

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра прикладной математики
Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН

Н.А. Герасимова

Магистерская диссертация

Положения равновесия связки трех тел на круговой орбите

Научный руководитель : д.ф.-м.н., проф. С.А. Мирер

Рецензент: к.ф.-м.н. И.В. Прилепский

Москва

2013

Оглавление

1	Введение.....	- 3 -
2	Постановка задачи.....	- 11 -
3	Уравнения движения.....	- 12 -
4	Положения равновесия системы.....	- 21 -
5	Система с замороженными шарнирами.....	- 25 -
6	Достаточные условия устойчивости	- 28 -
6.1	Достаточные условия устойчивости для группы решений (11)	- 32 -
6.2	Достаточные условия устойчивости для группы решений (12)	- 36 -
6.3	Достаточные условия устойчивости для группы решений (15)	- 40 -
6.4	Достаточные условия устойчивости для группы решений (18)	- 44 -
7	Частные случаи задачи	- 48 -
7.1	Система трех тонких однородных стержней	- 48 -
7.2	Устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости	- 51 -
7.2.1	Система трех одинаковых тел.....	- 53 -
7.2.2	Боковые тела – математические маятники	- 56 -
7.2.3	Боковые тела – тонкие однородные стержни.....	- 60 -
8	Заключение	- 64 -
9	Список литературы	- 65 -

1 Введение

Обеспечение и поддержание заданной ориентации искусственных спутников Земли представляет собой одну из важнейших задач управления их движением. Определенная ориентация требуется как для коррекции траектории, так и для успешного выполнения своих функций спутниками связи, метеорологическими и навигационными спутниками, для проведения в космосе многих научных исследований. В зависимости от поставленных задач ориентация искусственных спутников может осуществляться активными или пассивными методами.

Для активных методов ориентации обязательно наличие на спутнике датчиков ориентации и исполнительных элементов, обеспечивающих управляющие моменты и поддерживающих заданную ориентацию спутника на орбите. Активные системы ориентации применяются, если необходимо обеспечить высокую точность ориентации, противодействовать большим возмущающим моментам, совершать сложные программные повороты спутника. Активные системы ориентации требуют для своего функционирования постоянного расхода энергии или рабочего тела.

Для проектов спутников без сложных программных маневров, с большим временем активного существования и точностью ориентации 1–5° более предпочтительно применение пассивных методов. Работа пассивных систем ориентации спутников основана на использовании свойств гравитационного и магнитного полей, эффекта сопротивления атмосферы и светового давления, гироскопических свойств вращающихся тел. Важное свойство пассивных систем ориентации спутников заключается в том, что они не требуют датчиков ориентации и исполнительных элементов и могут функционировать продолжительное время, не расходуя энергию и топливо.

Из систем, использующих свойства внешней среды, наибольшее распространение получили гравитационные системы ориентации спутников. Принцип ориентации в этих системах легко понять на примере гантели (две равные массы, соединенные жестким невесомым стержнем), центр масс которой движется по круговой орбите.

Различие сил притяжения конечных масс гантели Землей приводит к появлению гравитационного момента, стремящего совместить ось гантели с направлением радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника. Это положение равновесия является устойчивым (случай Луны, имеющей форму слегка вытянутой дыни). Существует и неустойчивое положение равновесия, когда ось гантели совпадает с направлением касательной к орбите. Ясно, что величина гравитационного момента зависит от формы эллипсоида инерции спутника [1].

Спутник с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите двадцать четыре положения равновесия в орбитальной системе координат, из которых четыре – устойчивые. Они соответствуют совпадению наибольшей оси эллипсоида инерции спутника с радиус-вектором и наименьшей оси с нормалью к плоскости орбиты [2].

В [3] рассмотрены плоские колебания системы двух тел, соединенных идеальным сферическим шарниром, на круговой орбите в случае, когда шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции соответствующих тел. Записаны уравнения движения и определены все положения равновесия системы в орбитальной системе координат. С использованием интеграла энергии получены достаточные условия устойчивости положений равновесия. Кроме того, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия при наличии пространственных возмущений.

В [4] рассматривается двойной маятник на круговой орбите, состоящий из трех материальных точек, соединенных двумя невесомыми стержнями и сферическим шарниром в центральной точке. В [5] исследуется система двух осесимметричных тел, соединенных сферическим шарниром в точке пересечения осей симметрии обоих тел. Записаны выражения для кинетической энергии и силовой функции, уравнения равновесия систем на круговой орбите, определены все изолированные пространственные положения равновесия систем в орбитальной системе координат и проанализированы области их существования.

Следует заметить, что задача определения всех пространственных положений равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром тел на круговой орбите в общем виде до сих пор не решена.

В [6], [7] исследовано движение системы спутник-маятник на круговой орбите под действием гравитационного момента в предположении, что при движении системы главные оси инерции спутника параллельны осям орбитальной системы координат. В [6] эллипсоид инерции маятника осесимметричен, а в [7] все три главные центральные моменты инерции маятника различны. Записаны выражения для кинетической энергии и силовой функции, выведены уравнения движения системы, исследованы положения равновесия маятника и их устойчивость (в [7] только для двух наиболее интересных частных случаев). Помимо этого в [6] исследованы стационарные вращения маятника и их устойчивость.

В [8] рассматривается цепочка, состоящая из $n + 1$ материальных точек, соединенных n невесомыми стержнями и $n - 1$ сферическими шарнирами, центр масс которой движется по круговой орбите (обобщение системы, рассмотренной в [4]). Здесь исследованы уравнения равновесия системы и описаны все возможные плоские равновесные конфигурации. Полученные

результаты проиллюстрированы на примере системы, состоящей из пяти материальных точек.

В [9], [10] рассмотрены частные случаи плоского движения системы трех тел по круговой орбите, при этом два из трех тел представляют собой материальные точки. В [9] найдены положения равновесия системы, в [10] эти положения равновесия исследованы на устойчивость.

В [9] представлены аналитические выражения для положений равновесия по отношению к орбитальной системе координат для системы трех тел, связанных идеальными сферическими шарнирами. Показана связь между ориентацией тел в положениях равновесия и значениями их масс, размеров и моментов инерции. Орбитальное и угловое движение предполагается плоским, центр масс движется по круговой орбите. Для получения уравнений движения используется формализм Лагранжа.

В качестве независимых переменных авторы выбрали координаты центра масс основного тела в фиксированной плоскости орбиты и три угла поворота для каждого тела в данной плоскости. Это дает 5 обобщенных координат, через которые могут быть выражены положения точек тел относительно абсолютной (инерциальной, связанной с Землей) системы координат и их скорости.

Вначале вычисляется кинетическая энергия системы как сумма кинетических энергий каждого из тел в отдельности

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i \mathbf{v}_{c,i}^2}{2} + \frac{I_i \boldsymbol{\omega}_i^2}{2} \right),$$

где T_i обозначает кинетическую энергию i -го тела ($i = 1, 2, 3$), $\mathbf{v}_{c,i}$ – скорость центра масс i -го тела в абсолютной системе координат, m_i – масса i -го тела, I_i – момент инерции i -го тела относительно мгновенной оси вращения, $\boldsymbol{\omega}_i$ – угловая скорость вращения i -го тела в проекциях на оси абсолютной системы координат.

Потенциальная энергия системы описывается функцией

$$V = -\mu_E \sum_{i=1}^3 \int_{m_i} \frac{1}{|\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}_i|} dm,$$

где μ_E – гравитационный параметр Земли, \mathbf{R}_0 – радиус-вектор центра масс основного тела, \mathbf{r}_i – положение элементарной массы dm относительно точки \mathbf{R}_0 . Данная формула потенциальной энергии раскладывается в ряд с точностью до членов второго порядка $(r_i/R_0)^2$.

Теперь могут быть записаны уравнения движения в форме Лагранжа. Далее, приравнявая все производные обобщенных координат к нулю, авторы получают уравнения для определения положений равновесия. Рассматриваются две частные конфигурации: в первом случае к основному телу прикреплены два математических маятника; а во втором – один двойной маятник. В рамках каждой постановки задачи получаются 12 положений равновесия. Детально авторы рассматривают лишь по одному положению равновесия для каждой частной конфигурации. Оба эти положения равновесия соответствуют «косому» положению основного тела в орбитальной системе координат.

Углы ориентации трех тел системы (углы тангажа) получены аналитически и являются функциями геометрических и инерциальных параметров тел. Получены условия, которым должны удовлетворять параметры тел, при которых возможны найденные равновесные конфигурации системы.

Работа [10] содержит анализ устойчивости положений равновесия, полученных в работе [9]. Этот анализ проведен также в терминах геометрических и инерционных характеристик тел.

Для исследования устойчивости используются уравнения движения КА, линеаризованные вблизи найденных положений равновесия. Эти

уравнения представляют собой для каждого рассматриваемого положения равновесия совокупность 5-ти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0,$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} – некоторые матрицы, причем матрица \mathbf{A} – положительно определенная. Характеристическое уравнение полученной системы,

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}) = 0,$$

является алгебраическим уравнением 10-й степени относительно λ (уравнением 5-й степени относительно $\omega = \lambda^2$). Анализ корней характеристического уравнения позволяет сделать вывод об устойчивости или неустойчивости рассматриваемого положения равновесия системы.

Отметим также, что существует и другой подход к исследованию устойчивости положений равновесия. В силу существования интеграла движения данной системы тел, встает вопрос его положительной определенности в окрестности положения равновесия. Задача проверки положительной определенности интеграла энергии сводится к проверке положительной определенности той же матрицы \mathbf{B} . Если матрица \mathbf{B} является положительно определенной, то рассматриваемое положение равновесия – устойчивое.

Авторы рассматривают вторую частную конфигурацию системы - основное тело, к которому при помощи сферического шарнира присоединен двойной маятник. Никаких дополнительных гипотез о геометрической форме тела и длинах маятников не делается. Предположение о том, что центр масс системы движется по круговой орбите, сокращает количество обобщенных координат до 3-х и, соответственно, приводит к характеристическому уравнению третьего порядка относительно $\omega = \lambda^2$. Это позволяет получить аналитические выражения для собственных чисел.

Устойчивость системы была проанализирована для всех равновесных конфигураций, сгруппированных по три положения равновесия в трех группах. Всего 9 качественно различных положений равновесия. Анализ показал, что только одно из предложенных положений равновесия оказывается устойчивым. Углы отклонения тел от местной вертикали должны составлять 0 , π и 0 для основного тела и маятников соответственно. При этом требуются достаточно большие значения длин маятников по сравнению с размерами основного тела. Остальные положения равновесия содержат характеристические числа с положительными действительными частями и являются неустойчивыми. Найдены условия, приводящие к отрицательным действительным частям некоторых собственных значений. Авторы утверждают, что для того, чтобы воспользоваться этим, можно заморозить соответствующие степени свободы, чтобы исключить любые неустойчивые движения.

Настоящая магистерская диссертация посвящена исследованию положений равновесия на круговой орбите механической системы, состоящей из трех твердых тел, соединенных идеальными сферическими шарнирами, которые расположены на пересечении главных центральных осей инерции соответствующих тел (глава 4), и их устойчивости (глава 6). Для этих целей записаны выражения для кинетической энергии и силовой функции системы, выведены уравнения движения (глава 3). В главе 6 приведены примеры устойчивых конфигураций, в том числе для ситуаций, когда центральное тело расположено под углом к местной вертикали и горизонтали. Но не для всех положений равновесия удалось найти подход к исследованию достаточных условий устойчивости. Поэтому в главе 7 рассмотрены частные случаи задачи: система трех тонких однородных стержней, система трех одинаковых тел, система, в которой боковые тела представляют собой математические маятники и система, в которой боковые

тела представляют собой тонкие однородные стержни, причем в последних трех случаях рассматривается устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости. Если устойчивости по отношению к возмущениям в плоскости нет, то нет и устойчивости по отношению к пространственным возмущениям.

В главе 5 проверено утверждение: система в положении равновесия с «замороженными» шарнирами представляет собой твердое тело, главные центральные оси инерции которого направлены вдоль осей орбитальной системы координат.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему трех соединенных идеальными сферическими шарнирами тел на круговой орбите (рис. 1). Будем предполагать, что шарниры расположены на пересечении главных центральных осей инерции соответствующих тел.

Ставится задача исследования положений равновесия данной системы в центральном ньютоновом гравитационном поле, в том числе их устойчивости.

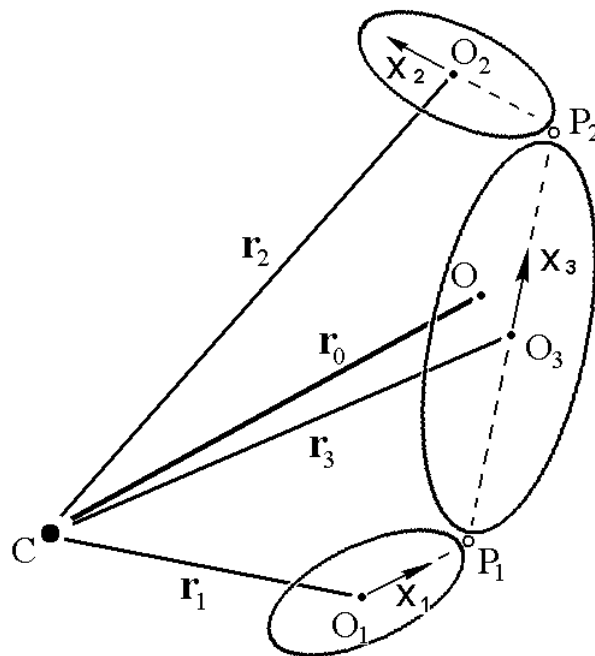


Рис. 1. Система трех тел на орбите

3 Уравнения движения

Для вывода уравнений движения в форме Лагранжа получим выражения для кинетической энергии и силовой функции системы.

Введем следующие обозначения:

C – центр Земли; O, O_i ($i=1, 2, 3$) – центры масс системы и составляющих ее тел, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{CO}$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{CO}_i$; P_1, P_2 – шарниры, $\mathbf{O}_1\mathbf{P}_1 = a_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{O}_2\mathbf{P}_2 = a_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{O}_3\mathbf{P}_1 = s_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{O}_3\mathbf{P}_2 = s_2\mathbf{e}_3$, \mathbf{e}_i – орт оси O_ix_i ; m_i, A_i, B_i, C_i – масса и главные центральные моменты инерции i -го тела; $m = m_1 + m_2 + m_3$ – суммарная масса системы.

