

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Факультет УПМ
Кафедра прикладной математики

На правах рукописи

УДК 629.78

Ильин Антон Евгеньевич

Разработка и программная реализация метода для расчета площади покрытия
Земли спутником дистанционного зондирования

Магистерская диссертация

Направление подготовки 010900.68 «Прикладные математика и физика»
(шифр, название)

Магистерская программа 010954 «Управление динамическими системами»
(шифр, название)

Заведующий кафедрой **Б.Н. Четверушкин** / _____ /

Научный руководитель **С.А. Мирер** / _____ /

Научный консультант **С.С. Ткачев** / _____ /

Студент **А.Е. Ильин** / _____ /

г. Москва

2014

Оглавление

Список используемых сокращений и обозначений.	3
1. Введение.....	4
2. Постановка задачи	7
3. Расчет площади покрытия Земли.....	11
3.1 Построение орбитального движения спутника.....	12
3.2 Вычисление линий, огибающих зону покрытия.....	18
3.3 Вычисление площади покрытия по боковым точкам	22
3.4 Вычисление времени, затраченного на зондирование заданного участка поверхности	27
4. Проведение расчетов с использованием программы	28
Заключение.....	34
Благодарности.....	34
Литература.....	35

Список используемых сокращений и обозначений.

Ω , E , ω , ϑ , i , e , p – параметры Оп либо просто π - направление на перицентр

t_π - время прохождения через перицентр

a - большая полуось орбиты

b - малая полуось орбиты

μ - гравитационный параметр ($398700 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$)

α - угол раствора камеры (апертура камеры)

R - радиус Земли (6378.135 км)

r_α - расстояние от фокуса орбиты до апоцентра

r_π - расстояние от фокуса орбиты до перицентра

СК - система координат

ОСК - орбитальная система координат

ИСК - инерциальная система координат (в данной работе геостационарная)

ССК - связанная со спутником система координат

КА - космический аппарат

ДЗЗ - дистанционное зондирование Земли

КС – космическая система

1. Введение

Задача дистанционного зондирования Земли является одной из наиболее востребованных прикладных задач, решаемых с помощью космических аппаратов. Дистанционное зондирование Земли может быть использовано для наблюдения за состоянием суши, океана и атмосферы, для контроля геофизических параметров природной среды, для изучения их пространственно-временной динамики. Задачами дистанционного зондирования с борта пилотируемых орбитальных станций является проведение работ по развитию и совершенствованию методов и средств изучения физических явлений, оказывающих существенное влияние на глобальные климатические и экологические изменения [1]. Методы зондирования могут быть пассивными, то есть использовать естественное отраженное или вторичное тепловое излучение объектов на поверхности Земли, обусловленное солнечной активностью, и активными, которые используют вынужденное излучение объектов, созданное искусственным источником направленного действия.

Первую воздушную съемку в России совершил поручик А.М. Кованько в Санкт-Петербурге 18 мая 1886 года. Первый фотоснимок был получен с высоты 800 метров, второй получен с высоты 1200 метров, а третий с 1350 метров. Все три снимка получены при помощи обыкновенного раздвижного фотоаппарата, который был широко распространен в то время.

Впервые фотография Земли из космоса была получена 24 октября 1946 года. Запущенная в США с полигона White Sands автоматическая ракета V-2 вышла на орбиту с апогеем в 105 км и сделала серию снимков Земли. Съемка была произведена на 35-мм кинокамеру на черно-белую киноплёнку. В Советском Союзе первые снимки из космоса получены летом 1957 года при помощи малогабаритного фотоаппарата АФА-39. Практическое применение подобных снимков сразу было найдено в рамках соответствующих военных программ.

Первая спутниковая фотография Земли была сделана 14 августа 1959 года американским спутником Explorer 6, а первые фотографии Луны — советским спутником Луна-3 6 октября того же года. В Советском Союзе с целью

фоторазведки было запущено 3 спутника серии «Зенит». Первый удачный запуск был произведен 11 декабря 1961 года. Третий аппарат из этой серии был запущен 28 июля 1962 года и, выполнив свое предназначение.

Метеорологические космические системы стали первыми в очереди гражданского использования информации, полученной со спутников ДЗЗ. В Советском Союзе первой являлась космическая метеорологическая система «Метеор», использовавшая КА серии «Космос». В США первая метеорологическая космическая система была развернута чуть раньше, в феврале 1966 года, на базе космических аппаратов «Тирос»[2], [3].

