

## Аннотация

В работе рассматриваются два метода построения управления относительным движением роя спутников на основе уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшера. Для построения управления используются неориентированные и ориентированные, взвешенные графы. Рассматривается вывод и доказательство сходимости метода ориентированного графа. Проведено численное исследование двух методов управления. В ходе численного моделирования получены результаты, которые показывают преимущества использования ориентированного, взвешенного графа над неориентированным.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1. Постановка задачи</b>	<b>7</b>
<b>2. Уравнения движения</b>	<b>8</b>
2.1. Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшера . . . . .	8
2.2. Разложение до второго порядка малости . . . . .	13
<b>3. Управление группой спутников на основе метода Ляпунова</b>	<b>14</b>
3.1. Метод Ляпунова . . . . .	14
3.2. Применимость линейной модели в управлении формацией спутников . . . . .	16
3.3. Изучение конфигураций группы спутников . . . . .	17
3.4. Описание управления группой спутников . . . . .	18
<b>4. Моделирование конфигурации спутников на основе неориентированного графа</b>	<b>19</b>
4.1. Алгоритм управления движения на основе неориентированного графа . . . . .	19
4.2. Формирование матрицы смежности на основе положения спутников. . . . .	22
4.2.1. Построение графа на основе матрицы смежности. . .	22
4.2.2. Определение спутников, которые будут участвовать в управлении, для каждого спутника. . . . .	22
4.2.3. Поиск управляющей силы. . . . .	23
4.3. Моделирование. . . . .	23
<b>5. Моделирование конфигурации спутников на основе ориен-</b>	

<b>тированного графа</b>	<b>31</b>
5.1. Алгоритм построения управления движением группы спутников в случае ориентированного, взвешенного графа . . . . .	32
5.2. Моделирование . . . . .	37
<b>Заключение</b>	<b>44</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>45</b>

# Введение

Поддержание движения спутников в группе осуществляется для выполнения единой задачи. Группа спутников, в отличие от одного спутника, при решении поставленной задачи более отказоустойчива. Предполагается, что при выходе из строя одного аппарата миссия может быть продолжена и доведена до конца. Как правило, группа спутников решает навигационные задачи. Каждый спутник роя расположен достаточно близко к остальным спутникам, порядка 50 километров. Тема группового полета спутников а также спутниковых систем приобрела достаточную популярность. Было опубликовано большое количество книг и статей (например [5]). Данная тема развивается и в коммерческих направлениях. Популярный проект Starlink тому подтверждение. Основная концепция исследования группового движение – это разработка моделей относительного движения спутников. Проблема заключается в относительном дрейфе каждого спутника, что влечет за собой распад группы. На основе разработанной модели относительного движения строится управление, которое будет поддерживать устойчивое движение каждого спутника в группе. Как правило, все модели относительного движения выводятся методом линеаризации уравнений движения в приближениях малости расстояния между спутниками относительно радиуса орбиты аппарата. В работе используется линейная модель Хилла-Клохесси-Уилтшера [6]. Движение спутников как группы осуществляется за счёт поддержания между аппаратами связи. Зная текущие параметры движения каждого спутника в группе, управление относительным дрейфом можно построить более эффективно. Наиболее простой математической моделью, описывающей группу спутников, является граф. Впервые в описании движения группы спутников применялись коммуникационные графы в книге [1]. Одна из последних статей, на текущий момент, в области неориентированных графов [4]. В данной работе производились численные

исследования и подтверждение результатов статьи [4], а также описана ситуация, в которой метод, реализованный в [4], не давал сходимости движения. Для решения проблемы сходимости движения был разработан метод на основе ориентированных, взвешенных графов. Приведены основные определения, теоремы вместе с доказательством сходимости движения на основе данного метода. Проведен численный анализ построенного метода.

# 1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается движение группы спутников. Движение группы рассматривается относительно одного выделенного спутника. Назовём этот спутник главным, остальные – ведомыми. Спутники обращаются по низкой околоземной орбите, расстояние в таком случае от центра масс всех спутников до поверхности Земли порядка 500 км. Рассматривается движение спутников в ньютоновском потенциале с учетом влияния несферичности Земли. Несферичность Земли учитывается второй гармоникой гравитационного потенциала  $J_2$  [3]. В качестве модели относительного движения рассматриваются уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшера.

Необходимо построить управление, которое будет гасить относительный дрейф аппаратов в группе. Затем исследовать движение группы спутников с учетом линейной модели Хилла-Клохесси-Уилтшера с учётом построенного управления. Реализовать различные модели управления относительным групповым движением. Начальные позиции и скорости в орбитальной системе координат для всех спутников известны.

## 2. Уравнения движения

Рассмотрим уравнения движения для каждого из  $n$  тел в ИСК:

$$\ddot{\mathbf{r}}_n = -\mu \frac{\mathbf{r}_n}{r_n^3} + \mathbf{a}_{J_2 n}$$

где  $\mathbf{r}_n$  – радиус-вектор  $n$ -го спутника в инерциальной системе координат,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли,  $\mathbf{a}_{J_2 n}$  – вектор дополнительного ускорения  $n$ -го спутника, связанный с несферичностью Земли. Вторая гармоника геопотенциала для Земли  $J_2 \approx 1082.63 \cdot 10^{-6}$ .

Для вычисления  $\mathbf{a}_{J_2 n}$  воспользуемся формулой, взятой из [3]:

$$\mathbf{a}_{J_2 n} = \frac{3\delta}{2} \frac{\mathbf{r}_n}{r_n^5} \left( \frac{5r_z^2}{r_n^2} - 1 \right) - \frac{3\delta}{r_n^5} \mathbf{R}_z$$

$$\delta = J_2 \mu R_{earth}^2$$

где  $R_{earth}$  – радиус Земли,  $\mathbf{r}_n = (r_x, r_y, r_z)$ ,  $\mathbf{R}_z = (0, 0, r_z)$

### 2.1. Уравнения Хилла-Клохесси-Уилтшера

Данные уравнения выводятся в предположении, что главный спутник движется по круговой орбите. Главный и ведомые спутники подвержены только центральному ньютоновскому полю. Рассмотрим 2 спутника, на случай  $n$  спутников выводимые системы уравнений обобщаются. В ИСК уравнения движения обоих спутников:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\mu \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \tag{1}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\mu \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \tag{2}$$

Уравнения рассматриваются в орбитальной системе координат (ОСК).  
 Центр орбитальной системы координат находится в центре масс главного аппарата.

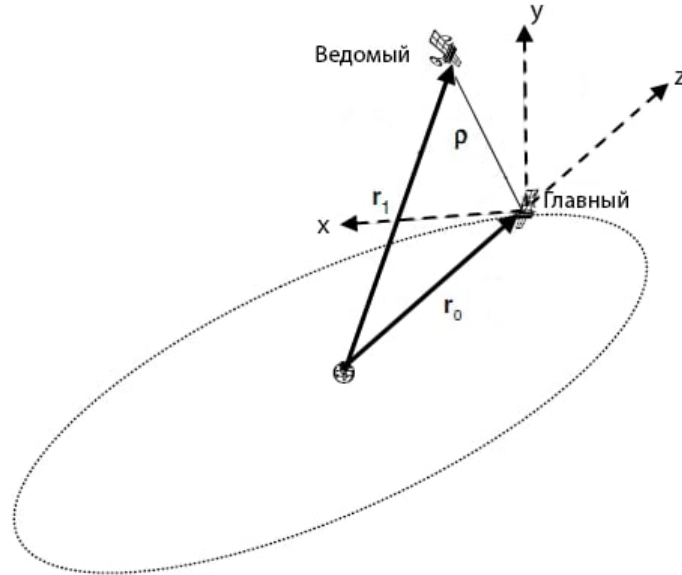


Рисунок 1 – Относительные координаты

$\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор главного аппарата,  $\mathbf{r}_1$  – радиус-вектор ведомого аппарата.

Введём радиус-вектор ведомого аппарата относительно главного  $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ . Вычтем из уравнения (2) уравнение (1). Получим:

$$\ddot{\rho} = -\mu \frac{\mathbf{r}_0 + \rho}{|\rho + r_0|^3} + \mu \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} \quad (3)$$

Для последующих рассуждений необходимо сформировать матрицу перехода от ИСК в ОСК. Базисные векторы ОСК в ИСК задаются следующим образом:

$$e_3 = \frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|}$$

$$e_2 = \frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0|}$$

$$e_1 = e_2 \times e_3$$



Тогда матрица перехода  $\mathbf{A} = (e_1, e_2, e_3)^T$ . Из теоремы о сложении скоростей:  $\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0 + \omega_{osk} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ , где  $\omega_{osk}$  – угловая скорость вращения ОСК относительно ИСК.  $\omega_{osk} = \sqrt{\mu/r_0^3}$ . Так как относительный радиус-вектор в орбитальной СК  $\rho_{osk} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ , то относительная скорость в ОСК имеет вид:  $\dot{\rho}_{osk} = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0 + \omega_{osk} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0))$ . Продифференцируем предыдущее равенство и получим:

$$\ddot{\rho}_{osk} = \mathbf{w}_{osk} + 2\omega_{osk} \times \mathbf{v}_{osk} + \dot{\omega}_{osk} \times \rho_{osk} + \omega_{osk} \times (\omega_{osk} \times \rho_{osk}),$$

где  $\mathbf{w}_{osk}$  – относительное ускорение,  $\mathbf{v}_{osk}$  – относительная скорость. По построению базисных осей, ось вращения ОСК относительно ИСК перпендикулярна плоскости орбиты главного спутника, поэтому  $\omega_{osk} = (0, \omega, 0)^T$ . Так как опорная орбита круговая:  $\mathbf{r}_0 = (0, 0, r_0)^T$ , где  $r_0 = const$ . Рассмотрим уравнение в координатном представлении, используя  $\rho = (x, y, z)$ .

