейной модели Хилла–Клохесси–Уилтшира (1) использовать другую линейную модель, использующую криволинейные координаты [21]. В [22] показано, что расчеты в криволинейных координатах уменьшают ошибки, связанные с линейностью модели Хилла–Клохесси–Уилтшира.

Криволинейные координаты φ_{ij} , θ_{ij} , δr_{ij} (рисунок 3) вводятся следующим образом: φ_{ij} – угол между радиус-вектором i -го спутника и проекцией радиус-вектора j -го спутника на плоскость орбиты i -го спутника, θ_{ij} – угол между радиус-вектором j -го спутника и проекцией радиус-вектора j -го спутника на плоскость орбиты i -го спутника, $\delta r_{ij} = |\mathbf{r}_j| - |\mathbf{r}_i|$. Введем также $a_0 = |\mathbf{r}_i|$.

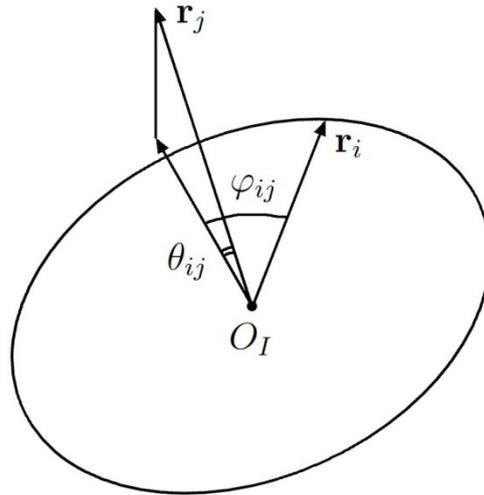


Рисунок 3. Криволинейная система координат

В данной работе переход от декартовых к криволинейным координатам осуществляется два раза:

1. Нужно получить φ_{ij} , θ_{ij} , δr_{ij} по \mathbf{x}_i и \mathbf{x}_j , заданным в ИСК. В этом случае надо перевести \mathbf{x}_j в ОСК $_i$. Плоскость орбиты i -го спутника – плоскость $O_I E_{i1} E_{i3}$. Значит выражения для криволинейных координат можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{ij} = \arctan\left(\frac{x_j}{z_j}\right), \\ \theta_{ij} = \arcsin\left(\frac{y_j}{r_j}\right), \\ \delta r_{ij} = r_j - r_i. \end{array} \right. \quad (13)$$

2. Нужно получить φ_{ij} , θ_{ij} , δr_{ij} по \mathbf{x}_i , заданному в ИСК, и \mathbf{x}_{ij} , заданному в ОСК. В этом случае надо перевести \mathbf{x}_i в ОСК. Сложив \mathbf{x}_i и \mathbf{x}_{ij} , мы получим \mathbf{x}_j в ОСК. И по формуле (13) можно перейти к криволинейным координатам.

Первый способ нужен для определения текущих относительных траекторий в криволинейных координатах \mathbf{y}_{ij} , а второй способ – для

определения желаемых относительных траекторий в криволинейных координатах $\mathbf{y}_{ij}^{\text{des}}$.

В криволинейных координатах уравнения (9) преобразуются:

$$\dot{\mathbf{y}}_{ij} = \mathbf{A}\mathbf{y}_{ij} + \mathbf{B}\mathbf{w}^{ij} \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_{ij} = \begin{bmatrix} \varphi_{ij} & \theta_{ij} & \delta r_{ij} & \dot{\varphi}_{ij} & \dot{\theta}_{ij} & \dot{\delta r}_{ij} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\omega/a_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем невязку $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{y}_{ij} - \mathbf{y}_{ij}^{\text{des}}$. Линейно-квадратичный регулятор находит такую матрицу \mathbf{K} , что при $\mathbf{w}^{ij} = \mathbf{K}\mathbf{d}_{ij}$ достигается минимум функционала

$$J = \int_0^{+\infty} (\mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{Q} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{w}_{ij}^T \mathbf{R} \mathbf{w}_{ij}) dt. \quad (15)$$

После того как определено $\mathbf{w}^{ij} = [\ddot{\varphi}_{ij} \quad \ddot{\theta}_{ij} \quad \ddot{\delta r}_{ij}]^T$, нужно найти \mathbf{u}^{ij} . Для этого можно воспользоваться подходом Ламе. Выразим декартовы координаты j -го спутника через криволинейные:

$$\begin{cases} x_j = (\delta r_{ij} + r_i) \cos \theta_{ij} \sin \varphi_{ij}, \\ y_j = (\delta r_{ij} + r_i) \sin \theta_{ij}, \\ z_j = (\delta r_{ij} + r_i) \cos \theta_{ij} \cos \varphi_{ij}. \end{cases} \quad (16)$$

Найдем коэффициенты Ламе

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x_j}{\partial \varphi_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_j}{\partial \varphi_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_j}{\partial \varphi_{ij}} \right)^2,$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x_j}{\partial \theta_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_j}{\partial \theta_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_j}{\partial \theta_{ij}} \right)^2, \quad (17)$$

$$H_3^2 = \left(\frac{\partial x_j}{\partial \delta r_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_j}{\partial \delta r_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_j}{\partial \delta r_{ij}} \right)^2.$$

Определим функцию $V^2 = \dot{\varphi}_{ij}^2 H_1^2 + \dot{\theta}_{ij}^2 H_2^2 + \delta \dot{r}_{ij}^2 H_3^2$. Тогда компоненты \mathbf{u}^{ij} можно найти как

$$\begin{aligned} u_x^{ij} &= \frac{1}{H_1} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial V^2 / 2}{\partial \dot{\varphi}_{ij}} - \frac{\partial V^2 / 2}{\partial \varphi_{ij}} \right], \\ u_y^{ij} &= \frac{1}{H_2} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial V^2 / 2}{\partial \dot{\theta}_{ij}} - \frac{\partial V^2 / 2}{\partial \theta_{ij}} \right], \\ u_z^{ij} &= \frac{1}{H_3} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial V^2 / 2}{\partial \delta \dot{r}_{ij}} - \frac{\partial V^2 / 2}{\partial \delta r_{ij}} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим (16) в (17):

$$H_1^2 = (\delta r_{ij} + r_i)^2 \cos^2 \theta_{ij}, \quad H_2^2 = (\delta r_{ij} + r_i)^2, \quad H_3^2 = 1. \quad (19)$$