Одними из наиболее важных предметных областей, изучаемых с помощью КС ДЗЗ являются следующие области: построение и применение специальных комплексов, которые предназначены для решения задач гидрометеорологии, экологии, мониторинга чрезвычайных ситуаций, широкого спектра природохозяйственных задач (сельское и лесное хозяйство, промысел морепродуктов, геология и поиск полезных ископаемых, землеустройство, строительство, прокладка транспортных магистралей, картография, создание и обновление геоинформационных систем, гидротехника и мелиорация), задач океанографии и океанологии, научных задач фундаментального изучения состояния и эволюции Земли как целостной и развивающейся экологической системы [2].

Аппаратура первых космических аппаратов, запущенных в 1960-70-х гг., была трассового типа — проекция области измерений на поверхность Земли представляла собой линию. Позднее появилась и широко распространилась аппаратура ДЗЗ панорамного типа — сканеры, проекция области измерений на поверхность Земли которых представляет собой полосу. В разработанном в этой работе методе используется камера с проекцией области измерений на Землю в форме сечения конуса (эллипса или круга).

Выбор наклона орбит для спутников происходит из требований глобального покрытия, кратности покрытия в наиболее значимых регионах и минимального угла возвышения.

В настоящее время для задач ДЗЗ широко используются спутниковые группировки. Спутниковыми группировками называется некоторое количество спутников решающих общую задачу.

Немаловажным фактором при выборе орбиты является подбор эксцентриситета. Наиболее часто используются круговые орбиты, так как скорость движения спутника на такой орбите постоянна, что упрощает задачу построения спутниковой группировки. Однако также могут использоваться орбиты с ненулевым эксцентриситетом.

Наиболее распространены типы группировок с одинаковыми высотами и наклонениями. Но есть и отдельные типы с разными параметрами. Обычно в качестве конфигурации созвездия используется несколько плоскостей орбит с одинаковым количеством спутников на каждой. Наиболее просто задача построения группировки решается в случае полярных орбит.

На сегодняшний день существует 2 типа группировок спутников: созвездие (constellation) и формация спутников (Formation Flying). В случае созвездия спутники образуют регулярную сетку на орбите на достаточно большом расстоянии друг от друга, при этом работают над одной задачей, но независимо друг от друга. Примером созвездия является низкоорбитальная система спутниковой связи Iridium [4]. Формация спутников – это система, состоящая из спутников, находящихся на относительно малом расстоянии друг от друга по сравнению с расстоянием до притягивающего центра и предназначенных для решения общих задач, требующих взаимной координации.

Методы, освещенные в этой работе, разработаны для созвездий спутников. Целями использования спутниковых созвездий могут быть создание непрерывного (глобально или локально) покрытия земной поверхности для обеспечения связью (например, спутниковая телефония Iridium), решения навигационных (GPS или GLONASS) и других задач.

Основной задачей при создании спутниковых группировок является уменьшение общего количества спутников, обеспечивающего необходимое

покрытие поверхности. Для этой задачи в работе рассмотрены методы для расчета площади покрытия спутником ДЗЗ за отведенный промежуток времени и метод для расчета времени, за которое будет просмотрена данная поверхность.

Безусловно, расположение станций приёма и обработки информации играет немаловажную роль в проектировании созвездий спутников. Важно, насколько быстро спутники смогут передавать информацию на Землю, а для этого нужно оптимально подобрать взаимное расположение станций приема и обработки информации и самих спутников. Но в настоящей работе такие детали учитываться не будут, считается, что информация передается на Землю мгновенно с любого спутника.

2. Постановка задачи

Компания «СПУТНИКС» совместно с ИТЦ «СКАНЭКС» прорабатывают возможность создания к 2018 году для МЧС России КС ДЗЗ для оперативного мониторинга пожаров и чрезвычайных ситуаций. Планируется, что КС будет включать в себя наземную инфраструктуру и спутниковую группировку, состоящую из современных миниспутников ТаблетСат-XL. Планируются шесть спутников на низких круговых орбитах в трёх орбитальных плоскостях. Наземная инфраструктура включает в себя сеть станций и систему оповещения о чрезвычайных ситуациях, позволяющую в течение короткого промежутка времени после обнаружения пожара донести информацию о нём до заинтересованных лиц и организаций. В целом планируется создать единый комплекс, обеспечивающий оперативность детектирования очага пожара размером 3 на 3 метра в средних широтах с задержкой не более 2 часов [5].