Матрицу перехода из системы $O_ix_iz_i$, связанную с i -м телом, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции, в систему координат O_iXYZ , начало координат которой совпадает с центром масс i -го тела, оси параллельны осям орбитальной системы координат, обозначим

$$\mathbf{A}_i = \left\| a_{pq}^{(i)} \right\|_{p,q=1}^3, \quad i=1, 2, 3,$$

где

$$a_{11}^{(i)} = \cos \alpha_i \cos \beta_i,$$

$$a_{12}^{(i)} = \sin \alpha_i \sin \gamma_i - \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i,$$

$$a_{13}^{(i)} = \sin \alpha_i \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i,$$

$$a_{21}^{(i)} = \sin \beta_i,$$

$$a_{22}^{(i)} = \cos \beta_i \cos \gamma_i,$$

$$a_{23}^{(i)} = -\cos \beta_i \sin \gamma_i,$$

$$a_{31}^{(i)} = -\sin \alpha_i \cos \beta_i,$$

$$a_{32}^{(i)} = \cos \alpha_i \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i,$$

$$a_{33}^{(i)} = \cos \alpha_i \cos \gamma_i - \sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i;$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – углы ориентации (тангажа, рыскания и крена, см. рис. 2) соответствующего тела.

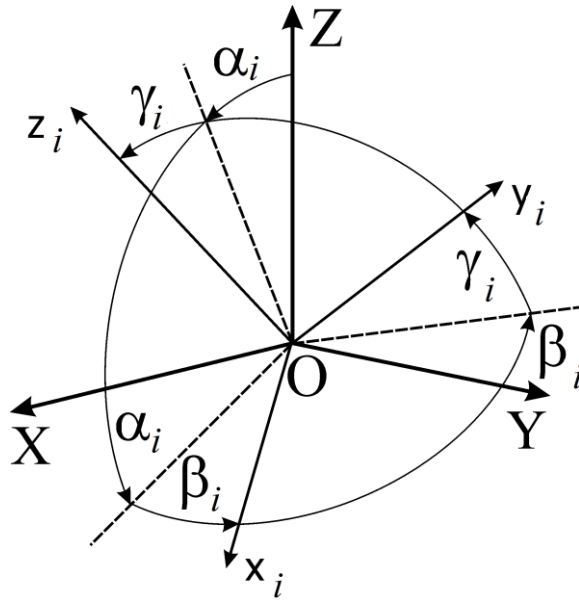


Рис. 2. Системы координат

Из уравнений связей

$$\mathbf{r}_i + a_i \mathbf{e}_i = \mathbf{r}_3 + s_i \mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2$$

и определения радиус-вектора центра масс системы

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{m} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3)$$

выражаем радиус-векторы тел

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \sum_{v=1}^3 n_{iv} \mathbf{e}_v, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\|n_{iv}\|_{i,v=1}^3 = \begin{vmatrix} \left(\frac{m_1}{m} - 1\right) a_1 & \frac{m_2}{m} a_2 & s_1 - \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m} \\ \frac{m_1}{m} a_1 & \left(\frac{m_2}{m} - 1\right) a_2 & s_2 - \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m} \\ \frac{m_1}{m} a_1 & \frac{m_2}{m} a_2 & -\frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} \dot{\mathbf{e}}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} (\boldsymbol{\omega}_\nu \times \mathbf{e}_\nu), \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}_i = (p_i, q_i, r_i)^T$ – абсолютная угловая скорость i -го тела. Очевидно

$$\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_1^{(i)} = (0, r_i, -q_i)^T$$

или, переходя к орбитальной системе координат,

$$\mathbf{A}_i (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i) = (r_i a_{12}^{(i)} - q_i a_{13}^{(i)}, r_i a_{22}^{(i)} - q_i a_{23}^{(i)}, r_i a_{32}^{(i)} - q_i a_{33}^{(i)})^T.$$

Возводя (1) в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = & \dot{\mathbf{r}}_0^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_0 \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} (\boldsymbol{\omega}_\nu \times \mathbf{e}_\nu) + \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu}^2 (\boldsymbol{\omega}_\nu \times \mathbf{e}_\nu)^2 + \\ & + 2n_{i1}n_{i2} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1)(\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2) + \\ & + 2n_{i2}n_{i3} (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2)(\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{e}_3) + \\ & + 2n_{i3}n_{i1} (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{e}_3)(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы трех тел имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2). \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), учитывая очевидные соотношения

$$\sum_{i=1}^3 m_i n_{i\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3 \quad (4)$$

и используя обозначения

$$\begin{aligned} L_1 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i1}^2 = \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) m_1 a_1^2, \\ L_2 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i2}^2 = \left(1 - \frac{m_2}{m}\right) m_2 a_2^2, \\ L_3 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i3}^2 = m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 - \frac{1}{m} (m_1 s_1 + m_2 s_2)^2, \\ N_1 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i2} n_{i3} = [m_1 s_1 - (m_1 + m_3) s_2] \frac{m_2}{m} a_2, \\ N_2 &= \sum_{i=1}^3 m_i n_{i3} n_{i1} = [m_2 s_2 - (m_2 + m_3) s_1] \frac{m_1}{m} a_1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$N_3 = \sum_{i=1}^3 m_i n_{i1} n_{i2} = -\frac{m_1 m_2}{m} a_1 a_2,$$

находим

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[A_i p_i^2 + (B_i + L_i) q_i^2 + (C_i + L_i) r_i^2 \right] + \\ & + N_1 \sum_{j=1}^3 (r_2 a_{j2}^{(2)} - q_2 a_{j3}^{(2)}) (r_3 a_{j2}^{(3)} - q_3 a_{j3}^{(3)}) + \\ & + N_2 \sum_{j=1}^3 (r_3 a_{j2}^{(3)} - q_3 a_{j3}^{(3)}) (r_1 a_{j2}^{(1)} - q_1 a_{j3}^{(1)}) + \\ & + N_3 \sum_{j=1}^3 (r_1 a_{j2}^{(1)} - q_1 a_{j3}^{(1)}) (r_2 a_{j2}^{(2)} - q_2 a_{j3}^{(2)}). \end{aligned}$$

При обычных предположениях о центральности поля тяготения Земли и малости отношения характерного линейного размера системы к расстоянию между центрами масс Земли и системы выражение для силовой функции может быть записано следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} U = \mu \sum_{i=1}^3 \left(\int_{m_i} \frac{dm}{r_k} \right) = \mu \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{m_i}{r_i} + \frac{1}{2r_i^3} \left[(B_i + C_i - 2A_i) (a_{31}^{(i)})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (C_i + A_i - 2B_i) (a_{32}^{(i)})^2 + (A_i + B_i - 2C_i) (a_{33}^{(i)})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

\mathbf{r}_i в орбитальной системе координат имеют вид

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} \mathbf{A}_\nu \mathbf{e}_\nu,$$

откуда

$$r_i^2 = r_0^2 \left(1 + \frac{2}{r_0} D_{i1} + \frac{1}{r_0^2} D_{i2} \right).$$

Здесь, учитывая, что в орбитальной системе координат $\mathbf{r}_0/r_0 = (0, 0, 1)$,

$$D_{i1} = \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} \mathbf{A}_\nu \mathbf{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} a_{31}^{(\nu)},$$

$$\begin{aligned}
D_{i2} &= \left(\sum_{\nu=1}^3 n_{i\nu} \mathbf{A}_\nu \mathbf{e}_\nu \right)^2 = \left(n_{i1} a_{11}^{(1)} + n_{i2} a_{11}^{(2)} + n_{i3} a_{11}^{(3)} \right)^2 + \\
&+ \left(n_{i1} a_{21}^{(1)} + n_{i2} a_{21}^{(2)} + n_{i3} a_{21}^{(3)} \right)^2 + \left(n_{i1} a_{31}^{(1)} + n_{i2} a_{31}^{(2)} + n_{i3} a_{31}^{(3)} \right)^2 = \\
&= n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 + 2n_{i2}n_{i3} \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu 1}^{(2)} a_{\nu 1}^{(3)} + 2n_{i3}n_{i1} \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu 1}^{(3)} a_{\nu 1}^{(1)} + 2n_{i1}n_{i2} \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu 1}^{(1)} a_{\nu 1}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_i} &= \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{1}{r_0} D_{i1} - \frac{1}{r_0^2} \frac{D_{i2} - 3D_{i1}^2}{2} \right) + O\left(\frac{1}{r_0^4} \right); \\
\frac{1}{r_i^3} &= \frac{1}{r_0^3} + O\left(\frac{1}{r_0^4} \right).
\end{aligned}$$

В результате (6) принимает вид

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\mu m}{r_0} - \frac{\mu}{r_0^2} \sum_{i=1}^3 m_i D_{i1} - \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{i=1}^3 m_i (D_{i2} - 3D_{i1}^2) + \\
&+ \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{i=1}^3 \left[(B_i + C_i - 2A_i) (a_{31}^{(i)})^2 + (C_i + A_i - 2B_i) (a_{32}^{(i)})^2 + \right. \\
&\left. + (A_i + B_i - 2C_i) (a_{33}^{(i)})^2 \right].
\end{aligned}$$

Но в силу (4)

$$\sum_{i=1}^3 m_i D_{i1} = \sum_{\nu=1}^3 \left[\left(\sum_{i=1}^3 m_i n_{i\nu} \right) a_{31}^{(\nu)} \right] = 0;$$

кроме того,

$$\begin{aligned}
D_{i2} - 3D_{i1}^2 &= n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 + 2n_{i2}n_{i3} \left(a_{11}^{(2)}a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(2)}a_{21}^{(3)} + a_{31}^{(2)}a_{31}^{(3)} \right) + \\
&+ 2n_{i3}n_{i1} \left(a_{11}^{(3)}a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(3)}a_{21}^{(1)} + a_{31}^{(3)}a_{31}^{(1)} \right) + \\
&+ 2n_{i1}n_{i2} \left(a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(1)}a_{21}^{(2)} + a_{31}^{(1)}a_{31}^{(2)} \right) - 3 \left(n_{i1}a_{31}^{(1)} + n_{i2}a_{31}^{(2)} + n_{i3}a_{31}^{(3)} \right) = \\
&= \sum_{\nu=1}^3 \left[1 - 3 \left(a_{31}^{(\nu)} \right)^2 \right] n_{i\nu}^2 + 2n_{i2}n_{i3} \left(a_{11}^{(2)}a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(2)}a_{21}^{(3)} - 2a_{31}^{(2)}a_{31}^{(3)} \right) + \\
&+ 2n_{i3}n_{i1} \left(a_{11}^{(3)}a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(3)}a_{21}^{(1)} - 2a_{31}^{(3)}a_{31}^{(1)} \right) + \\
&+ 2n_{i1}n_{i2} \left(a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(1)}a_{21}^{(2)} - 2a_{31}^{(1)}a_{31}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (5), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\mu m}{r_0} + \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{i=1}^3 \left[(B_i + C_i - 2A_i) \left(a_{31}^{(i)} \right)^2 + (C_i + A_i - 2B_i) \left(a_{32}^{(i)} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. (A_i + B_i - 2C_i) \left(a_{33}^{(i)} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{2r_0^3} \sum_{\nu=1}^3 L_i \left[1 - 3 \left(a_{31}^{(\nu)} \right)^2 \right] - \\
&- \frac{\mu}{r_0^3} \left[N_1 \left(a_{11}^{(2)}a_{11}^{(3)} + a_{21}^{(2)}a_{21}^{(3)} - 2a_{31}^{(2)}a_{31}^{(3)} \right) + \right. \\
&+ N_2 \left(a_{11}^{(3)}a_{11}^{(1)} + a_{21}^{(3)}a_{21}^{(1)} - 2a_{31}^{(3)}a_{31}^{(1)} \right) + \\
&+ \left. N_3 \left(a_{11}^{(1)}a_{11}^{(2)} + a_{21}^{(1)}a_{21}^{(2)} - 2a_{31}^{(1)}a_{31}^{(2)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Если орбита круговая, то с точностью до постоянных членов кинетическая энергия движения системы относительно центра масс и силовая функция принимают вид

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[A_i p_i^2 + (B_i + L_i) q_i^2 + (C_i + L_i) r_i^2 \right] + \\
&+ N_1 \sum_{j=1}^3 \left(r_2 a_{j2}^{(2)} - q_2 a_{j3}^{(2)} \right) \left(r_3 a_{j2}^{(3)} - q_3 a_{j3}^{(3)} \right) + \\
&+ N_2 \sum_{j=1}^3 \left(r_3 a_{j2}^{(3)} - q_3 a_{j3}^{(3)} \right) \left(r_1 a_{j2}^{(1)} - q_1 a_{j3}^{(1)} \right) + \\
&+ N_3 \sum_{j=1}^3 \left(r_1 a_{j2}^{(1)} - q_1 a_{j3}^{(1)} \right) \left(r_2 a_{j2}^{(2)} - q_2 a_{j3}^{(2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = & -\frac{3}{2}\omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \left[(A_i - L_i)(a_{31}^{(i)})^2 + B_i(a_{32}^{(i)})^2 + C_i(a_{33}^{(i)})^2 \right] - \\
& -\omega_0^2 \sum_{j=1}^3 \left(N_1 a_{j1}^{(2)} a_{j1}^{(3)} + N_2 a_{j1}^{(3)} a_{j1}^{(1)} + N_3 a_{j1}^{(1)} a_{j1}^{(2)} \right) + \\
& + 3\omega_0^2 \left(N_1 a_{31}^{(2)} a_{31}^{(3)} + N_2 a_{31}^{(3)} a_{31}^{(1)} + N_3 a_{31}^{(1)} a_{31}^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Здесь ω_0 – орбитальная угловая скорость центра масс системы, $\omega_0^2 = \mu/r_0^3$.

