

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
(Специализация «Управление динамическими системами»)

Стабилизация формации из двух солнечных парусов с
изменяемыми оптическими свойствами

Магистерская диссертация
студента 172 группы
Досаев Романа Владимировича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Ткачев С.С.

г. Москва
2017

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	6
2.1	Системы координат	7
2.2	Уравнения относительного движения	8
3	Построение управления	11
3.1	Световое давление	13
3.2	Угловое движение	16
3.3	Аппроксимация и оценка моментов	19
3.4	Описание алгоритма управления	24
4	Численное моделирование	26
5	Заключение	33
6	Приложение	37
6.1	Матрицы перехода	37

Список сокращений

СК - система координат

ц.м. - центр масс

$(,)$ - скалярное произведение

$\dot{()}$ - производная по времени

$R_E = 6400$ км - экваториальный радиус Земли,

$\mu = 398600.4415$ км³ · с⁻² - гравитационный параметр Земли

1. Введение

Удержание группы спутников на относительно близком расстоянии друг от друга является неотъемлемой частью групповых полетов в космосе. Эта задача возникает по причине относительного дрейфа аппаратов - постепенного их удаления друг относительно друга из-за геометрической разницы орбитальных элементов, а также различного рода возмущений. В виду этого в групповом полете необходимо каким-либо образом управлять аппаратами. В качестве исполнительных элементов управления часто используют реактивные [1] или плазменные двигатели [2], что не всегда выгодно с точки зрения затрат рабочего тела. Интерес представляют бестопливные способы управления. К таким, например, относятся силы электромагнитного взаимодействия между спутниками [3], силы сопротивления атмосферы [4] и солнечного давления [5].

Данная работа посвящена последнему из перечисленных выше способов - применению силы светового давления (далее просто ССД) для стабилизации требуемого относительного движения в групповом полете. При этом в качестве требуемого движения выбрана проективно-круговая траектория на приполярной орбите. Приполярная орбита может обеспечить отсутствие тени Земли и, как следствие, постоянное энергоснабжение солнечных батарей. Проективно-круговая траектория - это траектория относительного движения аппаратов, образующая окружность в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору опорной

орбиты. Она активно используется в задачах ДЗЗ [6].

Способ управления при помощи солнечной радиации довольно естественен для такого типа орбит. Также он является весьма эффективным для высоких орбит и точек либраций в связи с малым потреблением аппаратом энергии. Интерес к указанному подходу неуклонно растет.

Впервые применить давление солнечной радиации для управления космическим аппаратом на околоземной орбите удалось в проекте Cosmos-1 в 1966 [7]. Эту идею перенесли и на групповые полеты. Одной из первых работ, посвященных данной тематике, является работа [8]. В ней изложен подход, основанный на выборе оптимального угла ориентации плоского паруса относительно набегающего потока солнечного излучения для устранения прецессии орбиты, вызванной гармоникой J_2 . В работе [9] рассматривается формация-тетраэдр из спутников, снабженных зеркальными парусами в форме параболоида для создания импульса, позволяющего управлять формацией под влиянием несферичности Земли. В статье [10] также рассматривается тетраэдр, но уже с плоскими парусами на геостационарной орбите. В [11] рассматривается формация, размещенная на солнечно-синхронной орбите для исследования магнитного «хвоста» Земли. Из усредненных на периоде уравнений движения выводятся условия на нормаль паруса, которая должна непрерывно отслеживать линию апсид прецессирующей орбиты. В статье [12] рассмотрен способ снабжения солнечной энергией спутника-трансммиттера, находящегося на геостационарной орбите. Два других спутника-рефлектора находятся по обе стороны «снизу и сверху» орбиты — и наклонены под определенным углом, отражая тем самым солнечные лучи прямо в трансмиттер. Обсуждается возможность поддержания такого вида формации.

Много работ посвящено исследованию движения формаций в окрестности точек либрации. Отметим из них те, в которых обсуждается использование ССД. В работе [13] анализируется поддержание двух типов относительных периодических траекторий вокруг точки L_2 : траекторию лидер-последователь и круговую траекторию. Статья [14] демонстрирует применение ССД для геометрической реконфигурации группы из трех спутников вблизи точки L_2 . В качестве параметров управления используются площадь плоского паруса и два

угла ориентации относительно вектора на Солнце. В [15] рассматривается опорная орбита с периодом в один год, получаемая в эллиптической задаче трех тел Земля-Солнце с помощью метода Пуанкаре-Линдштета. Подбирается оптимальный коэффициент отражения и ориентация парусов. В [16] исследуется движение формации в эфемеридной модели вблизи точек L1 и L2.

Сравнительно недавно появились работы по изучению полета формации к астероидам и другим небесным телам. Например, в статье [17] изложен подход, представляющий собой построение и поддержание замкнутых относительных траекторий при помощи светового давления вокруг астероида.

Стоит отметить, что довольно популярным [18, 19] приемом упрощения управляющего воздействия и системы в целом является линеаризация по углу между нормалью к парусу и направлением на Солнце. А именно, предполагается, что разность между углом одного спутника с углом второго является малой величиной. Это позволяет получить линейную систему уравнений и применить, например, регулятор из семейства линейно-квадратичных.

В данной работе в качестве параметра управления выступает переменный, распределенный по поверхности спутников, коэффициент отражения. Новейшие и уже опробованные технологии позволяют использовать материалы с таким свойством [20, 21]. Благодаря этому появляется возможность за счёт варьирования конфигурации отдельных участков (ячеек) паруса изменять расстояние между центром масс и центром давления аппарата. Такой подход был, например, успешно реализован в проекте IKAROS [22], где управление ориентацией паруса происходило при помощи регулирования прозрачности жидкокристаллической пленки подачей электрического напряжения на отдельные площадки в количестве 80 штук (рис. 1). Энергию на изменение цвета ячейки аппарат может получать, например, от солнечных батарей.

Что касается форм парусов, они бывают довольно экзотичны: плоские паруса, составные из отдельных панелей, пространственные (баллоны). Плоские, в свою очередь, делятся на дисковые [23, 24], многоугольники, лепестковые [25] и т.д. Для вычисления управляющих моментов наиболее удобной оказалась квадратная форма, поэтому мы остановились на ней. Кроме того, она довольно по-

пулярна в исследованиях [26, 27, 28] и приложениях [29, 30].

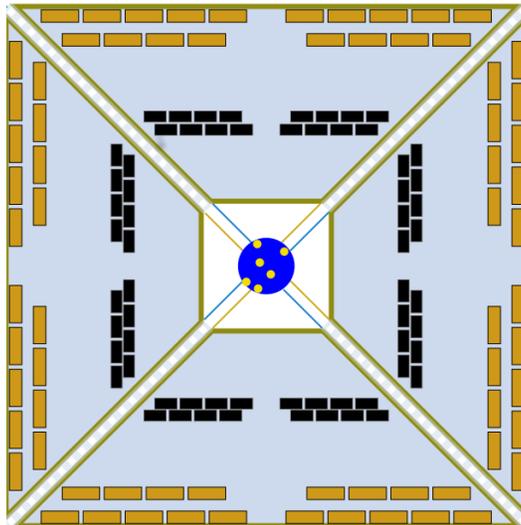


Рис. 1: Космический аппарат с солнечным парусом IKAROS. Желтым цветом выделены варьируемые светоотражательные площадки

Основной проблемой при таком подходе является ограниченность коэффициента отражения и, как следствие, величины управления. Также большую роль играет угол падения солнечного света на поверхность паруса. Там, где парус расположен перпендикулярно нормалью к Солнцу, управление попросту невозможно.

2. Постановка задачи

В работе решается задача приведения формации из двух спутников к проективно-круговой траектории и удержания на ней. Спутники движутся по орбитам близким к опорной, их масса, форма, а также ориентация нормалей парусов одинаковы. Из возмущений, влияющих на относительное движение аппаратов, принимается во внимание только несферичность Земли. Тень Земли не учитывается.

2.1. Системы координат

Введем необходимые правые ортогональные системы координат:

O_aXYZ – инерциальная система координат: начало координат O_a расположено в центре масс Земли, X направлена в точку весеннего равноденствия, Z перпендикулярна плоскости экватора (рис. 2).

$Oxyz$ – орбитальная система координат (ОСК): опорное тело O движется по околоземной круговой орбите, под влиянием возмущений со стороны гармоника J_2 . Ось Oz направлена по радиус-вектору тела в текущей точке орбиты, ось Oy направлена по нормали к плоскости орбиты (рис. 2).

$Cx_1x_2x_3$ – связанная система координат (ССК): C – центр масс одного из аппаратов, ось Cx_3 направлена по нормали к парусу, оси Cx_1, Cx_2 лежат в плоскости паруса и параллельны его сторонам. Орты вдоль осей Cx_1, Cx_2, Cx_3 обозначим e_1, e_2, e_3 соответственно (рис. 4).

$C\xi\eta\zeta$ – солнечная система координат (ССК): ось $C\zeta$ направлена на Солнце, $C\eta$ перпендикулярна плоскости эклиптики. Орты вдоль осей $C\xi, C\eta, C\zeta$ обозначим e_ξ, e_η, e_ζ соответственно (рис. 3).