$$\omega_{osk} \times \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega z \\ 0 \\ -\omega x \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\omega_{osk} \times (\omega_{osk} \times \rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega z \\ 0 \\ -\omega x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ 0 \\ -\omega^2 z \end{pmatrix} \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (3) с учетом  $\mathbf{r}_0 = (0, 0, r_0)^T$ , получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} - \omega^2 x = -\mu \frac{x}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} = -\mu \frac{y}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 z = -\mu \frac{z + r_0}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \mu \frac{1}{|r_0|^2} \end{array} \right. \quad (6)$$

Раскладывая правую часть уравнений (6) в ряд Тейлора до первого порядка малости  $\frac{|\rho|}{|r|} \ll 1$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \frac{x}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} = -\mu \frac{x}{r_0^3 \left( \frac{y^2}{r_0^2} + \frac{x^2}{r_0^2} + \left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{\mu x}{r_0^3} \left(1 - \frac{3z}{r_0}\right) \\ -\mu \frac{y}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} = -\mu \frac{y}{r_0^3 \left( \frac{y^2}{r_0^2} + \frac{x^2}{r_0^2} + \left(1 + \frac{z}{r_0}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{\mu y}{r_0^3} \left(1 - \frac{3z}{r_0}\right) \\ -\mu \frac{z + r_0}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \mu \frac{1}{|r_0|^2} \approx -\frac{\mu}{r_0^3} (z + r_0) \left(1 - \frac{3z}{r_0}\right) + \frac{\mu}{r_0^2} \end{array} \right.$$

Используя равенство:  $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{|r_0|^3}}$  – угловая скорость движения опорного тела, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} - \omega^2 x = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 z = -\omega^2 z + 3\omega^2 z \end{array} \right.$$

Окончательно получаем следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

В введенной орбитальной СК, точка  $O$  – главное тело. В данной постановке системы уравнений очевидно, что уравнение движения по оси  $Oy$  отделимо от остальных уравнений, движение по этой оси происходит перпендикулярно плоскости орбиты. Это значит, что уравнение на  $y$ -компоненту можно рассматривать отдельно от уравнений на  $z$  и  $x$ -компоненты.

Так как известны начальные координаты и скорости спутников в ОСК, то считаем, что задача Коши поставлена со следующими начальными

условиями:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение задачи (7),(8) можно представить в виде:

$$\begin{cases} x(t) = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos(\omega t) + 2C_3 \sin(\omega t) + C_4, \\ y(t) = C_5 \cos(\omega t) + C_6 \sin(\omega t), \\ z(t) = 2C_1 + C_2 \sin(\omega t) - C_3 \cos(\omega t), \end{cases} \quad (9)$$

где константы  $C_i$  являются функциями начальных условий движения и выражаются следующими формулами:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \\ C_2 = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos(\omega t_0) - \left( \frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin(\omega t_0) \\ C_3 = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin(\omega t_0) + \left( \frac{2\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos(\omega t_0) \\ C_4 = x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega} + 3\omega \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) t_0 \\ C_5 = y_0 \sin(\omega t_0) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t_0) \\ C_6 = y_0 \cos(\omega t_0) - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t_0) \end{cases} \quad (10)$$

Из решения (10) видно, что параметр  $C_1$  отвечает за линейный дрейф ведомого спутника относительно опорной орбиты а также за смещение вдоль радиус-вектора главного спутника. Параметр  $C_4$  отвечает за смещение вдоль касательного направления к орбите опорного спутника, а параметры  $C_2, C_3$  и  $C_5, C_6$  за амплитуду и фазу колебаний в плоскости и перпендикулярно плоскости опорной орбиты. Стоит отметить, что данные решения справедливы, в силу линейности модели, только на сравнительно небольших временах и не учитывают влияния второй гармоники геопотенциала.

## 2.2. Разложение до второго порядка малости

Разложим систему (6) до второго порядка малости:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \frac{x}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{\mu x}{r_0^3} \left(1 - \frac{3z}{r_0}\right) + \frac{3\mu}{r_0^4} xz \\ -\mu \frac{y}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} \approx -\frac{\mu y}{r_0^3} \left(1 - \frac{3z}{r_0}\right) + \frac{3\mu}{r_0^4} yz \\ -\mu \frac{z + r_0}{(y^2 + x^2 + (r_0 + z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \mu \frac{1}{|r_0|^2} \approx \frac{\mu z}{r_0^3} \left(2 + \frac{3z}{r_0}\right) + \frac{3\mu}{r_0^4} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2\right) \end{array} \right.$$

Данную систему можно рассматривать как возмущенные уравнения ХКУ, с параметром возмущения  $\varepsilon = \frac{\mu}{r_0^4} = \frac{\omega^2}{r_0}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 3\varepsilon xz \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 3\varepsilon yz \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 3\varepsilon \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2\right) \end{array} \right. \quad (11)$$

Пусть  $x_h, y_h, z_h$  - решения невозмущенной задачи (9). Тогда предположим, что решение системы (11) имеет следующую форму:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_h + \varepsilon x_{1h} \\ y = y_h + \varepsilon y_{1h} \\ z = z_h + \varepsilon z_{1h} \end{array} \right. \quad (12)$$

Начальные условия совпадают с (8). Подставив (12) в (11), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_{1h} + 2\omega\dot{z}_{1h} = 3x_h z_h \\ \ddot{y}_{1h} + \omega^2 y_{1h} = 3y_h z_h \\ \ddot{z}_{1h} - 2\omega\dot{x}_{1h} - 3\omega^2 z_{1h} = 3 \left(\frac{x_h^2}{2} + \frac{y_h^2}{2} - z_h^2\right) \end{array} \right.$$

### 3. Управление группой спутников на основе метода Ляпунова

#### 3.1. Метод Ляпунова

Рассмотрим методику построения управления группой спутников. Метод базируется на том, что в орбитальной системе координат в линейной модели за дрейф ведомого спутника относительно главного отвечает параметр  $C_1$ . Поэтому в первом приближении для поддержания группового движения спутников необходимо каким-то образом изменять параметр  $C_1$  каждого спутника. Для определения правила управлением формацией спутников будем использовать прямой метод Ляпунова. Необходимо рассмотреть закон управления для одного спутника а далее обобщить на случай  $n$  аппаратов. Рассмотрим влияние вектора управляющего ускорения  $u = (u_x, u_y, u_z)$  на параметр дрейфа  $C_1$ .

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = u_x \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u_y \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = u_z \end{cases} \quad (13)$$

Производная параметра дрейфа по времени имеет вид:

$$\dot{C}_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) = \frac{\ddot{x}_0}{\omega} + 2\dot{z}_0 \quad (14)$$

Подставим первое уравнение системы (13) в (14) и получим эволюцию параметра дрейфа спутника:

$$\dot{C}_1 = \frac{u_x - 2\omega\dot{z}_0}{\omega} + 2\dot{z}_0 = \frac{u_x}{\omega} \quad (15)$$

Для подавления относительного дрейфа, необходимо чтобы параметр

дрейфа каждого спутника был равен нулю:  $C_{ref} = 0$ . В таком случае сформируем кандидат-функцию Ляпунова для каждого спутника:

$$V_i = C_{1i}^2$$

Функция  $V_i$  всюду неотрицательна и равна нулю только при  $C_{1i} = C_{ref} = 0$ . Производная по  $t$  функции  $V_i$  с использованием (15) выглядит следующим образом:

$$\dot{V}_i = \frac{d}{dt} (C_{1i}^2) = 2C_{1i}\dot{C}_{1i} = 2C_{1i} \left( \frac{u_{xi}}{\omega} \right) \quad (16)$$

Для обеспечения асимптотически устойчивого опорного движения, ввиду теоремы Барбашина-Красовского, необходимо потребовать, чтобы функция  $\dot{V}_i$  была неположительной. Данное требование сформулируем так:

$$\dot{V}_i \leq 0 \Rightarrow \dot{V}_i = -k_c C_{1i}^2 \quad (17)$$

Где  $C_{1i}^2 \geq 0$ , а  $k'_c = \text{const} > 0$ . Таким образом получим следующее соотношение:

$$\frac{u_{xi}}{\omega} = -C_{1i} \frac{k_c}{2}$$

Выразим функцию  $u_{xi} = f(C_{1i})$ :

$$u_{xi} = -C_{1i} \frac{k_c}{2} \omega \quad (18)$$

Выражение (18) показывает управление, которое обеспечивает выполнение теоремы Барбашина-Красовского, а точнее необходимых условий. Обеспечим выполнение достаточных условий, а значит и глобальной асимптотической устойчивости относительного движения спутника:  $\dot{V}_i = 0$ . Имеем единственное решение:  $C_{1i} = 0$ . Следовательно существует единственное решение при котором производная функции Ляпунова равна нулю, а это

и есть те самые  $C_{1i} = C_{ref} = 0$ . Итого: мы получили управление, которое обеспечит глобальную асимптотическую устойчивость опорного движения.

### 3.2. Применимость линейной модели в управлении формацией спутников

Моделью для управления каждого аппарата из группы является (18). Данная модель управления построена на линейной модели первого порядка малости уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшера. Линейная модель не учитывает вторую гармонику геопотенциала Земли, которая существенно изменяет траекторию движения спутников на околоземной орбите. Поэтому проведем следующие рассуждения.