Для функции V получим выражение

$$V^2 = \dot{\varphi}_{ij}^2 (\delta r_{ij} + r_i)^2 \cos^2 \theta_{ij} + \dot{\theta}_{ij}^2 (\delta r_{ij} + r_i)^2 + \delta \dot{r}_{ij}^2. \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получим в итоге:

$$\begin{aligned} u_x^{ij} &= 2\dot{\varphi}_{ij} (-(\delta r_{ij} + r_i)\dot{\theta}_{ij} \sin \theta_{ij} + \delta \dot{r}_{ij} \cos \theta_{ij}) + (\delta r_{ij} + r_i)^2 \ddot{\varphi}_{ij} \cos \theta_{ij}, \\ u_y^{ij} &= (\delta r_{ij} + r_i)(\ddot{\theta}_{ij} + \dot{\varphi}_{ij}^2 \cos \theta_{ij} \sin \theta_{ij}) + 2\delta \dot{r}_{ij} \dot{\theta}_{ij}, \\ u_z^{ij} &= \delta \ddot{r}_{ij} - (\delta r_{ij} + r_i)(\dot{\varphi}_{ij}^2 \cos^2 \theta_{ij} + \dot{\theta}_{ij}^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь, зная \mathbf{u}^{ij} для всех j , можно найти \mathbf{u}_i по формуле (12).

2.4. Значение аэродинамической силы

В работах [16], [23] была получена область возможных значений компонент аэродинамической силы. Введем углы φ_i , θ_i , как показано на рисунке 4. Тогда вектор нормали к поверхности паруса в ОСК будет задаваться выражением $\mathbf{n}_i = [\sin \theta_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i]^T$, а удельная аэродинамическая сила (6) в ОСК будет иметь вид (для краткости верхний индекс «аеро» опущен):

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1)\sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \cos \varphi_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}, \quad k = \frac{1}{m_i} \rho v_i^2 S_i.$$

Введем обозначения

$$p(\theta_i) = -2\varepsilon(\sin \theta_i)^3 + \eta(\varepsilon - 1)(\sin \theta_i)^2 + (\varepsilon - 1)\sin \theta_i, \\ g(\theta_i) = -\cos \theta_i \sin \theta_i (\eta - \varepsilon\eta + 2\varepsilon \sin \theta_i).$$

Тогда удельная сила, действующая на i -й спутник, и разность сил, действующих на i -й и j -й спутники, могут быть записаны как

$$\mathbf{f}_i = k \begin{bmatrix} p(\theta_i) \\ g(\theta_i) \cos \varphi_i \\ g(\theta_i) \sin \varphi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j = k \begin{bmatrix} p(\theta_i) - p(\theta_j) \\ g(\theta_i) \cos \varphi_i - g(\theta_j) \cos \varphi_j \\ g(\theta_i) \sin \varphi_i - g(\theta_j) \sin \varphi_j \end{bmatrix}.$$

В [16] показано, что максимальное значение проекции силы на ось Ox – $\max |p(\theta_i)|$ – на порядок меньше максимального значения проекции силы на плоскость Oyz – $\max |g(\theta_i)|$. Поэтому если требуется иметь возможность создавать ускорение в любых направлениях, то нужно максимизировать $g(\theta_i) \cos \varphi_i - g(\theta_j) \cos \varphi_j$ и $g(\theta_i) \sin \varphi_i - g(\theta_j) \sin \varphi_j$. Это можно сделать, положив $\varphi_j = \varphi_i + \pi$. Область возможных значений проекций $\tilde{\mathbf{f}}_{ij} = \mathbf{f}_{ij} / k$ на ось Ox и на плоскость Oyz показана на рисунке 5.

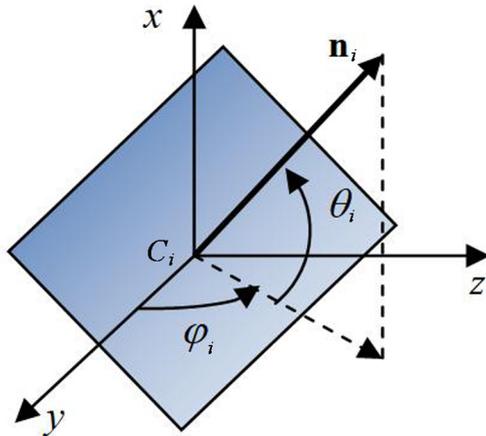


Рисунок 4. Углы φ_i, θ_i

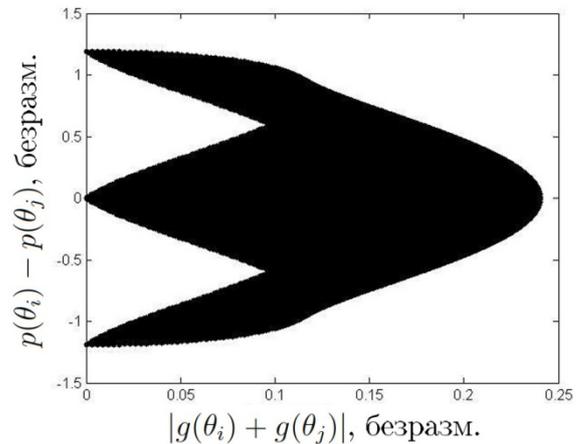


Рисунок 5. Область возможных значений \mathbf{f}_{ij}/k

Из рисунка 5 видно, что не любое посчитанное с помощью линейно-квадратичного регулятора управление \mathbf{u}_i можно реализовать, используя аэродинамическую силу. В работе [23] был предложен следующий алгоритм определения прилагаемого управления по требуемому:

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} -\mathbf{u}_{\max}^x, & \text{if } u_i^x > u_{\max}^x; \\ -\mathbf{u}_{\max}^{yz}, & \text{if } 0 < u_i^x \leq u_{\max}^x \text{ and } \sqrt{(u_i^y)^2 + (u_i^z)^2} > u_{\max}^{yz}; \\ -\mathbf{u}_i, & \text{if } 0 < u_i^x \leq u_{\max}^x \text{ and } \sqrt{(u_i^y)^2 + (u_i^z)^2} \leq u_{\max}^{yz}; \\ 0, & \text{if } u_i^x \leq 0; \end{cases} \quad (22)$$

где $\mathbf{u}_{\max}^x = [u_{\max}^x \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_{\max}^{yz} = k[u_i^x / k \ u_i^y / u_{\max}^{yz} \ u_i^z / u_{\max}^{yz}]^T$.

3. Численное исследование

Проведем численное моделирование работы алгоритма децентрализованного управления с использованием декартовых координат и криволинейных координат. Интегрирование производится в нелинейной модели (4) методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Плотность атмосферы рассчитывается по ГОСТ Р 25645.166–2004 [24]. В таблице 1 представлены основные параметры моделирования.