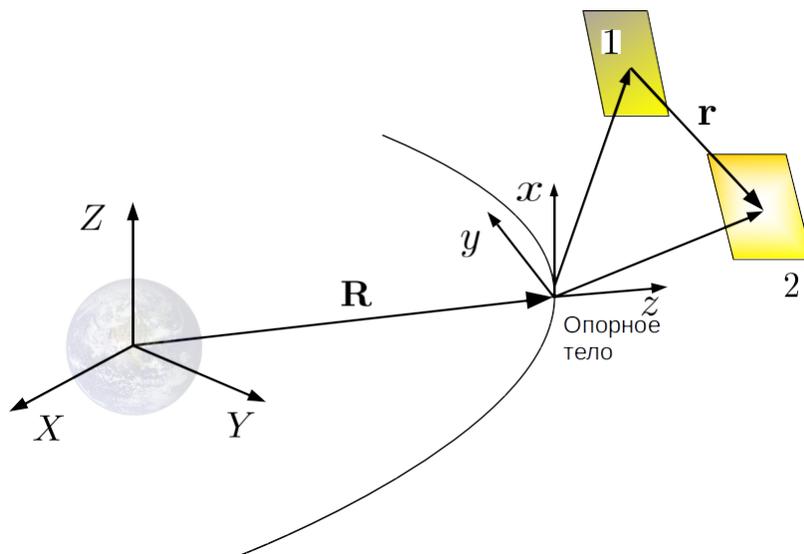


Рис. 2: Инерциальная O_aXYZ и орбитальная система координат $Oxyz$

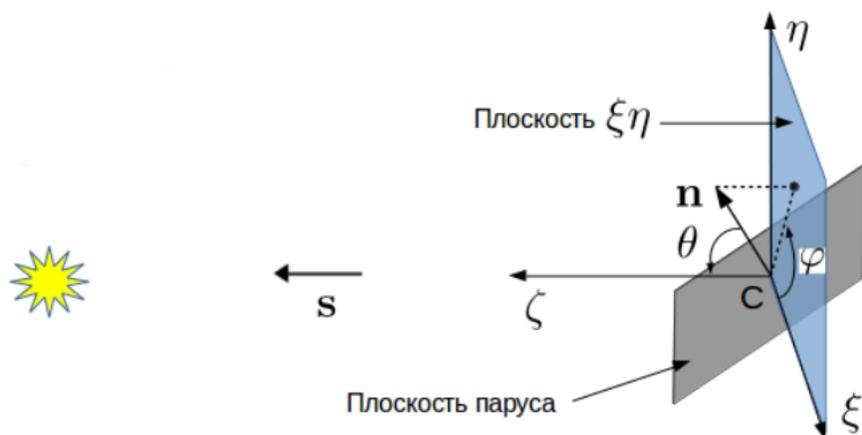


Рис. 3: Солнечная система координат

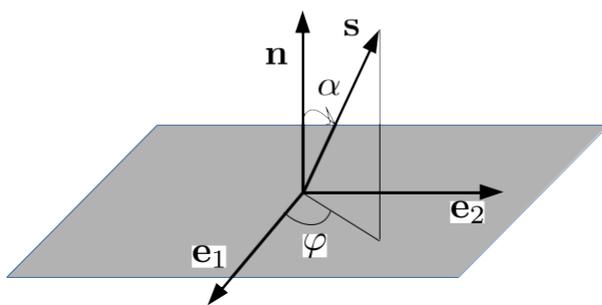


Рис. 4: Связанная с парусом система координат

2.2. Уравнения относительного движения

Поскольку расстояние между аппаратами в формации мало по сравнению с большими полусями их орбит, то удобно перейти в орбитальную СК и описывать относительное движение там. Для этого сначала линеаризуем в окрестности опорной орбиты правую часть уравнений движения одного аппарата, ска-

жем первого, при наличии светового давления

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{R}_o) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_o) + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{s,1} \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_o$, \mathbf{R}_o - радиус-вектор тела на опорной орбите с началом в ц.м. Земли, $\mathbf{f}_{s,1}$ - ускорение аппарата от светового давления, \mathbf{g} , \mathbf{J}_2 - градиенты первого и второго члена соответственно в разложении гравитационного потенциала Земли по зональным гармоникам [31]

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \\ \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{3 J_2 \mu R_E^2}{2 r^4} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta \\ 2 \sin^2 i \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin i \cos i \sin \theta \end{bmatrix} \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= \begin{bmatrix} 2(\mu/r^3) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu/r^3 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu/r^3 \end{bmatrix} \\ \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) &= \frac{6\mu J_2 R_E^2}{r^5} \begin{bmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \theta & \sin^2 i \sin 2\theta & \sin 2i \sin \theta \\ \sin^2 i \sin 2\theta & -\frac{1}{4} - \sin^2 i (\frac{1}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \theta) & -(\sin 2i \cos \theta)/4 \\ \sin 2i \sin \theta & -(\sin 2i \cos \theta)/4 & -\frac{3}{4} + \sin^2 i (\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Здесь $r = |\mathbf{r}|$, i, θ - наклонение и истинная аномалия спутника.

Дифференцируя \mathbf{r}_1 в орбитальной СК с учетом ее неинерциальности, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{R}}_o - 2\boldsymbol{\omega}_o \times \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}_1)$$

где $\boldsymbol{\omega}_o = [0, \omega_o, 0]^T$, $\omega_o = \sqrt{\frac{\mu}{R_o^3}}$ - орбитальная угловая скорость опорного тела.

Подставляя $\ddot{\mathbf{R}}$ из (1) и учитывая, что $\ddot{\mathbf{R}}_o = \mathbf{g}(\mathbf{R}_o) + \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_o)$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + 2\boldsymbol{\omega}_o \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}_1) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{r}_1 + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{s,1} \quad (2)$$

Аналогично можно вывести уравнение вида (2) для второго спутника

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_2 + 2\boldsymbol{\omega}_o \times \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}_2) &= \nabla \mathbf{g}(\mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{r}_2 + \\ &+ \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{R}_o) \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{f}_{s,2} \end{aligned} \quad (3)$$

Введем вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (Рис. 2), описывающий движение второго спутника относительно первого, и получим уравнение относительного движения, взяв разность уравнений (2) и (3)

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega}_o \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{r} + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{f}_{s,2} - \mathbf{f}_{s,1} \quad (4)$$

Заметим, что в невозмущенном случае, когда орбита кеплерова и круговая, уравнения (4) трансформируются в линейную систему, называемую системой Клохесси-Уилтшира-Хилла [32]

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\omega_o \dot{z}, \\ \ddot{y} &= -\omega_o^2 y, \\ \ddot{z} &= 3\omega_o^2 z + 2\omega_o \dot{x} \end{aligned}$$

Эта система имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{2}{\omega_o} C_2 \sin \omega_o t + \frac{2}{n} C_3 \cos \omega_o t - 1.5 C_1 \omega_o t + C_4, \\ y(t) &= C_5 \cos \omega_o t + C_6 \sin \omega_o t, \\ z(t) &= \frac{C_2}{\omega_o} \cos \omega_o t + \frac{C_3}{\omega_o} \sin \omega_o t + C_1 \end{aligned}$$

где константы C_i , $i = \overline{1, 6}$ выражаются через начальные данные $\mathbf{r}(0) = [x_0, y_0, z_0]^T$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = [\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$ следующим образом

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{\omega_o} x_0 + 4z_0, & C_2 &= -2\dot{x}_0 - 3\omega_o z_0 \\ C_3 &= \dot{z}_0, & C_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega_o}, & C_5 &= y_0, & C_6 &= \frac{\dot{y}_0}{\omega_o} \end{aligned}$$

Получим условия на начальные данные, обеспечивающие решение в виде проективно-круговой траектории. Для этого перепишем (2.2) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= 2A \cos(\omega_o t + \alpha_0) - 1.5 C_1 \omega_o t + C_4, \\ y(t) &= B \sin(\omega_o t + \beta_0), \\ z(t) &= A \sin(\omega_o t + \alpha_0) + C_1 \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1}{\omega_o} \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, \quad B = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$$

$$\alpha_0 = \arcsin \left(\frac{C_5}{\sqrt{C_5^2 + C_6^2}} \right), \quad \beta_0 = \arcsin \left(\frac{C_2}{\sqrt{C_2^2 + C_3^2}} \right)$$

Для проективно-круговой траектории должно выполняться

$$C_1 = C_4 = 0, \quad B = 2A, \quad \alpha_0 = \beta_0$$

Здесь четыре связи, поэтому остается две степени свободы. Удобно задавать x_0, z_0 и находить 4 других начальных условия

$$y_0 = \sqrt{\frac{16z_0^4 + 4x_0^2z_0^2}{4z_0^2 + x_0^2}}$$

$$\dot{x}_0 = -2\omega_o z_0$$

$$\dot{y}_0 = y_0 \dot{z}_0 / z_0$$

$$\dot{z}_0 = \omega_o x_0 / 2$$

Последние условия представляют собой гиперповерхность в фазовом пространстве и следовательно имеет меру нуль. Поэтому получить такие начальные данные на практике невозможно из-за ошибок выведения аппаратов на орбиту. Собственно, эта одна из проблем, породивших настоящую работу.

3. Построение управления

Будем строить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость опорной траектории. Перепишем уравнение (4) в виде системы первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f} + \mathbf{u} \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\mathbf{f} = -2\boldsymbol{\omega}_o \times \dot{\mathbf{r}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{r}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{r} + \nabla \mathbf{J}_2(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}_{s,2} - \mathbf{f}_{s,1}.$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова выберем

$$V = \frac{1}{2}k_r \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{e}} \quad (6)$$

где $k_r > 0$ - постоянный коэффициент, $\mathbf{e} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_d(t)$ - ошибка траектории. Легко видеть, что функция V неотрицательна и нулю равна только, когда реальная траектория $\mathbf{r}(t)$ совпадает с желаемой $\mathbf{r}_d(t)$. Запишем производную по времени этой функции с учетом уравнений движения (5)

$$\dot{V} = k_r \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{e}} = k_r \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} + (\mathbf{f} + \mathbf{u} - \dot{\mathbf{v}}_d)^T \dot{\mathbf{e}} \quad (7)$$

Для того чтобы обеспечить выполнение условий $\dot{V} = 0$ при $\mathbf{r}_d, \mathbf{v}_d$ и $\dot{V} < 0$ при всех остальных \mathbf{r}, \mathbf{v} , примем

$$\dot{V} = -k_v \dot{\mathbf{e}}^T \dot{\mathbf{e}} \quad (8)$$

где $k_v > 0$ - коэффициент усиления по скорости. Из уравнений (7) и (8) получим выражение для управления \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = -k_r \mathbf{e} - k_v \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{f} + \dot{\mathbf{w}}_d \quad (9)$$

Согласно теореме Барбашина-Красовского, существует некоторая окрестность начальных значений относительного положения и скорости спутников, из которых под действием управления (9) дочерний аппарат придет к требуемой опорной траектории (опорное движение будет асимптотически устойчивым). Действительно, если теперь подставить выражение (9) обратно в уравнение движения (5), то мы получим уравнение типа затухающего осциллятора:

$$\ddot{\mathbf{e}} + k_v \dot{\mathbf{e}} + k_r \mathbf{e} = 0 \quad (10)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни

$$-\frac{k_v}{2} \pm \sqrt{k_v^2 - 4k_r}$$

Для обеспечения максимальной степени устойчивости характеристического уравнения линеаризованной системы положим:

$$k_v^2 - 4k_r = 0 \quad (11)$$

С учетом (11), обозначая $\alpha = \frac{k_v}{2}$, получим аналитическое решение (10)

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= (\mathbf{c}t + \mathbf{d})e^{-\alpha t}, \\ \dot{\mathbf{e}} &= (\mathbf{c} - \alpha(\mathbf{e} + \mathbf{d}))e^{-\alpha t}\end{aligned}\tag{12}$$

где $\mathbf{c} = \dot{\mathbf{e}}(0) + \alpha\mathbf{e}(0)$, $\mathbf{d} = \mathbf{e}(0)$ - постоянные вектора, зависящие от начальных отклонений. Из этих формул можно сделать вывод, что ошибка отклонения фазового вектора от опорной фазовой траектории экспоненциально, без колебаний затухает со скоростью α .