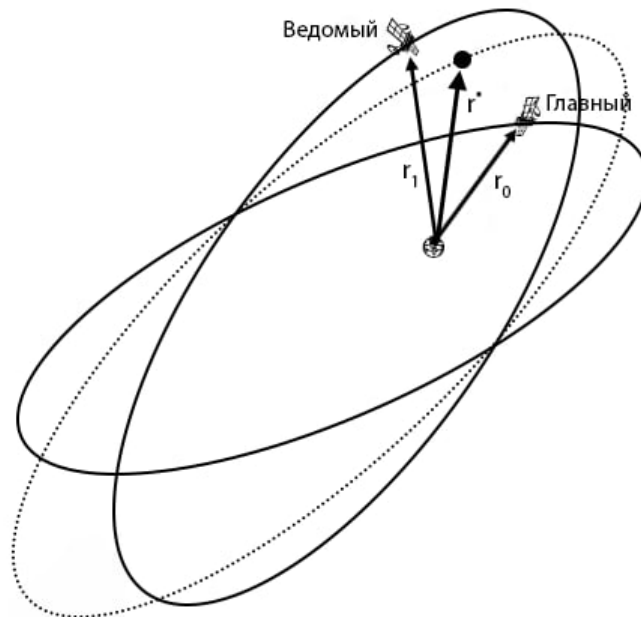


Рисунок 2 – Фиктивная орбита

Рассмотрим 2 спутника на околоземной орбите. Ввиду постановки задачи начальное положение 2-х спутников на орбите таково, что существует хотя бы одна точка на круговой орбите (пример на рисунке 2), такая, что

$\frac{|\rho_i|}{|r|} \ll 1$  выполняется для каждого спутника. Тогда поместим в эту точку фиктивный аппарат и относительно него для каждого спутника рассмотрим уравнения ХКУ. Относительно фиктивного аппарата движение двух других аппаратов описывается решением уравнений ХКУ, но так как данные уравнения линейные и однородные, то разность двух решений есть решение. Таким образом, для управления двумя спутниками достаточно использовать модель ХКУ с учетом второй гармоники геопотенциала Земли при условии рассмотрения относительного движения двух аппаратов. Данное рассуждение обобщается на случай группы из  $n$  аппаратов.

### 3.3. Изучение конфигураций группы спутников

Рассмотрим  $n$  спутников, вращающихся на околоземной орбите. Способ выведения их на орбиту таков, что они в орбитальной системе координат относительно опорного аппарата попадают в определенную окрестность. Задача заключается в том, чтобы после выведения аппаратов на орбиту в определенной области сконфигурировать управление таким образом, чтобы на определенном промежутке времени поддерживать их относительные положения в пределах этой области.

На борту каждого спутника установлены датчики и бортовой комплекс, способный вычислять текущее положение а также скорость относительно единственного главного спутника. Аппараты ведут связь между собой, причем важно отметить, что в зависимости от следующих конфигураций способы связи будут изменяться. В группе спутники делятся на два вида: материнские и дочерние. Отличие между видами спутников заключается в том, что материнские спутники способны вести связь (принимать и отправлять сигнал) на достаточно большом удалении, а дочерние аппараты ограничены в возможности принимать сигнал по сравнению с материнскими, но ограничения на отправку сигнала у них нет. Так как существует



ограничение для дочерних спутников на приём сигналов, назовём максимальное расстояние, на котором дочерний спутник может принимать сигнал, радиусом видимости.

### 3.4. Описание управления группой спутников

На основании (16) и (17):

$$2C_{1i}\dot{C}_{1i} = -k_c C_{1i}^2$$

Управление  $i$ -го спутника задается следующим уравнением

$$\dot{C}_{1i} = -kC_{1i} \quad (19)$$

где константа  $k = \frac{k_c}{2}$ . Уравнение (19) задает управление одного спутника и сводит параметр дрейфа каждого спутника к нулю. Проблема заключается в том, что, когда спутники находятся в группе, то сводить параметр дрейфа каждого спутника к нулю может быть слишком затратно и попросту бессмысленно. Логично рассматривать движение группы спутников в целом, а значит задача заключается в том, чтобы свести параметр дрейфа всех спутников к одному значению. Тогда необходимо связать управление каждого спутника с параметрами движения других спутников в группе. Для описания управления системой введем вектор, состоящий из параметров дрейфа каждого спутника в группе

$$\mathbf{C}_1 = C_1^i$$

$i = 1, \dots, 5$ . Ввиду того, что управление  $i$ -го аппарата строится на основе параметров дрейфа его соседей, необходимо ввести связь параметра дрейфа  $i$ -го спутника и его соседей.

## 4. Моделирование конфигурации спутников на основе неориентированного графа

### 4.1. Алгоритм управления движения на основе неориентированного графа

Качественным методом описания группы спутников являются графы. Графы – это конструкции для представления взаимодействий между конечным числом объектов системы, которые допускают графическое представление. Графы допускают представление в терминах матриц.

Рассмотрим случай связного, ациклического, неориентированного графа. Симметричная, квадратная матрица смежности  $A(G)$  формируется по правилу:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ спутник взаимодействует с } j \text{ спутником} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Диагональная матрица степеней вершин  $D(G)$  формируется по следующему правилу:

$$D_{ii} = n, \text{ где } n - \text{ количество ребер } i \text{ вершины}$$

Лапласиан графа представим следующей матрицей:

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

Матрица Лапласа  $L$  связывает параметр дрейфа  $i$ -го спутника и его соседей. Управление системой удовлетворяет следующему уравнению

$$\dot{\mathbf{C}}_1 = -kL\mathbf{C}_1 \quad (20)$$

В связи с тем, что лапласиан графа симметричен и положительно полуопределен, его действительные собственные значения могут быть упорядочены в таком виде:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

Граф  $G$  – связный тогда и только тогда, когда  $\lambda_2 > 0$ . Доказательство приведено в [2]. Ввиду того, что решение системы (20) есть

$$\mathbf{C}_1 = A_1 w_1 e^{-\lambda_1 t} + \dots + A_n w_n e^{-\lambda_n t}$$

где  $A_1, \dots, A_n$  константы, сходимость движения определяется нулевым собственным значением  $\lambda_1$  и собственным вектором  $w_1$ . Остальные компоненты решения экспоненциально затухают.  $w_1$  состоит из единиц, так как сумма элементов строки лапласиана равна диагональному элементу с обратным знаком. Управление системой спутников построено. Исследована сходимость движения управления, но возникает проблема. Она заключается в том, что лапласиан графа не интерпретируемая матрица. Описать физический смысл коэффициентов связи, построенных на основе матрицы лапласа, невозможно. Необходимо создать между спутниками связь, которая будет легко интерпретируема. В работе [4] рассматривается переход к интерпретируемому управлению. Переход совершается в два этапа:

1) Нормализованный лапласиан графа:  $Q = D^{-\frac{1}{2}}(G)LD^{-\frac{1}{2}}(G)$ . На основании теоремы, приведенной в [2], свойства решения спектральной задачи нормализованного лапласиана совпадают с таковой у лапласиана. Это значит, что

$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$$

Граф  $G$  – связный тогда и только тогда, когда  $\mu_2 > 0$ .

2) Матрица управления выглядит следующим образом:

$$S = D^{-\frac{1}{2}}(G)QD^{\frac{1}{2}}(G)$$

Собственные значения матрицы  $S$  и матрицы  $Q$  совпадают, но собственные векторы различны. Тогда в уравнении (20) правомерно заменить  $L$  на матрицу  $S$ .

$$\dot{C}_1 = -kSC_1 \quad (21)$$

Простейшим механизмом исследования алгоритма управления является построение конфигурации группы спутников и последующее моделирование их движения. В случае неориентированного графа задача упрощается следующим приближением. В процессе относительного движения спутники не удаляются на расстояние большее радиуса видимости. Соответственно, хотя бы один спутник находится в сфере видимости главного спутника. Рассмотрим моделирование со следующими параметрами: количество спутников в группе 5. Два спутника материнские, остальные дочерние. Спутники выводятся на околоземную орбиту с некоторой ошибкой.

В данной постановке задачи управление осуществляется по следующим шагам:

1. Определение текущего положения и скорости каждым спутником.
2. Формирование матрицы смежности на основе положения спутников.
3. Построение графа на основе матрицы смежности.
4. Определение спутников, которые будут участвовать в управлении, для каждого спутника.
5. Непосредственное нахождение управляющей силы.

## 4.2. Формирование матрицы смежности на основе положения спутников.

После первого шага имеются координаты в орбитальной системе координат каждого спутника. Далее используется следующий алгоритм заполнения матрицы смежности  $A$ : все материнские спутники всегда взаимодействуют между собой, поэтому  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ , где  $j, i$  – индексы материнских спутников. Каждый дочерний спутник определяет ближайшего материнского до него спутника и коммуницирует только с ним. Соответственно  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ , где  $j$  – индекс материнского спутника,  $i$  – индекс дочернего спутника. Остальные элементы матрицы равны нулю.

### 4.2.1. Построение графа на основе матрицы смежности.

Матрица смежности является одним из способов представления графа в виде матрицы. На выходе предыдущего шага получается квадратная, бинарная, диагональная матрица. Диагональные элементы равны нулю. Матрица  $A$  формирует простой, неориентированный граф  $G$ .

### 4.2.2. Определение спутников, которые будут участвовать в управлении, для каждого спутника.

На основе сформированного графа  $G$ , происходит поиск и формирования списка соседей каждого спутника. Матрица управления  $S$  данной задачи:

$$S_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{N^i}, & i \neq j \text{ и } j\text{-й спутник входит в список соседей } i\text{-го} \\ 0, & i \neq j \text{ и } j\text{-й спутник не входит в список соседей } i\text{-го} \\ 1, & i = j \end{cases}$$

где  $N^i$  количество соседей  $i$ -го спутника. На основе рассуждений, приведенных в предыдущей главе, и определении матрицы управления  $S$ , следует, что параметры дрейфа каждого спутника будут сходиться к среднему арифметическому значению начальных параметров дрейфа. Дальнейшие рассуждения приведены в начале главы (6).

### 4.2.3. Поиск управляющей силы.

Поскольку каждый спутник имеет возможность определить координаты и скорости в орбитальной системе координат, параметр  $C_1^i$  каждого спутника рассчитывается по формуле (18). Далее каждый спутник находит среднее арифметическое значение  $C_{1\ mean}^i$  его соседей. Тогда итоговое выражения для управление  $i$ -го спутника есть  $C_{1\ res}^i = C_1^i - C_{1\ mean}^i$ . Соответственно функция управления выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u_{x,i} = -kC_{1\ res}^i \\ u_{y,i} = 0 \\ u_{z,i} = 0 \end{cases}$$

где  $k = \text{const}$ .