Именно для этой задачи в работе рассматривается метод расчета заметаемой спутником площади, который может быть применим к созвездиям спутников дистанционного зондирования. Предполагается для удобства, что ведется фотосъемка. Задача решается при следующих допущениях:

- 1) Земля имеет форму шара либо эллипсоида вращения, взятого из модели WGS-84;

- 2) Угловое движение спутника не учитывается. Камера на спутнике, то есть ось конуса обзора камеры, во время движения всегда направлена на центр тяжести Земли;
- 3) Съемка ведется непрерывно;
- 4) Рассматривается два способа построения орбитального движения: невозмущенная кеплерова орбита и орбита, построенная по модели SGP4 (Simplified General Perturbations 4).

Задача заключается в отыскании площади сфотографированного участка Земли с учетом самопересечений. Попутно решается задача отыскания времени, за которое просматривается указанная площадь. Решение ищется для одного спутника, но в дальнейшем задача распространяется на несколько спутников, образующих созвездие.

Основные определения.

Подспутниковая точка – это точка на поверхности Земли, в зените которой можно наблюдать спутник в данный момент времени, например точка С на рис 1.

Боковыми точками называются точки, лежащие на огибающих линиях сфотографированной области на поверхности Земли. Ясно, что для единичного снимка таких точек всего две, например точки А и В на рис. 1.

Боковыми линиями называются линии, состоящие из боковых точек. Пример расположения боковых линий показан на рис. 1.

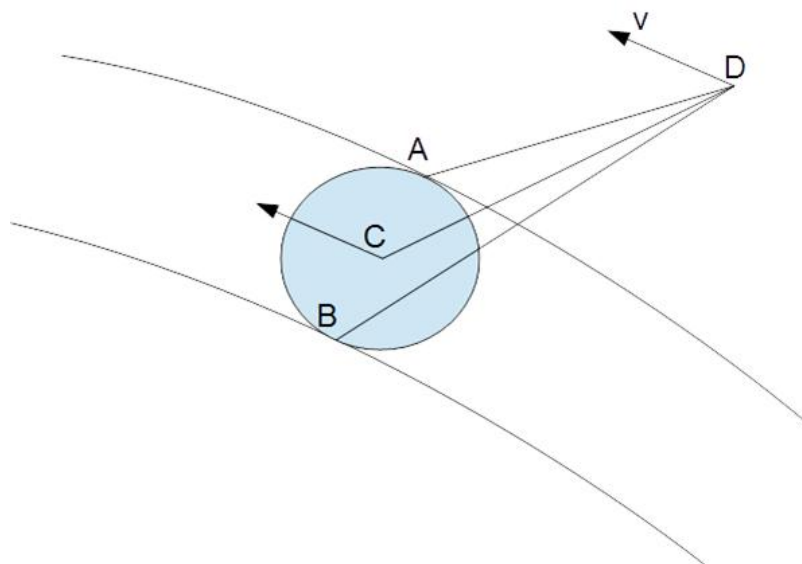


Рис. 1. Расположение боковых точек

В работе используются следующие системы координат.

Геоцентрическая СК $Ox_1x_2x_3$. Ее центр совпадает с центром Земли, ось Ox_3 направлена по оси вращения Земли, ось Ox_1 направлена на точку весеннего равноденствия, ось Ox_2 дополняет систему базисных векторов до правой тройки.

СК $O\xi\eta\zeta$ с центром также в центре Земли, чьи оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ образуют правую тройку векторов, ось $O\xi$ направлена на перицентр орбиты, а ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости орбиты.

ОСК $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ - орбитальная система координат, которая задается аналогично СК $O\xi\eta\zeta$, различие в том, что ось $O\xi_1$ направлена на спутник, как показано на рис. 2.