Таблица 1. Основные параметры моделирования

Параметр	Значение
Надпись	«ИПМ»
Расстояние между спутниками	700 м
Масса спутника	18 кг
Размер зеркала-паруса	4×4 м
Интервал между запусками	20 с
Скорость отделения	1.5 м/с
Начальная высота орбиты	350 км
Наклонение орбиты	51.7°
Время моделирования	40 ч
Шаг интегрирования	60 с
Порог отклонения орбиты	500 м

3.1. Управление с использованием декартовых координат

Для работы алгоритма управления на основе линейно-квадратичного регулятора необходимо задать весовые матрицы **Q** и **R**. Эти матрицы были выбраны диагональными. Основной критерий задания значений в весовых матрицах – это отсутствие насыщения в ограниченном аэродинамическом

управлении. Так как сила торможения на порядок больше подъемной составляющей аэродинамической силы (направлена по трансверсали), то вес по оси x выбран больше, чем по осям y и z . В матрице \mathbf{Q} рассогласование по компонентам вектора состояния по осям x и y выбрано на порядок больше, чем по z . Описанные весовые матрицы имеют вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{15} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{15} \end{pmatrix}.$$

На рисунке 6 представлена схема работы алгоритма при использовании декартовых координат. Перед началом моделирования задается точка кластерного запуска космических аппаратов в инерциальной системе координат, скорость отделения от ракеты-носителя и интервал между отделениями аппаратов. Таким образом формируются начальные условия для уравнений движения аппаратов. Для получения требуемых относительных траекторий заданное изображение разбивается на пиксели с заранее определенным расстоянием между ними, чтобы удовлетворялись условия различимости двух точек для наблюдателя на поверхности Земли. В соответствии с условиями на константы (8) задаются проективные относительные круговые орбиты. Далее на каждом шаге работы алгоритма вычисляются отклонения траекторий всех аппаратов относительно требуемых траекторий, с помощью линейно-квадратичного регулятора вычисляется требуемое управление для каждой пары. Итоговое расчетное управление для каждого аппарата является средним по всем управлениям среди спутников, чье отклонение превышает заданный порог. По расчетному управлению вычисляется требуемая аэродинамическая сила согласно (22). Величина силы подается в правую часть уравнений орбитального движения аппаратов.

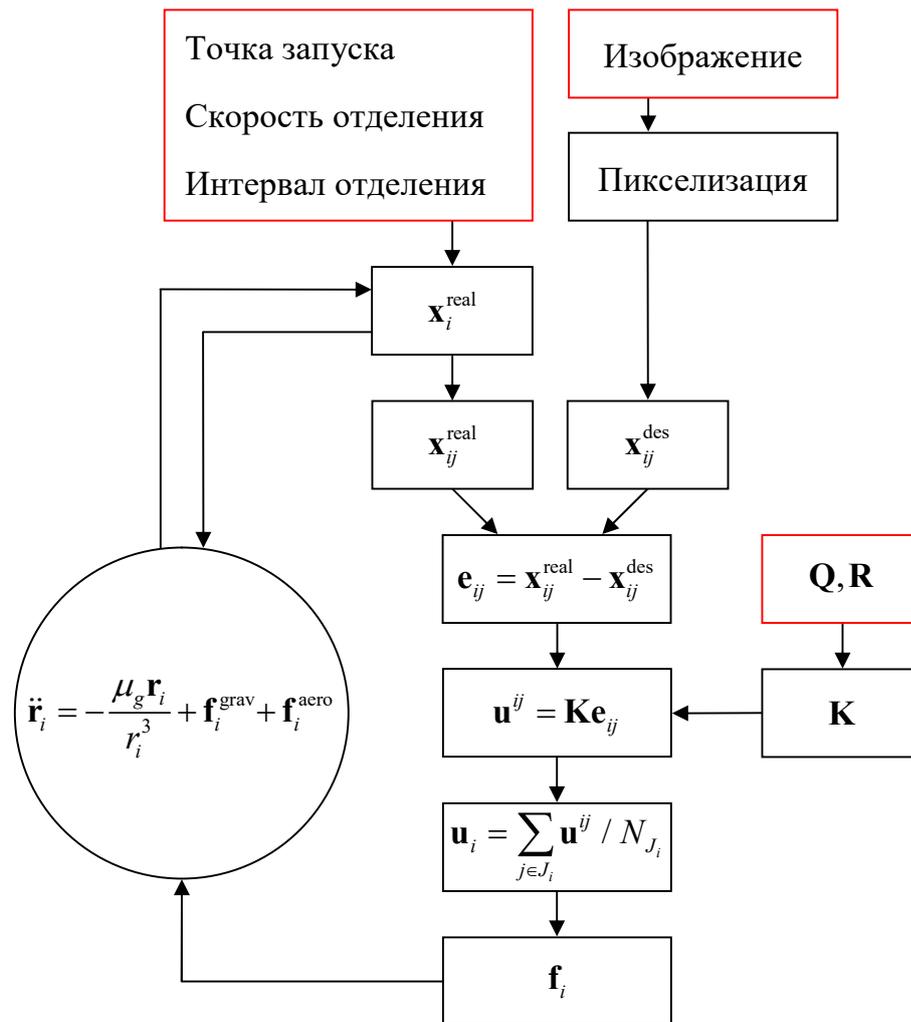


Рисунок 6. Схема реализации управления при использовании декартовых координат

Проведем численное моделирование работы алгоритма с приведенными выше параметрами. На рисунке 7 представлен результат работы после 40 часов управления, где красными точками обозначены требуемые положения аппаратов, а черными – реальные относительные положения. Видно, что требуемое изображение не сформировалось. На рисунке 8 в качестве примера представлены компоненты вектора отклонения траектории второго аппарата относительно первого, откуда можно заключить, что рассогласование по оси y не устраняется с помощью управления и, более того, растет отклонение траектории по оси x . На рисунках 9 и 10 представлены графики расчетного и реализованного управления. Из рисунка 11 видно, что за время работы управления высота орбиты уменьшилась на 50 км, а из рисунка 12 – что соответствующая высоте плотность увеличилась в 2 раза.

