УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДВУХ СПУТНИКОВ СО СФЕРИЧЕСКИМ ПАРУСОМ С ИЗМЕНЯЕМЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ

Выпускная квалификационная работа

(бакалаврская работа)

Досаев Роман Владимирович, МФТИ (ГУ)

Научный руководитель: к.ф.-м.н. С.С. Ткачев,

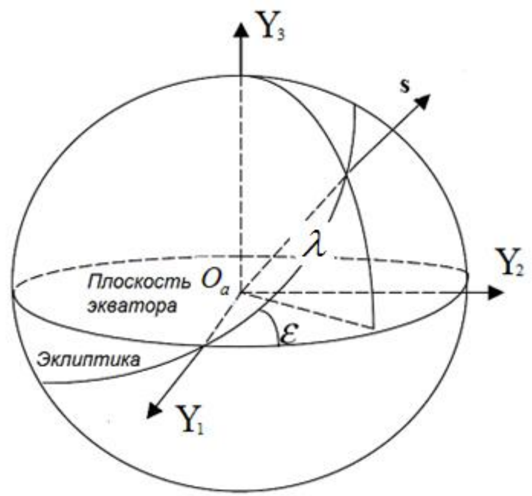
Научный консультант: магистр, Я. В. Маштаков

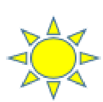
Постановка задачи

- Формация из двух спутников: 1-й – родительский (пассивный), 2-ой – дочерний (активный)
- Форма спутников сферическая
- Хилловское приближение относительного движения
- Относительный вековой уход устраняется при помощи изменяемой силы солнечного давления
- Возмущения: слабая эллиптичность и гармоника J_2

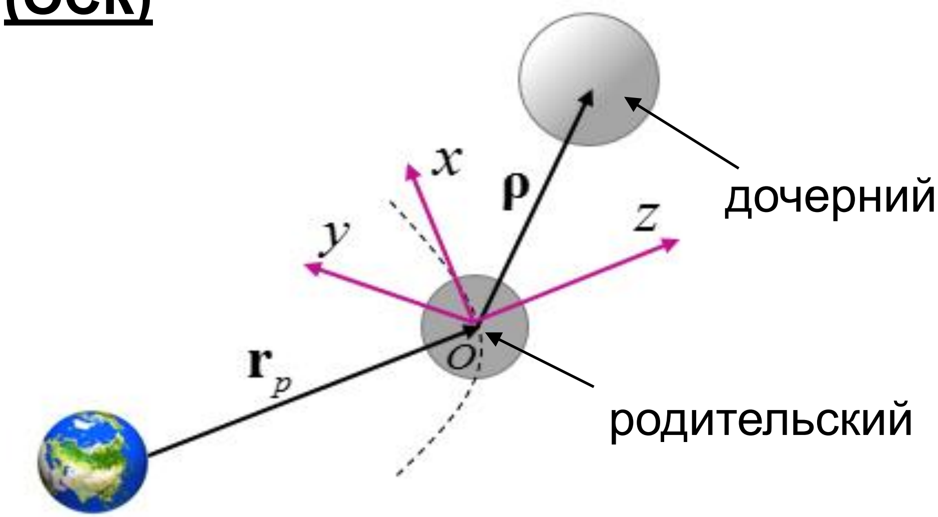
Системы координат

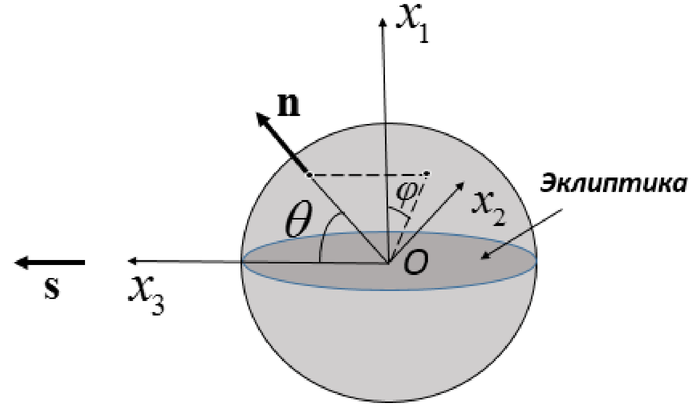
Инерциальная СК (ИСК)





Орбитальная система координат (ОСК)