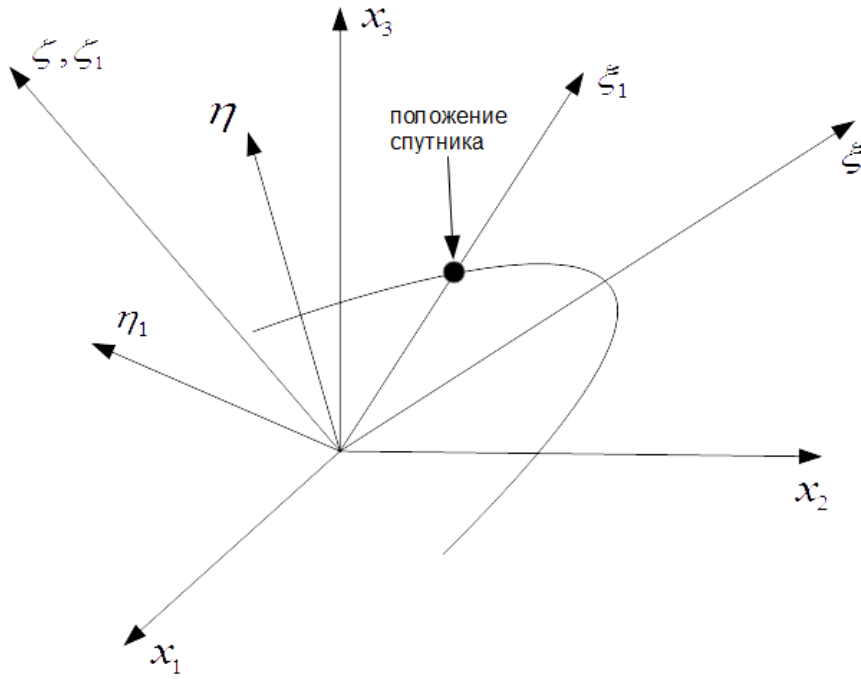


Рис. 2. Системы координат

В дальнейшем будут использованы матрицы перехода всех трех СК между собой. Переход к СК $Ox_1x_2x_3$ от СК $O\xi\eta\zeta$ задается матрицей перехода [6]:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода из СК $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ в СК $Ox_1x_2x_3$ задается аналогично, с учетом поворота на угол истинной аномалии вокруг оси $O\xi$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i & -\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i & -\sin\Omega\sin u + \cos\Omega\cos u\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin u\sin i & \cos u\sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Здесь $u = \omega + \mathcal{G}$

Матрица перехода B_2 от СК $O\xi\eta\zeta$ к СК $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ задается поворотом на угол истинной аномалии \mathcal{G} вокруг оси $O\xi$:

$$B_2 = \begin{pmatrix} \cos(\mathcal{G}) & \sin(\mathcal{G}) & 0 \\ -\sin(\mathcal{G}) & \cos(\mathcal{G}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

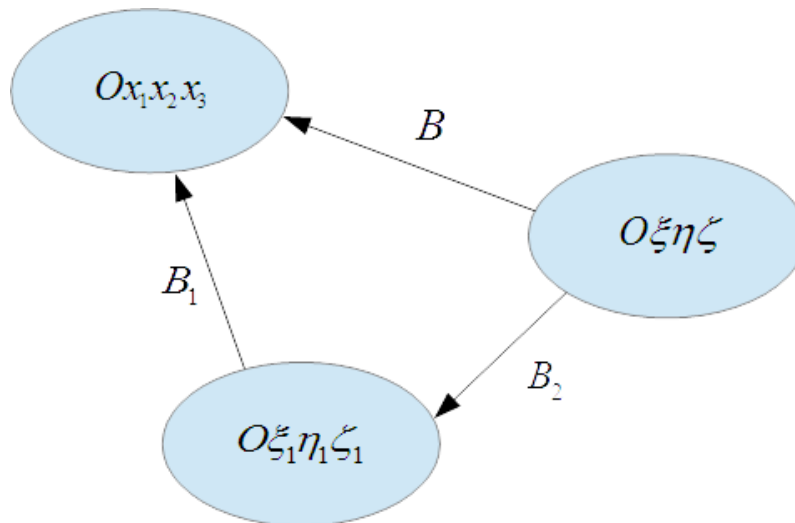


Рис. 3. Схема перехода между системами координат

3. Расчет площади покрытия Земли

Решение поставленной задачи разбивается на несколько этапов:

1. Построение орбитального движения единичного спутника или спутниковой группировки.
2. Вычисление боковых точек, то есть линий, огибающих зону покрытия.
3. Вычисление площади покрытия по боковым точкам.
4. Вычисление времени, затраченного на зондирование заданного участка поверхности.