Имеет место первый интеграл

$$T_2 - T_0 - U = h_0,$$

где

$$\begin{aligned}
T_2 = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[A_i \bar{p}_i^2 + (B_i + L_i) \bar{q}_i^2 + (C_i + L_i) \bar{r}_i^2 \right] + \\
& + N_1 \sum_{j=1}^3 \left(\bar{r}_2 a_{j2}^{(2)} - \bar{q}_2 a_{j3}^{(2)} \right) \left(\bar{r}_3 a_{j2}^{(3)} - \bar{q}_3 a_{j3}^{(3)} \right) + \\
& + N_2 \sum_{j=1}^3 \left(\bar{r}_3 a_{j2}^{(3)} - \bar{q}_3 a_{j3}^{(3)} \right) \left(\bar{r}_1 a_{j2}^{(1)} - \bar{q}_1 a_{j3}^{(1)} \right) + \\
& + N_3 \sum_{j=1}^3 \left(\bar{r}_1 a_{j2}^{(1)} - \bar{q}_1 a_{j3}^{(1)} \right) \left(\bar{r}_2 a_{j2}^{(2)} - \bar{q}_2 a_{j3}^{(2)} \right), \\
T_0 = & \frac{1}{2} \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \left[A_i (a_{21}^{(i)})^2 + (B_i + L_i) (a_{22}^{(i)})^2 + (C_i + L_i) (a_{23}^{(i)})^2 \right] + \\
& + \omega_0^2 \sum_{j=1}^3 \left[N_1 \left(a_{23}^{(2)} a_{j2}^{(2)} - a_{22}^{(2)} a_{j3}^{(2)} \right) \left(a_{23}^{(3)} a_{j2}^{(3)} - a_{22}^{(3)} a_{j3}^{(3)} \right) + \right. \\
& + N_2 \left(a_{23}^{(3)} a_{j2}^{(3)} - a_{22}^{(3)} a_{j3}^{(3)} \right) \left(a_{23}^{(1)} a_{j2}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{j3}^{(1)} \right) + \\
& \left. + N_3 \left(a_{23}^{(1)} a_{j2}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{j3}^{(1)} \right) \left(a_{23}^{(2)} a_{j2}^{(2)} - a_{22}^{(2)} a_{j3}^{(2)} \right) \right], \\
\bar{p}_i = & p_i - \omega_0 a_{21}^{(i)} = \dot{\alpha}_i a_{21}^{(i)} + \dot{\gamma}, \\
\bar{q}_i = & q_i - \omega_0 a_{22}^{(i)} = \dot{\alpha}_i a_{22}^{(i)} + \dot{\beta} \sin \gamma_i, \\
\bar{r}_i = & r_i - \omega_0 a_{23}^{(i)} = \dot{\alpha}_i a_{23}^{(i)} + \dot{\beta} \cos \gamma_i.
\end{aligned}$$

Учитывая очевидные тождества $a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = a_{31}$, $a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} = a_{11}$ и отбрасывая постоянные члены, получаем

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{\omega_0^2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[(A_i - L_i) (a_{21}^{(i)})^2 + B_i (a_{22}^{(i)})^2 + C_i (a_{23}^{(i)})^2 \right] + \\ &+ N_1 (a_{31}^{(2)} a_{31}^{(3)} + a_{11}^{(2)} a_{11}^{(3)}) + N_2 (a_{31}^{(3)} a_{31}^{(1)} + a_{11}^{(3)} a_{11}^{(1)}) + \\ &+ N_3 (a_{31}^{(1)} a_{31}^{(2)} + a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)}) \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} -2 \frac{T_0 + U}{\omega_0^2} &= \sum_{i=1}^3 \left\{ (A_i - L_i) \left[3(a_{31}^{(i)})^2 - (a_{21}^{(i)})^2 \right] + \right. \\ &+ B_i \left[3(a_{32}^{(i)})^2 - (a_{22}^{(i)})^2 \right] + C_i \left[3(a_{33}^{(i)})^2 - (a_{23}^{(i)})^2 \right] \left. \right\} + \\ &+ 2N_1 (a_{21}^{(2)} a_{21}^{(3)} - 3a_{31}^{(2)} a_{31}^{(3)}) + 2N_2 (a_{21}^{(3)} a_{21}^{(1)} - 3a_{31}^{(3)} a_{31}^{(1)}) + \\ &+ 2N_3 (a_{21}^{(1)} a_{21}^{(2)} - 3a_{31}^{(1)} a_{31}^{(2)}). \end{aligned}$$

Теперь, когда выражения для кинетической энергии и силовой функции получены, запишем общий вид уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial \alpha_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial \beta_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial \gamma_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся анализом колебаний в плоскости орбиты, т.е. будем считать, что $\beta_i = \gamma_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{A}_i = \left\| a_{mn}^{(i)} \right\|_{m,n=1}^3 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_i & 0 & \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i \end{vmatrix}; \quad p_i = r_i = 0, \quad q_i = \dot{\alpha}_i + \omega_0.$$

Легко убедиться, что уравнения углового движения в плоскости орбиты запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

а после перехода к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \alpha'_i} - \frac{\partial (T^* + U^*)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где штрих обозначает дифференцирование по τ ,

$$\begin{aligned} T^* = \frac{T}{\omega_0^2} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (B_i + L_i) (\alpha'_i + 1)^2 + \\ & + N_1 (\alpha'_2 + 1) (\alpha'_3 + 1) \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + N_2 (\alpha'_3 + 1) (\alpha'_1 + 1) \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ & + N_3 (\alpha'_1 + 1) (\alpha'_2 + 1) \cos(\alpha_1 - \alpha_2); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U^* = \frac{U}{\omega_0^2} = & \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 (C_i - A_i + L_i) \sin^2 \alpha_i + \\ & + 3(N_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + N_2 \sin \alpha_3 \sin \alpha_1 + N_3 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) - \\ & - N_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) - N_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) - N_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), получаем

$$\begin{aligned} & (B_1 + L_1) \alpha_1'' + N_3 \alpha_2'' \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + N_2 \alpha_3'' \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ & + N_3 (\alpha'_2 + 2) \alpha_2' \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - N_2 (\alpha'_3 + 2) \alpha_3' \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \\ & + 3[(A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_1 - N_3 \sin \alpha_2 - N_2 \sin \alpha_3] \cos \alpha_1 = 0, \\ & (B_2 + L_2) \alpha_2'' + N_1 \alpha_3'' \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + N_3 \alpha_1'' \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ & + N_1 (\alpha'_3 + 2) \alpha_3' \sin(\alpha_2 - \alpha_3) - N_3 (\alpha'_1 + 2) \alpha_1' \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ & + 3[(A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_2 - N_1 \sin \alpha_3 - N_3 \sin \alpha_1] \cos \alpha_2 = 0, \\ & (B_3 + L_3) \alpha_3'' + N_2 \alpha_1'' \cos(\alpha_3 - \alpha_1) + N_1 \alpha_2'' \cos(\alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + N_2 (\alpha'_1 + 2) \alpha_1' \sin(\alpha_3 - \alpha_1) - N_1 (\alpha'_2 + 2) \alpha_2' \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + 3[(A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_3 - N_2 \sin \alpha_1 - N_1 \sin \alpha_2] \cos \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в главе 3 получены выражения для кинетической энергии и силовой функции системы, выведены уравнения углового движения в плоскости орбиты.

4 Положения равновесия системы

Запишем уравнения равновесий системы при $\alpha_i = \alpha_{i0} = const$,
 $\beta_i = \gamma_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & \left[(A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} - N_3 \sin \alpha_{20} - N_2 \sin \alpha_{30} \right] \cos \alpha_{10} = 0, \\ & \left[-N_3 \sin \alpha_{10} + (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} - N_1 \sin \alpha_{30} \right] \cos \alpha_{20} = 0, \\ & \left[-N_2 \sin \alpha_{10} - N_1 \sin \alpha_{20} + (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} \right] \cos \alpha_{30} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

и определим все удовлетворяющие им значения углов α_{i0} . При этом будем считать, что $\alpha_{i0} \in [-\pi, \pi]$. Анализ системы (10) приводит к следующим восьми группам решений:

$$\cos \alpha_{10} = \cos \alpha_{20} = \cos \alpha_{30} = 0; \quad (11)$$

$$\cos \alpha_{10} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{20} = 0, \quad N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} = 0; \\ \cos \alpha_{20} = 0, \quad (A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} - N_3 \sin \alpha_{20} - N_2 \sin \alpha_{30} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{30} = 0; \\ \cos \alpha_{10} = 0, \quad N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{30} = 0; \\ \cos \alpha_{10} = 0, \quad N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} = 0, \\ N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{20} = 0, \quad (A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} - N_3 \sin \alpha_{20} - N_2 \sin \alpha_{30} = 0, \\ N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{30} = 0, \quad (A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} - N_3 \sin \alpha_{20} - N_2 \sin \alpha_{30} = 0, \\ N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} - N_3 \sin \alpha_{20} - N_2 \sin \alpha_{30} = 0, \\ N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} = 0.$$

Проанализируем каждый из случаев (11)-(18). Система (11) всегда имеет 8 решений

$$\alpha_{10} = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Система (12) имеет решения, отличные от (19), при

$$\left| \frac{N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}}{A_3 - C_3 - L_3} \right| < 1,$$

где $\sin \alpha_{10} = \pm 1, \sin \alpha_{20} = \pm 1$. При этом если

$$\left| \frac{N_2 + N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right| < 1, \quad (20)$$

то существуют 4 решения

$$\alpha_{10} = \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = \text{sign}(\alpha_{10}) \left[\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{N_2 + N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right) \right]; \quad (21)$$

Если

$$\left| \frac{N_2 - N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right| < 1, \quad (22)$$

то существуют 4 решения

$$\alpha_{10} = -\alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = \text{sign}(\alpha_{10}) \left[\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{N_2 - N_1}{A_3 - C_3 - L_3} \right) \right]. \quad (23)$$

Если одновременно выполнены условия (20) и (22), то система (12) имеет 8 решений (21) и (23).

Системы (13) и (14) рассматриваются аналогично.

Систему (15) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{10} &= 0, \\ (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} - N_1 \sin \alpha_{30} &= N_3 \sin \alpha_{10}, \\ -N_1 \sin \alpha_{20} + (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} &= N_2 \sin \alpha_{10}. \end{aligned}$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_2 - C_2 - L_2 & -N_1 \\ -N_1 & A_3 - C_3 - L_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеем

$$\sin \alpha_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \sin \alpha_{10}, \quad \sin \alpha_{30} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \sin \alpha_{10}.$$

Здесь

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} N_3 & -N_1 \\ N_2 & A_3 - C_3 - L_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 - C_2 - L_2 & N_3 \\ -N_1 & N_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \sin \alpha_{10} = \pm 1.$$

Если

$$|\Delta_2| < |\Delta|, \quad |\Delta_3| < |\Delta|,$$

то существует 8 решений $(\alpha_{10}^{(i)}, \alpha_{20}^{(j)}, \alpha_{30}^{(k)})$, $i, j, k = 1, 2$, где

$$\alpha_{10}^{(1,2)} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{s0}^{(1,2)} = \text{sign}(\alpha_{10}) \left[\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_s^* \right) \right], \quad s = 2, 3;$$

$$\alpha_2^* = \arcsin \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \alpha_3^* = \arcsin \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Особый случай $\Delta = 0$ здесь не рассматривается. Заметим только, что в зависимости от соотношения между параметрами системы уравнения (15) при этом либо имеют однопараметрическое семейство решений, либо вообще не имеют решений.

Системы (16) и (17) рассматриваются аналогично.

Система (18) при условии

$$\begin{vmatrix} A_1 - C_1 - L_1 & -N_3 & -N_2 \\ -N_3 & A_2 - C_2 - L_2 & -N_1 \\ -N_2 & -N_1 & A_3 - C_3 - L_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

эквивалентна системе

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = \sin \alpha_{30} = 0,$$

которая всегда имеет 8 решений

$$\alpha_{10} = 0, \pi; \quad \alpha_{20} = 0, \pi; \quad \alpha_{30} = 0, \pi.$$

Таким образом, в главе 4 получены положения равновесия системы и исследованы условия их существования.

Заметим, что полученные результаты позволяют легко перейти к рассмотрению связки двух тел. Для этого среднее тело системы (m_3) заменяется на безынерционную математическую точку, т.е. предполагается, что $m_3 = 0$, $A_3 = B_3 = C_3 = 0$, $s_1 = s_2 = 0$. Тогда $N_1 = N_2 = L_3 = 0$, $L_1 = Ma_1^2$, $L_2 = Ma_2^2$, $N_3 = -Ma_1a_2$, $M = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ и уравнения равновесий (10) принимают известный вид [3]:

$$\begin{aligned} \left[(A_1 - C_1 - Ma_1^2) \sin \alpha_{10} + Ma_1a_2 \sin \alpha_{20} \right] \cos \alpha_{10} &= 0, \\ \left[Ma_1a_2 \sin \alpha_{10} + (A_2 - C_2 - Ma_2^2) \sin \alpha_{20} \right] \cos \alpha_{20} &= 0. \end{aligned}$$

5 Система с замороженными шарнирами

Известно, что если твердое тело находится в положении равновесия, то направления главных центральных осей инерции совпадают с направлениями осей орбитальной системы координат.

Докажем, что если «заморозить» шарниры в положениях равновесия, рассматривая систему как одно твердое тело, то будет иметь место равновесие соответствующего твердого тела.

Введем системы координат O_iXYZ , $i = 1, 2, 3$, начала координат которых поместим в центры масс соответствующих тел и одноименные оси которых параллельны осям орбитальной системы координат.

Тензор инерции системы относительно системы координат $OXYZ$ запишем в виде:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{vmatrix},$$

где $J_{12} = J_{21} = J_{23} = J_{32} = 0$, т.к. движение системы предполагается плоским.

Равновесие системы имеет место тогда и только тогда, когда $J_{13} = J_{31} = 0$. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера, элементы тензора инерции можно вычислить по формулам:

$$J_{pq} = \sum_{i=1}^3 \left(I_{pq}^i + m_i \left[(\mathbf{r}^i)^2 \delta_{pq} - r_p^i r_q^i \right] \right), \quad p, q = 1, 2, 3,$$

где \mathbf{r}^i , $i = 1, 2, 3$ – векторы смещения центров масс тел относительно центра масс системы, I_{pq}^i , $i = 1, 2, 3$ – тензоры инерции тел относительно O_iXYZ , $i = 1, 2, 3$, δ_{pq} – символ Кронекера.