Заметим, что не рассматривается анализ вопросов навигации - каким образом измеряется ошибка траектории (это может быть выполнено например, при помощи GPS и наземных станций).

3.1. Световое давление

Световое давление описывают в литературе различными формулами, учитывающих, например, диффузное отражение по закону Ламберта [33], различные эффекты (Ярковского, Робертсона-Пойнтинга и пр.) [34]. Мы остановились на достаточно простой и довольно распространенной в космической динамике модели [26], отвечающей зеркальному отражению света и его поглощению

$$\mathbf{F} = -PA|(\mathbf{s}, \mathbf{n})| [(1 - \rho)\mathbf{s} + 2\rho(\mathbf{s}, \mathbf{n})\mathbf{n}]\tag{13}$$

где P - солнечная постоянная, равная $4.56 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ для околоземных орбит, \mathbf{s} - вектор направления на Солнце (рис. 3), A - площадь пластинки, на которую давит свет, \mathbf{n} - нормаль к пластинке, $\rho \in [0, 1]$ - коэффициент отражения пластинки - это часть падающих фотонов, отразившихся от нее зеркально (остальные $1 - \rho$ фотонов полностью поглощаются). Считаем, что парус способен изменять оптические свойства одинаково с двух сторон.

Чтобы найти суммарную силу светового давления, действующую на центр масс аппарата, проинтегрируем по освещенной поверхности паруса, пренебрегая

площадью полезной нагрузки и затенением частей паруса

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -P|(\mathbf{s}, \mathbf{n})| \left[\int_{A^+} (1 - \rho) \mathbf{s} dA + 2 \int_{A^+} \rho(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n} dA \right] = \\ &= -P|(\mathbf{s}, \mathbf{n})| [(A - \rho_A) \mathbf{s} + 2\rho_A(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введено обозначение $\rho_A = \int_{A^+} \rho dA$, A^+ - освещенная площадь, для которой справедливо $(\mathbf{s}, \mathbf{n}) > 0$. При интегрировании учитывался тот факт, что нормаль \mathbf{n} постоянна вдоль поверхности плоского паруса. Отметим, что в этой формуле нет зависимости от формы аппарата. Единственное, она должна быть плоской. Перепишем формулу (14) в следующем виде

$$\mathbf{F} = -PA|(\mathbf{s}, \mathbf{n})| \left[\left(1 - \frac{\rho_A}{A}\right) \mathbf{s} + 2\mathbf{n}(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \frac{\rho_A}{A} \right]$$

Учитывая условие $0 \leq \rho_A \leq A$, используем старое обозначение $\rho = \frac{\rho_A}{A} \in [0, 1]$ для записи окончательной формулы

$$\mathbf{F} = -PA|(\mathbf{s}, \mathbf{n})| [(1 - \rho) \mathbf{s} + 2\rho(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n}] \quad (15)$$

только теперь ρ - это доля элементарных площадок dA паруса с коэффициентом отражения 1. Из этой формулы следует, что максимально возможная сила светового давления равна $2PA$ и ускорение $2PA/m$, где m - масса всей системы. Основной проблемой управления центром масс одного аппарата при помощи светового давления является ограниченность его направления, которое может лежат только в полупространстве, отделенное плоскостью, перпендикулярной направлению на Солнце, так как парус не может ускоряться против солнечного ветра. Изобразим описанную картину для аппарата площадью $A = 5 \text{ м}^2$. Для этого запишем проекции вектора \mathbf{F} на оси солнечной СК, в которой $\mathbf{s} = [0, 0, 1]^T$, $\mathbf{n} = [\sin \alpha \cos \theta, \sin \alpha \sin \theta, \cos \alpha]^T$ (рис. 3)

$$\begin{aligned} F_\xi &= -2PA\rho |\cos \alpha| \cos \alpha \sin \alpha \cos \theta \\ F_\eta &= -2PA\rho |\cos \alpha| \cos \alpha \sin \alpha \sin \theta \\ F_\zeta &= -PA |\cos \alpha| (1 + \rho \cos 2\alpha) \end{aligned} \quad (16)$$

и нарисуем эту зависимость, проварьировав параметры $\rho \in [0, 1]$, $\alpha \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ (Рис. 5). Получим облако возможных направлений управления. Облако

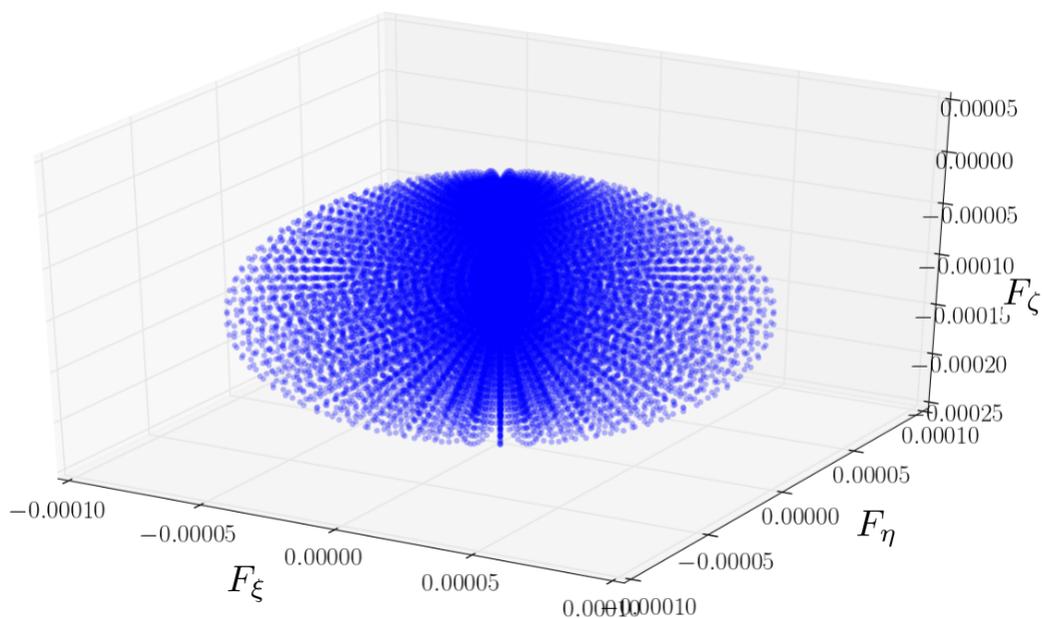


Рис. 5: Область возможных направлений для одного аппарата

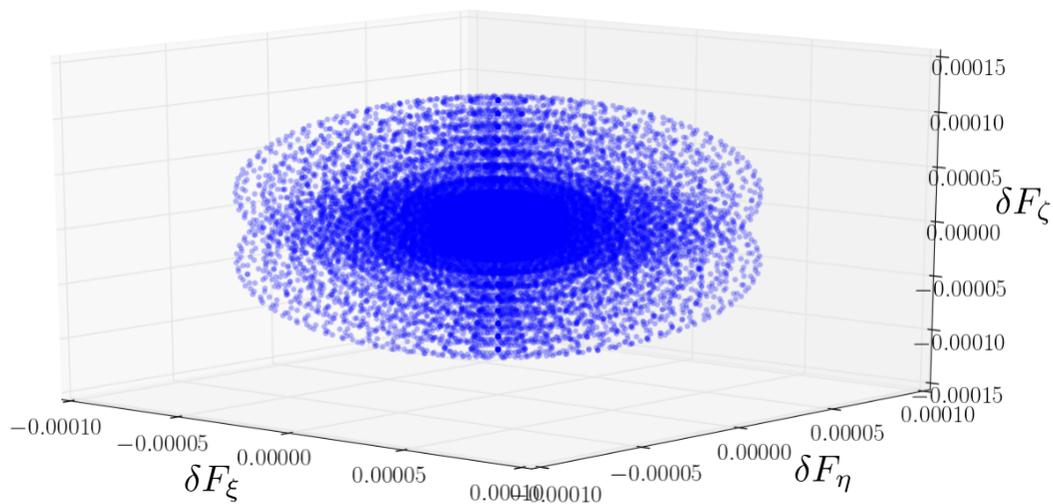


Рис. 6: Область возможных направлений для двух аппаратов при синхронном вращении

получается из-за дискретизации отрезков варьирования. Видим, что для всех точек этого облака проекция силы на вертикальную ось, обозначающей в данном случае направление на Солнце, меньше нуля.

При управлении двумя аппаратами картина несколько меняется. Запишем

разность сил, как того требует уравнение (4)

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$$

где $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ вычисляются согласно формуле (15). Предполагая движение аппаратов **синхронным** (нормаль первого паруса совпадает с нормалью второго), эту разность можно переписать в виде:

$$\delta \mathbf{F} = -PA |(\mathbf{s}, \mathbf{n})| (\delta \rho \mathbf{s} - 2\delta \rho (\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n}) \quad (17)$$

где $\delta \rho = \rho_1 - \rho_2 \in [-1, 1]$, $\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$ - интегральные коэффициенты отражения 1го и 2го спутника соответственно. По аналогии с (16) распишем покомпонентно $\delta \mathbf{F}$ на оси солнечной СК

$$\begin{aligned} \delta F_\xi &= -2PA \delta \rho |\cos \alpha| \cos \alpha \sin \alpha \cos \theta \\ \delta F_\eta &= -2PA \delta \rho |\cos \alpha| \cos \alpha \sin \alpha \sin \theta \\ \delta F_\zeta &= -PA \delta \rho |\cos \alpha| \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (18)$$

и нарисуем параметрическую зависимость $\delta \mathbf{F}$ от $\delta \rho, \theta, \alpha$ (рис. 6). Видим, что область управлений расширяется в положительное по ζ направлению. Причина тому ясна, поскольку отрезок $[0, 1]$ для ρ переходит в $[-1, 1]$ для $\delta \rho$.

Из (17) видно, что максимально возможное управление при помощи светового давления достигается когда $\mathbf{s} \parallel -\mathbf{n}$ и $|\delta \rho| = 1$ и равно $3PA$. Физически это означает, что паруса должны быть ориентированы нормалью на Солнце (можно взять нормаль с другой стороны паруса) и один из них должен иметь полностью зеркальную поверхность ($\rho = 1$), а другой абсолютно черную ($\rho = 0$).