Матрицы перехода

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\cos\Omega\sin u-\sin\Omega\cos i\cos u & -\sin\Omega\sin u+\cos\Omega\cos i\cos u & \sin i\cos u \\ \sin\Omega\sin i & -\cos\Omega\sin i & \cos i \\ \cos\Omega\cos u-\sin\Omega\cos i\sin u & \sin\Omega\cos u+\cos\Omega\cos i\sin u & \sin i\sin u \end{pmatrix}$$

$\lambda=45^{\circ}$ – долгота Солнца, $\varepsilon=23^{o}27'$– наклон эклиптики к экватору

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \\ -\sin\varepsilon & -\cos\lambda\cos\varepsilon & \sin\lambda\cos\varepsilon \\ \cos\varepsilon & -\cos\lambda\sin\varepsilon & \sin\lambda\sin\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & \text{ИСК} \arrow[dr, "\mathbf{A}"] & \\ \text{ССК} \arrow[ur, "\mathbf{B}"] \arrow[rr, "\mathbf{D}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}"'] & & \text{ОСК} \end{tikzcd}$$

Уравнения движения

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} + 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\rho}}] = 3\omega^2(\mathbf{E}_3, \boldsymbol{\rho})\mathbf{E}_3$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega \cdot \dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega^2 \cdot y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega \cdot \dot{x} - 3\omega^2 \cdot z = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = -\frac{2 \cdot C_2}{\omega} \cdot \sin \omega t + \frac{2 \cdot C_3}{\omega} \cos \omega t - 1.5 \cdot C_1 \cdot \omega t + C_4,$$

$$y(t) = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t,$$

$$z(t) = \frac{C_2}{\omega} \cos \omega t + \frac{C_3}{\omega} \sin \omega t + C_1$$

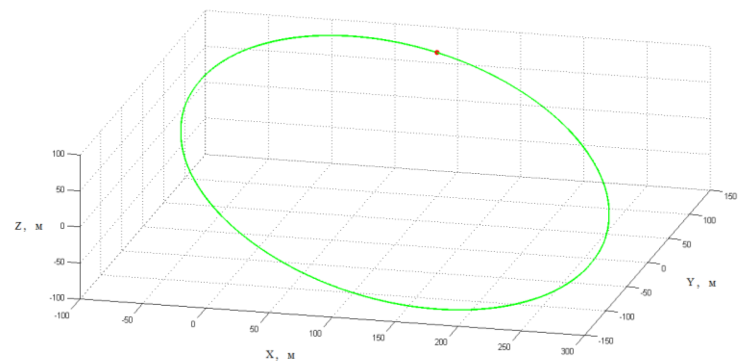
Опорное движение

$$x_{ref} = -\frac{2 \cdot C_2}{\omega} \cdot \sin \omega t + \frac{2 \cdot C_3}{\omega} \cos \omega t + C_4,$$

$$y_{ref} = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t,$$

$$z_{ref} = \frac{C_2}{\omega} \cos \omega t + \frac{C_3}{\omega} \sin \omega t$$

ref – сокр. от «reference orbit»



Начальные данные для **опорной** орбиты были выбраны так, чтобы

$$\dot{x}_0 = -2\omega_0 z_0, \text{ то есть } C_1 = 0$$

Начальные данные для **рассчитываемой** орбиты были выбраны с учетом ошибки: $\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}_0,\ z_0 + \Delta z_0.$

Учет возмущений

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}] + \left[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]\right] + 2[\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\rho}}] = -\frac{\mu}{r_p^{\;3}}\boldsymbol{\rho} + \frac{3\mu(\mathbf{r}_p, \boldsymbol{\rho})\mathbf{r}_p}{r_p^{\;5}} + \mathbf{F}_{J_2}$$

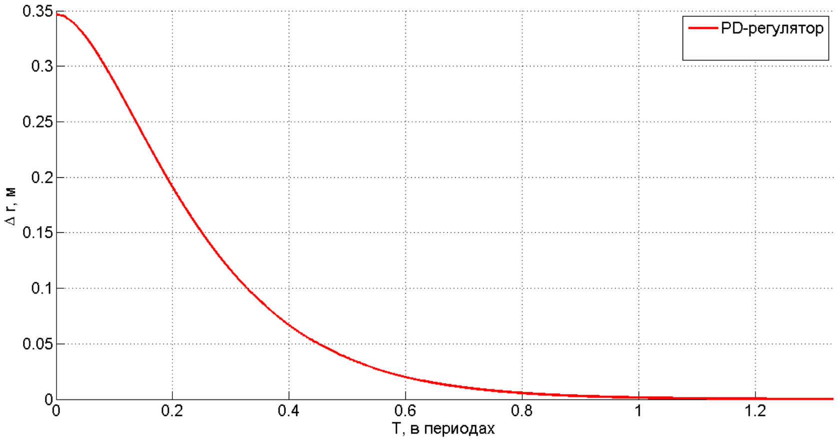
численное интегрирование в среде Matlab

$$\mathbf{F}_{J_2} = \nabla \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\rho} - \text{гармоника } J_2$$