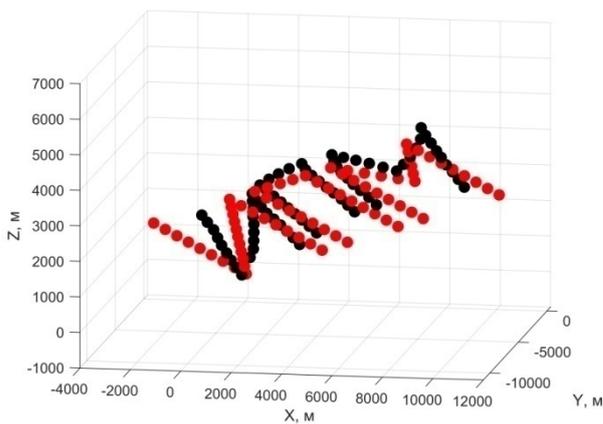


Рисунок 7. Конечное относительное положение аппаратов

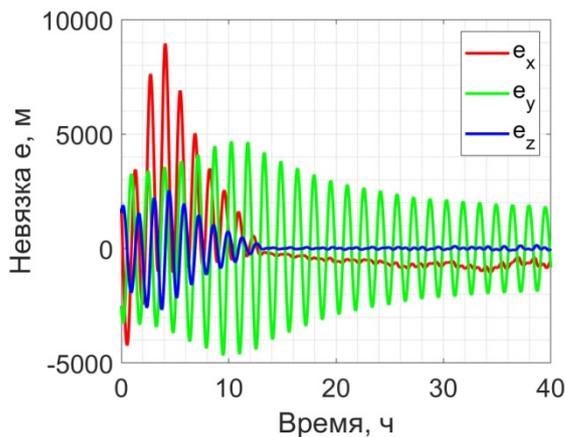


Рисунок 8. Отклонение траектории второго аппарата относительно первого

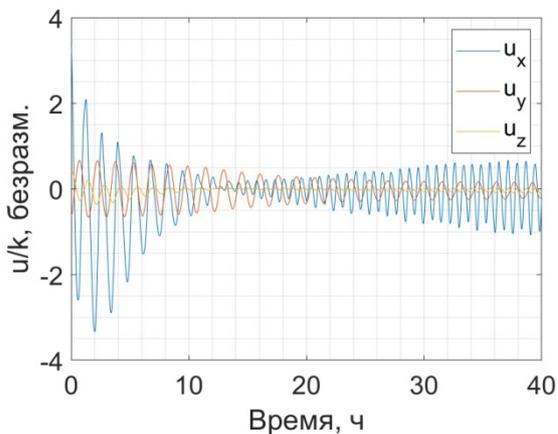


Рисунок 9. Требуемое управление для первого аппарата

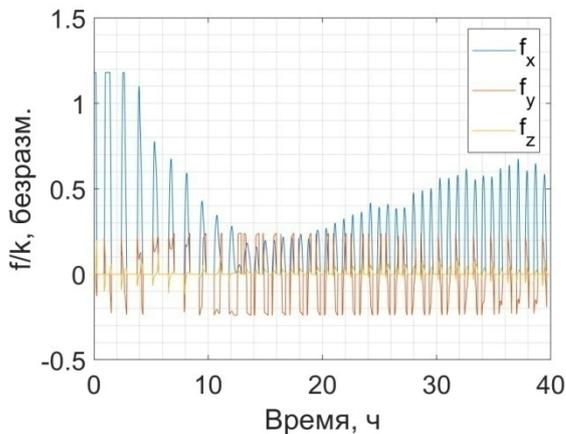


Рисунок 10. Приложенное управление для первого аппарата

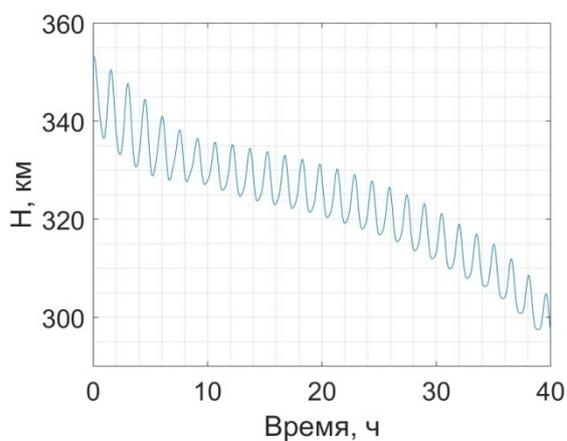


Рисунок 11. Высота орбиты

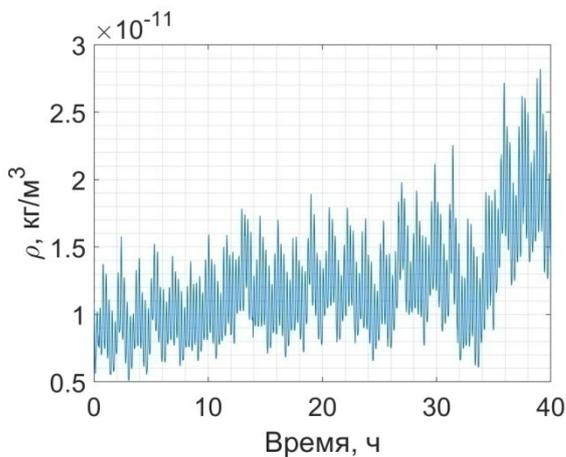


Рисунок 12. Плотность атмосферы

3.2. Управление с использованием криволинейных координат

Рассмотрим применение управления с использованием криволинейных координат, которые на больших относительных расстояниях точнее описывают движение группы спутников. Матрицы **Q** и **R** для расчета в криволинейных координатах задаются с теми же величинами, что и для декартовых координат с тем отличием, что угловые координаты домножаются на большую полуось в квадрате:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10a_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10a_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10a_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10a_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{14}a_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{15}a_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{15} \end{pmatrix}.$$

Схема работы алгоритма показана на рисунке 13. Отличие от схемы с использованием декартовых координат состоит в том, что для вычисления управления рассчитываются текущий и требуемый векторы состояния в криволинейных координатах.

На рисунке 14 представлены конечные относительные положения аппаратов, откуда видно, что они близки к требуемым положениям, за исключением одного аппарата, траектория которого за 40 часов не успела сойтись к опорной. На рисунке 15 представлен пример отклонения траектории второго аппарата относительно первого. После 20 часов работы управления отклонения по осям x и z оказались в окрестности 100 м, а отклонение по оси y составило около 200 м. На рисунках 16 и 17 представлены расчетное управление для первого аппарата и реализованные значения. Можно увидеть, что реализуется только часть расчетного управления с учетом ограничений аэродинамической силы. За время формирования изображения высота орбиты уменьшилась на 30 км (рисунок 18). На рисунке 19 представлены значения плотности атмосферы на траектории движения группы аппаратов.