## 4.3. Моделирование.

Необходимо отметить, что линейная модель применяется только для построения управления. На основании применимости линейной модели, движение спутников рассматривается относительно одного фиктивного спутника. Фиктивный спутник движется с учетом влияния второй гармоники геопотенциала Земли, соответственно, все параметры остальных аппаратов рассматриваются относительно этой фиктивной орбиты. Процесс моделирования движения космических аппаратов осуществляется с помощью численного интегрирования уравнений движения методом Рунге-Кутты 4-го

порядка. Уравнения движения  $i$ -го спутника

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\mu \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \mathbf{a}_{J_2 i} + \mathbf{u}_i \quad (22)$$

В работе не рассматривается ограничение на управление ввиду сложности анализа процесса ограничения. Предполагается, что спутники в качестве управления используют бестопливные методы. Таким методом может служить аэродинамический тормоз. Так как спутники находятся на околоземной орбите, данный метод может быть вполне эффективным. Процесс вывода кубсатов на орбиту имеет случайную ошибку. Начальные данные в орбитальной системе координат задаются нормальным распределением. Начальные координаты и скорости каждого спутника в ОСК задаются нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_x = 1$  м и  $\sigma_v = 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  соответственно. Начальные данные

$$\begin{cases} i_0 = 40^\circ, u_0 = 5^\circ, \Omega_0 = 20^\circ, R_0 = 500 \text{ км} \\ \sigma_x = \pm 1 \text{ м}, \sigma_y = \pm 1 \text{ м}, \sigma_z = \pm 1 \text{ м} \\ \sigma_{vx} = \pm 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vy} = \pm 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vz} = \pm 0.001 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{cases}$$

где  $i_0$ ,  $u_0$ ,  $\Omega_0$  – параметры фиктивной орбиты, относительно которой рассматривается движение остальных спутников. Рассмотренный выше закон управления включает в себя коэффициент управления  $k$ . Коэффициент управления не зафиксирован и может изменяться в зависимости от условий задачи. На коэффициент управления влияет шаг интегрирования, механизмы управления, а также ограничения накладываемые на управление в целом. Например, отсутствие управляемости по одной из осей аппарата. Необходимо провести моделирование и подобрать коэффициент управления в текущей постановке задачи. Для подбора и анализа коэффициента управления  $k$  построим графики орбит относительно одного из спутников

в группе в орбитальной системе координат для различных  $k$ . Относительные орбиты замкнуты, а коэффициент управления  $k = 10^{-5}$  обеспечивает ограниченное движение, при этом реализуем с практической точки зрения бестопливными методами.

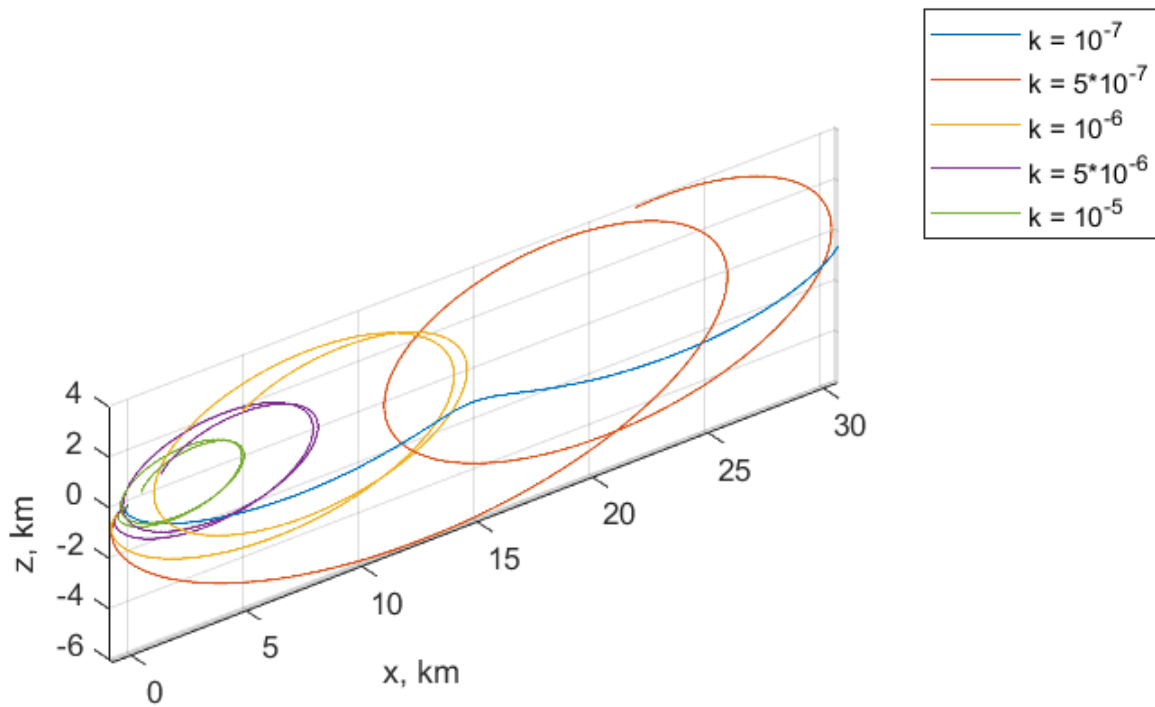


Рисунок 3 – Относительные орбиты в орбитальной СК

Скорость сходимости параметра дрейфа зависит от частоты управления. Введем параметр частоты управления  $\sigma_u$ , который показывает на каком шаге интегрирование происходит управления. Производить управление чаще шагов интегрирования не имеет смысла, так как интегрирование происходит с частотой  $\sigma \approx 0.1$  Гц, а обеспечить управление на большей частоте невозможно бестопливными методами. Также не имеет смысла совершать управление на частотах  $\sigma_u \approx 10$  Гц, так как управление будет слишком грубым и не будет учитывать особенностей движения. На графике



представлены зависимости сходимости максимального параметра дрейфа в группе от времени в зависимости от частоты управления. Оптимальная частота управления с точки зрения потери точности и возможностей механизмов управления  $\sigma_u = 0.2$  Гц.

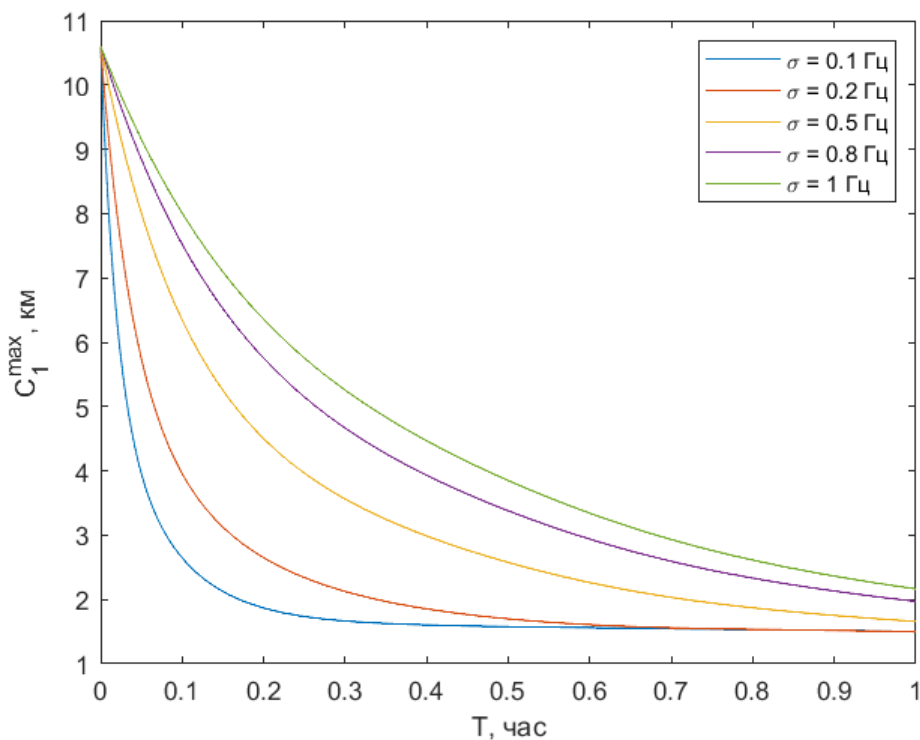


Рисунок 4 – Зависимость параметра дрейфа от частоты управления

Управляющая сила  $u$  представляет собой добавочное ускорение, вносимое в уравнение движения (22) каждому спутнику. С учетом всех выбранных параметров а также закона управления и уравнений движения, графики параметра дрейфа и управляющей силы от времени на основе неориентированного графа представлены на рисунках 5, 6.

На основе графика параметра дрейфа каждого спутника в группе, можно сделать вывод, что через 30 минут после начала движения относительный дрейф каждого спутника погасился. Параметр  $C_1$  каждого спутника устремился к среднему арифметическому значению. На протяжении всего последующего движения параметр дрейфа каждого спутника удерживается на данном значении, испытывая небольшие отклонения ввиду

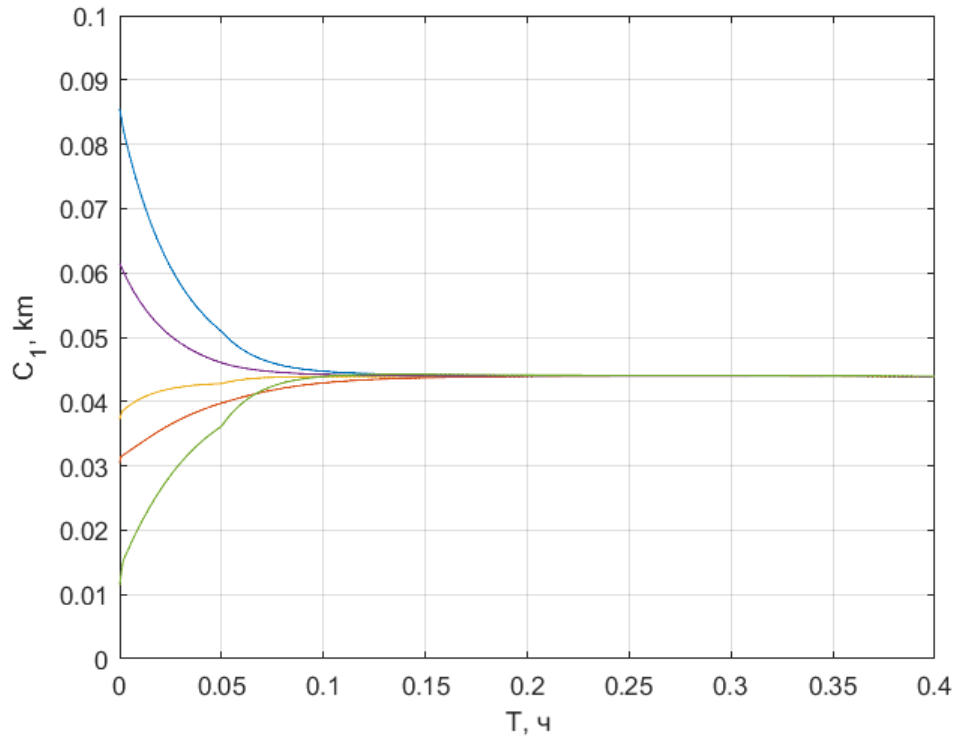


Рисунок 5 – Параметр дрейфа спутников в группе

того, что управление осуществляется не на каждом шаге интегрирования, а значит существует некий разброс параметра на каждом шаге.