Тензоры инерции тел относительно $O_i x_i y_i z_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$\Lambda_i = \text{diag}(A_i, B_i, C_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Матрицы перехода из O_iXYZ в $O_ix_iy_iz_i$, $i=1,2,3$:

$$\mathbf{S}_i = \begin{vmatrix} \cos\alpha_{i0} & 0 & -\sin\alpha_{i0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_{i0} & 0 & \cos\alpha_{i0} \end{vmatrix}, \quad i=1,2,3.$$

Тензоры инерции тел относительно O_iXYZ , $i=1,2,3$:

$$\mathbf{I}^i = \mathbf{S}_i^T \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{S}_i = \begin{vmatrix} A_i \cos^2 \alpha_{i0} + C_i \sin^2 \alpha_{i0} & 0 & -\frac{\sin 2\alpha_{i0} (A_i - C_i)}{2} \\ 0 & B_i & 0 \\ -\frac{\sin 2\alpha_{i0} (A_i - C_i)}{2} & 0 & C_i \cos^2 \alpha_{i0} + A_i \sin^2 \alpha_{i0} \end{vmatrix}, \quad i=1,2,3.$$

Заметим, что в системе координат O_iXYZ

$$\mathbf{e}_i = (\cos\alpha_{i0}, 0, -\sin\alpha_{i0})^T, \quad i=1,2,3.$$

Векторы смещения центров масс тел относительно центра масс системы:

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 = n_{i1}\mathbf{e}_1 + n_{i2}\mathbf{e}_2 + n_{i3}\mathbf{e}_3, \quad i=1,2,3,$$

где

$$\|n_{iv}\|_{i,v=1}^3 = \begin{vmatrix} \left(\frac{m_1}{m} - 1\right)a_1 & \frac{m_2}{m}a_2 & s_1 - \frac{m_1s_1 + m_2s_2}{m} \\ \frac{m_1}{m}a_1 & \left(\frac{m_2}{m} - 1\right)a_2 & s_2 - \frac{m_1s_1 + m_2s_2}{m} \\ \frac{m_1}{m}a_1 & \frac{m_2}{m}a_2 & -\frac{m_1s_1 + m_2s_2}{m} \end{vmatrix}.$$

Окончательно:

$$\mathbf{r}^1 = \frac{1}{m_1 a_1} \begin{pmatrix} -L_1 \cos\alpha_{10} - N_2 \cos\alpha_{30} - N_3 \cos\alpha_{20} \\ 0 \\ L_1 \sin\alpha_{10} + N_2 \sin\alpha_{30} + N_3 \sin\alpha_{20} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}^2 = \frac{1}{m_2 a_2} \begin{pmatrix} -N_3 \cos\alpha_{10} - L_2 \cos\alpha_{20} - N_1 \cos\alpha_{30} \\ 0 \\ N_3 \sin\alpha_{10} + L_2 \sin\alpha_{20} + N_1 \sin\alpha_{30} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}^3 = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} m_1 a_1 \cos \alpha_{10} + m_2 a_2 \cos \alpha_{20} - \cos \alpha_{30} (m_1 s_1 + m_2 s_2) \\ 0 \\ -m_1 a_1 \sin \alpha_{10} - m_2 a_2 \sin \alpha_{20} + \sin \alpha_{30} (m_1 s_1 + m_2 s_2) \end{pmatrix}.$$

Центробежный момент инерции системы тел относительно $OXYZ$ окончательно равен:

$$J_{13} = -(A_1 - C_1 - L_1) \frac{\sin 2\alpha_{10}}{2} - (A_2 - C_2 - L_2) \frac{\sin 2\alpha_{20}}{2} - (A_3 - C_3 - L_3) \frac{\sin 2\alpha_{30}}{2} + \\ + N_2 \sin(\alpha_{10} + \alpha_{30}) + N_1 \sin(\alpha_{20} + \alpha_{30}) + N_3 \sin(\alpha_{10} + \alpha_{20}),$$

или,

$$J_{13} = \left[-(A_1 - C_1 - L_1) \sin \alpha_{10} + N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30} \right] \cos \alpha_{10} + \\ + \left[N_3 \sin \alpha_{10} - (A_2 - C_2 - L_2) \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} \right] \cos \alpha_{20} + \\ + \left[N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30} \right] \cos \alpha_{30}.$$

Если выполнены условия равновесия системы, т.е. справедлива система (10), то $J_{13} = 0$. Следовательно, тензор инерции системы относительно системы координат $OXYZ$ диагонален, а система с «замороженными» шарнирами находится в равновесии.

6 Достаточные условия устойчивости

Для того чтобы определить достаточные условия устойчивости, воспользуемся тем, что имеет место первый интеграл $h = T_2 - T_0 - U$.

Считая $\bar{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_{i0}$, $\bar{\beta}_i = \beta_i - \beta_{i0}$, $\bar{\gamma}_i = \gamma_i - \gamma_{i0}$ и $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$ малыми, разложим T_2 и $T_0 + U$ в окрестности решения $\alpha_i = \alpha_{i0} = \text{const}$, $\beta_{i0} = \gamma_{i0} = 0$. Тогда с точностью до малых второго порядка после несложных преобразований приходим к выражению

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (A_i \dot{\gamma}_i^2 + B_i \dot{\alpha}_i^2 + C_i \dot{\beta}_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \left[\left(\sum_{k=1}^3 n_{ik} \dot{\beta}_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^3 n_{ik} \dot{\alpha}_k \sin \alpha_{k0} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^3 n_{ik} \dot{\alpha}_k \cos \alpha_{k0} \right)^2 \right],$$

т.е. T_2 – положительно определенная квадратичная форма $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i$.

При разложении $T_0 + U$ члены нулевого порядка можно не учитывать, а члены первого порядка сокращаются в силу уравнений равновесий (10). В результате, с точностью до малых второго порядка получаем

$$-\frac{2}{\omega_0^2} (T_0 + U) = \sum_{i,j=1}^9 S_{ij} x_i x_j,$$

где $x_i = \bar{\alpha}_i$, $x_{i+3} = \bar{\beta}_i$, $x_{i+6} = \bar{\gamma}_i$, $i = 1, 2, 3$;

$$\| S_{ij} \| = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & S_{56} & 0 & S_{58} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{46} & S_{56} & S_{66} & 0 & 0 & S_{69} \\ 0 & 0 & 0 & S_{47} & 0 & 0 & S_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{58} & 0 & 0 & S_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{69} & 0 & 0 & S_{99} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$S_{11} = 3[(A_1 - C_1 - L_1)\cos 2\alpha_{10} + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30})\sin \alpha_{10}],$$

$$S_{22} = 3[(A_2 - C_2 - L_2)\cos 2\alpha_{20} + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10})\sin \alpha_{20}],$$

$$S_{33} = 3[(A_3 - C_3 - L_3)\cos 2\alpha_{30} + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20})\sin \alpha_{30}],$$

$$S_{12} = -3N_3 \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20},$$

$$S_{23} = -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{31} = -3N_2 \cos \alpha_{30} \cos \alpha_{10},$$

$$S_{44} = (B_1 - A_1 + L_1)(3\sin^2 \alpha_{10} + 1) + (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30})\sin \alpha_{10},$$

$$S_{55} = (B_2 - A_2 + L_2)(3\sin^2 \alpha_{20} + 1) + (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10})\sin \alpha_{20},$$

$$S_{66} = (B_3 - A_3 + L_3)(3\sin^2 \alpha_{30} + 1) + (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20})\sin \alpha_{30},$$

$$S_{45} = N_3, S_{46} = N_2, S_{56} = N_1,$$

$$S_{47} = 3(B_1 - C_1)\sin \alpha_{10} \cos \alpha_{10},$$

$$S_{58} = 3(B_2 - C_2)\sin \alpha_{20} \cos \alpha_{20},$$

$$S_{69} = 3(B_3 - C_3)\sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{77} = (B_1 - C_1)(3\cos^2 \alpha_{10} + 1),$$

$$S_{88} = (B_2 - C_2)(3\cos^2 \alpha_{20} + 1),$$

$$S_{99} = (B_3 - C_3)(3\cos^2 \alpha_{30} + 1).$$

Достаточными условиями устойчивости решения $\alpha_i = \alpha_{i0}$, $\beta_i = \gamma_i = 0$ являются условия положительной определенности квадратичной формы $S(x, x)$. Таким образом, должны выполняться условия

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \dots \quad D_9 > 0,$$

где D_i - главные миноры матрицы \mathbf{S} . Учитывая, что

$$D_{i+3} = D_3 \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

где Δ_i – главные миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & 0 & 0 \\ S_{45} & S_{55} & S_{56} & 0 & S_{58} & 0 \\ S_{46} & S_{56} & S_{66} & 0 & 0 & S_{69} \\ S_{47} & 0 & 0 & S_{77} & 0 & 0 \\ 0 & S_{58} & 0 & 0 & S_{88} & 0 \\ 0 & 0 & S_{69} & 0 & 0 & S_{99} \end{vmatrix},$$

окончательно достаточные условия устойчивости можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= S_{11} > 0, \\ D_2 &= D_1 S_{22} - S_{12}^2 > 0, \\ D_3 &= D_2 S_{33} + 2S_{12} S_{22} S_{31} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{31}^2 > 0, \\ \Delta_1 &= S_{44} > 0, \\ \Delta_2 &= \Delta_1 S_{55} - S_{45}^2 > 0, \\ \Delta_3 &= \Delta_2 S_{66} + 2S_{56} S_{46} S_{45} - S_{44} S_{56}^2 - S_{55} S_{46}^2 > 0, \\ \Delta_4 &= \Delta_3 S_{77} - S_{47}^2 (S_{55} S_{66} - S_{56}^2) > 0, \\ \Delta_5 &= \Delta_4 S_{88} - S_{58}^2 [S_{77} (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) - S_{66} S_{47}^2] > 0, \\ \Delta_6 &= \Delta_5 S_{99} - S_{69}^2 [\Delta_2 S_{77} S_{88} - S_{55} S_{88} S_{47}^2 - S_{58}^2 (S_{44} S_{77} - S_{47}^2)] > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Приведем выражения для отличных от нуля коэффициентов квадратичной формы S и конкретный вид условий ее положительной определенности (24) для каждой из групп решений (11)-(18).

Введем обозначения:

$$\xi_i = A_i - C_i - L_i; \quad \eta_i = B_i - C_i; \quad i = 1, 2, 3 \tag{25}$$

тогда

$$\eta_i - \xi_i = B_i - A_i + L_i; \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= (N_3 \sin \alpha_{20} + N_2 \sin \alpha_{30}) \sin \alpha_{10}, \\
\zeta_2 &= (N_1 \sin \alpha_{30} + N_3 \sin \alpha_{10}) \sin \alpha_{20}, \\
\zeta_3 &= (N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20}) \sin \alpha_{30}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Тогда выражения для коэффициентов квадратичной формы \mathbf{S} , отличных от нуля, переписутся в виде:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= 3(\xi_1 \cos 2\alpha_{10} + \zeta_1), \\
S_{22} &= 3(\xi_2 \cos 2\alpha_{20} + \zeta_2), \\
S_{33} &= 3(\xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \zeta_3), \\
S_{12} &= -3N_3 \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20}, \\
S_{23} &= -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30}, \\
S_{31} &= -3N_2 \cos \alpha_{30} \cos \alpha_{10}, \\
S_{44} &= (\eta_1 - \xi_1)(3\sin^2 \alpha_{10} + 1) + \zeta_1, \\
S_{55} &= (\eta_2 - \xi_2)(3\sin^2 \alpha_{20} + 1) + \zeta_2, \\
S_{66} &= (\eta_3 - \xi_3)(3\sin^2 \alpha_{30} + 1) + \zeta_3, \\
S_{45} &= N_3, \quad S_{46} = N_2, \quad S_{56} = N_1, \\
S_{47} &= 3\eta_1 \sin \alpha_{10} \cos \alpha_{10}, \\
S_{58} &= 3\eta_2 \sin \alpha_{20} \cos \alpha_{20}, \\
S_{69} &= 3\eta_3 \sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30}, \\
S_{77} &= \eta_1(3\cos^2 \alpha_{10} + 1), \\
S_{88} &= \eta_2(3\cos^2 \alpha_{20} + 1), \\
S_{99} &= \eta_3(3\cos^2 \alpha_{30} + 1).
\end{aligned}$$

Далее зафиксируем параметры N_i , L_i и ζ_i , а (24) будем рассматривать как систему неравенств относительно ξ_i и η_i , $i = 1, 2, 3$.

6.1 Достаточные условия устойчивости для группы решений (11)

Решения (11):

$$\cos \alpha_{10} = \cos \alpha_{20} = \cos \alpha_{30} = 0.$$

Запишем в этом случае выражения для коэффициентов квадратичной формы \mathbf{S} , отличных от нуля:

$$S_{11} = 3(-\xi_1 + \zeta_1),$$

$$S_{22} = 3(-\xi_2 + \zeta_2),$$

$$S_{33} = 3(-\xi_3 + \zeta_3),$$

$$S_{44} = 4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1,$$

$$S_{55} = 4(\eta_2 - \xi_2) + \zeta_2,$$

$$S_{66} = 4(\eta_3 - \xi_3) + \zeta_3,$$

$$S_{45} = N_3, S_{46} = N_2, S_{56} = N_1,$$

$$S_{77} = \eta_1, S_{88} = \eta_2, S_{99} = \eta_3.$$

Достаточные условия устойчивости перепишутся в виде:

$$D_1 = S_{11} > 0,$$

$$D_2 = D_1 S_{22} > 0,$$

$$D_3 = D_2 S_{33} > 0,$$

$$\Delta_1 = S_{44} > 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 S_{55} - S_{45}^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 S_{66} + 2S_{56} S_{46} S_{45} - S_{44} S_{56}^2 - S_{55} S_{46}^2 > 0,$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 S_{77} > 0,$$

$$\Delta_5 = \Delta_4 S_{88} > 0,$$

$$\Delta_6 = \Delta_5 S_{99} > 0.$$

Данная система неравенств эквивалентна следующей системе:

$$\xi_1 < \zeta_1, \tag{27}$$

$$\xi_2 < \zeta_2, \quad (28)$$

$$\xi_3 < \zeta_3, \quad (29)$$

$$\xi_1 < \eta_1 + \frac{1}{4}\zeta_1, \quad (30)$$

$$\xi_2 < \eta_2 + \frac{1}{4}\zeta_2 - \frac{N_3^2/4}{4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1}, \quad (31)$$

$$\xi_3 < \eta_3 + \frac{1}{4}\zeta_3 - \frac{1}{4} \frac{[4(\eta_2 - \xi_2) + \zeta_2]N_2^2 + [4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1]N_1^2 - 2N_1N_2N_3}{[4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1] \cdot [4(\eta_2 - \xi_2) + \zeta_2] - N_3^2}, \quad (32)$$

$$\eta_1 > 0, \quad (33)$$

$$\eta_2 > 0, \quad (34)$$

$$\eta_3 > 0. \quad (35)$$

Далее покажем, что существуют системы трех тел, параметры которых удовлетворяют полученной системе неравенств. Будем искать решения, последовательно удовлетворяя неравенствам (27)-(35), в следующем порядке:

1. Выбираем произвольное η_1 , удовлетворяющее (33);
2. Выбираем произвольное ξ_1 , удовлетворяющее (27) и (30);
3. Выбираем произвольное η_2 , удовлетворяющее (34);
4. Выбираем произвольное ξ_2 , удовлетворяющее (28) и (31);
5. Выбираем произвольное η_3 , удовлетворяющее (35);
6. Выбираем произвольное ξ_3 , удовлетворяющее (29) и (32).