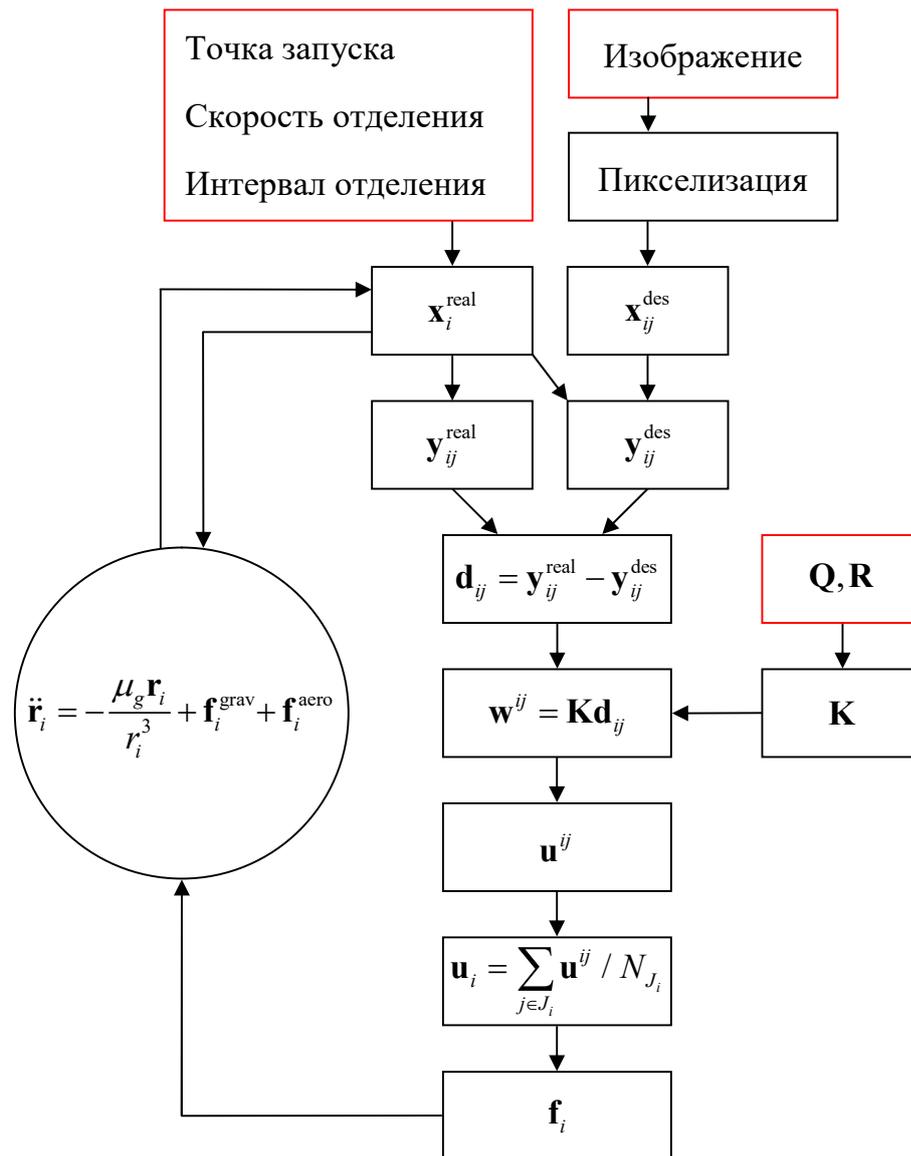


Рисунок 13. Схема работы алгоритма управления с использованием криволинейных координат