$$\nabla \mathbf{J}_2 = \frac{6\mu \cdot J_2 R_E^2}{r_p^2} \begin{pmatrix} 1 - 3\sin^2 i \sin^2 \vartheta & \sin^2 i \sin 2\vartheta & \sin 2i \sin \vartheta \\ \sin^2 i \sin 2\vartheta & -\frac{1}{4} - \sin^2 i \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4}\sin^2 \vartheta\right) & -\frac{1}{4}\sin 2i \cos \vartheta \\ \sin 2i \sin \vartheta & -\frac{1}{4}\sin 2i \cos \vartheta & -\frac{3}{4} + \sin^2 i \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\sin^2 \vartheta\right) \end{pmatrix}$$

Управление

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) + \mathbf{u}, \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}. \end{cases}$$



Функция Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ref})^2 + \frac{1}{2}k_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{ref})^2 \geq 0$$

Теорема Ляпунова: $\dot{V} < 0 \iff$ асимп. устойчивость $\Rightarrow$

$$\mathbf{u} = -k_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{ref}) - k_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ref}) + \dot{\mathbf{v}}_{ref} - \mathbf{f}$$

$$k_\rho,\ k_v = \text{const} > 0, \text{ причем выбрано } k_v = \frac{k_\rho^2}{4};$$

Вычисление силы солнечного давления (SRP)

$$\mathbf{F} = -P_c\left(\int\limits_{S^+}(1-k)(\mathbf{s},\mathbf{n})\mathbf{s}\,dS + 2\int\limits_{S^+}k\mathbf{n}(\mathbf{s},\mathbf{n})^2\,dS\right)$$

S^+ – освещенная часть поверхности: $(\mathbf{n},\mathbf{s})>0.$

$P_c = 4.56\cdot 10^{-6}\ {}^{H}\!/_{м^2}$ – солнечная постоянная,

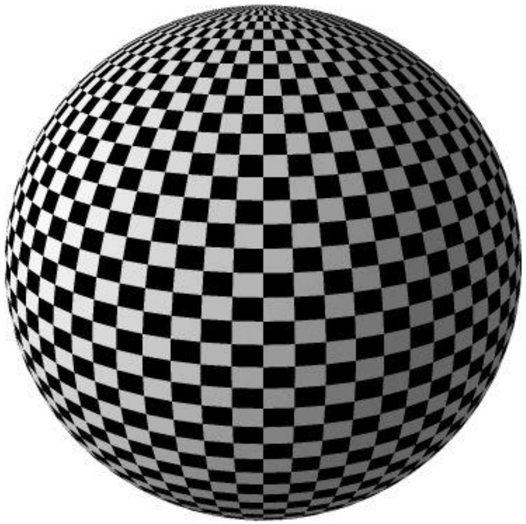
$x_1 = R\cos\varphi\sin\theta,\ \ x_2 = R\sin\varphi\sin\theta,\ \ x_3 = R\cos\theta.$