3.2. Угловое движение

Необходимо управлять ориентацией парусов, чтобы обеспечить требуемое движение их центров масс. Поскольку в формулу (17) входит только нормаль, то будем отслеживать ее направление в инерциальном пространстве. Для этого

сперва получим нужное направление нормали, то есть такое направление, которое обеспечивает управление (9). Найдем угол α из соотношений (18)

$$\delta F_\xi^2 + \delta F_\eta^2 = 4P^2 A^2 \delta \rho^2 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \quad (19)$$

$$\delta F_\zeta = PA \delta \rho |\cos \alpha| \cos 2\alpha \quad (20)$$

$$\delta F_\zeta^2 = (PA)^2 \delta \rho^2 \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha \quad (21)$$

Поделив (19) на (21), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 2\alpha &= \frac{\delta F_\xi^2 + \delta F_\eta^2}{\delta F_\zeta^2} = \frac{|\delta \mathbf{F}|^2}{(\delta \mathbf{F}, \mathbf{s})^2} - 2 \\ \alpha &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{|\delta \mathbf{F}|^2 - 2(\delta \mathbf{F}, \mathbf{s})^2}}{|\delta \mathbf{F}, \mathbf{s}|} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь найдем $\delta \rho$ из соотношения (20)

$$\delta \rho = \frac{\delta F_\zeta}{PA |\cos \alpha| \cos 2\alpha} \quad (23)$$

Так как эта формула имеет особенность при $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, то будем использовать ее в случае, когда угол α достаточно мал, то есть отстоит от $\frac{\pi}{4}$ на небольшую константу. Если угол α близок к $\frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4}$, то будем пользоваться формулой, получаемой из (19)

$$\delta \rho = \frac{\sqrt{\delta F_\xi^2 + \delta F_\eta^2}}{2PA \cos^2 \alpha \sin \alpha} \quad (24)$$

Из выражения (17) найдем нормаль \mathbf{n} , с учетом $(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \cos \alpha$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\mathbf{s} + \frac{\delta \mathbf{F}}{PA \delta \rho |\cos \alpha|} \right) \quad (25)$$

Далее будем использовать выражение (25) для вычисления требуемого направления нормали \mathbf{n}_d , подставив вместо $\delta \mathbf{F}$ управление (9) в соответствующей системе координат.

Угловое движение солнечного паруса будем описывать с помощью кинематических уравнений в кватернионной форме и динамических уравнений Эйлера

для твердого тела

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q \circ \Omega \quad (26)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_c$$

где \circ - кватернионное умножение, $\Omega = [0, \boldsymbol{\omega}]$ - кватернион с нулевой скалярной частью и векторной в виде угловой скорости аппарата $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{J} - тензор инерции аппарата, \mathbf{M}_g - гравитационный момент, выступающий в роли возмущающего, \mathbf{M}_c - управляющий момент.

Аналогично построению управления относительным движением, получим закон управления угловым движением, который обеспечивает совмещение нормали \mathbf{n} паруса с требуемой \mathbf{n}_d . В качестве кандидата на функцию Ляпунова выберем

$$V = k_a(1 - (\mathbf{n}, \mathbf{n}_d)) + \frac{1}{2}\mathbf{J}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)^2 \quad (27)$$

где $k_a > 0$ - постоянный коэффициент, $\boldsymbol{\omega}_d$ - опорная угловая скорость, вычисляемая численно на k -м шаге интегрирования по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_{d,k} = \frac{\mathbf{n}_{d,k} \times \mathbf{n}_{d,k-1}}{t_k - t_{k-1}}$$

Запишем производную по времени функции Ляпунова (27)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d) - k_a(\mathbf{n}_d \cdot \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}}_d) = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d) \\ &\quad - k_a(\mathbf{n}_d \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{n}_d)) \end{aligned}$$

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d, \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d) - k_a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d, \mathbf{n} \times \mathbf{n}_d)$$

Используя уравнения движения (26) и приравнявая \dot{V} к заведомо отрицательному выражению $-k_\omega(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d, \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)$, $k_\omega > 0$ получаем

$$\mathbf{M}_c = -k_a\mathbf{n} \times \mathbf{n}_d - k_\omega(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_g \quad (28)$$

Производную опорной угловой скорости $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ приближаем разностной формулой на каждом шаге интегрирования.

3.3. Аппроксимация и оценка моментов

Рассмотрим один из наиболее простых и реализуемых на практике способов изменения коэффициента отражения солнечного паруса - разбиение на ячейки, способных изменять отражение света двумя путями: либо полностью поглощать, либо зеркально отражать. В литературе этот механизм именуют RCD (reflectivity control device) [35].

Запишем компоненты силы светового давления (13) в осях связанной СК, действующую на ячейку площадью $A_n = (\frac{l}{n})^2$, l - сторона паруса, n - число разбиений вдоль стороны, x, y - координаты центра ячейки (Рис. 7).

$$\begin{aligned} F_1 &= -PA_n(1 - \rho_{x,y})|\cos \alpha| \sin \alpha \cos \varphi \\ F_2 &= -PA_n(1 - \rho_{x,y})|\cos \alpha| \sin \alpha \sin \varphi \\ F_3 &= -PA_n(1 + \rho_{x,y})|\cos \alpha| \cos \alpha \end{aligned}$$

где $\rho_{x,y} \in \{0, 1\}$ - коэффициент отражения ячейки.

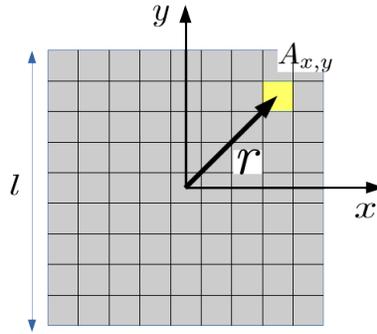


Рис. 7: Разбиение паруса на регулярную сетку ячеек, способных либо зеркально отражать, либо полностью поглощать свет

Соответственно проекции момента силы \mathbf{F} одной ячейки с координатами (x, y) и коэффициентом отражения равны

$$\mathbf{M}_{x,y} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = yF_3\mathbf{e}_1 - xF_3\mathbf{e}_2 + (xF_2 - yF_1)\mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= yF_3 = -PA_n |\cos \alpha| \cos \alpha (1 + \rho_{x,y})y \\
M_2 &= -xF_3 = PA_n |\cos \alpha| \cos \alpha (1 + \rho_{x,y})x \\
M_3 &= xF_2 - yF_1 = -PA_n |\cos \alpha| \sin \alpha \sin \varphi (1 - \rho_{x,y})x + \\
&\quad + PA_n |\cos \alpha| \sin \alpha \cos \varphi (1 - \rho_{x,y})y = \\
&\quad -PA_n |\cos \alpha| \sin \alpha [\sin \varphi (1 - \rho_{x,y})x - \cos \varphi (1 - \rho_{x,y})y]
\end{aligned}$$

Суммарный момент относительно ц.м. получим суммированием по ячейкам, которых n^2 штук

$$\mathbf{M} = \sum_{x,y} \mathbf{M}_{x,y}$$

Далее M_1, M_2, M_3 будут обозначать компоненты суммарного момента. Распишем каждую компоненту момента в отдельности

$$\begin{aligned}
M_1 &= -PA_n |\cos \alpha| \cos \alpha \sum_{x,y} (1 + \rho_{x,y})y \\
M_2 &= PA_n |\cos \alpha| \cos \alpha \sum_{x,y} (1 + \rho_{x,y})x \\
M_3 &= -PA_n |\cos \alpha| \sin \alpha [\sin \varphi \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})x - \cos \varphi \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})y]
\end{aligned} \tag{29}$$

Так как каждая ячейка может принимать два значения коэффициента отражения: 0 или 1, то всего можно задать 2^{n^2} совокупностей ячеек, реализующих от 0 до n^2 различных интегральных коэффициентов отражений. Таким образом, каждому интегральному коэффициенту отражения соответствует некий набор совокупностей из ячеек, а следовательно набор моментов светового давления. Например, для случая, когда площадь паруса 5 м^2 , $\alpha = \phi \frac{\pi}{4}$, $n = 4$, выведем 6 множеств моментов, соответствующих интегральным коэффициентам отражения $\rho = \frac{2}{16}, \frac{8}{16}, \frac{14}{16}$ (рис. 8). Следует отметить два основных свойства такой дискретизации:

- Максимальное число моментов возникает при $\rho = \frac{1}{2}$;
- Множества моментов для симметричных относительно $\frac{1}{2}$ интегральных коэффициентов отражения совпадают.

Эти свойства были подтверждены численно для различных n . Первое свойство мотивирует брать коэффициент отражения каждого паруса близким к $\frac{1}{2}$. Второе свойство позволяет найти одинаковые моменты для каждого паруса при разных коэффициентах отражения и, как следствие, обеспечить синхронное вращение.

Найдем максимальный световой момент. Очевидно, он получается, когда на одну половину паруса действует максимальная сила светового давления, а на другую минимальная. Максимальная сила светового давления как следует из пункта 2 равна $2PA$. Найдем минимальную силу, когда $\alpha = 0$. Запишем квадрат модуля выражения (15):

$$|\mathbf{F}|^2 = P^2((1 - \rho)^2 + 4\rho^2 + 4\rho(1 - \rho)) \quad (30)$$

Минимум этого выражения достигается при

$$\rho_A = -1$$

что не удовлетворяет условию $\rho_A \in [0; A]$. Так как функция (30) парабола ветвями вверх и вершиной левее 0, то необходимо брать $\rho_A = 0$, что соответствует случаю полного поглощения или абсолютно черного паруса. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\max} &= -2PA \mathbf{n} \\ \mathbf{F}_{\min} &= -PA \mathbf{s} \end{aligned} \quad (31)$$

Максимальный крутящий световой момент соответственно равен

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{\min} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{\max}$$

где $\mathbf{r}_1 = -\frac{l}{4}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{r}_2 = \frac{l}{4}\mathbf{e}_1$. Учитывая $\mathbf{n} = \mathbf{s} = \mathbf{e}_3$ получим

