Глобальная оптимизация космических траекторий с помощью кривых, заполняющих пространство

Ю.А. Худайбердиев

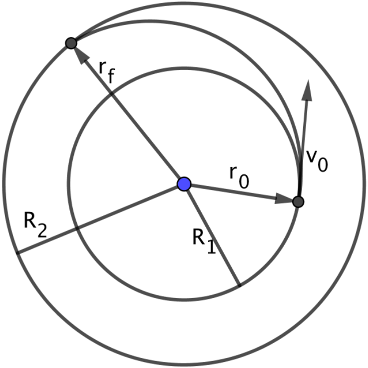
5 июля 2018

Функционалы в задачах оптимизации космических траекторий

- Заданы в многомерном пространстве
- Многоэкстремальны
- Существенно нелинейны
- Могут иметь разрывные экстремали

Постановка модельной задачи

Даны: Круговые компланарные орбиты радиусов R_1 и R_2, $\mathbf{v_0}, \mathbf{r_0}$ – начальные векторы скоростей и координат, $\mathbf{v_f}, \mathbf{r_f}$ – конечные векторы скоростей и координат. Необходимо найти: траекторию наиболее выгодного по топливу перелета.



Уравнения оптимального движения

Из принципа максимума получаем непрерывное оптимальное управление:

$$\mathbf{a}_{\text{тяги}} = \mathbf{p}_{\mathbf{v}}$$

Уравнения оптимального движения в безразмерных единицах примут вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{v}} = -\mathbf{p}_{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}} = -\dfrac{1}{r^3}\left(3\,\dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{r^2}\,\mathbf{r} - \mathbf{p}_{\mathbf{v}}\right) \end{cases}$$

где $\mathbf{p}_{\mathbf{r}}, \mathbf{p}_{\mathbf{v}}$ – векторы сопряженных переменных

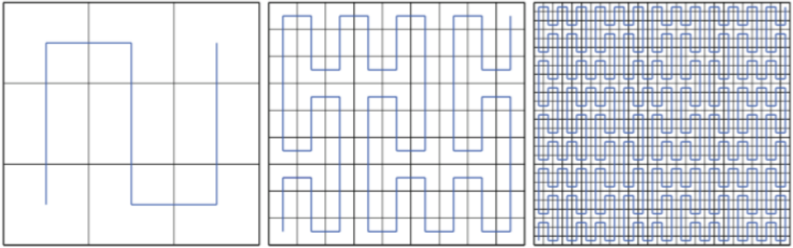
Пусть $\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f$ – требуемые значения положения и скорости КА в конечный момент времени. Если задать значения $\mathbf{p}_\mathbf{r}(t_0), \mathbf{p}_\mathbf{v}(t_0)$, то получим задачу Коши и численным интегрированием можем вычислить значения $\mathbf{r}(t_f), \mathbf{v}(t_f)$.

Наша задача – минимизировать функционал невязки $J = \left(\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f\right)^2 + \left(\mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f\right)^2$. Когда найдем $\mathbf{p}_\mathbf{r}(t_0), \mathbf{p}_\mathbf{v}(t_0)$, дающие значение функционала $J = 0$, двухточечная краевая задача будет считаться решенной.

Вместо поиска глобального экстремума в четырехмерном пространстве сведем задачу к одномерной.

Кривые, заполняющие пространство. Определение.

Кривая, заполняющая пространство – непрерывная функция $y(x)$, отображающая отрезок [0,1] на гиперкуб в многомерном пространстве.



Кривая Пеано на плоскости[1]

[1] Yaroslav D. Sergeyev, Roman G. Strongin, Daniela Lera. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves, Springer Briefs in Optimization. Springer Verlag New-York, 2013. 125 p.