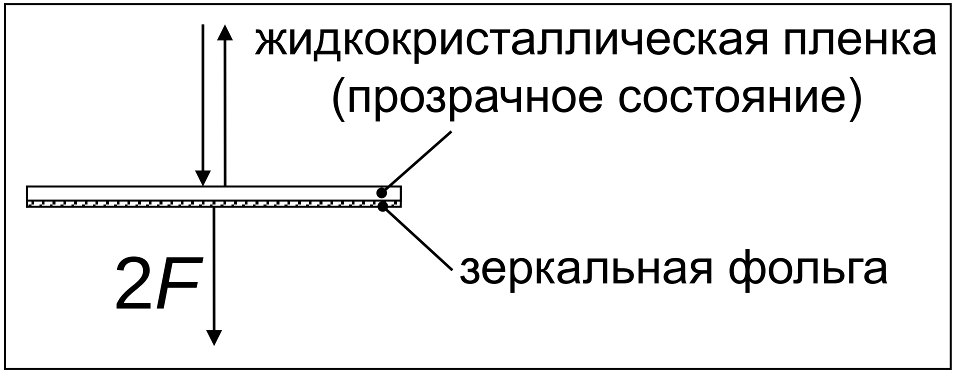
R – радиус оболочки спутника

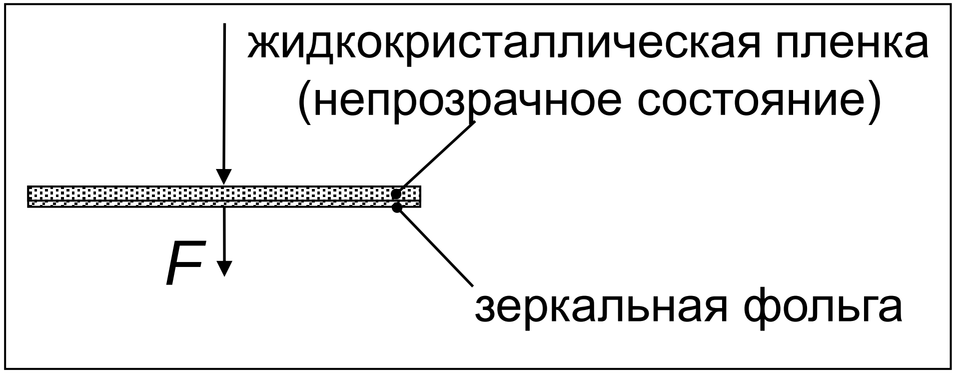
$$(\mathbf{n},\mathbf{s})>0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta>0 \quad\Leftrightarrow\quad \theta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),\quad \varphi\in(0;2\pi).$$

$$\mathbf{s} = (0,\ 0,\ 1),\ \ \mathbf{n} = (\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta)$$

Изменение отражательной способности







Коэффициент отражения

1) $k = \mathrm{const}$

$$\mathbf{F} = -P_c[\mathbf{s}(1-k)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(\mathbf{s},\mathbf{n})d\varphi d\theta + 2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathbf{n}(\mathbf{s},\mathbf{n})^2 d\varphi d\theta] = -\pi R^2 P_c\mathbf{s}$$

2) $k = k\left(\varphi, \theta\right)$

$$\mathbf{F} = -P_c R^2[\mathbf{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(1-k)\cos\theta\sin\theta d\varphi d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mathbf{n}k\cdot(\cos\theta)^2\sin\theta d\varphi d\theta]$$

При заданном $\mathbf{F}$ это интегральное уравнение относительно функции $k(\varphi,\theta)$.

Метод решения интегрального уравнения

$$k(\varphi,\theta)=g(\varphi)\cdot h(\theta)$$

$$F_1=-\frac{1}{4}P_cR^2\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\left(1-\cos 4\theta\right)d\theta,$$

$$F_2=-\frac{1}{4}P_cR^2\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\left(1-\cos 4\theta\right)d\theta,$$

$$F_3=-P_cR^2\left[\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\sin 4\theta d\theta\right].$$

Коэффициент отражения

$$g(\varphi) = a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0$$

$$h(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 4\theta$$

$$\Downarrow$$

$$k(\varphi, \theta) = \left(a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 4\theta\right)$$

$a_0, a_1, \alpha -$ изменяемые параметры

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(k) = \mathbf{F}(a_0,\ a_1,\ \alpha)$$

Результирующая сила:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_p$$

“d” – daughter,
“p” – parent.

$$F_1 = -\frac{\pi^2}{16} R_d^2 P_c a_1 \cos\alpha,$$

$$F_2 = \frac{\pi^2}{16} R_d^2 P_c a_1 \cos\alpha$$

$$F_3 = -\frac{P_c \pi^2 R_d^2}{16} a_0 + P_c \pi (R_p^2 - R_d^2)$$

Ограничения на параметры

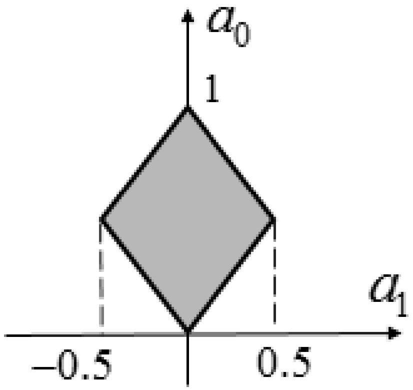
Коэффициент отражения: $0 \le k \le 1.$

$$0 < \left(a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 4\theta\right) \le 1$$

$$0 \le a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0 \le 1$$

Последнее неравенство должно выполняться для всех $\varphi \in [0;\ 2\pi].$

Поэтому $\begin{cases} 0 \le a_1 + a_0 \le 1, \\ 0 \le a_0 - a_1 \le 1 \\ \alpha \in [0,\ 2\pi]. \end{cases}$