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4}PAle_2$$

или по абсолютному значению

$$M_{\max} = \frac{1}{4}PA l \approx l^3 \cdot 10^{-6}$$

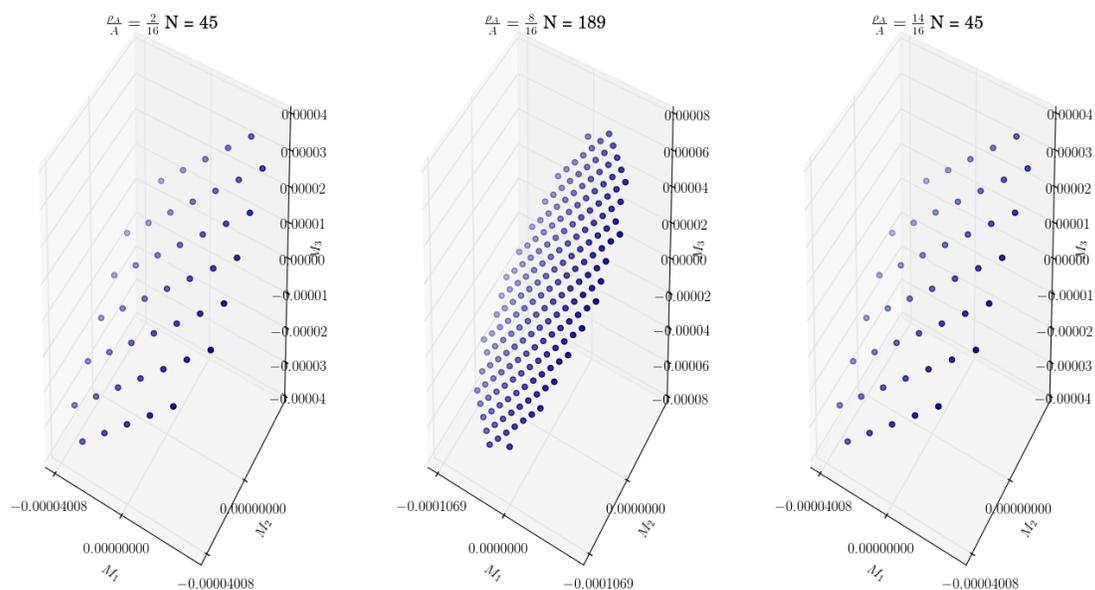


Рис. 8: Множества моментов, соответствующих разбиению с $n = 4$

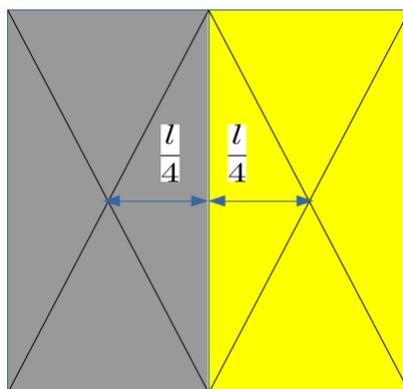


Рис. 9: Случай максимального момента

Например, для квадратного паруса стороной $l = 5$ м, максимальный момент равен $M_{\max} = 1.425 \cdot 10^{-4}$ [H·м]. Заметим, что мы нашли максимальный момент, в плоскости паруса, иначе говоря, максимальные значения M_1 и M_2 . Найдем проекцию максимального момента на нормаль паруса, вызванный проекцией вектора \mathbf{s} на плоскость паруса. Рассмотрим выражение для M_3 из (29)

$$M_3 = -PA_n |\cos \alpha| \sin \alpha [\sin \varphi \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})x - \cos \varphi \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})y]$$

Перепишем его в виде

$$M_3 = -PA_n C |\cos \alpha| \sin \alpha \sin(\varphi + \delta)$$

где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$,

$$A = \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})x, \quad B = \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})y$$

$$\delta = \text{arctg}(A/B)$$

Заметим, что C максимальна, когда A и B максимальны. Выразим A и B через разбиение n и сторону паруса l . Для этого рассмотрим сперва выражение для A

$$A = \sum_{x,y} (1 - \rho_{x,y})x = \sum_{x,y} x - \sum_{x,y} \rho_{x,y}x$$

Заменим $x = x_k = (k + \frac{1}{2})\frac{l}{n}$, $k = -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} - 1$ (считаем n для простоты чётным числом). Получим

$$\sum_{x,y} x = n \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} (k + \frac{1}{2})\frac{l}{n} = 0$$

Остается максимизировать выражение:

$$\sum_{x,y} x \rho_{x,y}$$

Поскольку суммирование в симметричных пределах и $\rho_{x,y} \in \{0, 1\}$, то логично взять половину $\rho_{x,y} = 1$, половину $\rho_{x,y} = 0$. Таким образом

$$\sum_{x,y} x \rho_{x,y} = \sum_{i=-n/2}^{n/2-1} \sum_{k=0}^{n/2-1} (k + \frac{1}{2})\frac{l}{n} = \frac{ln^2}{8}$$

Аналогичные выкладки можно провести для B и получить $B = A$. Тогда $C = \frac{\sqrt{2}}{8}ln^2$ и M_3 можно оценить

$$|M_3| = \frac{1}{2}PA_nC |\sin 2\alpha \sin(\varphi + \delta)| \leq \frac{1}{2}PA_nC = \frac{1}{2}P \frac{l^2}{n^2} \frac{\sqrt{2}}{8}ln^2 = \frac{\sqrt{2}}{16}Pl^3.$$

Заметим, что максимальный M_3 в $2\sqrt{2}$ раз меньше максимальных M_1 и M_2 . Гравитационный момент \mathbf{M}_g равен

$$\mathbf{M}_g = \frac{3\mu}{R^5}(J_n - J_t)(\mathbf{R}, \mathbf{n})(\mathbf{R} \times \mathbf{n})$$

где J_n, J_t - продольный (осевой) и поперечный момент инерции соответственно, \mathbf{R} - радиус-вектор ц.м аппарата. На высоких круговых орбитах (высотой более 1000 км) гравитационный момент имеет порядок не более 10^{-5} , поэтому будем считать его слабозмущающим.

3.4. Описание алгоритма управления

Итак, опишем вкратце одну итерацию алгоритма управления.

Будем считать, что все постоянные параметры нам известны. Мы имеем значения фазовых переменных $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_d, \mathbf{v}_d, q, \boldsymbol{\omega}$.

- Вычисляем значение от ПД-регулятора (9)

$$\mathbf{u} = -k_r\mathbf{e} - k_v\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{f} + \mathbf{w}_d$$

- Переводим \mathbf{u} в солнечную СК матрицей \mathbf{S} и вычисляем требуемые параметры $\delta\rho, \alpha, \phi$ по формулам (23), (24), (22)

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{u}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{|\delta\mathbf{U}|^2 - 2(\delta\mathbf{U}, \mathbf{s})^2}}{|\delta\mathbf{U}, \mathbf{s}|} \right)$$

$$\varphi = \operatorname{atan2}(U_\eta, U_\xi)$$

$$\delta\rho = \frac{\delta U_\zeta}{PA |\cos \alpha| \cos 2\alpha} \text{ или } \delta\rho = \frac{\sqrt{\delta U_\xi^2 + \delta U_\eta^2}}{2PA \cos^2 \alpha \sin \alpha}$$

– Находим нормаль \mathbf{n} как третий столбец матрицы перехода из инерциальной СК в связанную (см. приложение)

– Пересчитываем опорные угловую скорость и ускорение

$$\boldsymbol{\omega}_{d,k} = \frac{\mathbf{n}_{d,k} \times \mathbf{n}_{d,k-1}}{\Delta t}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_d = \frac{\boldsymbol{\omega}_{d,k} - \boldsymbol{\omega}_{d,k-1}}{\Delta t}$$

где k - номер текущей итерации.

– Находим требуемый момент \mathbf{M}_c по формуле (28)

$$\mathbf{M}_c = -k_a \mathbf{n} \times \mathbf{n}_d - k_\omega (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d) + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_g$$

– Принимаем коэффициенты отражения аппаратов равными

$$\rho_1 = 0.5 + \frac{\delta \rho}{2}$$

$$\rho_2 = 0.5 - \frac{\delta \rho}{2}$$

и округляем их до ближайшей части поделенного на n^2 частей отрезка $[0, 1]$.

– Из множества моментов $D_i(\rho_i, \alpha, \phi)$, $i = 1, 2$, находим ближайший момент к управляющему \mathbf{M}_c по евклидовой норме

$$\mathbf{M}_i = \arg \min_{\mathbf{M} \in D_i} \|\mathbf{M} - \mathbf{M}_c\|, \quad i = 1, 2$$

– Пересчитываем разность $\delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ и управление \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = -\frac{PA}{m} \delta \rho |(\mathbf{s}, \mathbf{n})| (\mathbf{s} - 2(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n})$$

– Пересчитываем фазовые переменные согласно уравнениям движения и переходим к следующей итерации.

4. Численное моделирование

Продemonстрируем работу алгоритма, описанного выше, численным примером. Для этого возьмем следующие массогабаритные характеристики аппаратов: масса всей системы 5 кг, сторона паруса 5 м, тензор инерции системы

$$J = \text{diag}\{1.5, 1.5, 3\} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Орбита: $a = 7000$ км, $e = 0$, $i = 98^\circ$, $\Omega = \omega_\pi = 0$.

Начальные данные опорной траектории

$$\begin{aligned} x_0 &= 50 \text{ м}, \quad y_0 = 100 \text{ м}, \quad z_0 = 50 \text{ м} \\ v_{x0} &= -0.107 \text{ м/с}, \quad v_{y0} = 0.055 \text{ м/с}, \quad v_{z0} = 0.027 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Начальные данные относительного движения

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= 50.5 \text{ м}, \quad \tilde{y}_0 = 101 \text{ м}, \quad \tilde{z}_0 = 50.5 \text{ м} \\ \tilde{v}_{x0} &= -0.118 \text{ м/с}, \quad \tilde{v}_{y0} = 0.059 \text{ м/с}, \quad \tilde{v}_{z0} = 0.029 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

вызывают скорость дрейфа $C_1 = 18$.

Начальные данные углового движения

$$\begin{aligned} q(0) &= [\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0] \\ \omega(0) &= [10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-4}] \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Параметры ПД-регулятора

$$\begin{aligned} k_r &= 0.0001 \text{ Н/м}, \quad k_v = 0.005 \text{ Н} \cdot \text{м/с} \\ k_a &= 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad k_\omega = 0.01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Коэффициенты выбраны таким образом, чтобы начальные отклонения не превосходили модуля управляющего воздействия при $t = 0$. Разбиение паруса $n = 4$. Время интегрирования 4 периода. метод интегрирования Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом $\Delta t = 1$ с.