Представленные графики управляющего воздействия на рисунке 6 для каждого спутника (М – материнский, Д – дочерний) и параметра дрейфа показывают, что управление, построенное на неориентированном графе, позволяет достичь сходящегося относительного движения при условии начальных значений координат и скоростей в орбитальной системе координат. Тогда, сделав допущение о том, что один из дочерних спутников, ввиду непредвиденных ситуаций, мог быть выведен на орбиту с гораздо большей ошибкой, промоделируем движение.

$$\begin{cases} \sigma_{x5} = \pm 1000\text{м}, \sigma_{y5} = \pm 1000\text{м}, \sigma_{z5} = \pm 1000\text{м} \\ \sigma_{vx5} = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vy5} = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \sigma_{vz5} = \pm 0.1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \end{cases} \quad (23)$$

При этом процесс формирования графа и модель управления не изменяется.

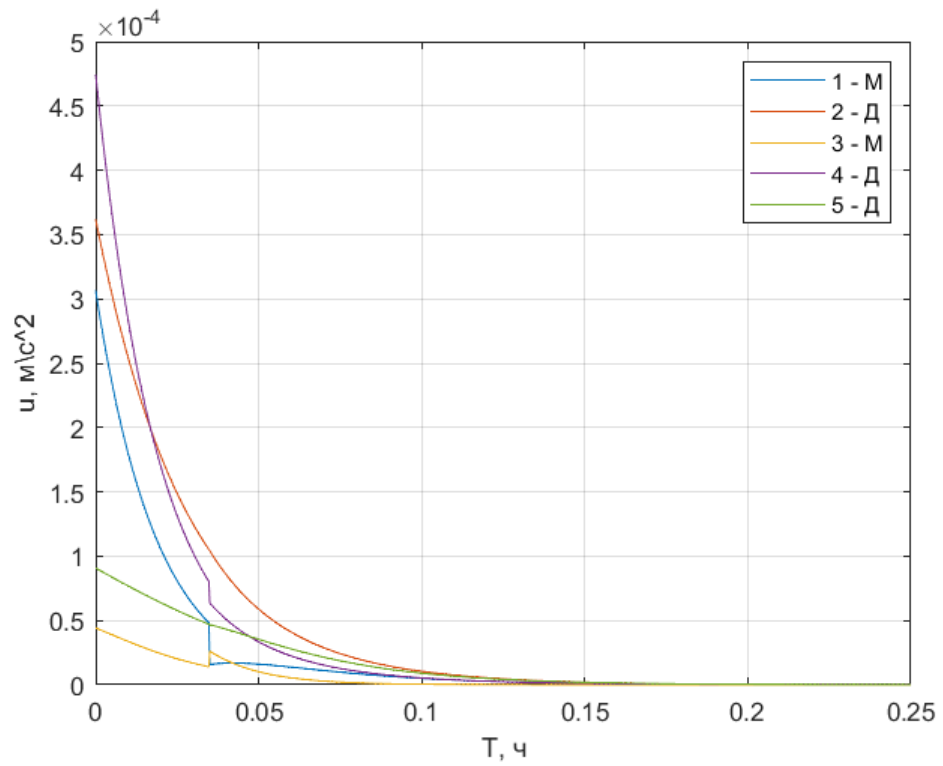


Рисунок 6 – Управляющее воздействие

Граф по прежнему остается неориентированным.

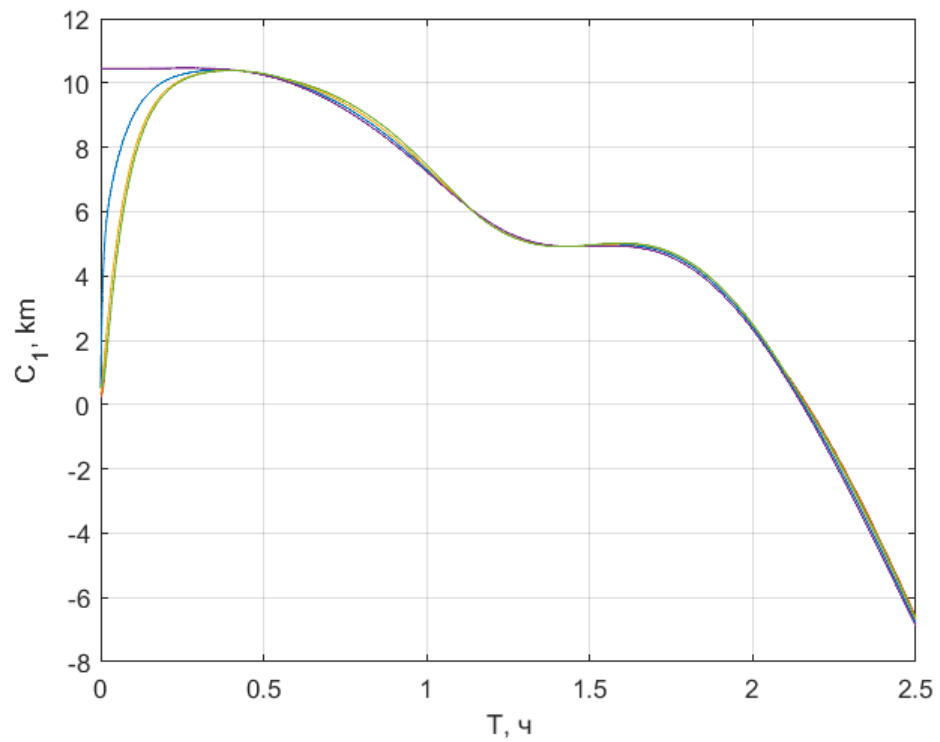


Рисунок 7 – Параметр дрейфа группы спутников

График на рисунке 7 интерпретируется следующим образом. Когда дочерний спутник находится достаточно далеко, остальные спутники в группе не могут получать параметры его движения, а значит в их управлении далекий спутник не участвует. Как только удаленный спутник приближается достаточно близко, остальные спутники в группе получают информацию о параметрах движения этого спутника и начинают варьировать параметры дрейфа таким образом, чтобы остановить относительный дрейф. Спутники не успевают свести относительный дрейф к среднему арифметическому параметру и далее блуждающий аппарат пропадает из зоны влияния остальных спутников. Если при выведении аппаратов на орбиту отделился от группы только один спутник, ситуацию относительного дрейфа может исправить метод, основанный на ориентированном, взвешенном графе.

Для сравнения двух методов введем функцию разности максимального и минимального параметра дрейфа на каждом шаге интегрирования. Данная функция показывает как в группе изменяется два граничных значения, насколько быстро разность устраняется и есть ли осцилляции разности, которые показывают неустойчивое поведение системы.

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_1^{max} - \mathbf{C}_1^{min}$$

График функции разности для случая одного удаленного спутника демонстрирует неустойчивое поведение системы.