Параметры управления

$$F_1 = -\frac{\pi^2}{32} R_d^2 P_c a_1 \cos\alpha, \qquad \alpha = \mathrm{arctg}\left(-\frac{F_2}{F_1}\right),$$

$$F_2 = \frac{\pi^2}{32} R_d^2 P_c a_1 \sin\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = -\frac{32}{\pi^2 P_c R_d^2} \cdot \frac{F_1}{\cos\alpha},$$

$$F_3 = -\frac{P_c \pi^2 R_d^2}{4} a_0 + P_c \pi (R_p^2 - R_d^2). \qquad a_0 = -\frac{4}{\pi^2 P_c R_d^2} F_3 + \frac{4}{\pi R_d^2}\left(R_p^2 - R_d^2\right).$$

Если коэффициенты a_1, a_0 не принадлежат ромбу, то уменьшаем $\mathbf{F}$ в нужное число раз. Причем оптимальное уменьшение возможно только при условии:

$$R_d < R_p < \sqrt{1 + \frac{\pi}{16}} R_d \approx 1.09 R_d$$

Оценка модуля F

$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in \mathbb{R}^3, \quad |\mathbf{e}| = 1$$

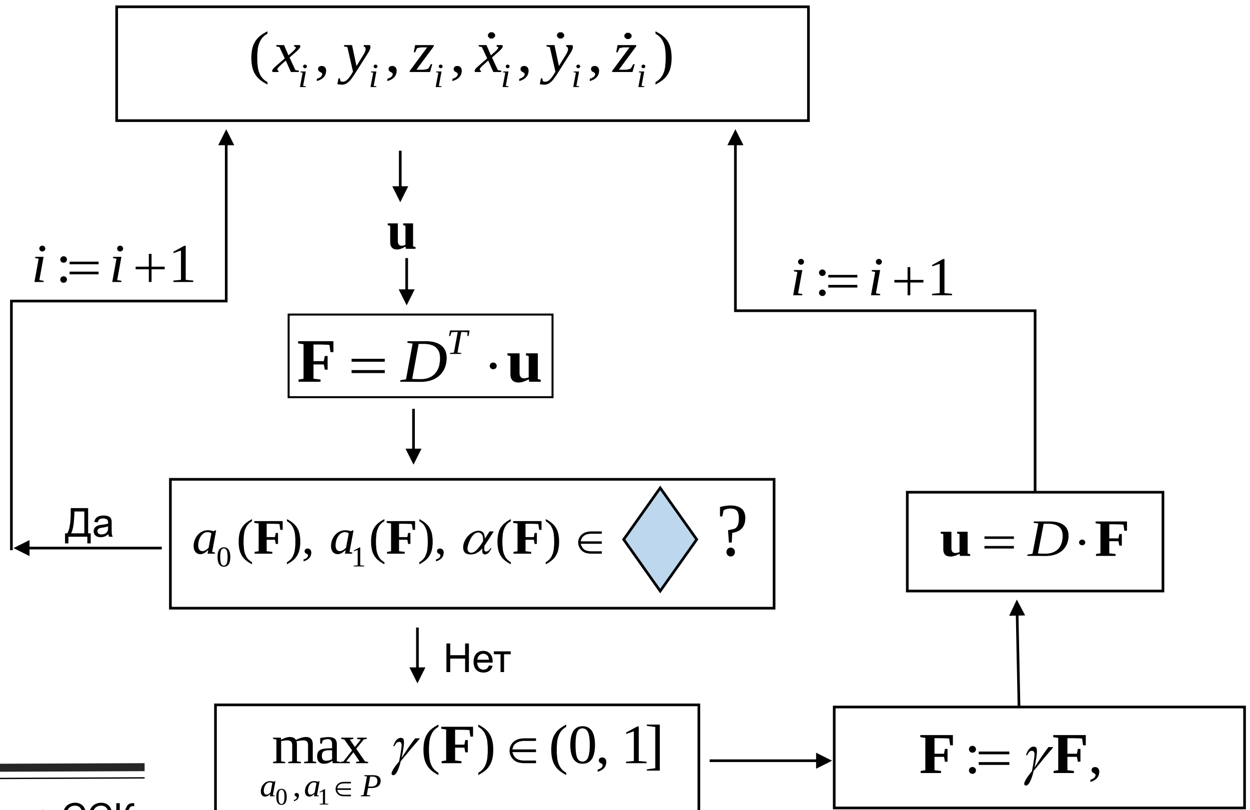
$$a_1 = -\frac{16}{\pi^2 P_c R_d^2} \cdot \frac{F_1}{\cos\alpha} = \pm \frac{16}{\pi^2 P_c R_d^2} \cdot F\sqrt{1 - e_3^2},$$