Представленная последовательность действий реализована программно в среде MATLAB. На вход программы подаются значения α_{10} , α_{20} , α_{30} , m_1 , m_2 , m_3 , $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Вычисляются параметры N_1 , N_2 , N_3 , L_1 , L_2 , L_3 , ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Параметры η_1 , η_2 , η_3 задаются оператором. Параметры ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 вычисляются как минимум из правых частей соответствующих неравенств минус положительное число, которое задается оператором.

Значения ξ_i , η_i и L_i позволяют получить такие условия на B_i , которые повлекут при последующем вычислении A_i и C_i выполнение неравенств треугольника. Эти условия записываются в виде

$$\begin{aligned}
 B_i &> 0, \quad B_i > \eta_i, \\
 B_i &> \eta_i - L_i - \xi_i, \\
 B_i &> L_i + \xi_i, \\
 B_i &> -L_i - \xi_i, \\
 B_i &> 2\eta_i - L_i - \xi_i, \\
 i &= 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Параметр B_i вычисляется как максимум из правых частей неравенств (36) плюс положительное число, которое задается оператором. Выбрав B_i , используя значения ξ_i , η_i и L_i , имеем три системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, откуда однозначно находятся A_i и C_i , $i = 1, 2, 3$.

Приведем пример системы, для которой выполнены достаточные условия устойчивости в случае решения (11) (рис. 3):

$$\begin{aligned}
 \alpha_{10} &= \pi/2, \quad \alpha_{20} = \pi/2, \quad \alpha_{30} = \pi/2, \\
 m_1 &= 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 10, \\
 s_1 &= -2, \quad s_2 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \\
 A_1 &= 3.775, \quad A_2 = 3.7663, \quad A_3 = 10.7663, \\
 B_1 &= 2.4375, \quad B_2 = 2.4332, \quad B_3 = 5.9332, \\
 C_1 &= 2.3375, \quad C_2 = 2.3332, \quad C_3 = 5.8332.
 \end{aligned}$$

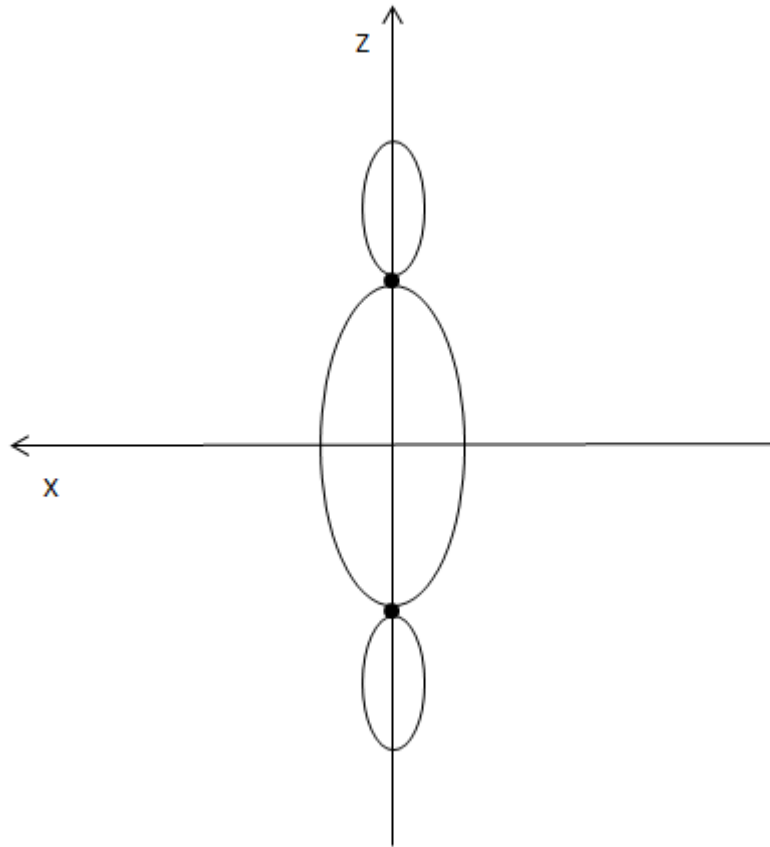


Рис. 3. Пример системы, для которой выполнены достаточные условия устойчивости в случае решения (11)

6.2 Достаточные условия устойчивости для группы решений (12)

Решения (12):

$$\cos \alpha_{10} = 0, \quad \cos \alpha_{20} = 0,$$

$$N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - \xi_3 \sin \alpha_{30} = 0 \text{ или } \zeta_3 = \xi_3 \sin^2 \alpha_{30}.$$

Запишем в этом случае выражения для коэффициентов квадратичной формы \mathbf{S} , отличных от нуля:

$$S_{11} = 3(-\xi_1 + \zeta_1),$$

$$S_{22} = 3(-\xi_2 + \zeta_2),$$

$$S_{33} = 3(\xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \zeta_3),$$

$$S_{44} = 4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1,$$

$$S_{55} = 4(\eta_2 - \xi_2) + \zeta_2,$$

$$S_{66} = (\eta_3 - \xi_3)(3\sin^2 \alpha_{30} + 1) + \zeta_3,$$

$$S_{45} = N_3, \quad S_{46} = N_2, \quad S_{56} = N_1,$$

$$S_{69} = 3\eta_3 \sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{77} = \eta_1, \quad S_{88} = \eta_2, \quad S_{99} = \eta_3(3\cos^2 \alpha_{30} + 1).$$

Достаточные условия устойчивости переписутся в виде:

$$D_1 = S_{11} > 0,$$

$$D_2 = D_1 S_{22} > 0,$$

$$D_3 = D_2 S_{33} > 0,$$

$$\Delta_1 = S_{44} > 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 S_{55} - S_{45}^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 S_{66} + 2S_{56} S_{46} S_{45} - S_{44} S_{56}^2 - S_{55} S_{46}^2 > 0,$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 S_{77} > 0,$$

$$\Delta_5 = \Delta_4 S_{88} > 0,$$

$$\Delta_6 = \Delta_5 S_{99} - S_{69}^2 S_{77} \Delta_2 S_{88} > 0.$$

Данная система неравенств эквивалентна следующей системе:

$$\xi_1 < \zeta_1, \quad (37)$$

$$\xi_2 < \zeta_2, \quad (38)$$

$$\xi_3 > 0, \quad \cos \alpha_{30} \neq 0, \quad (39)$$

$$\xi_1 < \eta_1 + \frac{1}{4} \zeta_1, \quad (40)$$

$$\xi_2 < \eta_2 + \frac{1}{4} \zeta_2 - \frac{N_3^2/4}{4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1}, \quad (41)$$

$$\eta_3 > \xi_3 - a, \quad (42)$$

$$\eta_1 > 0, \quad (43)$$

$$\eta_2 > 0, \quad (44)$$

$$\eta_3 > -Q/W, \quad \eta_3 > 0, \quad W \neq 0 \quad (45)$$

где

$$a = \frac{1}{3 \sin^2 \alpha_{30} + 1} \left(\zeta_3 - \frac{(4(\eta_2 - \xi_2) + \zeta_2) N_2^2 + \Delta_1 N_1^2 - 2N_1 N_2 N_3}{\Delta_2} \right),$$

$$W = \Delta_2 (3 \cos^2 \alpha_{30} + 1) (3 \sin^2 \alpha_{30} + 1) - \frac{9}{4} \Delta_2 \sin^2 2\alpha_{30},$$

$$Q = (3 \cos^2 \alpha_{30} + 1) \left(-\Delta_1 N_1^2 + 2N_1 N_2 N_3 - S_{55} N_2^2 + \Delta_2 \left[\zeta_3 - \xi_3 (3 \sin^2 \alpha_{30} + 1) \right] \right).$$

Далее покажем, что существуют системы трех тел, параметры которых удовлетворяют полученной системе неравенств.

Если $\sin \alpha_{30} \neq 0$: если $\xi_3 \leq a$, то $\xi_3 < \eta_3 + a$, где

$0 < \eta_3 < \frac{\Delta_3 (3 \cos^2 \alpha_{30} + 1)}{9 \sin^2 \alpha_{30} \cos^2 \alpha_{30} \Delta_2}$; если же $\xi_3 > a$, то для существования решений

необходимо, чтобы $\xi_3 - a < \frac{4 \Delta_3 (3 \cos^2 \alpha_{30} + 1)}{9 \sin^2 2\alpha_{30} \Delta_2}$.

При $\sin \alpha_{30} \neq 0$ решения полученной системы целесообразно искать, последовательно удовлетворяя неравенствам (37)-(45), в следующем порядке:

1. Вычисляем ξ_3 по формуле $\xi_3 = \frac{N_1 + N_2}{\sin \alpha_{30}}$, при этом ξ_3 удовлетворяет (39);
2. Выбираем η_1 , удовлетворяющее (43);
3. Выбираем ξ_1 , удовлетворяющее (37) и (40);
4. Выбираем η_2 , удовлетворяющее (44);
5. Выбираем ξ_2 , удовлетворяющее (38) и (41);
6. Выбираем η_3 , удовлетворяющее (42) и (45).

Представленная последовательность действий реализована программно в среде MATLAB. На вход программы подаются значения α_{10} , α_{20} , α_{30} , m_1 , m_2 , m_3 , $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Вычисляются параметры N_1 , N_2 , N_3 , L_1 , L_2 , L_3 , ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Параметры η_1 , η_2 задаются оператором. Параметры ξ_1 , ξ_2 вычисляются как минимум из правых частей соответствующих неравенств минус положительное число, которое задается оператором. Параметр η_3 вычисляется как максимум из правых частей соответствующих неравенств плюс положительное число, которое задается оператором.

Параметр B_i вычисляется как максимум из правых частей неравенств (36) плюс положительное число, которое задается оператором. Выбрав B_i , используя значения ξ_i , η_i и L_i , имеем три системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, откуда однозначно находятся A_i и C_i , $i = 1, 2, 3$.

Приведем пример системы, для которой выполнены достаточные условия устойчивости в случае решения (12) (рис. 4):

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \pi/2, \quad \alpha_{20} = \pi/2, \quad \alpha_{30} = \pi/8, \\ m_1 &= 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 10, \\ s_1 &= -2, \quad s_2 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \\ A_1 &= 3.1577, \quad A_2 = 3.149, \quad A_3 = 27.6103, \\ B_1 &= 2.1288, \quad B_2 = 2.1245, \quad B_3 = 35.7681, \end{aligned}$$

$$C_1 = 2.0288, C_2 = 2.0245, C_3 = 9.1578.$$

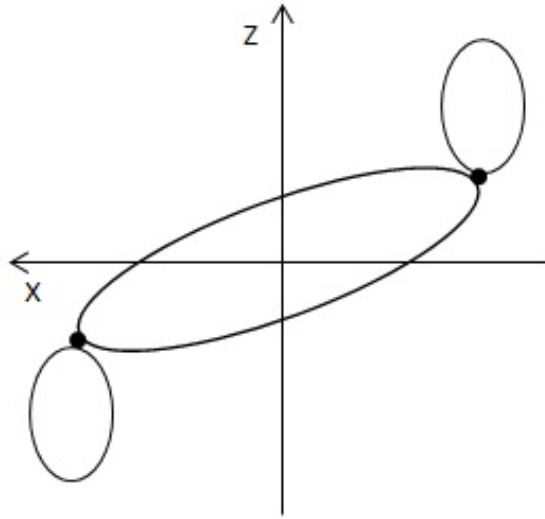


Рис. 4. Пример системы, для которой выполнены достаточные условия устойчивости в случае решения (12)

Если $\sin \alpha_{30} = 0$, то $\zeta_3 = 0$, схема расчетов параметров упрощается: 1) вначале выбираются произвольные положительные η_1, η_2, η_3 , 2) далее, исходя из неравенств, выбираются соответствующие ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Решения (13), (14) рассматриваются аналогично.

6.3 Достаточные условия устойчивости для группы решений (15)

Решения (15):

$$\cos \alpha_{10} = 0,$$

$$N_3 \sin \alpha_{10} - \xi_2 \sin \alpha_{20} + N_1 \sin \alpha_{30} = 0 \text{ или } \zeta_2 = \xi_2 \sin^2 \alpha_{20},$$

$$N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} - \xi_3 \sin \alpha_{30} = 0 \text{ или } \zeta_3 = \xi_3 \sin^2 \alpha_{30}.$$

Запишем в этом случае выражения для коэффициентов квадратичной формы

\mathbf{S} , отличных от нуля:

$$S_{11} = 3(-\xi_1 + \zeta_1),$$

$$S_{22} = 3(\xi_2 \cos 2\alpha_{20} + \zeta_2),$$

$$S_{33} = 3(\xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \zeta_3),$$

$$S_{23} = -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{44} = 4(\eta_1 - \xi_1) + \zeta_1,$$

$$S_{55} = (\eta_2 - \xi_2)(3\sin^2 \alpha_{20} + 1) + \zeta_2,$$

$$S_{66} = (\eta_3 - \xi_3)(3\sin^2 \alpha_{30} + 1) + \zeta_3,$$

$$S_{45} = N_3, S_{56} = N_1, S_{46} = N_2,$$

$$S_{58} = 3\eta_2 \sin \alpha_{20} \cos \alpha_{20},$$

$$S_{69} = 3\eta_3 \sin \alpha_{30} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{77} = \eta_1, S_{88} = \eta_2(3\cos^2 \alpha_{20} + 1), S_{99} = \eta_3(3\cos^2 \alpha_{30} + 1).$$

Достаточные условия устойчивости переписутся в виде:

$$D_1 = S_{11} > 0,$$

$$D_2 = D_1 S_{22} > 0,$$

$$D_3 = D_2 S_{33} - S_{11} S_{23}^2 > 0,$$

$$\Delta_1 = S_{44} > 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 S_{55} - S_{45}^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 S_{66} + 2S_{56} S_{46} S_{45} - S_{44} S_{56}^2 - S_{55} S_{46}^2 > 0,$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 S_{77} > 0,$$

$$\Delta_5 = \Delta_4 S_{88} - S_{58}^2 S_{77} (S_{44} S_{66} - S_{46}^2) > 0,$$

$$\Delta_6 = \Delta_5 S_{99} - S_{69}^2 S_{77} [\Delta_2 S_{88} - S_{58}^2 S_{44}] > 0.$$

В данном случае не удалось обнаружить алгоритм поиска параметров системы, аналогичного предыдущим случаям (решения (11), (12)), при которых выполнены достаточные условия устойчивости.