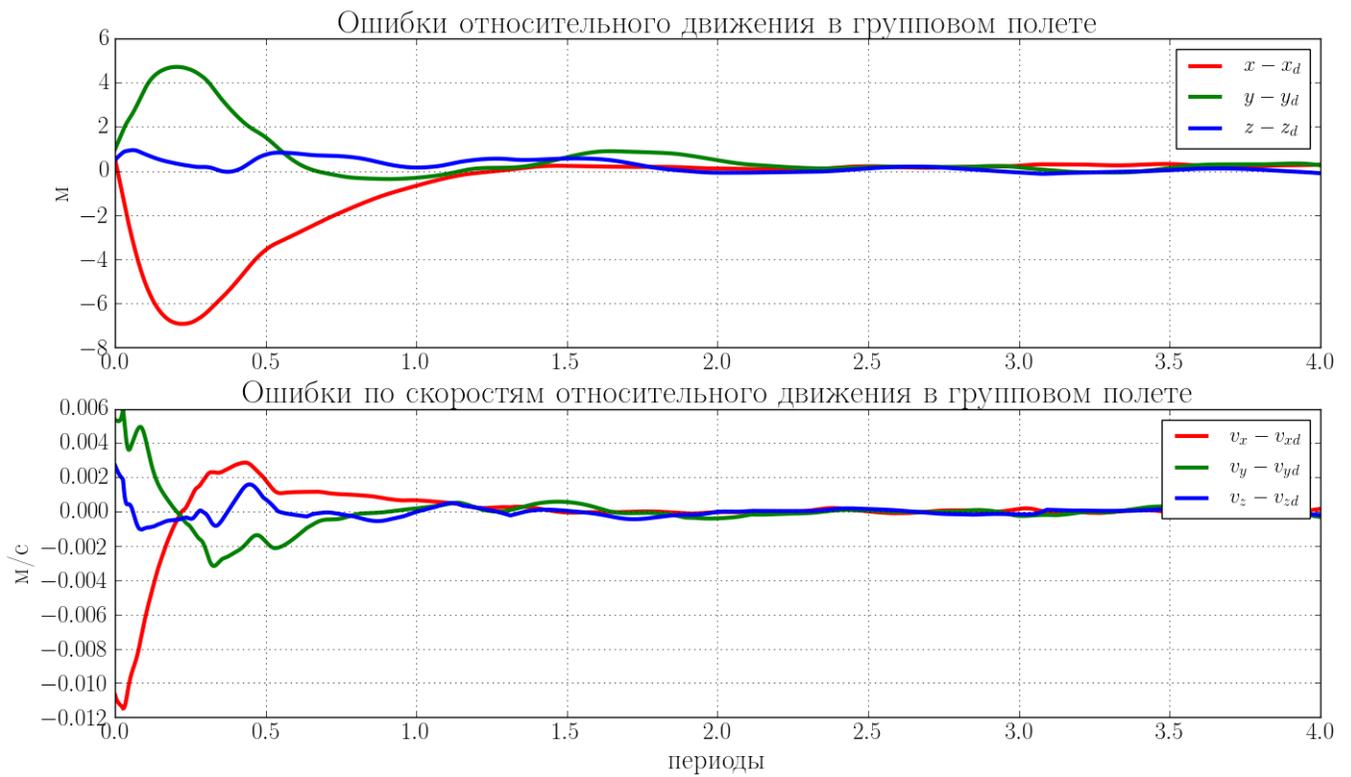


Рис. 10: Ошибки относительного движения по положению и по скоростям

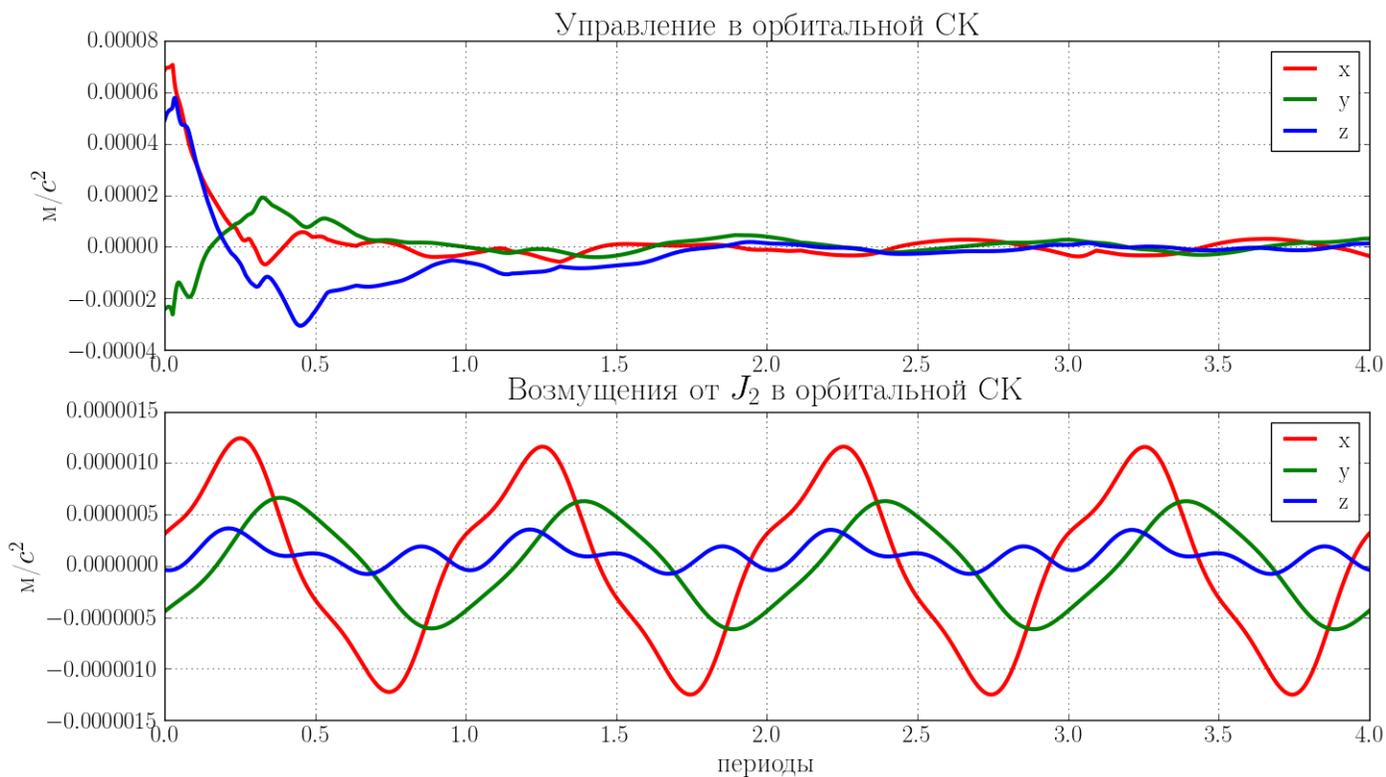


Рис. 11: Управление и возмущение от J_2 в орбитальной СК

Выведем график ошибок относительной траектории и относительных скоростей в проекциях на оси орбитальной СК (рис. 10). Как видно из этого рисунка, алгоритм поддерживает опорную траекторию с ошибкой около 1 м и выходит на опорную скорость после одного витка. На рисунке 4 изображены проекции реализованного управления и возмущения от гармоник J_2 . Представим графики управляющего и гравитационного момента по осям связанной СК

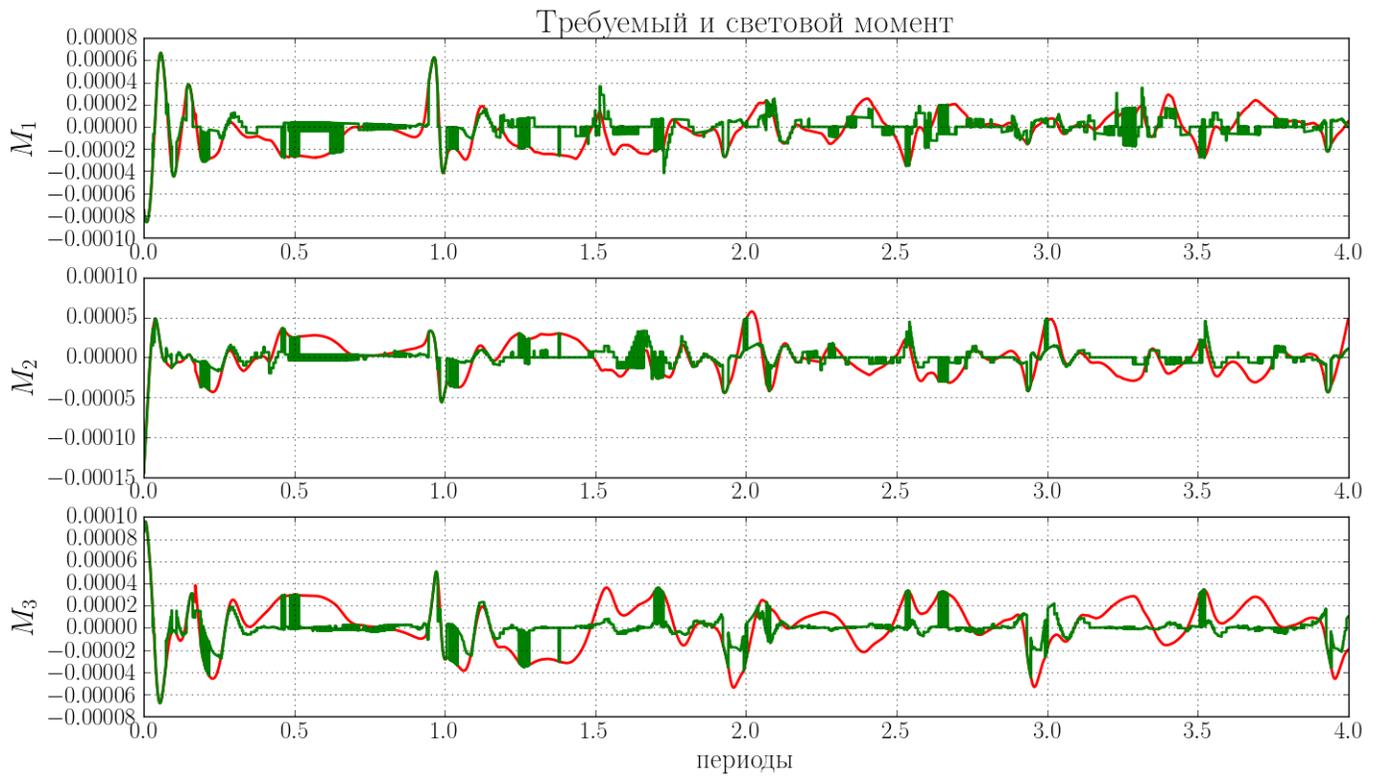


Рис. 12: Красным цветом обозначен требуемый момент от ПД-регулятора, зеленым синтезированный момент