$$a_0 = -\frac{16}{\pi^2 P_c R_d^2} F e_3 + \frac{16}{\pi R_d^2}\left(R_p^2 - R_d^2\right).$$

$$\min_{\mathbf{e} \in R^3} \max_{a_0, a_1 \in \text{ромбу}} |\mathbf{F}|$$

$$F_{min} = \sqrt{2}\pi P_c \cdot \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{16} + 1\right) R_d^2 - R_p^2, & \text{если } R_p > R_d\sqrt{\dfrac{\pi}{32} + 1} \\ R_p^2 - R_d^2, & \text{если } R_p \le R_d\sqrt{\dfrac{\pi}{32} + 1} \end{cases}$$

Общая схема алгоритма



$D-$ матрица перехода из ССК в ОСК

Численный пример

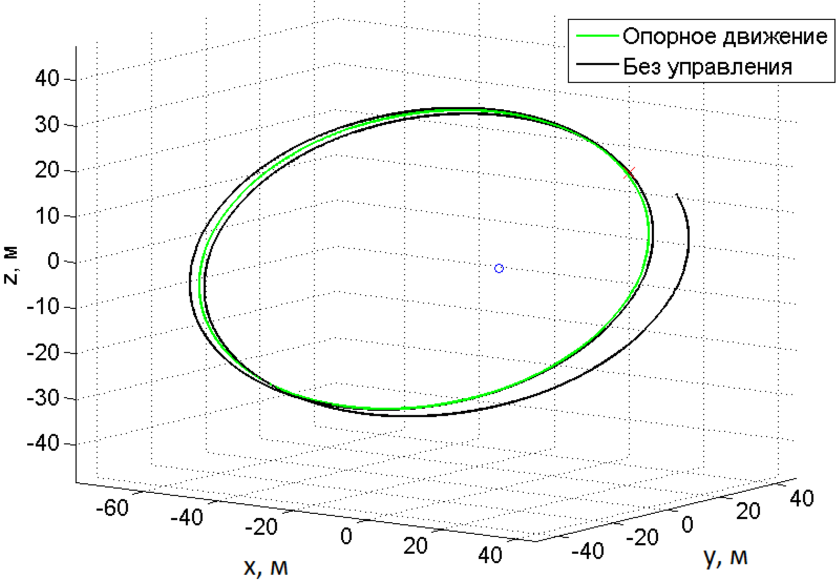
<u>Габариты спутников:</u>

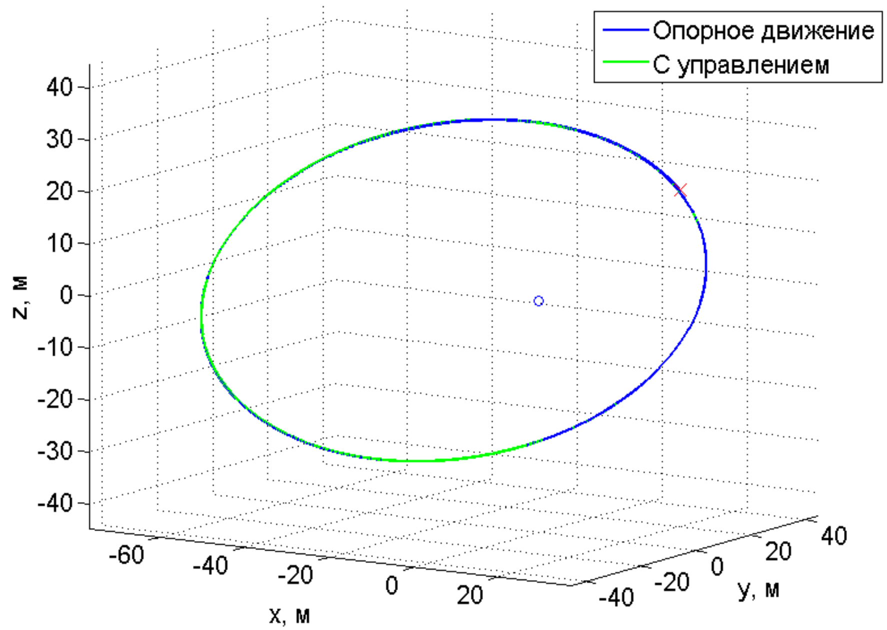
- Родительский: радиус – 2.1 м,
- Дочерний: радиус – 2 м,
- Суммарная масса: 5 кг
- Нач. данные относительного движения:

<u>Параметры орбиты главного спутника:</u>

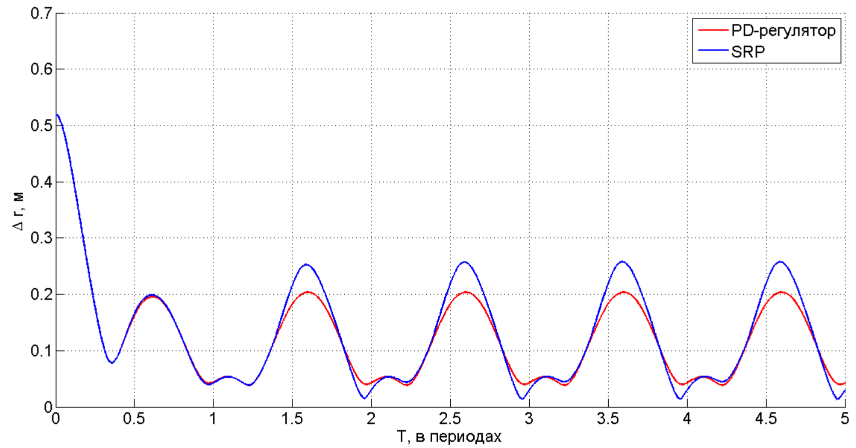
- Эксцентриситет: $e = 0.004$
- Большая полуось: $a = 8371$ км
- Период T = 2 ч (на графиках 2 витка)

$$\left(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right) = \left(20\,\text{м},\ 20\,\text{м},\ 20\,\text{м},\ -32.97\,\text{мм}/\text{с},\ 16.48\,\text{мм}/\text{с},\ 16.48\,\text{мм}/\text{с}\right)$$