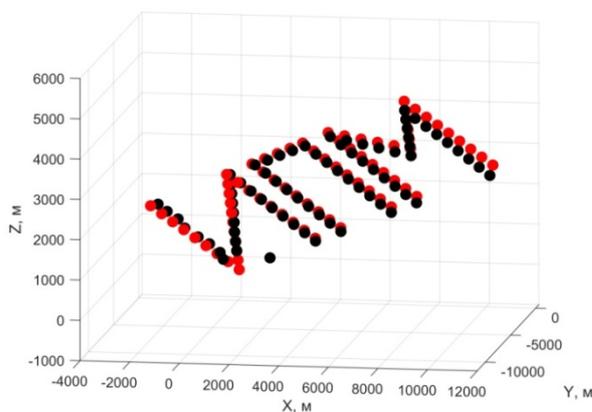


Рисунок 14. Конечное относительное положение аппаратов

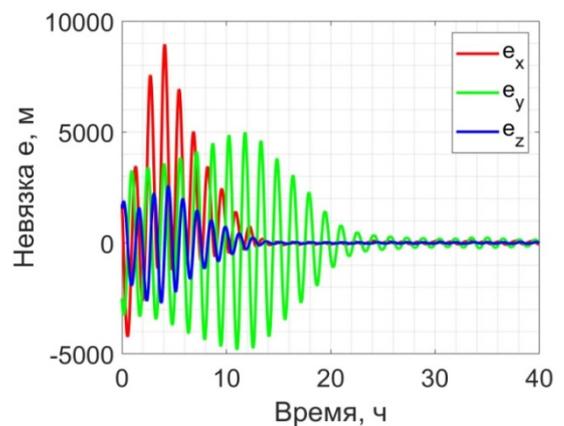


Рисунок 15. Отклонение траектории второго аппарата относительно первого

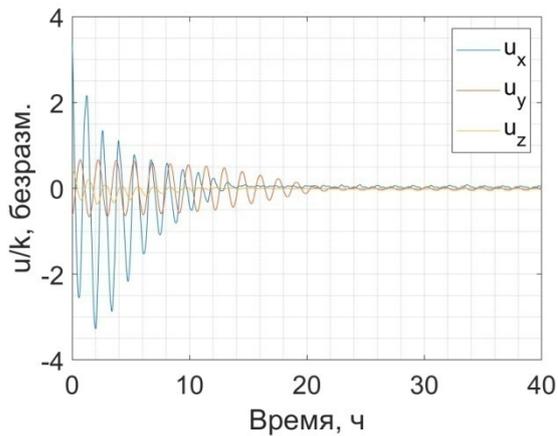


Рисунок 16. Требуемое управление для первого аппарата

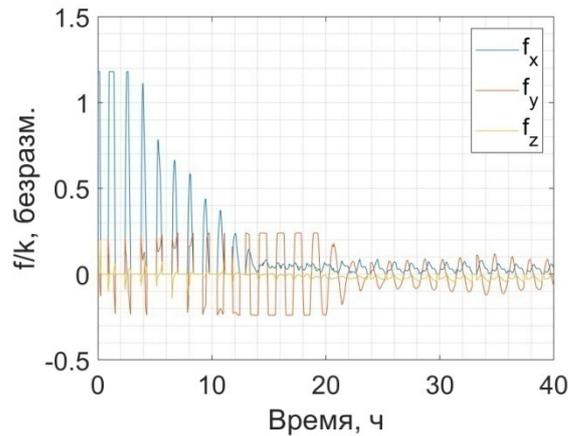


Рисунок 17. Приложенное управление для первого аппарата

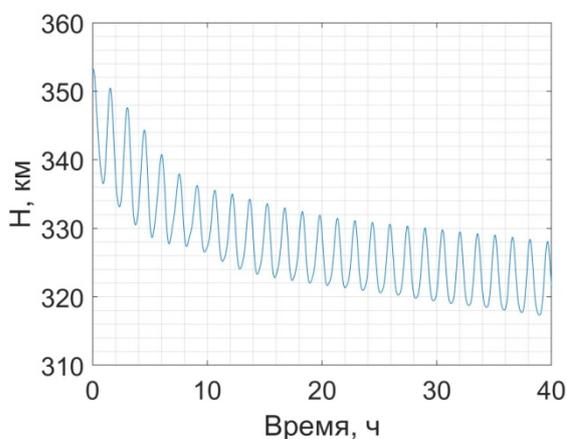


Рисунок 18. Высота орбиты

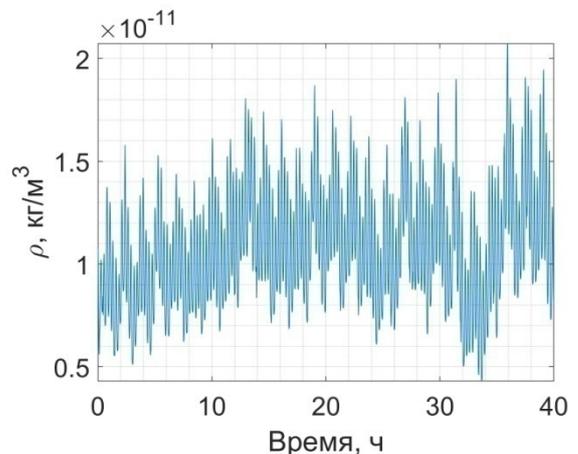


Рисунок 19. Плотность атмосферы

Таким образом, криволинейные координаты дают значительно лучший результат, поэтому дальнейшее исследование в работе ведется с их использованием.

В работе проводилось исследование управляемого движения в зависимости от параметров системы. Моделировалась нормально распределенная с нулевым математическим ожиданием ошибка по всем направлениям начальной скорости отделения аппаратов от ракеты-носителя со значениями дисперсии $\sigma = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5$ м/с. Исследование показало, что движение спутников устойчиво к данной ошибке, время сходимости почти не меняется и составляет 20 часов, однако случайным образом 1-2 спутника имеют большое отклонение траектории от требуемой.

Также было рассмотрено влияние интервала между запусками аппаратов. При скорости отделения $\Delta v = 1.5$ м/с интервал отделения пробежал значения $\Delta t = 60, 100, 140, 180$ с. В этих случаях время сходимости примерно постоянное, однако изменяется снижение с высоты 350 км до значений 325, 320, 315, 310 км соответственно.

При интервале отделения $\Delta t = 20$ с скорость отделения пробежала значения $\Delta v = 3, 6, 10$ м/с. В этих случаях время сходимости по оси y не меняется, но увеличивается время сходимости по осям x и z ; снижение с высоты 350 км происходит до 310, 280, 240 км соответственно.

Был рассмотрен запуск группы спутников на различных начальных орбитах, высотой 300 и 400 км. На рисунках 20–23 представлены примеры результатов моделирования. На орбите 300 км за счет увеличения значения аэродинамической силы требуемое изображение формируется за примерно 10 часов, тогда как на высоте 400 км управление не справляется с задачей. На высоте 400 км из-за маленькой плотности атмосферы получается недостаточное управляющее ускорение, поэтому желаемые траектории не достигаются. На высоте 300 км величина плотности атмосферы примерно в 3 раза больше, чем на высоте 350 км, поэтому время сходимости сильно сокращается.

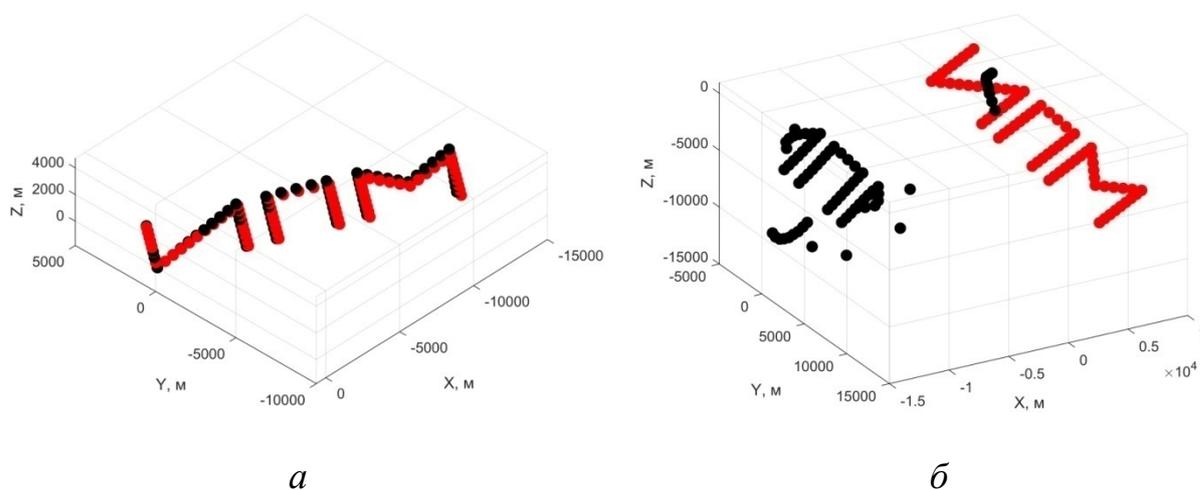


Рисунок 20. Конечное относительное положение аппаратов для орбиты с начальной высотой 300 км (а) и 400 км (б)