Каждый этап в отдельности может решаться в независимости от остальных. Входные данные последующего этапа являются результатом предыдущего. Способ решения на каждом этапе можно варьировать в зависимости от того, какая точность вычислений должна достигаться, сколько по времени должны длиться вычисления и какие предположения о задаче используются на конкретном этапе.

Далее рассмотрен каждый из указанных этапов более подробно.

3.1 Построение орбитального движения спутника

Как уже было сказано, в работе рассмотрено два способа построения орбитального движения:

- Спутники движутся по кеплеровым орбитам, а сама орбита задается либо начальными условиями (радиус-вектором и скоростью), либо набором орбитальных элементов.

- Орбита спутника определяется с помощью модели SGP4, а на вход подаются данные в формате TLE (two-line elements set – двухстрочные элементы, см. например [7])

Сначала рассматривается модель центрального поля Земли.

В начальный момент считается известной орбита спутника: 6 параметров орбиты: Ω , ω , i , e , p , t_π либо радиус-вектор и вектор скорости спутника. Переход от параметров орбиты к скоростям и координатам реализован в программе, поэтому далее считается заданными радиус-вектор и вектор скорости спутника, если заданы параметры орбиты. Далее используется уравнение Кеплера:

$$(t - t_\pi) \frac{\mu^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = E - e \sin E.$$

Затем находится значение эксцентрической аномалии E , зная a , μ , t , t_π , e , ищется численным методом, например методом Ньютона.

Далее предлагается воспользоваться формулой, полученной в [6]

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\mathcal{G}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right).$$

Откуда находится угол истинной аномалии:

$$\mathcal{G} = 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\left(\frac{E}{2}\right)\right).$$

Далее найдем проекции скорости на оси $O\xi$ и $O\eta$ в СК $O\xi\eta\zeta$

Радиальная и нормальная составляющие задаются следующим образом [6]:

$$v_{x_1} = -k \sin \mathcal{G}$$

$$v_{y_1} = k(\cos \mathcal{G} + e)$$

Координаты спутника в СК $O\xi\eta\zeta$ записываются так [6]:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos(E) - e) \\ b \sin(E) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Способы построения здесь приведены для примера и могут быть изменены, при этом последующие части решения остаются неизменными.

Двухстрочный набор элементов NORAD (см. [8]) состоит из двух 69-символьных строк данных, которые могут использоваться вместе с SGP4/SDP4 орбитальной моделью NORAD для определения положения и скорости соответствующего спутника. Единственными допустимыми символами в двухстрочном наборе элементов являются цифры 0-9, заглавные буквы A-Z, точка, пробел и знаки "+" и "-". Никакие другие символы не допустимы.

Не все допустимые символы могут использоваться во всех позициях в пределах набора элементов. Рисунок 4 показывает, какой тип символа допустим для каждой позиции. Позиции с пробелом или точкой не могут содержать никакого другого символа. В позициях с 'N' могут быть любые цифры от 0 до 9 или, в некоторых случаях, пробелы. В позициях с 'A' могут быть любые символы из диапазона A-Z или пробел. Позиция с символом 'C' может содержать только символ, представляющий классификацию набора элементов - обычно или 'U' для неклассифицированных (unclassified) данных, или 'S' для секретных (secret) данных (конечно, только неклассифицированные данные публично доступны). В позициях с '+' может быть или знак "плюс", или знак "минус", или пробел, а в колонках с '-' могут быть или "плюс", или "минус" (если остальная часть поля не пустая).

```
1 NNNNNC NNNNAAA NNNNN.NNNNNNNN +.NNNNNNNN +NNNNN-N +NNNNN-N N NNNNN
2 NNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NNNNNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NN.NNNNNNNNNNNNNNN
```

Рис. 4. Формат двухстрочного набора элементов

Дальнейшие ограничения приведены в описаниях отдельных полей. Таблицы 1 и 2 определяют каждое из индивидуальных полей для строк 1 и 2 соответственно.