В случае, когда $\sin \alpha_{20} = \sin \alpha_{30} = 0$, имеем $N_3 = 0$, что невозможно. Пример подобной ситуации, когда $\alpha_{10} = -\pi/2$, $\alpha_{20} = \alpha_{30} = 0$, представлен на рис. 5а.

Пусть теперь $\sin \alpha_{30} = 0$, а $\sin \alpha_{20} \neq 0$, при этом $\zeta_3 = 0$. Тогда из достаточных условий устойчивости следует, что $\xi_2 > 0$, $\cos \alpha_{20} \neq 0$. В силу условий равновесия, с одной стороны, $N_2 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{20} = 0$, с другой стороны, $-\xi_2 = N_3 \sin \alpha_{10} / \sin \alpha_{20} > 0$, что невозможно. Пример подобной ситуации, когда $\alpha_{10} = -\pi/2$, $\alpha_{30} = 0$, $\sin \alpha_{20} = N_2 / N_1$, представлен на рис. 5б.

Пусть $\sin \alpha_{20} = 0$, а $\sin \alpha_{30} \neq 0$. Тогда среди достаточных условий устойчивости имеются неравенства:

$$\xi_2 > 0,$$

$$\xi_2 (\xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \zeta_3) - N_1^2 \cos^2 \alpha_{30} > 0.$$

С учетом $\sin \alpha_{20} = 0$ второе и третье уравнения условий равновесия запишутся в виде

$$N_3 \sin \alpha_{10} + N_1 \sin \alpha_{30} = 0,$$

$$N_2 \sin \alpha_{10} - \xi_3 \sin \alpha_{30} = 0.$$

Выражая из первого уравнения $\sin \alpha_{30}$ и подставляя его во второе уравнение, получим

$$\xi_3 = -\frac{N_1 N_2}{N_3} < 0.$$

Остается заметить, что

$$\xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \zeta_3 = \xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \xi_3 \sin^2 \alpha_{30} = \xi_3 \cos^2 \alpha_{30} \leq 0,$$

откуда следует противоречие:

$$\xi_2 > 0,$$

$$\xi_2 < \frac{N_1^2 \cos^2 \alpha_{30}}{\xi_3 \cos 2\alpha_{30} + \zeta_3} = \frac{N_1^2}{\xi_3} < 0.$$

Таким образом, в этом случае невозможно выполнение достаточных условий устойчивости. Пример подобной ситуации, когда $\alpha_{10} = -\pi/2$, $\alpha_{20} = 0$, $\sin \alpha_{30} = N_3/N_1$, представлен на рис. 5в.

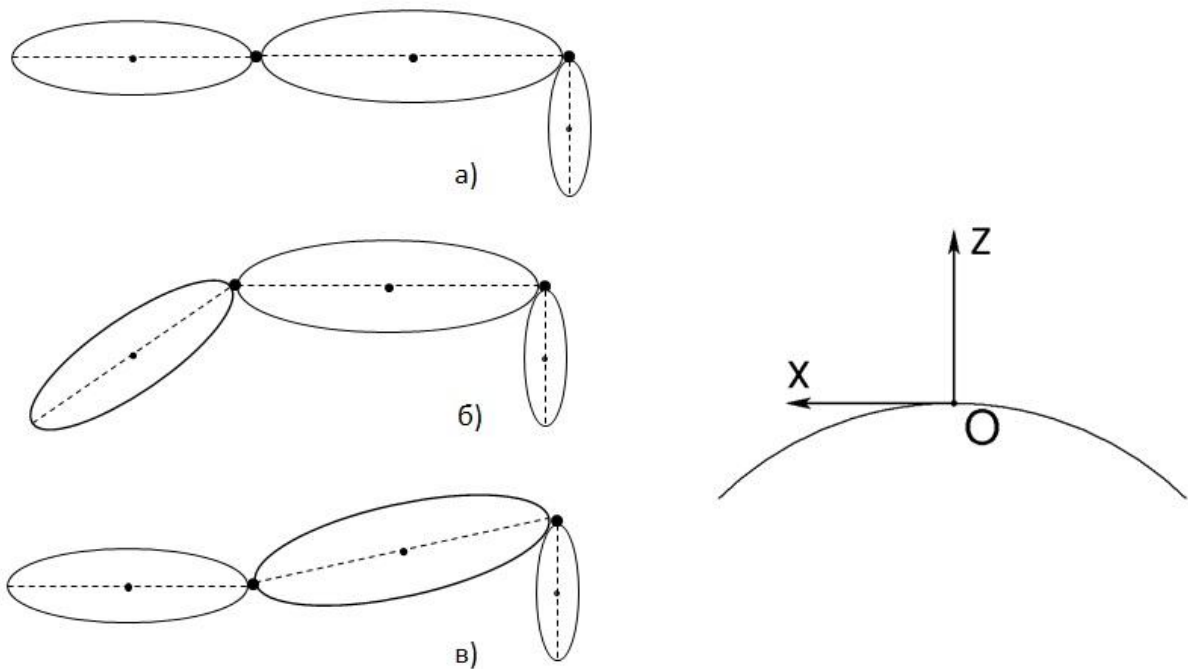


Рис. 5. Примеры положений равновесия в случае решения (15), при которых достаточные условия устойчивости не выполнены

Следовательно, на устойчивость нужно исследовать положения равновесия, для которых одновременно $\sin \alpha_{20} \neq 0$ и $\sin \alpha_{30} \neq 0$, в данной работе такие положения не рассмотрены.

Решения (16), (17) рассматриваются аналогично.

6.4 Достаточные условия устойчивости для группы решений (18)

Решения (18):

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = \sin \alpha_{30} = 0.$$

Запишем в этом случае выражения для коэффициентов квадратичной формы \mathbf{S} , отличных от нуля:

$$S_{11} = 3\xi_1, S_{22} = 3\xi_2, S_{33} = 3\xi_3,$$

$$S_{12} = -3N_3 \cos \alpha_{10} \cos \alpha_{20},$$

$$S_{23} = -3N_1 \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{30},$$

$$S_{31} = -3N_2 \cos \alpha_{30} \cos \alpha_{10},$$

$$S_{44} = \eta_1 - \xi_1, S_{55} = \eta_2 - \xi_2, S_{66} = \eta_3 - \xi_3,$$

$$S_{45} = N_3, S_{46} = N_2, S_{56} = N_1,$$

$$S_{77} = 4\eta_1, S_{88} = 4\eta_2, S_{99} = 4\eta_3.$$

Достаточные условия устойчивости переписутся в виде:

$$D_1 = S_{11} > 0,$$

$$D_2 = D_1 S_{22} - S_{12}^2 > 0,$$

$$D_3 = D_2 S_{33} + 2S_{12} S_{22} S_{31} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{31}^2 > 0,$$

$$\Delta_1 = S_{44} > 0,$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 S_{55} - S_{45}^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 S_{66} + 2S_{56} S_{46} S_{45} - S_{44} S_{56}^2 - S_{55} S_{46}^2 > 0,$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 S_{77} > 0,$$

$$\Delta_5 = \Delta_4 S_{88} > 0,$$

$$\Delta_6 = \Delta_5 S_{99} > 0.$$

Данная система неравенств эквивалентна следующей системе:

$$\xi_1 > 0, \tag{46}$$

$$\xi_2 > \frac{N_3^2}{\xi_1}, \quad (47)$$

$$\xi_3 > \frac{2N_1N_2N_3 + \xi_1N_1^2 + \xi_2N_2^2}{\xi_1\xi_2 - N_3^2}, \quad (48)$$

$$\xi_1 < \eta_1, \quad (49)$$

$$\eta_2 > \xi_2 + \frac{N_3^2}{\eta_1 - \xi_1}, \quad (50)$$

$$\eta_3 > \xi_3 + \frac{2N_1N_2N_3 - (\eta_1 - \xi_1)N_1^2 - (\eta_2 - \xi_2)N_2^2}{(N_3^2 - (\eta_1 - \xi_1)(\eta_2 - \xi_2))}, \quad (51)$$

$$\eta_1 > 0, \quad (52)$$

$$\eta_2 > 0, \quad (53)$$

$$\eta_3 > 0. \quad (54)$$

Далее покажем, что существуют системы трех тел, параметры которых удовлетворяют полученной системе неравенств. Решения будем искать, последовательно удовлетворяя неравенствам (46)-(54), в следующем порядке:

1. Выбираем η_1 , удовлетворяющее (52);
2. Выбираем ξ_1 , удовлетворяющее (46) и (49);
3. Выбираем ξ_2 , удовлетворяющее (47);
4. Выбираем η_2 , удовлетворяющее (50) и (53);
5. Выбираем ξ_3 , удовлетворяющее (48);
6. Выбираем η_3 , удовлетворяющее (51) и (54).

Представленная последовательность действий реализована программно в среде MATLAB. На вход программы подаются значения α_{10} , α_{20} , α_{30} , m_1 , m_2 , m_3 , $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Вычисляются параметры N_1 , N_2 , N_3 , L_1 , L_2 , L_3 , ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Параметр η_1 задается оператором. Параметр ξ_1 вычисляется, например, как половина ξ_1 . Параметр ξ_2 вычисляется как правая часть соответствующего неравенства плюс положительное число, которое задается оператором. Параметр η_2 вычисляется как максимум из

правых частей соответствующих неравенств плюс положительное число, которое задается оператором. Параметр ξ_3 вычисляется как правая часть соответствующего неравенства плюс положительное число, которое задается оператором. Параметр η_3 вычисляется как максимум из правых частей соответствующих неравенств плюс положительное число, которое задается оператором.

Параметр B_i вычисляется как максимум из правых частей неравенств (36) плюс положительное число, которое задается оператором. Выбрав B_i , используя значения ξ_i , η_i и L_i , имеем три системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, откуда однозначно находятся A_i и C_i , $i = 1, 2, 3$.

Приведем пример системы, для которой выполнены достаточные условия устойчивости в случае решения (18) (рис. 6):

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= 0, \alpha_{20} = 0, \alpha_{30} = 0, \\ m_1 &= 1, m_2 = 1, m_3 = 10, \\ s_1 &= -2, s_2 = 2, a_1 = 1, a_2 = -1, \\ A_1 &= 2.8333, A_2 = 2.8333, A_3 = 463.4222, \\ B_1 &= 1.9667, B_2 = 2.1556, B_3 = 553.3, \\ C_1 &= 1.8667, C_2 = 1.6778, C_3 = 90.8778. \end{aligned}$$

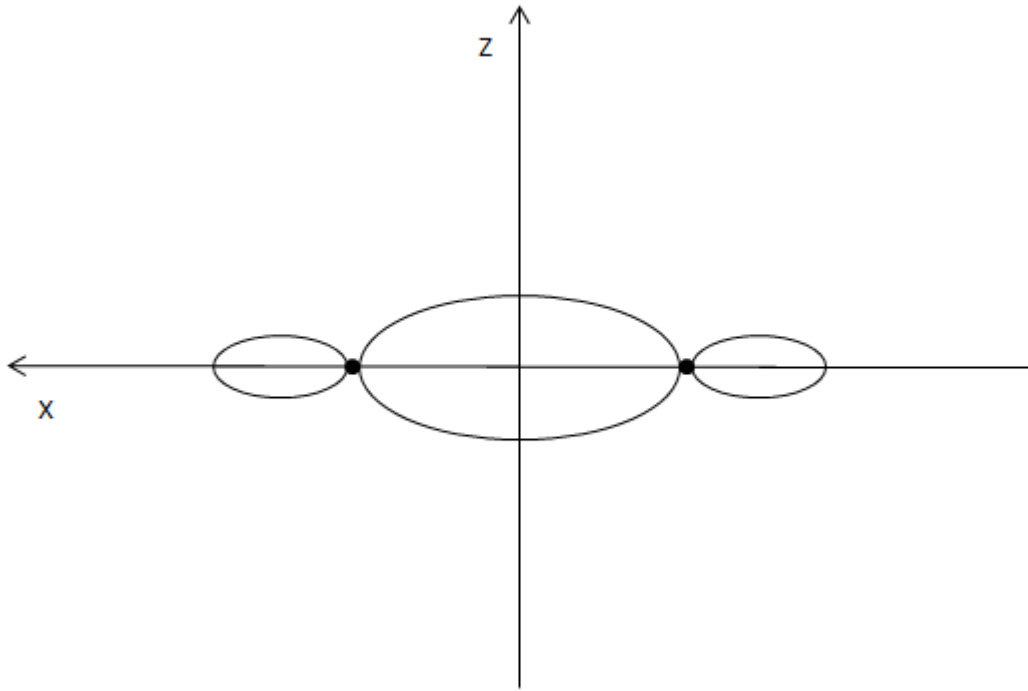


Рис. 6. Пример системы, для которой выполнены достаточные условия устойчивости в случае решения (18)

Таким образом, в главе 6 получены достаточные условия устойчивости для всех групп решений (11)-(18). Для пяти из восьми групп решений разработаны и программно реализованы алгоритмы поиска параметров устойчивых конфигураций системы, результативно представлены примеры работы алгоритмов.

7 Частные случаи задачи

7.1 Система трех тонких однородных стержней

Рассмотрим систему из трех тонких однородных стержней (рис. 7).