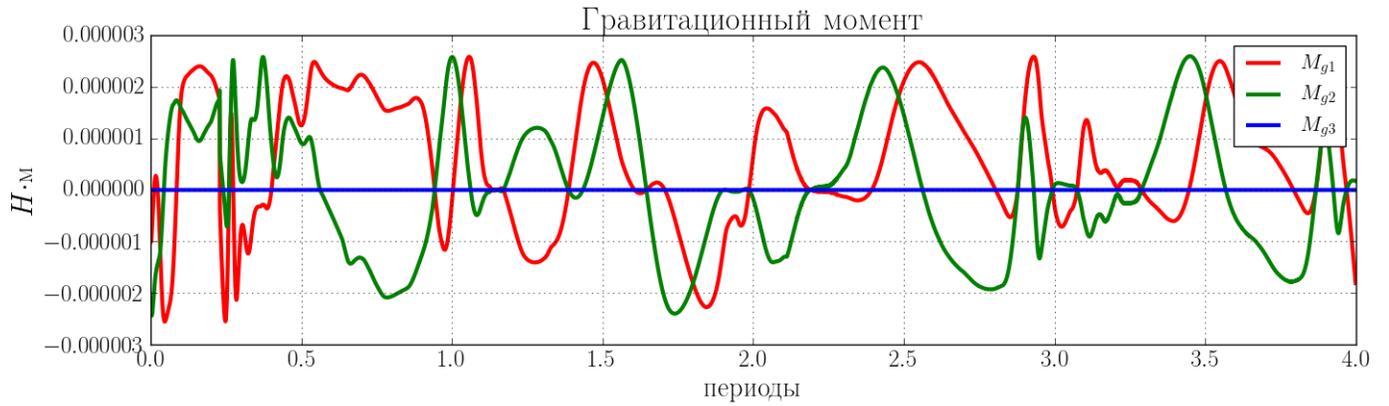


Рис. 13: Проекции гравитационного момента

Отметим, что скачки реализованных моментов на (рис. 12) получаются из-за дискретизации, описанной в пункте 3.3. Покажем эволюцию за один период требуемой и реальной нормали как на единичной сфере (рис. 4), так и в виде косинуса угла между ними (рис. 14). Выведем график коэффициентов отражения и их разности. Из последнего графика (рис. 16) можно заключить, что коэффициенты отражения парусов выходят на значение 0.5, где реализуется наибольшее число моментов и, как следствие, возможность поддерживать опорное движение.

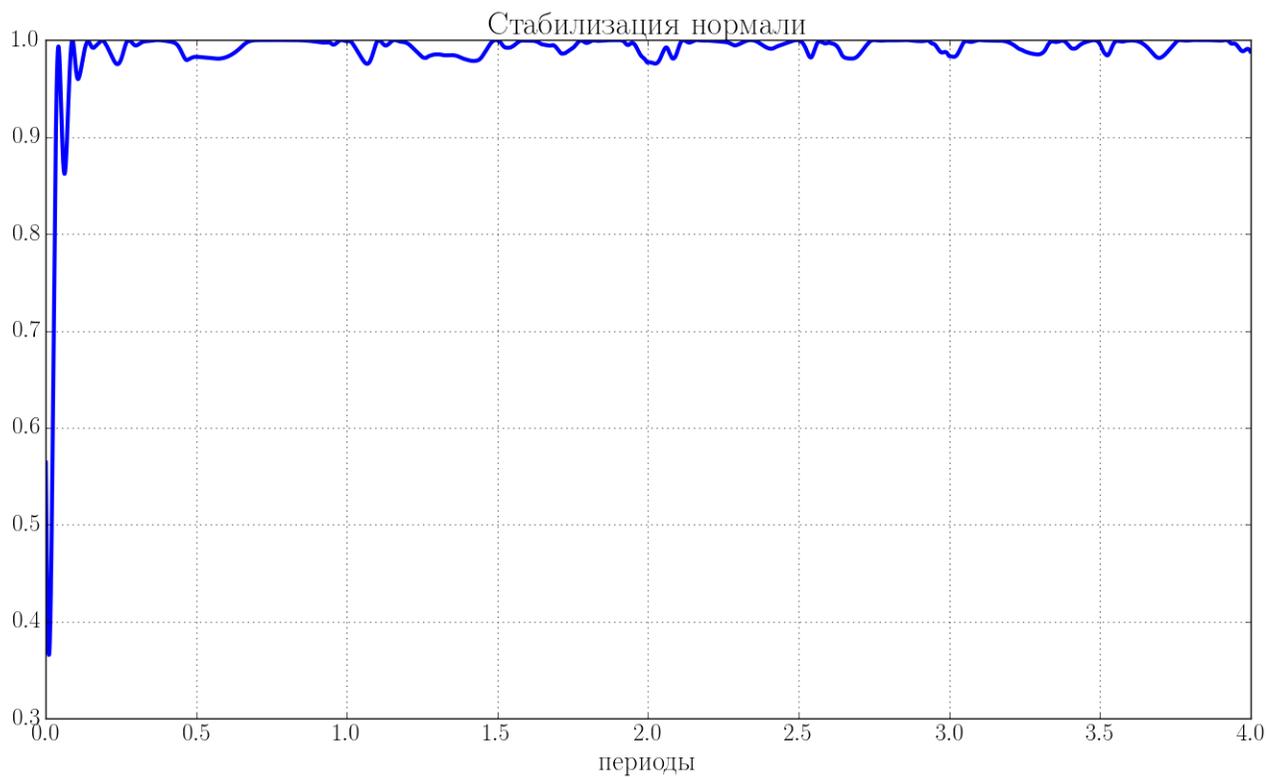


Рис. 14: Косинус угла между требуемой и реальной нормальями

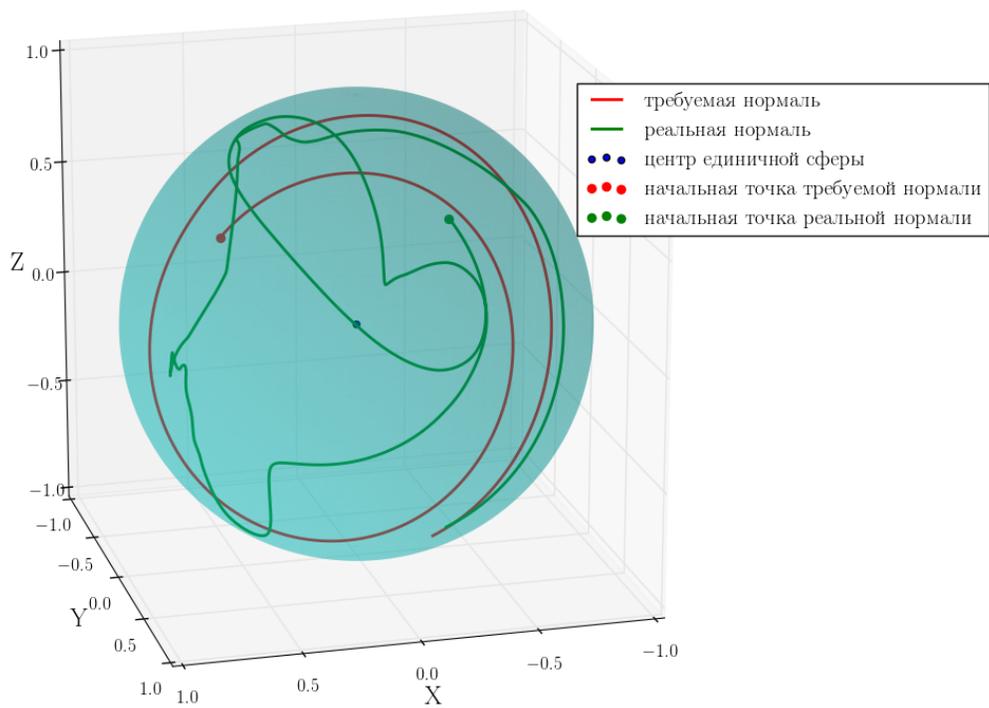


Рис. 15: Эволюция нормалей на единичной сфере

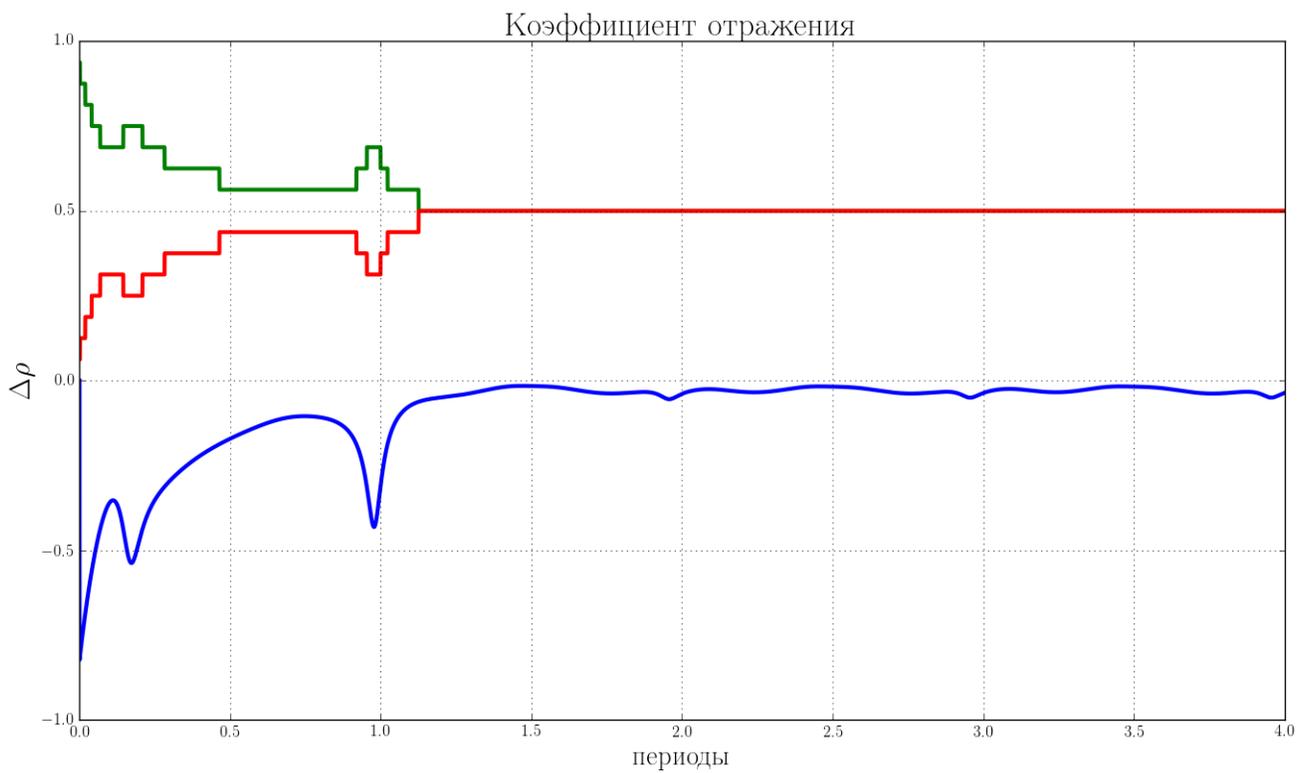


Рис. 16: Коэффициенты отражения аппаратов: красным цветом изображен коэффициент отражения первого аппарата, зеленым цветом - второго. Синим цветом изображена их требуемая разность.