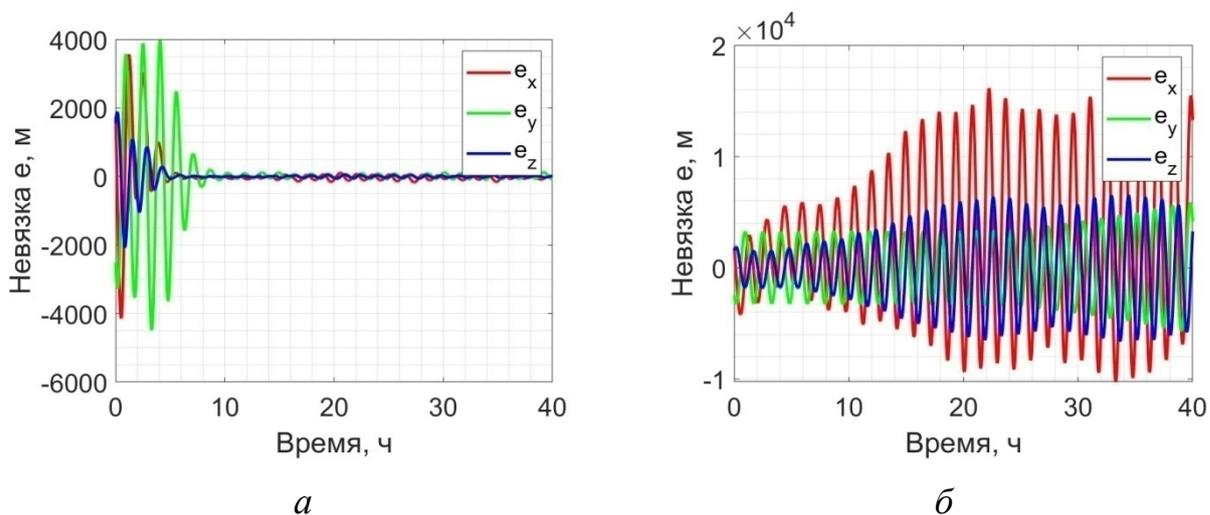


Рисунок 21. Отклонение траектории второго аппарата относительно первого для орбиты с начальной высотой 300 км (а) и 400 км (б)

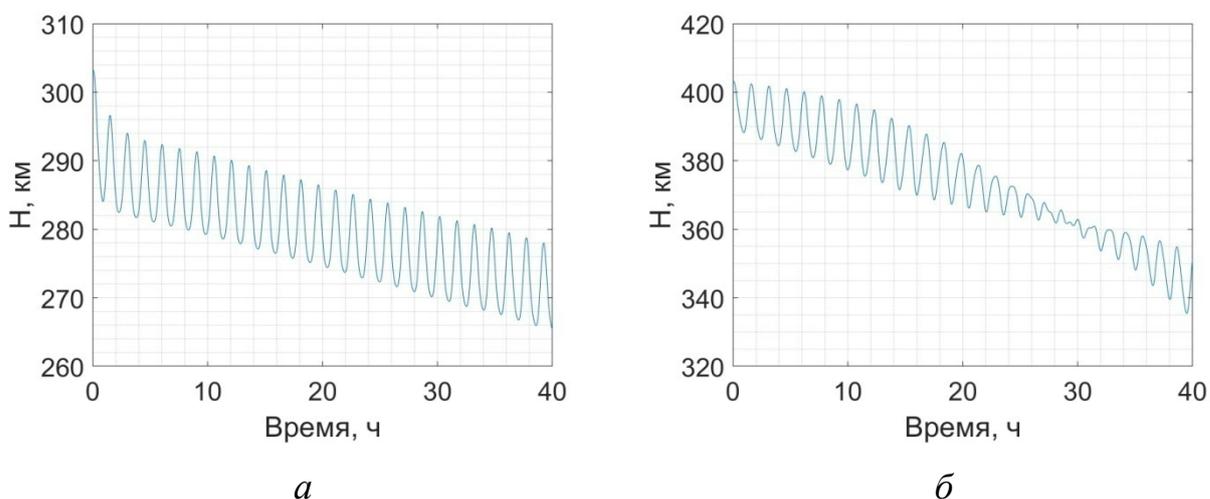


Рисунок 22. Высота орбиты для орбиты с начальной высотой 300 км (а) и 400 км (б)

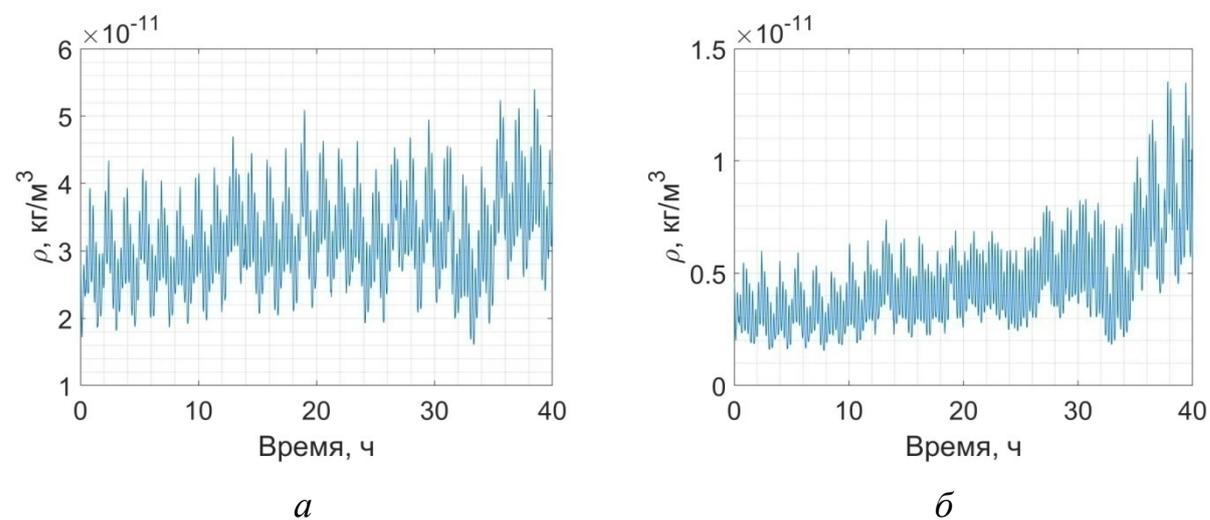


Рисунок 23. Плотность атмосферы для орбиты с начальной высотой 300 км (а) и 400 км (б)

При изменении порога отклонения траектории, при котором аппараты учитываются при расчете среднего значения, меняется число аппаратов, траектории которых не успевают сойтись к опорным. При значении порога в 250 м 3 спутника имеют большее отклонение, чем при значении 100 м. Увеличение порога с 250 м до 1000 м не дает значительных эффектов.