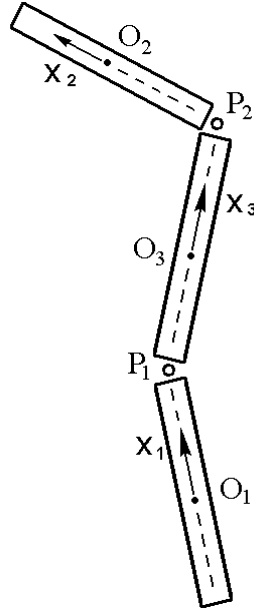


Рис. 7. Система трех тонких однородных стержней

Пусть $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{m}{3}$, $a_1 = -a_2 = -s_1 = s_2 = a$. Тогда

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad B_1 = B_2 = B_3 = \frac{ma^2}{9}, \quad C_1 = C_2 = C_3 = \frac{ma^2}{9},$$

$$L_1 = L_2 = \frac{2ma^2}{9}, \quad L_3 = \frac{2ma^2}{3},$$

$$N_1 = N_2 = \frac{ma^2}{3}, \quad N_3 = \frac{ma^2}{9},$$

$$A_1 - C_1 - L_1 = A_2 - C_2 - L_2 = -\frac{ma^2}{3}, \quad A_3 - C_3 - L_3 = -\frac{7ma^2}{9}.$$

Группа решений (11) определяет 8 положений равновесия

$$\alpha_{10} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Группа решений (18) определяет 8 положений равновесия

$$\alpha_{10} = 0, \pi; \quad \alpha_{20} = 0, \pi; \quad \alpha_{30} = 0, \pi.$$

Группа решений (12) определяет 8 равновесий

$$\alpha_{10} = \alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{30} = -\frac{6}{7} \operatorname{sign}(\alpha_{10});$$

$$\alpha_{10} = -\alpha_{20} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{30} = 0, \pi.$$

Группа решений (13) определяет 4 равновесия

$$\alpha_{20} = -\alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{10} = \frac{2}{3} \operatorname{sign}(\alpha_{20}).$$

Группа решений (14) определяет 4 равновесия

$$\alpha_{10} = -\alpha_{30} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{20} = \frac{2}{3} \operatorname{sign}(\alpha_{10}).$$

Группа решений (15) определяет 8 равновесий

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{20} = \frac{1}{6}, \quad \sin \alpha_{30} = -\frac{1}{2};$$

$$\alpha_{10} = -\frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{20} = -\frac{1}{6}, \quad \sin \alpha_{30} = \frac{1}{2}.$$

Группа решений (16) определяет 8 равновесий

$$\sin \alpha_{10} = \frac{1}{6}, \quad \alpha_{20} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{30} = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \alpha_{10} = -\frac{1}{6}, \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha_{30} = \frac{1}{2}.$$

Группа решений (17) определяет 8 равновесий

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = -\frac{3}{4}, \quad \alpha_{30} = \frac{\pi}{2};$$

$$\sin \alpha_{10} = \sin \alpha_{20} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{30} = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, общее число решений равно 56. Однако, принимая во внимание, что система состоит из одинаковых тел, равновесные конфигурации, в которых первое и второе тела (крайние стержни) просто

меняются местами, фактически совпадают. Поэтому существенно различных решений значительно меньше. На рис. 7 показаны все возможные типы равновесных конфигураций системы. Что касается устойчивости, то ни для одной из возможных равновесных конфигураций достаточные условия не выполняются, поскольку нарушаются условия типа $B - C > 0$.

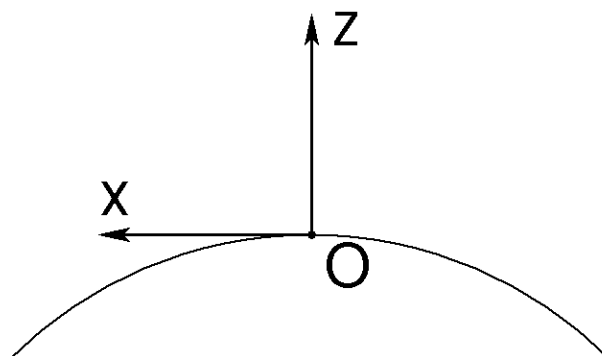
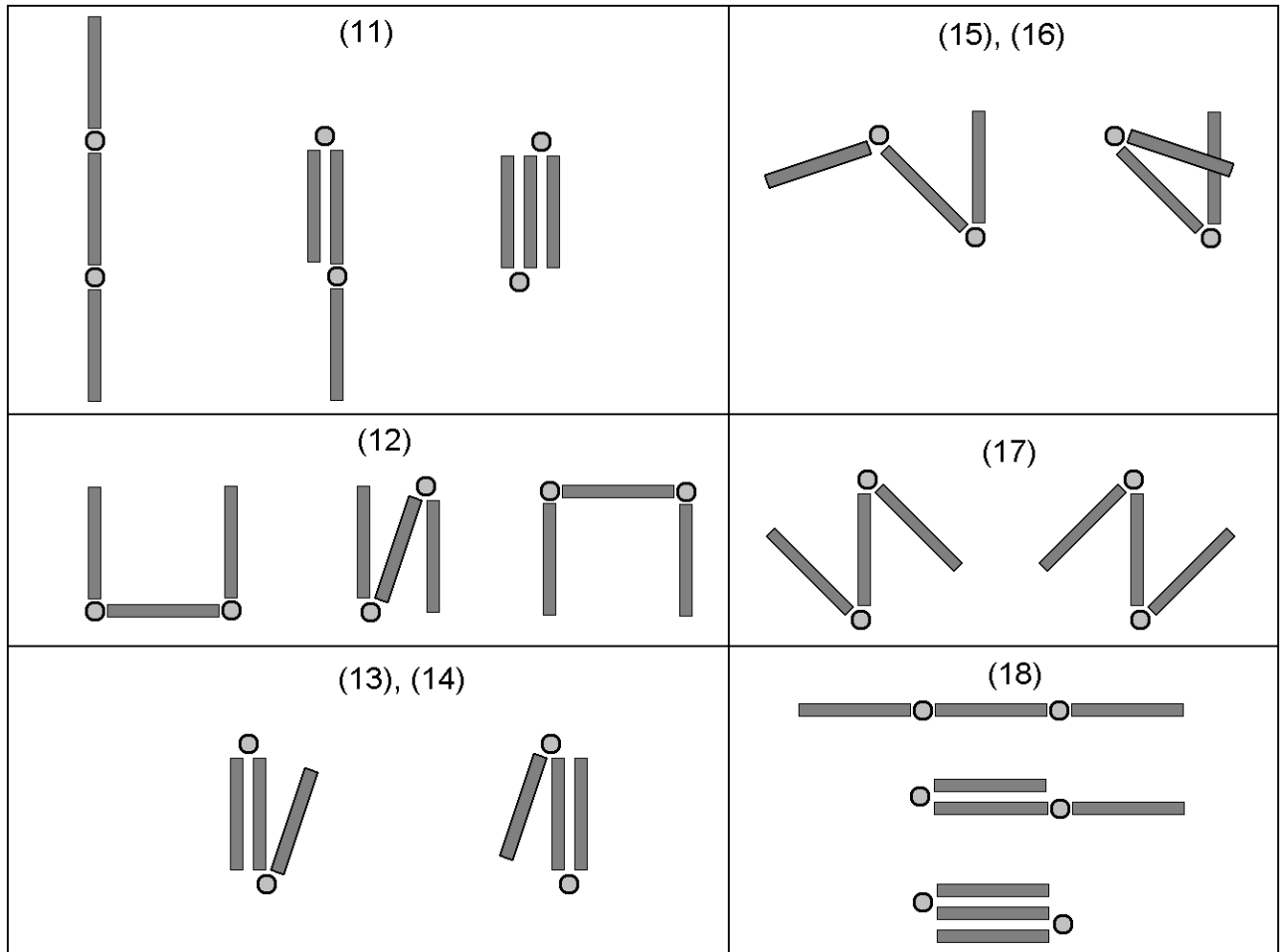


Рис. 4. Равновесные конфигурации системы трех стержней в плоскости круговой орбиты.

7.2 Устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости

Исследуем устойчивость по отношению к возмущениям только в плоскости орбиты. В таком случае, ограничимся рассмотрением матрицы W , образованной первыми тремя строками и первыми тремя столбцами матрицы S , т.к. остальные элементы становятся равными нулю.

Если устойчивости по отношению к возмущениям в плоскости орбиты нет, то нет и устойчивости по отношению к пространственным возмущениям. Если же таковая есть, то эти положения – кандидаты на дальнейшее исследование на устойчивость по отношению к пространственным возмущениям.

Обозначим за Q матрицу, образованную первыми тремя строками и первыми тремя столбцами матрицы квадратичной формы T_2 . Согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости [11], если хотя бы один корень характеристического уравнения $\det \|Qx^2 + W\| = 0$ имеет положительную действительную часть, то исследуемое положение равновесия неустойчиво.

Среди групп решений (11)-(18) нас будут интересовать только решения (12), (15) и (16), которые потенциально могут обеспечивать устойчивые равновесия, когда $\sin \alpha_{30} \neq 0$ и $\cos \alpha_{30} \neq 0$. А решения (16) рассматриваются аналогично решениям (15).

Причем в случае решения (12) возможны восемь групп значений углов, но положения равновесия, при которых выполнены равенства $\alpha_{10} = \pi/2$, $\alpha_{20} = 3\pi/2$ и $\alpha_{10} = 3\pi/2$, $\alpha_{20} = \pi/2$ нас не устраивают, т.к. тогда $\sin \alpha_{30} = 0$.

Существуют 4 группы значений углов, при которых для центрального тела $\sin \alpha_{30} \neq 0$ и $\cos \alpha_{30} \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \pi/2, \alpha_{20} = \pi/2, \alpha_{30} = \arcsin(2N_3/\xi_3); \\
\alpha_{10} &= \pi/2, \alpha_{20} = \pi/2, \alpha_{30} = -\arcsin(2N_3/\xi_3); \\
\alpha_{10} &= 3\pi/2, \alpha_{20} = 3\pi/2, \alpha_{30} = \pi - \arcsin(2N_3/\xi_3); \\
\alpha_{10} &= 3\pi/2, \alpha_{20} = 3\pi/2, \alpha_{30} = \pi + \arcsin(2N_3/\xi_3).
\end{aligned}
\tag{55}$$

7.2.1 Система трех одинаковых тел

Рассмотрим систему трех тел с одинаковыми инерционными параметрами:

1. $A_1 = A_2 = A_3$;
2. $B_1 = B_2 = B_3$;
3. $C_1 = C_2 = C_3$;
4. $L_1 = L_2 = L_3$;
5. $N_1 = N_2 = N_3$.

Тогда $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$. Таким образом, выражения будут зависеть только от четырех переменных: A_3 , C_3 , L_3 и N_3 .

В указанных предположениях найдем собственные значения матрицы W , исследуем их на положительность. Если таковой нет, то интеграл энергии не является функцией Ляпунова.

Решения (12):

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{10} &= 0, \quad \cos \alpha_{20} = 0, \\ N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) &= \xi_3 \sin \alpha_{30}.\end{aligned}$$

Матрицы Q и W не зависят от выбора набора углов (55). Собственные значения матрицы W равны:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{3}{2} \frac{(\xi_3 - 2N_3)(\xi_3 + 2N_3)}{\xi_3}, \\ \lambda_2 = \lambda_3 &= -\frac{3}{2} \frac{(\xi_3 + N_3)(\xi_3 - 2N_3)}{\xi_3}.\end{aligned}\tag{56}$$

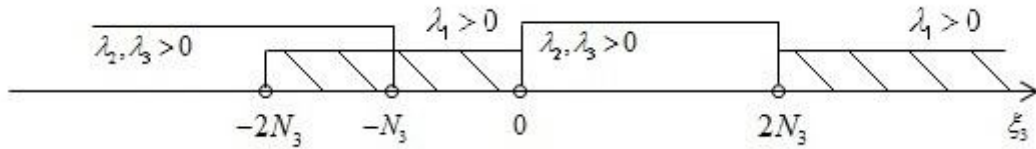


Рис. 8. Решение системы неравенств $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ для собственных значений, определяемых по формулам (56)

Из рис. 8 видно, что собственные значения (56) положительны при $\xi_3 \in (-2N_3, -N_3)$.

Решения (15):

$$\cos \alpha_{10} = 0,$$

$$N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{30}) = \xi_3 \sin \alpha_{20},$$

$$N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) = \xi_3 \sin \alpha_{30}.$$

Для всех возможных значений углов собственные значения матрицы W равны:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{3(\xi_3 + N_3)(\xi_3 - 2N_3)}{2(\xi_3 - N_3)}, \\ \lambda_2 &= \frac{3\xi_3(\xi_3 + N_3)(\xi_3 - 2N_3)}{2(\xi_3 - N_3)^2}, \\ \lambda_3 &= \frac{3\xi_3(\xi_3 - 2N_3)}{2(\xi_3 - N_3)}. \end{aligned} \quad (57)$$

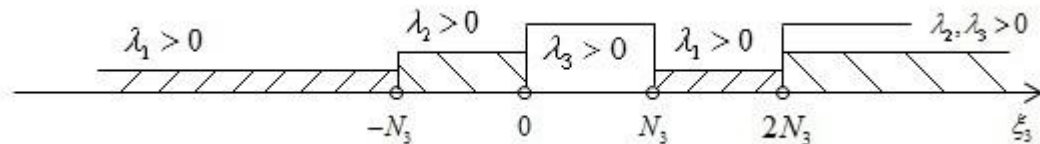


Рис. 9. Решение системы неравенств $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ для собственных значений, определяемых по формулам (57)

Из рис. 9 видно, что собственные значения (57) не могут быть одновременно больше нуля. Значит, в случае равенства трех тел и решения

(15) достаточное условие устойчивости $W > 0$ (следовательно, $S > 0$) не удовлетворено.

Рассмотрев решения (12) и (15), для связки трех одинаковых тел получаем, что достаточные условия устойчивости могут быть выполнены только для решения (12) при $\xi_3 \in (-2N_3, -N_3)$.

7.2.2 Боковые тела – математические маятники

Заменяем боковые тела материальными точками на невесомых стержнях, тогда $A_1 = B_1 = C_1 = A_2 = B_2 = C_2 = 0$. Будем считать, что $N_1 = N_2 = N_3$, $L_1 = L_2 = L_3$.

Решения (12):

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{10} &= 0, \quad \cos \alpha_{20} = 0, \\ N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) &= \xi_3 \sin \alpha_{30}. \end{aligned}$$

В указанных предположениях найдем собственные значения матрицы W , исследуем их на положительность. Если таковой нет, то интеграл энергии не является функцией Ляпунова. Матрицы Q и W не зависят от выбора набора углов (55). Собственные значения матрицы W равны:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2} \left(L_3 + N_3 + \frac{2N_3^2}{\xi_3} \right), \quad \lambda_3 = \frac{3}{2} \left(\xi_3 - \frac{4N_3^2}{\xi_3} \right).$$

Из неравенства $\lambda_3 > 0$ получаем, что $\xi_3 \in (-2N_3, 0) \cup (2N_3, +\infty)$. Так как

$-\frac{2N_3^2}{L_3 + N_3} > -2N_3$, то все собственные значения одновременно положительны

при условиях:

$$\xi_3 \in \left(-2N_3, -\frac{2N_3^2}{L_3 + N_3} \right) \cup (2N_3, +\infty),$$

которые оказываются достаточными для устойчивости по отношению к плоским возмущениям.