Подход к решению многомерных задач сведением к одномерным

Свести задачу многомерной оптимизации к одномерной с помощью кривой Пеано можно следующим образом:
Пусть $F = F(\mathbf{y})$ наш исходный функционал, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
Пусть $y = y(x)$ – кривая Пеано. Тогда составляем новый функционал, но уже одной переменной:

$$f(x) = F(y(x)).$$

Его мы оптимизируем. Получаем x^* — оптимальное решение.
Тогда искомое решение

$$y^* = y(x^*).$$

Предположения о функции

В реальных задачах полагаем, что функция липшицева (с константой L)

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|,$$

а ее одномерный аналог – гёльдерова функция (с константой H):

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq H|x_2 - x_1|^{\alpha},$$

$\alpha \in (0, 1]$

Общая схема работы алгоритмов одномерной оптимизации

Даны: набор точек (узлов) и значения функции в них

- На каждом интервале между соседними узлами вычисляется характеристика этого интервала – некоторая скалярная величина
- Исходя из значения характеристики, выбирается интервал, куда будет добавлен следующий узел
- Процесс продолжается, пока длина интервала, в который должен добавиться следующий узел, не становится меньше заданной точности

Миноранта – кусочно-линейная функция, «подпирающая» снизу оптимизируемую функцию

Для липшицевых функций:

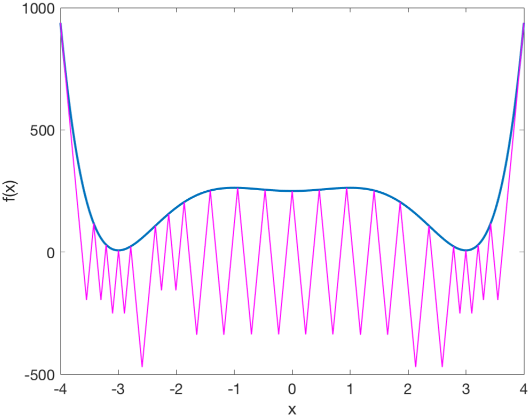
$c_i(x) = \max\{f(x_{i-1}) - L(x - x_{i-1}), f(x_i) + L(x - x_i)\}, x \in [x_{i-1}, x_i]$

Для гёльдеровых функций:

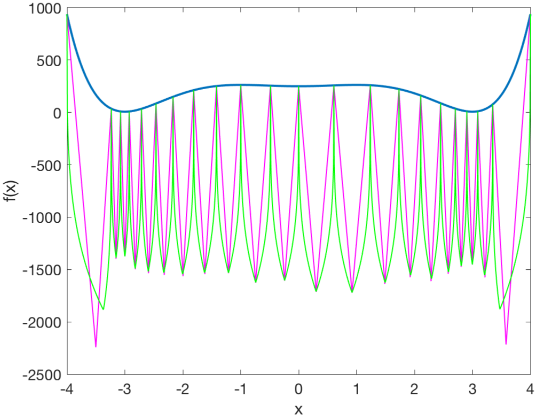
$c_i(x) = \max\{f(x_{i-1}) - rm_i(x - x_{i-1})^{1/N}, f(x_i) - rm_i(x - x_i)^{1/N}\}, x \in [x_{i-1}, x_i].$

В качестве характеристики берется значение миноранты в зубце.