Таблица 1. Определение формата двухстрочного набора элементов, строка 1

Поле	Столбец	Описание
1.1	01	Номер строки данных
1.2	03-07	Номер спутника
1.3	08	Классификация
1.4	10-11	Международное обозначение (последние две цифры года запуска)
1.5	12-14	Международное обозначение (номер запуска года)
1.6	15-17	Международное обозначение (фрагмент запуска)
1.7	19-20	Год эпохи (последние две цифры года)
1.8	21-32	Эпоха (день года и дробная часть дня)
1.9	34-43	Первая производная среднего движения по времени
1.10	45-52	Вторая производная среднего движения (десятичная точка предполагается)
1.11	54-61	BSTAR член торможения (десятичная точка предполагается)
1.12	63	Тип эфемериды
1.13	65-68	Номер элемента
1.14	69	Контрольная сумма (по модулю 10) (Буквы, пробелы, точки, знаки "плюс" = 0; знаки "минус" = 1)

Позиция 1 каждой строки двухстрочного набора элементов содержит номер строки и, следовательно, определяет формат этой строки. Следующее поле каждой строки (поля, 1.2 и 2.2) содержит номер объекта — фактически, номер по каталогу

NORAD. Номер по каталогу NORAD — уникальный идентификатор, назначенный NORAD для каждого ИСЗ в их SATCAT (каталоге спутников). Поле 1.3 указывает классификатор засекречивания данных — все публично доступные данные будут иметь 'U' в этом поле.

Следующие три поля — от 1.4 до 1.6 — определяют международное обозначение объекта. Эти три поля могут быть оставлены пустыми, но все должны присутствовать, при условии присутствия любого из них.

Следующие два поля (поля 1.7 и 1.8) вместе определяют начало отсчета времени для набора элементов и их совместно называют эпохой. Поле 1.7 — две цифры года и поле 1.8 — день того года. Эпоха определяет момент времени, к которому привязаны все изменяющиеся во времени поля набора элементов.

Поле 1.9 содержит первую производную среднего движения, деленную на два, в единицах витков на день в квадрате, и поле 1.10 — вторую производную среднего движения, деленную на шесть, в единицах витков на день в кубе. Вместе эти два поля дают картину второго порядка того, как среднее движение изменяется со временем. Однако, эти два поля не используются орбитальными моделями SGP4/SDP4 (а только более простой SGP моделью) и, следовательно, не служат никакой реальной цели.

Поле 1.11 содержит нечто, называемое B^* (BSTAR), которое является коэффициентом торможения SGP4-типа. В аэродинамической теории каждый объект имеет баллистический коэффициент, B , который равен произведению его коэффициента торможения C_D на его площадь поперечного сечения A , деленному на его массу, m .

$$B = C_D A / m$$

Баллистический коэффициент говорит о том, насколько восприимчив объект к торможению — чем выше число, тем более восприимчив. B^* есть скорректированное с использованием значения плотности атмосферы ρ_0 значение B .

$$B^* = B \rho_0 / 2$$

B^* имеет размерность (радиус земли)⁻¹.

Поля 1.10 и 1.11 имеют формат, несколько отличающийся от формата других полей. В частности, они используют модифицированное экспоненциальное представление чисел с подразумеваемой десятичной точкой. Это соглашение унаследовано от ФОРТРАНА, где все такие числа располагаются в диапазоне от 0 до 1. Первые шесть символов каждого поля представляют собой мантиссу, а последние два — показатель. Например, значению -12345-6 соответствует -0.12345×10^{-6} . Каждое из этих двух полей может быть пустым, соответствуя значению нуль.

Поле 1.12 представляет тип эфемерид (то есть орбитальную модель), используемый для генерирования данных. *Spacetrack Report Number 3* предлагает следующие обозначения: 1=SGP, 2=SGP4, 3=SDP4, 4=SGP8, 5=SDP8. Однако, это значение используется только для внутреннего анализа — все распространяемые наборы элементов имеют нулевое значение и генерируются с использованием орбитальной модели SGP4/SDP4 (соответственно, какая из них подходит).

Поле 1.13 представляет номер набора элементов. Обычно это число увеличивается на 1 с каждой новой генерацией набора элементов. Практически, однако, это далеко не всегда так. При переключении действий между основными и резервными Космическими Центрами Управления иногда номера наборов элементов выходят из синхронизации, некоторые из них многократно используются, а некоторые пропускаются. К сожалению, это создает трудности, если у вас есть все наборы элементов для конкретного объекта.