Решения (15):

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{10} &= 0, \\ N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{30}) &= -L_3 \sin \alpha_{20}, \\ N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) &= \xi_3 \sin \alpha_{30}. \end{aligned}$$

Так как $\cos \alpha_{10} = 0$, то $W_{12} = W_{13} = W_{21} = W_{31} = 0$. Таким образом, положительная определенность матрицы W равносильна положительности трех угловых миноров M_1 , M_2 и M_3 :

$$\begin{aligned} M_1 = W_{11} &= \frac{3(L_3 - N_3)(2N_3^2 + \xi_3(N_3 + L_3))}{2(N_3^2 + L_3\xi_3)} \\ \frac{M_2}{M_1} = W_{22} &= -\frac{3L_3\xi_3(L_3 - N_3)(2N_3^2 + \xi_3(N_3 + L_3))}{2(N_3^2 + L_3\xi_3)^2} \\ \frac{M_3}{M_1} &= W_{22}W_{33} - W_{23}W_{32} = \\ &= -\frac{9L_3\xi_3(N_3 + \xi_3)(L_3 - N_3)(2N_3^2 - L_3N_3 + L_3\xi_3)(2N_3^2 + \xi_3(N_3 + L_3))}{4(N_3^2 + L_3\xi_3)^3} \end{aligned}$$

Отметим здесь, что, хотя значения W_{23} и W_{32} как функций L_3 , N_3 и ξ_3 зависят от знака $\cos \alpha_{20}$, угловой минор M_3 пропорционален значению $\cos^2 \alpha_{20}$ и от знака $\cos \alpha_{20}$ не зависит.

Займемся решением неравенств $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ для определения параметров системы, при которых заданное положение равновесия оказывается устойчивым по отношению к возмущениям в плоскости. Для этого будем решать неравенства только относительно параметра ξ_3 , рассмотрим несколько случаев.

В первую очередь вспомним условия существования данного положения равновесия: $L_3\xi_3 + N_3^2 \neq 0$, $\xi_3 + N_3 \neq 0$ и $\xi_2 = -L_3 \neq -N_3$ (здесь учтены равенства между собой L_i , N_i , а также равенства нулю главных моментов инерции боковых тел).

Заметим, что положительность всех угловых миноров M_i равносильна положительности всех следующих чисел:

$$M'_1 = (L_3 - N_3) \frac{2N_3^2 + \xi_3(N_3 + L_3)}{N_3^2 + L_3\xi_3},$$

$$M'_2 = -\frac{\xi_3}{N_3^2 + L_3\xi_3},$$

$$M'_3 = \frac{(N_3 + \xi_3)(2N_3^2 - L_3N_3 + L_3\xi_3)}{N_3^2 + L_3\xi_3},$$

где

$$M'_1 = 2M_1/3,$$

$$M'_2 = 4M_2(N_3^2 + L_3\xi_3)^2 / \left[9L_3(L_3 - N_3)^2(2N_3^2 + \xi_3(N_3 + L_3)) \right],$$

$$M'_3 = 2M_3/(3M_2).$$

Вначале заметим, что из неравенства $M'_2 > 0$ следует $\xi_3 \in \left(-\frac{N_3^2}{L_3}, 0 \right)$. Отсюда прямо следует, что $N_3 + \xi_3 > N_3(1 - N_3/L_3) > 0$. Следовательно, неравенство $M'_3 > 0$ равносильно $2N_3^2 - L_3N_3 + L_3\xi_3 > 0$.

Пусть $L_3 - N_3 > 0$. Так как выполнено неравенство

$$2N_3^2 + \xi_3(N_3 + L_3) > 2N_3^2 - \frac{N_3^2}{L_3}(N_3 + L_3) = N_3^2 \frac{L_3 - N_3}{L_3},$$

то автоматически получаем

$$M'_1 > \frac{N_3^2(L_3 - N_3)^2}{L_3} \frac{1}{N_3^2 + L_3\xi_3} > 0,$$

никаких дополнительных ограничений на величину ξ_3 не возникает.

Вспомним, что $M'_3 > 0$ равносильно $\xi_3 > (L_3N_3 - 2N_3^2)/L_3$. Но так как

$$\frac{L_3N_3 - 2N_3^2}{L_3} = -\frac{N_3^2}{L_3} + N_3 \frac{L_3 - N_3}{L_3} > -\frac{N_3^2}{L_3},$$

то для выполнения $M'_i > 0$ для всех $i=1,2,3$ необходимо лишь $L_3 < 2N_3$.

Итак, мы получили, что условия

$$\xi_3 \in \left(\frac{L_3 N_3 - 2N_3^2}{L_3}, 0 \right) \text{ и } N_3 < L_3 < 2N_3$$

гарантируют $M'_i > 0$ для всех $i = 1, 2, 3$, значит, и устойчивость по отношению к плоским возмущениям.

Остается рассмотреть случай $L_3 - N_3 < 0$. Тогда $M'_1 > 0$ равносильно

$$\xi_3 < -\frac{2N_3^2}{N_3 + L_3}.$$

Заметим, что при условии $L_3 - N_3 < 0$ выполнено $-\frac{N_3^2}{L_3} < -\frac{2N_3^2}{N_3 + L_3}$, таким

образом, неравенства $M'_1 > 0$ и $M'_2 > 0$ равносильны условию

$$\xi_3 \in \left(-\frac{N_3^2}{L_3}, -\frac{2N_3^2}{N_3 + L_3} \right). \text{ Так как}$$

$$\frac{L_3 N_3 - 2N_3^2}{L_3} = -\frac{N_3^2}{L_3} + N_3 \frac{L_3 - N_3}{L_3} < -\frac{N_3^2}{L_3},$$

то неравенство $M'_3 > 0$ не добавляет дополнительных ограничений на ξ_3 .

Получаем в итоге, что условия

$$\xi_3 \in \left(-\frac{N_3^2}{L_3}, -\frac{2N_3^2}{N_3 + L_3} \right) \text{ и } L_3 < N_3$$

оказываются достаточными для устойчивости по отношению к плоским возмущениям.

Таким образом, получены достаточные условия устойчивости системы трех тел, боковые тела которой являются математическими маятниками.

7.2.3 Боковые тела – тонкие однородные стержни

Пусть $m_1 = m_2$, $A_1 = A_2 = 0$, $B_2 = B_1$, $C_2 = C_1$, $N_1 = N_2 = N_3$, $L_1 = L_2 = L_3$.

Решения (12):

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{10} &= 0, \quad \cos \alpha_{20} = 0, \\ N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) &= \xi_3 \sin \alpha_{30}.\end{aligned}$$

Заметим, что из выражений $\cos \alpha_{10} = 0$ и $\cos \alpha_{20} = 0$ следует диагональный вид матрицы W .

Будем рассматривать только те положения равновесия, при которых $\sin \alpha_{30} \neq 0$. В таком случае элементы матрицы W не зависят от выбора набора углов (55). Диагональные элементы матрицы W равны:

$$\begin{aligned}W_{11} = W_{22} &= \frac{3N_3^2}{\xi_3} + \frac{3}{2}(N_3 + C_1 + L_3), \\ W_{33} &= \frac{3}{2}\xi_3 - \frac{6N_3^2}{\xi_3}.\end{aligned}$$

Матрица W положительно определена, если $W_{11} = W_{22} > 0$ и $W_{33} > 0$. Разрешая неравенства относительно ξ_3 , получаем

$$\xi_3 \in \left(-2N_3^2, -\frac{2N_3^2}{N_3 + C_1 + L_3} \right) \cup (2N_3, +\infty).$$

Выполнение полученных условий гарантирует устойчивость данного положения равновесия по отношению к плоским возмущениям.

Решения (15):

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{10} &= 0, \quad N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{30}) = -(C_1 + L_3) \sin \alpha_{20}, \\ N_3 (\sin \alpha_{10} + \sin \alpha_{20}) &= (A_3 - C_3 - L_3) \sin \alpha_{30}.\end{aligned}$$

Разрешая линейные относительно $\sin \alpha_{20}$ и $\sin \alpha_{30}$ уравнения

$$(C_1 + L_3) \sin \alpha_{20} + N_3 \sin \alpha_{30} = -N_3 \sin \alpha_{10},$$

$$N \sin \alpha_{20} - \xi_3 \sin \alpha_{30} = -N_3 \sin \alpha_{10},$$

получим

$$\sin \alpha_{20} = \sigma \cdot \operatorname{sgn}(\sin \alpha_{10}), \quad \sin \alpha_{30} = \delta \cdot \operatorname{sgn}(\sin \alpha_{10}),$$

где были введены обозначения

$$\sigma = -\frac{\xi_3 N_3 + N_3^2}{N_3^2 + \xi_3 (C_1 + L_3)}, \quad \delta = \frac{N_3 (C_1 + L_3) - N_3^2}{N_3^2 + \xi_3 (C_1 + L_3)}.$$

Существует 8 наборов различных значений углов, при которых центральное тело расположено под углом к местной вертикали:

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = \arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = -\arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = -\arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \pi - \arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = \pi - \arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \pi + \arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = \pi + \arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \pi - \arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = \arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \pi + \arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = -\arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = \arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = \pi - \arcsin \delta,$$

$$\alpha_{10} = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha_{20} = -\arcsin \sigma, \quad \alpha_{30} = \pi + \arcsin \delta.$$

Разберем для примера первые четыре набора углов; для них матрицы Q и W имеют один и тот же вид, их можно описать в виде

$$Q = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & c & d \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & f & g \end{vmatrix}.$$

Здесь λ_1 – одно из собственных чисел матрицы W , и все элементы матриц W и Q являются функциями параметров ξ_3, C_1, L_3 и N_3 .

Заметим, что

$$\det Q = (a - b)(ad + bd - 2c^2).$$

Матрица $Qx^2 + W$, где x – любое комплексное число, имеет вид, аналогичный матрице Q . Отсюда можно получить, что характеристический многочлен $\det(Qx^2 + W) = 0$ является алгебраическим уравнением 6-й степени и записывается в виде

$$p_6 x^6 + p_4 x^4 + p_2 x^2 + p_0 = 0 \text{ (алг.урав.6.ст.)},$$

где коэффициенты уравнения

$$p_6 = (a - b)(ad + bd - 2c^2),$$

$$p_4 = (ad - c^2)\lambda_1 + (a[ag + de - 2cf] - b^2g + 2bcf - c^2e),$$

$$p_2 = a(eg - f^2) + \lambda_1(ag + de - 2cf),$$

$$p_0 = \lambda_1(eg - f^2).$$

Видно, что $p_6 > 0$, так как это определитель матрицы Q .

Заметим, что если $p_0 < 0$, то существует как минимум два действительных корня уравнения (алг.урав.6.ст.), и при том разных знаков. В этом случае положение равновесия является неустойчивым. Это возможно в случаях, когда только одно или все три собственных значения матрицы W оказываются отрицательными.

Заметим, что помимо собственного значения λ_1 среди собственных значений матрицы W также имеются (действительные) собственные значения

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(e + g - \sqrt{(e + g)^2 - 4(eg - f^2)} \right),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left(e + g + \sqrt{(e + g)^2 - 4(eg - f^2)} \right).$$

Если $e + g > 0$, то $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 > 0$, если же $e + g < 0$, то $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 < 0$. Таким образом, λ_2 и λ_3 имеют разные знаки только в случае $e + g = 0$, тогда $\lambda_3 = -\lambda_2 = \sqrt{e^2 + f^2}$. Так как на практике равенство $e + g = 0$ не достигается точно, то мы можем заключить, что, с практической точки зрения, собственные числа λ_2 и λ_3 всегда имеют равные знаки. Следовательно, всегда выполнено неравенство $eg - f^2 > 0$, поэтому неравенство $p_0 < 0$ равносильно неравенству $\lambda_1 < 0$.

Итак, исследование устойчивости показало, что неравенство $\lambda_1 < 0$ оказывается достаточным условием неустойчивости движения, а неравенства $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 > 0$ – достаточными условиями устойчивости. Последние неравенства выполнены при условиях

$$\frac{(C_1 + L_3 - N_3)(2N_3^2 + \xi_3(C_1 + N_3 + L_3))}{N_3^2 + \xi_3(C_1 + L_3)} > 0,$$

$$\xi_3(P_2\xi_3^2 + P_1\xi_3 + P_0) > 0,$$

где

$$P_2 = C_1^2 + 2C_1L_3 + L_3^2,$$

$$P_1 = -C_1^3 - 3C_1^2L_3 - 3C_1L_3^2 + 3C_1N_3^2 - L_3^2 + 3L_3N_3^2,$$

$$P_0 = -3C_1^2N_3^2 - 6C_1L_3N_3^2 + 4C_1N_3^3 - 3L_3^2N_3^2 + 4L_3N_3^3$$

8 Заключение

В настоящей работе определены все плоские положения равновесия связки трех твердых тел в случае, когда шарниры расположены на главных центральных осях инерции тел системы, а также выписаны достаточные условия их устойчивости.

Для пяти из восьми групп решений предложена и программно реализована в среде MATLAB методика поиска параметров системы, при которых выполнены достаточные условия устойчивости; приведены примеры устойчивых конфигураций.

Показано, что для любой равновесной конфигурации справедливо следующее утверждение: система в положении равновесия с «замороженными» шарнирами представляет собой твердое тело, главные центральные оси инерции которого направлены вдоль осей орбитальной системы координат.

Исследована устойчивость частных конфигураций системы: системы трех тонких однородных стержней, системы трех одинаковых тел, системы, в которой боковые тела представляют собой математические маятники и системы, в которой боковые тела представляют собой тонкие однородные стержни.

9 Список литературы

1. Сарычев В.А. Д.Е. Охоцимский и его роль в создании систем пассивной ориентации спутников // Прикладная небесная механика и управление движением. Сборник статей, посвященный 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского / Составители: Т.М. Энеев, М.Ю. Овчинников, А.Р. Голиков. - М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010, с. 223-271.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука, 1965.
3. Сарычев В.А. Положения относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // Космические исследования, 1967, т. 5, № 3, с. 360-364.
4. Sarychev V.A. Equilibria of a double pendulum in a circular orbit // Acta Astronautica, 1999, Vol. 44, No 1, pp. 63-65.
5. Сарычев В.А. Положения равновесия системы двух соединенных сферическим шарниром осесимметричных тел на круговой орбите // Космические исследования, 1999, т. 37, № 2, с. 176-181.
6. Сарычев В.А. Положения равновесия маятника в спутнике // Космические исследования, 2000, т. 38, № 1, с. 71-77.
7. Сарычев В.А. Положения равновесия системы спутник-несимметричный маятник на круговой орбите // Космические исследования, 2000, т. 38, № 4, с. 414-422.
8. Guerman A.D. Equilibria of n-Link Chain in s Circular Orbit // American Astronautical Society, 2002
9. Lavagna M., Finzi A.E. Equilibrium analysis of a large multi-hinged space system // Acta Astronautica, 2003, Vol. 53, pp. 9-20.
10. Lavagna M., Finzi A.E. Large multi-hinged space systems: a parametric stability analysis // Acta Astronautica, 2004, Vol. 54, pp. 295-305.

11. Айзерман М.А. Классическая механика. - М.: Наука, 1980.