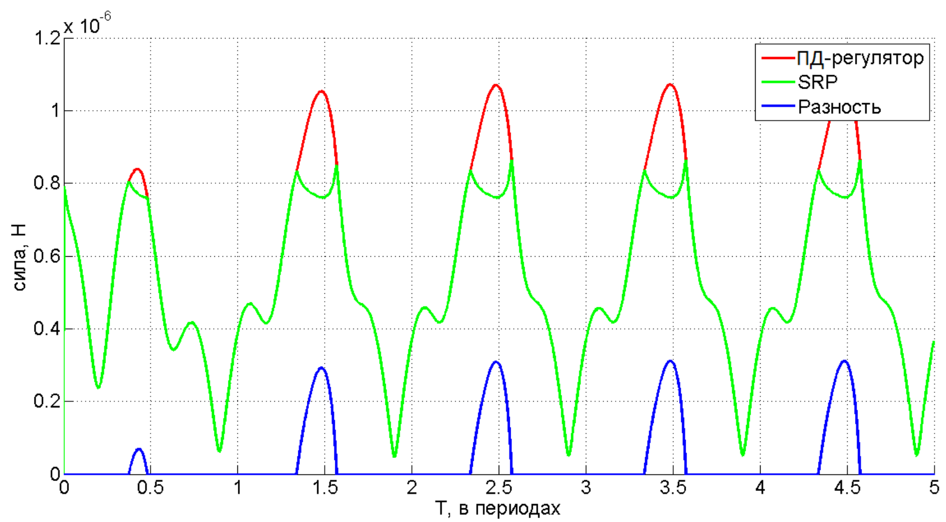




Численный пример

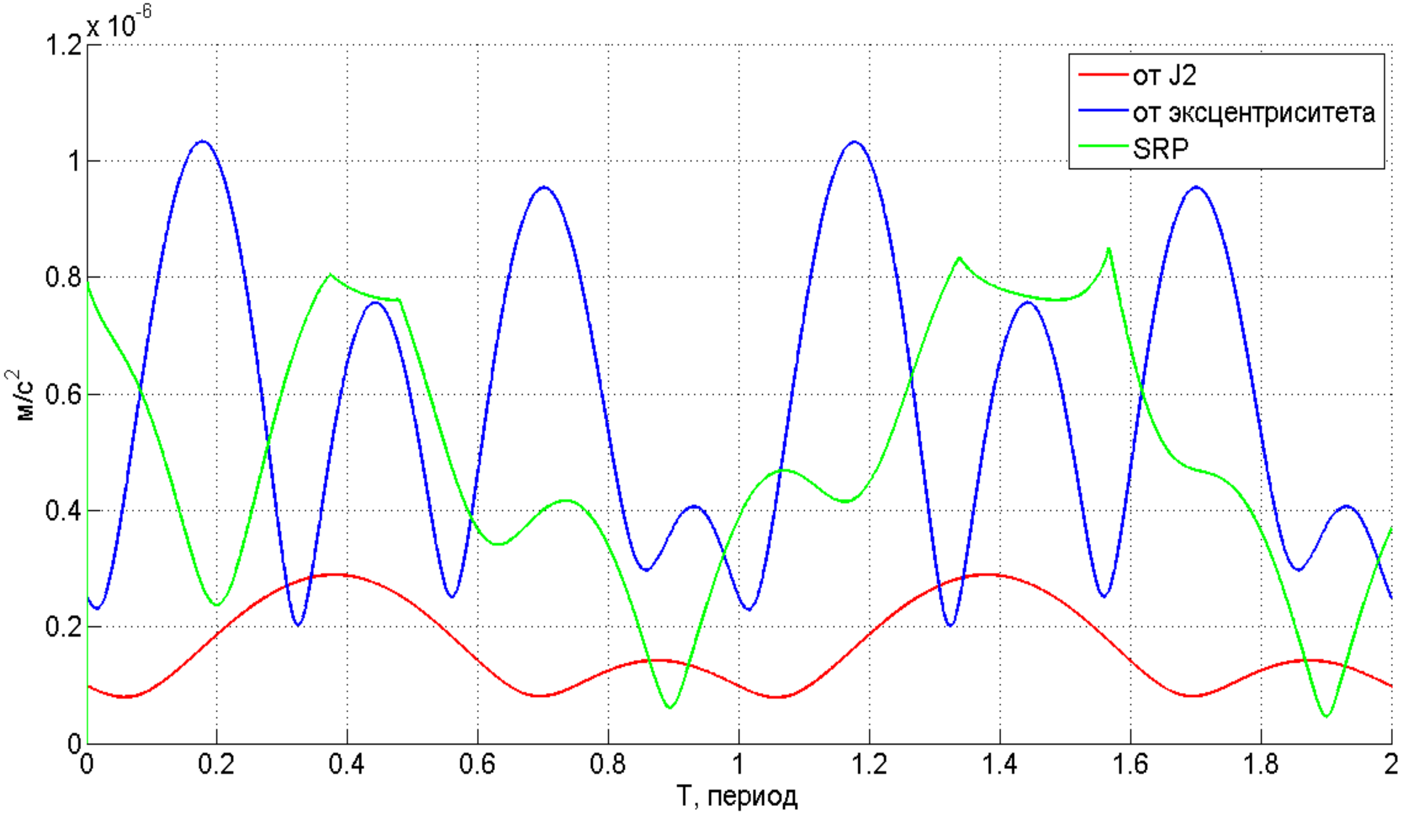


Модуль вектора ошибки реальной траектории от опорной



Управление от ПД-регулятора
и сила солнечного давления (SRP)

Возмущения


x 10^-6
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
м/с^2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
Т, период
от J2
от эксцентриситета
SRP

Заключение:

- В работе продемонстрирована возможность устранения относительного векового ухода с помощью сферического паруса с переменным коэффициентом отражения
- Предложен и реализован алгоритм построения управляющего воздействия (коэффициента отражения) с учетом ограничений
- Проведена оценка области применимости реализованного алгоритма управления с учетом малых возмущений