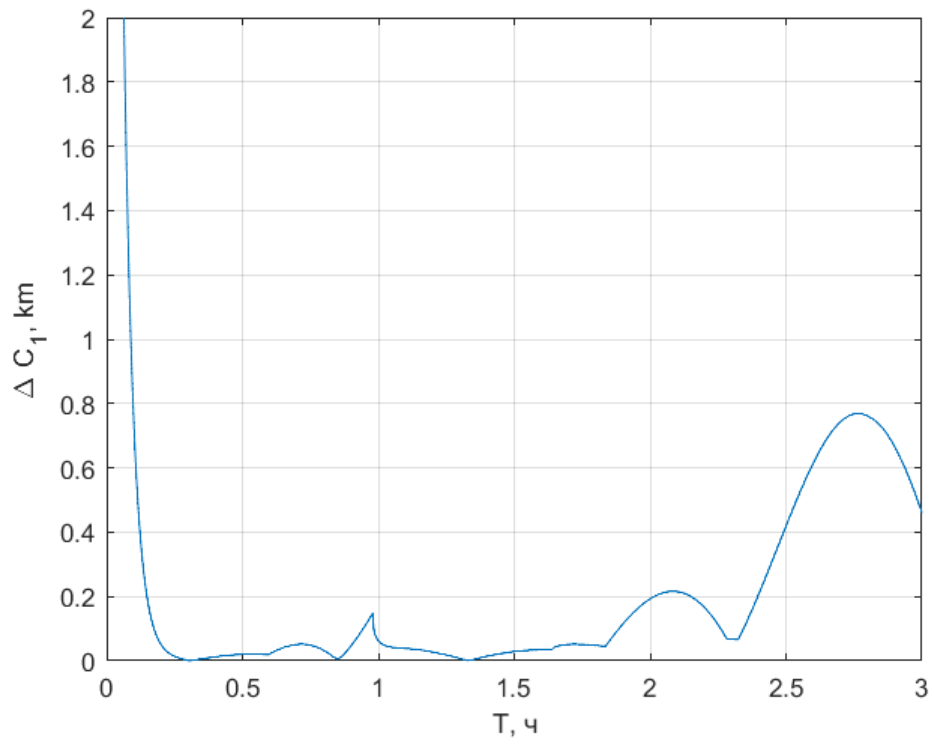


Рисунок 8 – Функция разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе

## 5. Моделирование конфигурации спутников на основе ориентированного графа

Метод построения управления группой спутников значительно усложняется, если отказаться от приближения, что спутники на всём промежутке времени не удаляются за пределы сферы видимости. Коммуникация между материнскими спутниками не зависит от расстояния, так как материнские спутники обеспечивают движение всей группы как целого. Проблемы возникает с дочерними спутниками. С точки зрения космической навигации дочерние аппараты не ограничены в отправке сигнала, тогда как ограничение на принятие сигнала весьма существенно. В таком случае, выходя за пределы сферы видимости, материнский спутник способен определить расстояние до дочернего и подобрать управление таким образом, чтобы вместе с текущими активными дочерними спутниками восстановить связь с отставшим аппаратом. Используя данный подход, предыдущая задача обобщается на случай ориентированного графа. Для материнских и дочерних спутников, коммуницирующих между собой, дуги направлены от материнского к дочернему и в обратном направлении. Связь между всеми материнскими спутниками поддерживается всегда, поэтому дуги направлены в обе стороны. Для дочернего спутника, вышедшего за сферу видимости, дуга направлена от дочернего к ближайшему материнскому спутнику. В предыдущей главе рассматривалось управление для каждого спутника только на основе параметра  $C_1$  спутников соседей. В данной постановке задачи если спутники входили в сферу видимости, не имело значения на каком расстоянии они удалены. Предположим, что для более точного построения управления группой спутников необходимо учитывать расстояние до каждого спутника-соседа внутри сферы видимости. В этом случае граф становится ориентированным и взвешенным.

## 5.1. Алгоритм построения управления движением группы спутников в случае ориентированного, взвешенного графа

Анализ сходимости управления неориентированного графа обобщается на случай ориентированного, взвешенного графа. Матрица смежности для взвешенного графа:

$$A_{ij}(G) = \begin{cases} -\alpha_{ij}, & \text{если } j \text{ спутник взаимодействует с } i \text{ спутником} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

где  $0 < \alpha_{ij} \leq 1$ . Конкретное правило определения этих коэффициентов укажем позднее при описании процесса моделирования. Материнский спутник создаёт вокруг себя сферу коммуникации, в которую входят дочерние спутники. Тем самым, материнский спутник влияет на движение только тех дочерних аппаратов, которые находятся в его сфере коммуникации, а также на остальных материнских. Поэтому нормированные элементы матрицы смежности взвешенного графа должны определяться с помощью параметров движения соседних спутников.

Диагональная матрица степеней взвешенного графа:

$$D_{ii}(G) = \sum_j \alpha_{ij}$$

Аналогично неориентированному графу, Лапласиан ориентированного, взвешенного графа:

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{X}(t) = -L(G)X(t) \tag{24}$$

В текущей постановке задачи главные спутники непрерывно ведут между собой коммуникацию. Материнский спутник принимает сигнал от единственного удаленного дочернего спутника. Таким образом в графе  $G$  образуется корневое дерево.

**Определение 1.** Ориентированный граф является корневым деревом, если он не содержит ориентированного цикла и имеет вершину  $v_1$  такую, что для любой другой вершины  $v_2 \in G$  существует путь от  $v_1$  к  $v_2$ .

**Лемма 1** [1]. Пусть  $L(G) = PJ(\Lambda)P^{-1}$  – разложение Жордана матрицы Лапласа ориентированного графа  $G$ . Когда  $G$  содержит корневое дерево, матрицу  $P$  можно выбрать так, что

$$J(\Lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

где  $\lambda_i (i = 2, \dots, n)$  имеют положительные действительные части, а  $J(\lambda_i)$  – блок Жордана, связанный с собственным значением  $\lambda_i$ . Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-J(\Lambda)t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t} = p_1 q_1^T \quad (26)$$

где  $p_1$  – первый столбец матрицы  $P$ ,  $q_1^T$  – первая строка матрицы  $P^{-1}$ . Тогда  $p_1^T q_1 = 1$ .



## Доказательство

Рассмотрим разложение Жордана  $L(G)$ . Пусть справедливо

$$P^{-1}L(G)P = J(\Lambda) = \begin{bmatrix} J(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения  $L(G)$ . Поскольку ориентированный граф имеет корневое дерево,  $J_1(0) = 0$  и все остальные собственные значения  $L(G)$  имеют положительные действительные части. Отметим, что

$$L(G)P = PJ(\Lambda)$$

Что подразумевает  $L(G)p_1 = 0$ . Точно также

$$P^{-1}L(G) = J(\Lambda)P^{-1}$$

Первая строка  $P^{-1}$  является левым собственным вектором  $L(G)$  ( $q_1$ ), связанным с нулевым собственным значением. Так как  $p_1^T q_1 = 1$ , то  $PP^{-1} = E$ . Объединяя всё, приходим к выводу, что

$$e^{-L(G)t} = P \begin{bmatrix} e^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J(-\lambda_2)t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J(-\lambda_n)t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Поскольку все ненулевые собственные значения  $L(G)$  имеют положительные действительные части, для всех  $i > 1$  справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-J(\lambda_i)t} = 0$$

Откуда следуют (25), (26)

**Теорема 1** [1]. Для ориентированного графа  $G$ , содержащего корневое дерево, траектория состояния, порожденная (24) с начальным условием  $X(t_0) = X_0$ , удовлетворяет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = (p_1 q_1^T) X_0$$

где  $p_1$  и  $q_1$  правый и левый собственный вектор, связанные с нулевым собственным значением  $L(G)$ , нормированные таким образом, что  $p_1^T q_1 = 1$ .

Как результат, существует  $X(t) \rightarrow A$  для всех начальных условий тогда и только тогда, когда  $G$  содержит корневое дерево. Так как каждый дочерний спутник коммуницирует только с ближайшим материнским спутником, то, сформированный граф  $G$ , является слабо связным.

**Определение 2.** Ориентированный граф называется слабо связным, если для любых двух различных вершин графа существует, по крайней мере один путь, соединяющий их.

**Теорема 2** [1]. Траектория состояния (24) на основе ориентированного графа достигает ограничения для любого начального условия тогда и только тогда, когда граф содержит корневое дерево.

### Доказательство

1) Достаточность. Так как граф содержит корневое дерево, то используя теорему 1, траектория (24) достигает ограничения.

2) Необходимость. Предположим, что траектория (24) достигает ограничения. Тогда, с учетом Леммы 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t} X_0 = C \quad (27)$$

где  $C$  вектор, состоящий из фиксированных констант. Сходимость осуществляется по любой матричной форме. Поскольку правый и левый собственные

векторы матрицы  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t}$ , когда она сходится, должны быть собственными векторами  $e^{-L(G)t}$ , которые, в свою очередь, являются левыми и правыми собственными векторами  $L(G)$ . Тогда  $\mathbf{1}$  левый и правый собственный вектор  $L(G)$ . Таким образом  $L(G)\mathbf{1} = 0$  и  $L(G)^T\mathbf{1} = \alpha\mathbf{1}$ . Следовательно, граф имеет корневое дерево. Теорема доказана.

Также можно отметить, что из асимптотической сходимости следует, что нуль, как собственное значение лапласиана ориентированного графа  $G$ , имеет алгебраическую кратность единице. Следовательно,  $G$  слабо связный.

Если предположить в условии теоремы 2, что граф является сбалансированным, то есть для каждой вершины степень входа и степень выхода равны, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-L(G)t} X_0 = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T X_0$$

где  $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$  – матрица, состоящая из единиц. Сходимость в случае сбалансированного графа осуществляется к среднему начальных условий.

Таким образом, решение уравнения (24) ограничено. Необходимо связать матрицу Лапласа с матрицей управления. Единственным условием на коэффициенты  $\alpha_{ij}$  матрицы  $A(G)$  является ограниченность. Если придать элементам матрицы смежности физический смысл, то лапласиан графа имеет интерпретируемое значение, а значит лапласиан соответствует матрице управления  $L(G) = S(G)$ . Одна из интерпретаций элементов матрицы смежности: элементы могут отражать нормированное на единицу относительное расстояние между каждым спутником-соседом в группе. Другая интерпретация, которая не рассматривается в данной работе, это то, что элементы можно связать не только с относительным положением, но и с нормированной относительной скоростью, что является нетривиальной задачей. Таким образом итоговое управление выглядит аналогично задаче

неориентированного графа.

$$\dot{\mathbf{C}}_1 = -kS(G)\mathbf{C}_1 \quad (28)$$

Используя Теорему 2, управление на основе матрицы Лапласа ориентированного, взвешенного графа и коэффициентов отношения расстояния между спутниками-соседями сходится и ограничено. Матрица управления сводит параметр дрейфа  $C_1$  каждого спутника в группе таким образом, чтобы группа оставалась коммуницирующей между собой. В случае, если один из дочерних спутников окажется вне сферы коммуникации, ближайший материнский спутник начнёт управлять своей группой так, чтобы вернуть в сферу коммуникации выпавший спутник.

Дальнейшие рассуждения и построения метода управления аналогичны методу неориентированного графа. Произведём численное моделирование метода управления на основе ориентированного, взвешенного графа а также сравним результаты с методом на основе неориентированного графа. Необходимо проверить оказалось ли верным предположение о том, что расстояния между главным спутником и дочерними должны влиять на управление системой.

## 5.2. Моделирование

Для сравнения моделей управления на основе ориентированного, взвешенного графа и неориентированного графа необходимо оставить без изменения коэффициент управления  $k$  и частоту управления  $\sigma$ . Начальные условия будут соответствовать ситуации, когда метод неориентированного графа не погасил относительный дрейф, а значит один дочерний спутник из группы в начальный момент времени был достаточно далеко от роя.

$$\sigma_{x5} = \pm 1000\text{м}, \sigma_{y5} = \pm 1000\text{м}, \sigma_{z5} = \pm 1000\text{м}$$

Метод, построенный в главе 5.1, предполагает, что коэффициенты в матрице смежности ограничены  $0 < \alpha_{ij} \leq 1$ , но правила их формирования могут быть заданы произвольным образом. Рассмотрим два процесса формирования элементов матрицы смежности на основе расстояния между спутниками в группе.