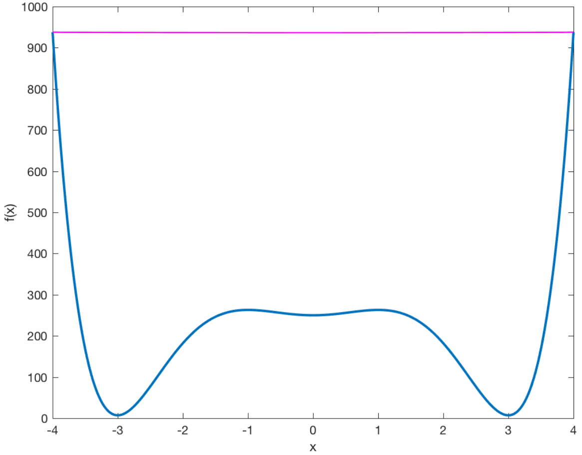
Для липшицевых функций



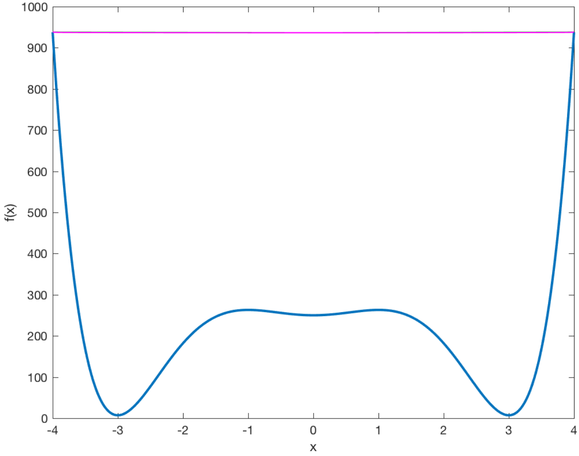
Для гёльдеровых функций



Построение минорант в геометрическом алгоритме



Демонстрация работы



Решение задачи и результаты

В 4D-пространстве начальных значений сопряженных переменных область поиска – параллелепипед с некоторым образом выбранными сторонами.
Схема решения:

- Строим кривую Пеано, заполняющую стандартный гиперкуб
- Приводим стандартный гиперкуб к нашему 4D-параллелепипеду
- Решаем задачу одномерной оптимизации

Результаты поиска глобального минимума функции невязки в четырехмерной области с центром в начале координат

Диаметр области поиска	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01	0.011
Количество итераций	4000.0	4000.0	4000.0	4000.0	4000.0	4000.0
Флаг сходимости	0	0	0	0	0	0

Результаты поиска глобального минимума функции невязки в четырехмерной области с центром в точном решении

Диаметр области поиска	0.3	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35
Количество итераций	27.0	177.0	94.0	305.0	295.0	87.0
Флаг сходимости	1	1	1	1	1	1

Результаты поиска глобального минимума функции невязки в четырехмерной области с центром в смещенном точном решении

Смещение оптимальной точки	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
Невязка	10^{-14}	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
Количество итераций	96	96	96	97	4000	4000
Расстояние между решениями	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
Флаг сходимости	1	1	1	1	0	0

Объяснение результатов

- Ограничение на порядок кривой: $M < 16/N$. 16 – количество цифр в мантиссе.
- Кривая всегда проходит через начало координат.

Заключение

- Когда кривая проходит в окрестности, равной ширине области притяжения глобального минимума, алгоритм хорошо сработает.
- В случае, когда порядка кривой недостаточно для обеспечения нужной близости, можно разбить пространство на меньшие гиперкубики, заполнить каждый из них кривой и запустить параллельный алгоритм, который проводил бы процедуру оптимизации в этих гиперкубиках, и этим добиться достаточной близости к точному решению.

Спасибо за внимание!

Уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_{\text{тяги}} + \mathbf{a}_{\text{внеш}} \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_{\text{тяги}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{тяги}}}{m_{\text{КА}}(t)} = \frac{\dot{m}_{\text{расх}}(t)u}{m_0 - m_{\text{расх}}(t)}\mathbf{e}_{\text{тяги}}$$

Потребуем, чтобы мощность реактивной струи не превышала максимального значения доступной двигателю электрической мощности $N_{\max}$ с поправкой на КПД двигателя η :

$$\frac{\dot{m}_{\text{расх}}u^2}{2} \leq N_{\max}\eta$$

Минимальный расход топлива достигается, когда используется вся доступная мощность $N_{\max}$ и минимизируется целевой функционал:

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f} \frac{a^2_{\text{тяги}}(t)}{N_{\max}} dt \to \min$$

$N_{\max} = $ const, если источником энергии служит радиоизотопный термоэлектрический генератор. Тогда можно вынести $N_{\max}$ из под знака интеграла. Тогда функционал примет вид:

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f} a^2_{\text{тяги}}(t) dt$$

Гамильтониан:

$$\mathcal{H} = -\frac{a_{\text{тяги}}^2}{2} + \mathbf{p_r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p_v} \cdot (\mathbf{a}_{\text{тяги}} + \mathbf{a}_{\text{внеш}})$$

Алгоритм Пиявского

Строится миноранта – кусочно-линейная функция, «подпирающая» снизу оптимизируемую функцию
$c_i(x) = \max\{z_{i-1} - L(x - x_{i-1}), z_i + L(x - x_i)\}, x \in [x_{i-1}, x_i]$
В качестве характеристики берется значение миноранты в зубце. Интервал, на который добавляется следующий узел, имеет минимальную характеристику.

Демонстрация работы