Последний столбец каждой строки (поля 1.14 и 2.10) представляет контрольную сумму данных строки по модулю 10. Для вычисления контрольной суммы просто складывают значения всех цифр в каждой строке, игнорируя все буквы, пробелы, точки и знаки "плюс" и полагая значение 1 для каждого знака "минус". Контрольная сумма — последняя цифра той суммы. Хотя это и очень простая процедура обнаружения ошибок, она должна отловить 90 процентов всех ошибок. Однако, много ошибок может все еще остаться. Чтобы устранить их, все данные, помещенные на сайте Celestial не только подвергаются проверке контрольной суммы, но должны также пройти проверку формата, и диапазона.

Строка 2 состоит из средних элементов, вычисленных с использованием SGP4/SDP4 орбитальной модели. Определения полей от 2.3 до 2.8 можно увидеть в таблице 2. Поля 2.3, 2.4, 2.6 и 2.7 имеют размерность градусов и могут изменяться в диапазоне от 0 до 360 градусов, а поле 2.3 (наклонение) — только до 180 градусов. Эксцентриситет (поле 2.5) — безразмерное значение с принятой предполагаемой десятичной точкой. Например, значение 1234567 соответствует эксцентриситету 0.1234567. Среднее движение (поле 2.8) измеряется в оборотах в день.

Таблица 2. Определение формата двухстрочного набора элементов, строка 2

Поле	Столбец	Описание
2.1	01	Номер строки данных
2.2	03-07	Номер спутника
2.3	09-16	Наклонение [градусов]
2.4	18-25	Прямое восхождение восходящего узла [градусов]
2.5	27-33	Эксцентриситет (десятичная точка опущена)
2.6	35-42	Аргумент перигея [градусы]
2.7	44-51	Средняя аномалия [градусы]
2.8	53-63	Среднее движение [оборотов в день]
2.9	64-68	Номер витка в эпоху [оборотов]
2.10	69	Контрольная сумма (по модулю 10)

Последнее поле строки 2, перед контрольной суммой, является номером витка. Так как имеются несколько соглашений для определения номера витка, это поле также требует некоторого комментария. В соответствии с конвенцией NORAD виток начинается, когда спутник проходит восходящий узел орбиты, и оборот — период между последовательными проходами восходящего узла. Период от запуска до первого восходящего узла рассматривается как виток 0, и виток 1 начинается после достижения первого восходящего узла. Так как многие наборы элементов

сгенерированы с эпохами, для которых спутник находится близко от его восходящего узла, важно обратить внимание, достиг ли спутник восходящего узла при вычислении последующего номера витка.

В общем, любое число, меньшее максимальной величины поля, может забиваться или пробелами или нулями. Другими словами, эпоха может представляться как или 98001.12345678 или 98 1.12345678, и наклонение может представляться как 28.1234 или 028.1234. Конвенция принимает ведущие нули для полей 1.5 и 1.8 и пробелы для остальных мест, но оба варианта допустимы.

Очевидно, имеются несколько ограничений в текущем двухстрочном формате. Прежде всего, это потребность в четырехразрядном номере года в полях 1.4 и 1.7. Затем, имеется потребность в более мощной форме проверки ошибок, возможно, 16-битной CRC. Такая контрольная сумма могла бы применяться к обеим строкам вместе, не только обнаруживая ошибки в пределах данных, но также и несогласованность строк 1 и 2. Если такие изменения были бы сделаны, было бы мудрым увеличить величину поля для каталожного номера до шести или семи цифр, чтобы поддерживать возможную каталогизацию меньших обломков.

Формат международного обозначения, кажется, устроит в течение обозримого будущего, — четырехразрядный год, до 999 запусков в год (наибольшее достигнутое значение до настоящего времени за все годы — это 129 в 1984), и до 13824 фрагментов на запуск (рекорд сегодня — 1994-029 с 672 фрагментами). Конечно, занесение в базы данных меньших обломков, которые можно не суметь соотнести с первоначальными запусками, все еще представляет потенциальные проблемы [8].