Первый способ формирования элементов построен на отношении текущего расстояния до соседнего аппарата и максимального расстояния до всех соседних аппаратов. Если  $i$ -й и  $j$ -й спутники – материнские, то  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$ . Если  $i$ -й спутник материнский, а  $j$ -й дочерний,  $\alpha_{ji} = \frac{S_{ij}}{S_{max}^i}$ .  $S_{max}^i$  – максимальное расстояние между  $i$ -м спутником и остальными второстепенными аппаратами, входящих в сферу коммуникации  $i$ -го.  $S_{ij}$  – расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м спутником.

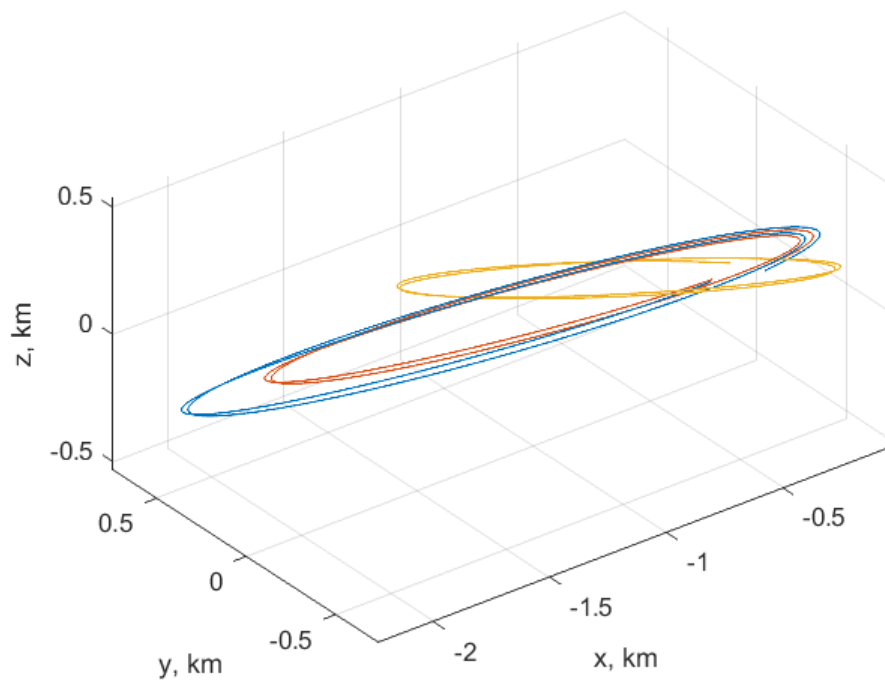


Рисунок 9 – Относительные орбиты в орбитальной СК

Графики зависимости параметра дрейфа, управляющего воздействия (М – материнский, Д – дочерний) и функции разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе от времени

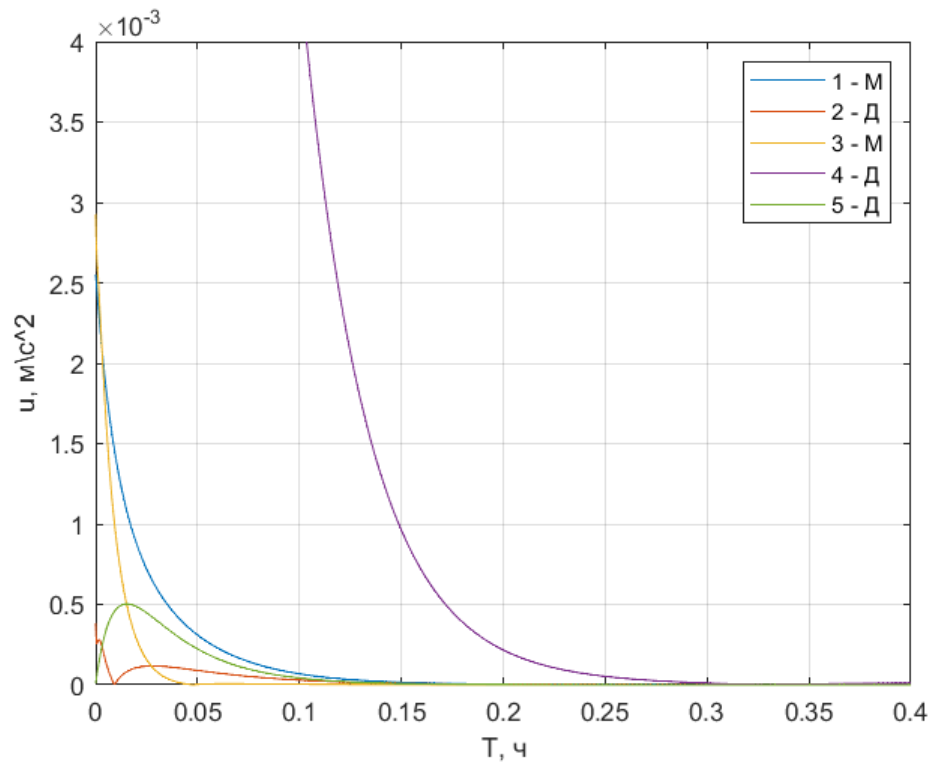


Рисунок 10 – Управляющее воздействие

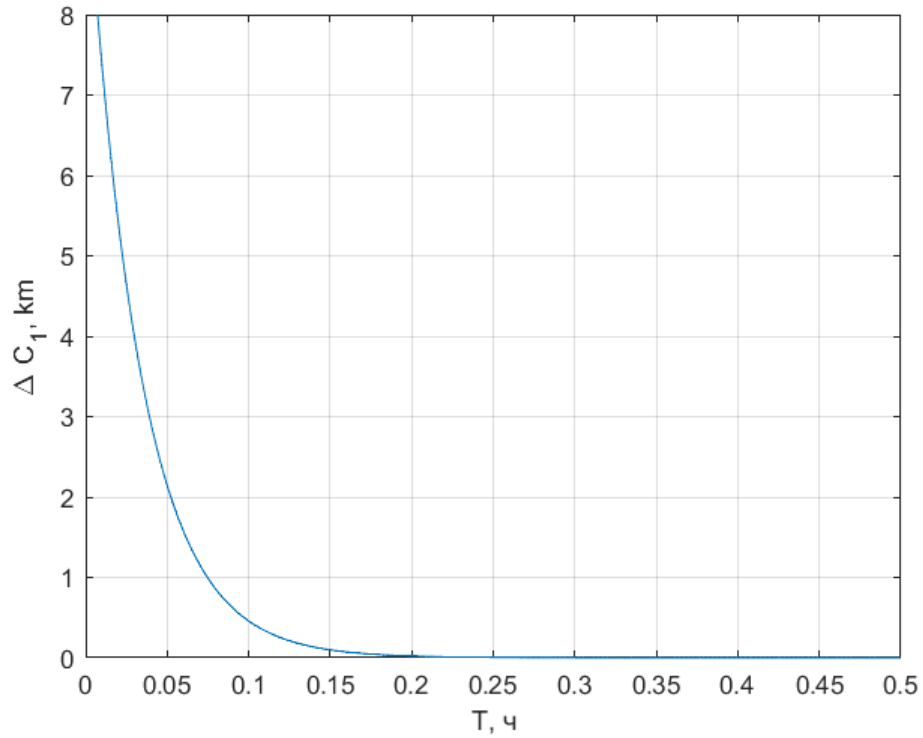


Рисунок 11 – Функция разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе

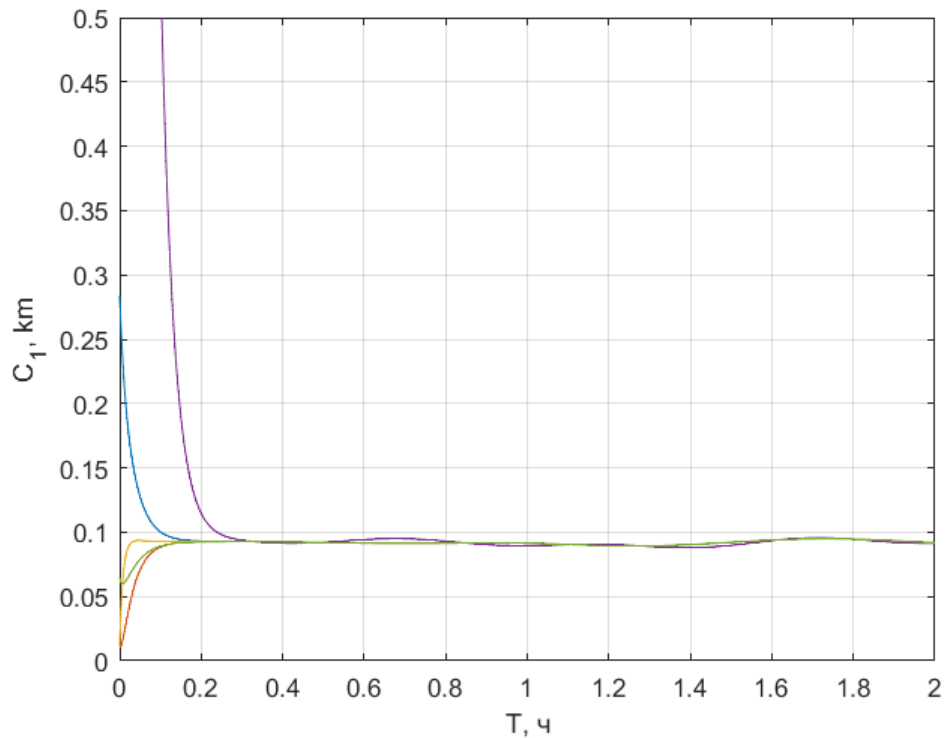


Рисунок 12 – Параметр дрейфа группы спутников

Второй способ формирования элементов построен на отношении текущего расстояния до соседнего аппарата и суммы расстояний до всех соседних аппаратов. Если  $i$ -й и  $j$ -й спутники – материнские, то  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 1$ . Если  $i$ -й спутник материнский, а  $j$ -й дочерний,  $\alpha_{ji} = \frac{S_{ij}}{\sum_j S_{ij}}$  – сумма всех расстояний между  $i$ -м спутником и остальными дочерними аппаратами, входящих в сферу коммуникации  $i$ -го.  $S_{ij}$  – расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м спутником. Графики зависимости параметра дрейфа, управляющего воздействием и функции разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе от времени представлены далее.