Заключение

Применение децентрализованного управления с использованием разницы действующих на аппараты аэродинамических сил позволяет сформировать требуемое пиксельное изображение из солнечных рефлекторов. В работе показано, что расчет управления в криволинейных относительных координатах приводит к меньшим отклонениям от опорных траекторий по сравнению с расчетом управления в декартовых координатах. Также показано, что на время формирования изображения влияет в основном высота орбиты группы аппаратов, тогда как ошибки в скоростях отделения и интервал между запусками почти не изменяет время сходимости, которое для высоты 350 км составляет около 20 часов. Время переходных процессов сильно зависит от параметров настройки линейно-квадратичного регулятора, которые выбираются таким образом, чтобы расчетное управление не превышало максимальной реализуемой с помощью аэродинамической силы величины. После сходимости влияние нецентральности гравитационного поля Земли, флуктуации плотности атмосферы и учет ограничений аэродинамической силы приводят к отклонению опорных траекторий в среднем на 200 м.

Публикации по теме работы

1. К.С. Чернов, У.В. Монахова, Д.С. Иванов. Децентрализованное управление группой низкоорбитальных наноспутников с солнечными рефлекторами для формирования изображения на небосводе // Труды 62-й научной конференции МФТИ, 18-24 ноября 2019 г. 1 с.
2. D. Ivanov, S. Biktimirov, K. Chernov, A. Kharlan, U. Monakhova, D. Pritykin. Writing with Sunlight: CubeSat Formation Flying Using Aerodynamic Forces // Proceedings of International Astronautical Congress, 21-25 October 2019, Washington, USA. Paper IAC-19.B4.IP.4, 10 p.
3. У.В. Монахова, Д.С. Иванов, Д.А. Притыкин, Ш.Н. Биктимиров, К.С. Чернов. Формирование изображения на небосводе группой низкоорбитальных микроспутников с солнечными рефлекторами // Сборник тезисов XLIV Академических чтений по космонавтике, Москва 28-31 января 2020 г., с. 289-290.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1986.
- [2] Kumar B.S., Ng A., Bang-Bang A. Control Approach to Maneuver Spacecraft in a Formation with Differential Drag // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, AIAA Paper No. 2008-6469, Honolulu, Hawaii, August 2008.
- [3] Pérez D., Bevilacqua R. Lyapunov-Based Adaptive Feedback for Spacecraft Planar Relative Maneuvering via Differential Drag // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014. Vol. 37. No. 5. Pp. 1678–1684.
- [4] Pérez D., Bevilacqua R. Differential Drag Spacecraft Rendezvous Using an Adaptive Lyapunov Control Strategy // Acta Astronautica, 2013. Vol. 83. Pp. 196–207.
- [5] Kumar K.D. et al. Maintenance of Satellite Formations Using Environmental Forces // Acta Astronautica. Elsevier, 2014. Vol. 102. Pp. 341–354.
- [6] Dellelce L., Kerschen G. Optimal Propellantless Rendez-Vous Using Differential Drag // Acta Astronautica. Elsevier, 2015. Vol. 109. Pp. 112–123.
- [7] Ben-Yaacov O., Gurfil P. Long-Term Cluster Flight of Multiple Satellites Using Differential Drag // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013. Vol. 36. No. 6. Pp. 1731–1740.
- [8] Ben-Yaacov O., Gurfil P. Orbital Elements Feedback for Cluster Keeping Using Differential Drag // Advances in the Astronautical Sciences, 2015. Vol. 153. Pp. 769–787.
- [9] Varma S., Kumar K.D. Multiple Satellite Formation Flying Using Differential Aerodynamic Drag // Journal of Spacecraft and Rockets, 2012. Vol. 49. No 2. Pp. 325–336.

- [10] Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 с.
- [11] Horsley M., Nikolaev S., Pertica A. Small Satellite Rendezvous Using Differential Lift and Drag // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013. Vol. 36. No 2. Pp. 445–453.
- [12] Smith B. et al. Investigation into the Practicability of Differential Lift-Based Spacecraft Rendezvous // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017. Vol. 40. No 10. Pp. 2680–2687.
- [13] Sun R. et al. Neural-Network-Based Sliding-Mode Adaptive Control for Spacecraft Formation Using Aerodynamic Forces // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2017. No Article in press. Pp. 1–13.
- [14] Sun R. et al. Neural Network-Based Sliding Mode Control for Atmospheric-Actuated Spacecraft Formation Using Switching Strategy // *Advances in Space Research. COSPAR*, 2017. No Article in press. Pp. 1–13.
- [15] Shao X. et al. Satellite Formation Keeping Using Differential Lift and Drag Under J2 Perturbation // *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2017. Vol. 89. No 1. Pp. 11–19.
- [16] Ivanov D., Kushniruk M., Ovchinnikov M. Study of Satellite Formation Flying Control Using Differential Lift and Drag // *Acta Astronautica*, 2018. Vol. 145. Pp. 88–100.
- [17] Biktimirov S. et al. Deployment and Maintenance of Solar Sail-Equipped Cubesat Formation in LEO // 18th Australian International Aerospace Congress (2019): ISSFD - 27th International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD). Melbourne: Engineers Australia, Royal Aeronautical Society, 2019. Pp. 983–988.
- [18] Ivanov D. et al. Writing with Sunlight: CubeSat Formation Control Using Aerodynamic Forces // *Proceedings of 70th International Astronautical*

- Congress (IAC), Washington, USA, 21-25 October 2019. P. IAC-19-B4.IP.4.
- [19] Hill, G.W. Researches in Lunar Theory // American Journal of Mathematics, 1878. Vol. 1. Pp. 5–26.
- [20] Ciarci, M., Grompone, A, Romano, M. A Near-Optimal Guidance for Cooperative Docking Maneuvers // Acta Astronautica, 2014. Vol. 102. Pp. 367–377.
- [21] Tschauner, J. and Hempel, P., Optimale Beschleunigungsprogramme für das Rendezvous-Manöver // Astronautica Acta, 1964. No. 10. Pp. 296–307.
- [22] Kyle Alfriend, Srinivas Rao Vadali, Pini Gurfil, Jonathan How, Louis Breger. Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control and Navigation, Elsevier UK–USA, 2010.
- [23] Иванов Д.С., Кушнирук М.С. Исследование алгоритма управления пространственным движением группы спутников с помощью аэродинамической силы. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. № 53. 32 с.
- [24] Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли; ГОСТ Р 25645.166–2004.