5. Заключение

В работе предложен метод управления формаций из двух спутников, снабженных квадратными солнечными парусами с изменяемой отражающей способностью. Построен алгоритм управления, основанный на синхронном движении нормалей аппаратов, который позволяет добиться точности по положению порядка одного метра. Проведены оценки абсолютных величин управления и возмущений как для центра масс, так и для углового движения, которые позволили подобрать параметры управления. Численным моделированием верифицирована работоспособность алгоритма.

Конечно, алгоритм не лишен недостатков - при более сильных начальных условиях он не справляется со своей задачей. Развитием метода могла бы послужить его интеграция с другими актюаторными устройствами для обеспечения быстродействия переходных процессов.

Тем не менее, предложенный в работе алгоритм является подтверждением возможности использования бестопливных методов управления для групповых полетов.

Список литературы

- [1] Study of interspacecraft coulomb forces and implications for formation flying / Lyon B King, Gordon G Parker, Satwik Deshmukh, Jer-Hong Chong // Journal of Propulsion and Power. — 2003. — Vol. 19, no. 3. — P. 497–505.
- [2] Campbell Mark E, Schetter Thomas. Formation flying mission for the UW Dawgstar satellite // Aerospace Conference Proceedings, 2000 IEEE / IEEE. — Vol. 7. — 2000. — P. 117–125.
- [3] Spacecraft formation flying using Lorentz forces / MA Peck, B Streetman, CM Saaj, V Lappas // Journal of the British Interplanetary Society. — 2007. — Vol. 60. — P. 263–267.

- [4] Maclay TD, Tuttle Christopher. Satellite Stationkeeping of the ORBCOMM Constellation Via Active Control of Atmospheric Drag: Operations, Constraints, and Performance (AAS 05-152) // Advances in the Astronautical Sciences. — 2005. — Vol. 120, no. 1. — P. 763.
- [5] Scharf Daniel P, Hadaegh Fred Y, Ploen Scott R. A survey of spacecraft formation flying guidance and control (part I): Guidance. — 2003.
- [6] Kidder Stanley Q, Kankiewicz J Adam, Haar Thomas H Vonder. The A-Train: How Formation Flying is Transforming Remote Sensing // Proceedings of The Joint 2007 EUMETSAT Meteorological Satellite Conference and the 15th American Meteorological Society Satellite Meteorology and Oceanography Conference. — 2007.
- [7] Bidy Chris, Svitek Tomas. LightSail-1 solar sail design and qualification // Proceedings of the 41st Aerospace Mechanisms Symposium / Jet Propulsion Lab., National Aeronautics and Space Administration Pasadena, CA. — 2012. — P. 451–463.
- [8] Williams Trevor, Wang Zhong-Sheng. Uses of solar radiation pressure for satellite formation flight // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2002. — Vol. 12, no. 2-3. — P. 163–183.
- [9] Smirnov Georgi V, Ovchinnikov Mikhail, Guerman Anna. Use of solar radiation pressure to maintain a spatial satellite formation // Acta Astronautica. — 2007. — Vol. 61, no. 7. — P. 724–728.
- [10] Control of tetrahedron satellite formation flying in the geosynchronous orbit using solar radiation pressure / Yong-Gang Hou, Ming-Jiang Zhang, Chang-Yin Zhao, Rong-Yu Sun // Astrophysics and Space Science. — 2016. — Vol. 361, no. 4. — P. 1–11.
- [11] Parsay Khashayar, Schaub Hanspeter. Designing solar sail formations in sun-

- synchronous orbits for geomagnetic tail exploration // *Acta Astronautica*. — 2015. — Vol. 107. — P. 218–233.
- [12] Takeichi Noboru, Ueno Hiroshi, Oda Mitsushige. Feasibility study of a solar power satellite system configured by formation flying // *Acta Astronautica*. — 2005. — Vol. 57, no. 9. — P. 698–706.
- [13] Gong Sheng-ping, Li Jun-feng, Baoyin He-xi. Solar radiation pressure used for formation flying control around the Sun-Earth libration point // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 2009. — Vol. 30. — P. 1009–1016.
- [14] Shahid Kamran, Kumar Krishna Dev. Multiple spacecraft formation reconfiguration using solar radiation pressure // *Acta Astronautica*. — 2014. — Vol. 103. — P. 269–281.
- [15] Biggs James Douglas, McInnes Colin. Solar sail formation flying for deep-space remote sensing // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 2009. — Vol. 46, no. 3. — P. 670–678.
- [16] Marchand BG, Howell KC. Formation Flight Near L 1 And L 2 In The Sun-Earth/Moon Ephemeris System Including Solar Radiation Pressure // *Advances in the Astronautical Sciences*. — 2004. — Vol. 116. — P. 1–36.
- [17] Baresi Nicola, Scheeres Daniel J, Schaub Hanspeter. Bounded relative orbits about asteroids for formation flying and applications // *Acta Astronautica*. — 2016. — Vol. 123. — P. 364–375.
- [18] Mu Junshan, Gong Shengping, Li Junfeng. Reflectivity-controlled solar sail formation flying for magnetosphere mission // *Aerospace Science and Technology*. — 2013. — Vol. 30, no. 1. — P. 339–348.
- [19] Maintenance of satellite formations using environmental forces / Krishna D Kumar, Arun K Misra, Surjit Varma et al. // *Acta Astronautica*. — 2014. — Vol. 102. — P. 341–354.

- [20] Progress on the variable reflectivity electrochromic window / Ronald B Goldner, Floyd O Arntz, G Berera et al. // San Diego,'91, San Diego, CA / International Society for Optics and Photonics. — 1991. — P. 63–69.
- [21] Kubelka Paul. New contributions to the optics of intensely light-scattering materials. Part II: Nonhomogeneous layers // JOSA. — 1954. — Vol. 44, no. 4. — P. 330–335.
- [22] Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission / Yuichi Tsuda, Osamu Mori, Ryu Funase et al. // Acta Astronautica. — 2013. — Vol. 82, no. 2. — P. 183–188.
- [23] Mu Junshan, Gong Shengping, Li Junfeng. Coupled control of reflectivity modulated solar sail for GeoSail formation flying // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2014. — Vol. 38, no. 4. — P. 740–751.
- [24] Garner Charles, Diedrich Benjamin, Leipold Manfred. A Summary fo Solar Sail Technology Developments and Proposed Demonstration Missions. — 1999.
- [25] Dynamic and static deployment motions of spin type solar sail / OM Mori, Yuichi Tsuda, Maki Shida, Jun'ichiro Kawaguchi // 18th International Symposium on Space Flight Dynamics. — Vol. 548. — 2004. — P. 117.
- [26] Wie Bong. Solar sail attitude control and dynamics, part 1 // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2004. — Vol. 27, no. 4. — P. 526–535.
- [27] Greschik G, Mikulas MM. Design study of a square solar sail architecture // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2002. — Vol. 39, no. 5. — P. 653–661.
- [28] Progress and Plans for System Demonstration of a Scalable Square Solar Sail / David Murphy, T Trautt, M McEachen et al. // 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference. — 2004. — P. 04–105.

- [29] Block Joachim, Straubel Marco, Wiedemann Martin. Ultralight deployable booms for solar sails and other large gossamer structures in space // *Acta Astronautica*. — 2011. — Vol. 68, no. 7. — P. 984–992.
- [30] LeFevre BD, Jha R. Attitude dynamics of a square solar sailcraft during spin-deployment // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. — 2011. — Vol. 225, no. 4. — P. 433–440.
- [31] Mishne David. Formation control of satellites subject to drag variations and J2 perturbations // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. — 2004. — Vol. 27, no. 4. — P. 685–692.
- [32] Clohessy WH. Terminal guidance system for satellite rendezvous // *Journal of the Aerospace Sciences*. — 2012.
- [33] Sun Cheng-ming, Yuan Yan, Zhang Xiu-bao. Application of BRDF for modeling on the optical scattering characteristics of space target // *International Symposium on Photoelectronic Detection and Imaging 2009 / International Society for Optics and Photonics*. — 2009. — P. 738338–738338.
- [34] McInnes Colin R. Deflection of near-Earth asteroids by kinetic energy impacts from retrograde orbits // *Planetary and Space Science*. — 2004. — Vol. 52, no. 7. — P. 587–590.
- [35] Macdonald Malcolm, McInnes Colin. Solar sail science mission applications and advancement // *Advances in Space Research*. — 2011. — Vol. 48, no. 11. — P. 1702–1716.

6. Приложение

6.1. Матрицы перехода

Матрица перехода из ИСК в орбитальную СК имеет следующие столбцы

$$\frac{\mathbf{V}_n}{|\mathbf{V}_n|}, \left[\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \times \frac{\mathbf{V}_n}{|\mathbf{V}_n|} \right], \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$

где \mathbf{R} - радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс тела, движущегося по опорной орбите, \mathbf{V}_n - трансверсальная компонента скорости. Вектора \mathbf{R} и \mathbf{V}_n можно найти интегрированием задачи двух тел.

Получим матрицу перехода из солнечной СК в инерциальную. Третий столбец этой матрицы вектор направления на Солнце \mathbf{s} в ИСК представим в виде

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varepsilon \\ \sin \theta \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

где θ - долгота Солнца, ε - наклон эклиптики к экватору. В плоскости эклиптики лежит ось, направленная на точку весеннего равноденствия. В инерциальной СК орт этой оси имеет компоненты $[1, 0, 0]^T$, поэтому нормаль к плоскости эклиптики (второй столбец матрицы перехода) получим векторным произведением

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varepsilon \\ \sin \theta \sin \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \sin \varepsilon \\ \sin \theta \cos \varepsilon \end{bmatrix}$$

Последний столбец также получим векторным произведением.

Для перехода из инерциальной СК в связанную с аппаратом систему координат используется функция, принимающая на вход кватернион $q = (w, x, y, z)$ и возвращающая матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2zw & 2xz + 2yw \\ 2xy + 2zw & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2xw \\ 2xz - 2yw & 2yz + 2xw & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, нам известна связь между 4-мя системами координат.