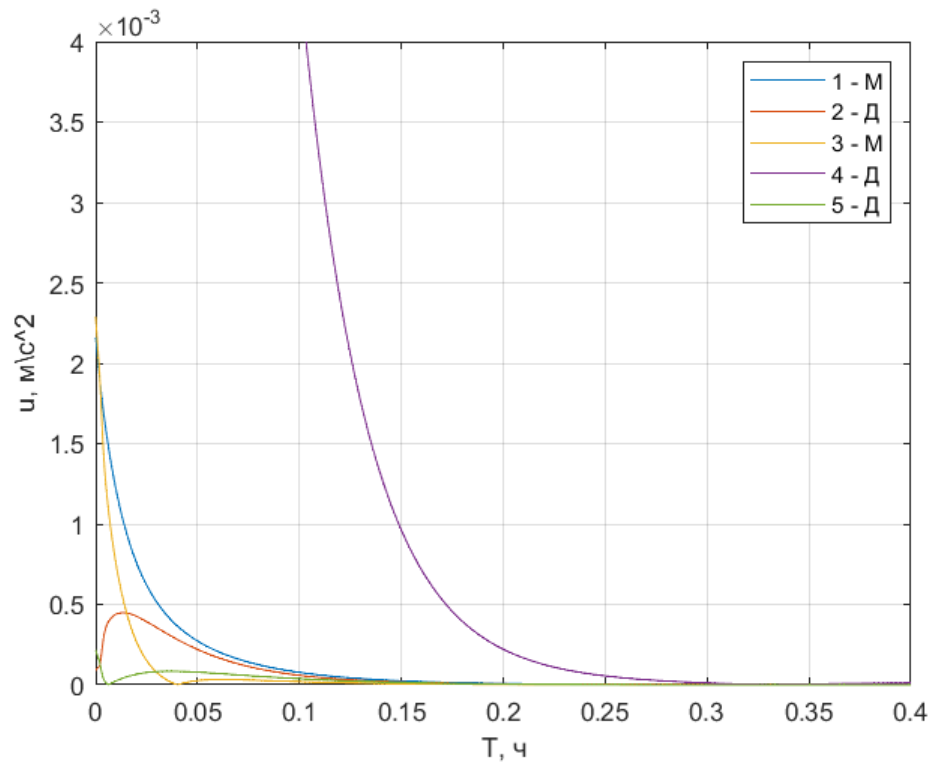


Рисунок 13 – Управляющее воздействие

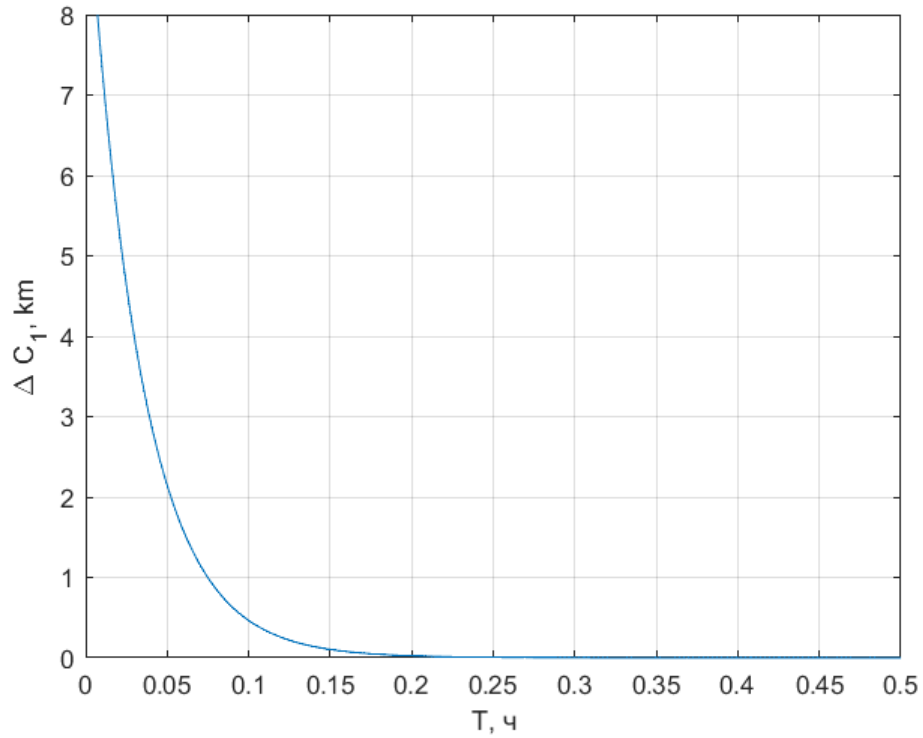


Рисунок 14 – Функция разности максимального и минимального параметра дрейфа в группе



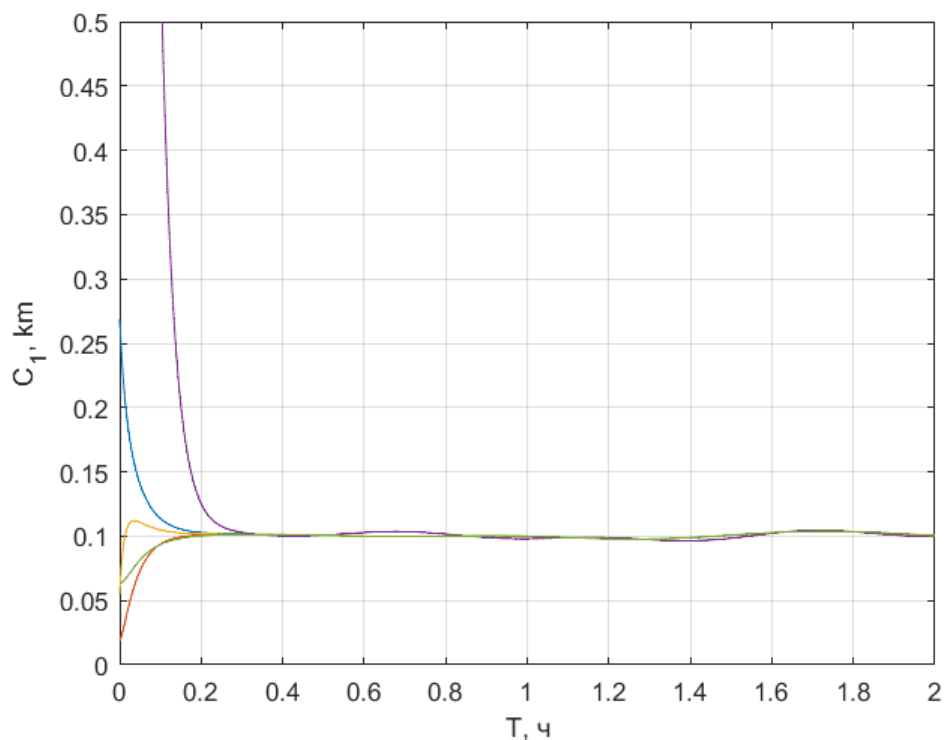


Рисунок 15 – Параметр дрейфа группы спутников

На основе графиков двух методов определения элементов матрицы смежности можно сделать вывод, что результаты на протяжении сотни экспериментов с начальными данными в виде нормального распределения оказались идентичными. Предположение о влиянии относительных расстояний между материнскими и дочерними спутниками, которые формируют элементы матрицы смежности, оказалось верным. Необходимо отметить, что важным условием выполнения теоремы о сходимости движения под влиянием управления является наличие корневого дерева. Корневое дерево образуется только при условии отделения одного спутника. Иначе возникает простейшая ситуация, в которой алгоритм на основе ориентированного, взвешенного графа не даст сходящегося движения и гашения относительного дрейфа, удаление от группы одновременно двух и более аппаратов. В такой постановке задачи корневое дерево отсутствует в ориентированном графе, а значит Теорема 2 не применима, необходимо дополнительное исследование. То есть, если начальные условия соответствуют двум и более отделившимся

аппаратам от группы, то разработанное управление на основе ориентированных графов не позволит обеспечить сходимость относительного дрейфа всех аппаратов.

## Заключение

В ходе проделанной работы были рассмотрены две модели управления относительным движением группы спутников. Результаты моделирования показали, что управление на основе неориентированных графов приводит к сходимости относительного движения группы спутников, но существуют условия, когда данное управление не влечет сходимость движения. Условия отсутствия сходимости: наличие, как минимум, одного спутника, который в начальный момент времени оказался достаточно далеко от группы, а значит потерял связь со всей группой. Для решения данной проблемы был разработан метод управления на основе ориентированных, взвешенных графов. В результате моделирования оказалось, что данное управление обеспечивает сходимость относительного дрейфа спутников в группе а также отделившегося аппарата. В работе рассмотрены условия сходимости движения для ориентированных графов, также рассмотрены начальные условия, которые не позволяют обеспечить сходимость относительного движения .

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Mehran Mesbahi, Magnus Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, Princeton Series in Applied Mathematics
- [2] Fan Chung. *Spectral Graph Theory*
- [3] Мирер С.А. *Механика космического полета. Орбитальное движение*, Москва, 2007.
- [4] Uliana Monakhova, Danil Ivanov, Yaroslav Mashtakov, Sergey Shestakov. *Communication Area Estimation for Decentralized Control of Nanosatellites Swarm*
- [5] Kyle Alfriend, Srinivas Rao Vadali, Pini Gurfil, Jonathan How, Louis Breger. *Spacecraft Formation Flying Dynamics, control and navigation*, Butterworth-Heinemann, 2009
- [6] CLOHESSY W.H., WILTSHIRE R.S. *Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous*, J. Aerosp. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658.