3.2 Вычисление линий, огибающих зону покрытия

Вычисление координат подспутниковой и боковых точек в предположении, что радиус-вектор и вектор скорости спутника известны. Под подспутниковой точкой здесь имеется в виду точка, являющаяся точкой пересечения прямой, проходящей через центр Земли и точку в пространстве, где в данный момент находится спутник, для любой модели Земли. Вся временная прямая разбивается на

малые равные промежутки времени. Для каждого временного узла вычисляются координаты боковых точек (см. рис. 5).

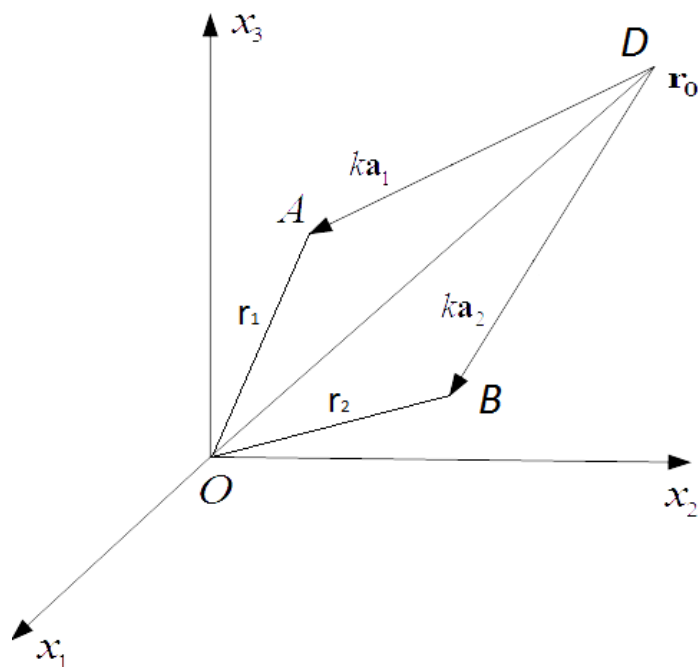


Рис. 5. Боковые точки в момент t_i

Итак, нужно отыскать координаты 2-х боковых точек сфотографированной в данный момент времени области A и B. Пример расположения в пространстве представлен на рис. 5.

В первую очередь определяются координаты подспутниковой точки. Для этого радиус-вектор – координатный столбец спутника \mathbf{r}_0 – умножается на коэффициент:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \frac{R}{|\mathbf{r}_0|}, \text{ где } R - \text{ радиус Земли.}$$

В дальнейшем для удобства нужно перевести все данные в одну СК, а именно в СК $Ox_1x_2x_3$.

Затем вычисляются координаты боковых точек A и B.

Сначала ищутся направляющие векторы \mathbf{a}_i прямых, заданных в векторном виде, – боковых образующих конуса обзора фотокамеры (рис. 5).

$$\mathbf{r} = k\mathbf{a}_i + \mathbf{r}_0, \text{ где } i = \overline{0,1}.$$

Для этого осуществляется поворот вектора $-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ на углы $\pm\frac{\alpha}{2}$ относительно вектора скорости или оси $O\eta_1$ в ОСК $O\xi_1\eta_1\zeta_1$. В свою очередь для этого нужно радиус-вектор спутника перевести из СК $O\xi\eta\zeta$ в СК $O\xi_1\eta_1\zeta_1$. В результате получаем направляющий вектор оси обзора камеры, поэтому для получения направлений на боковые точки нужно затем повернуть на угол $\pm\frac{\alpha}{2}$ получившийся вектор с помощью матриц поворота D_i , где $i = \overline{1,2}$

$$D_i = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 & (-1)^{i+1} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ (-1)^{i+1} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}, \text{ где } i = \overline{1,2}.$$

и уже потом перевести в СК $Ox_1x_2x_3$. В итоге имеем направляющие векторы

$$\mathbf{a}_i = B_1 D_i B_2 \left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right), \text{ где } i = \overline{1,2}.$$

Далее решается система:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = k\mathbf{a}_i + \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}^2 = R^2 \end{cases} \quad i = \overline{1,2},$$

которая переписывается в квадратное уравнение

$$|\mathbf{a}_i|^2 k^2 + 2k\mathbf{a}_i \mathbf{r}_0 + |\mathbf{r}_0|^2 - R^2 = 0$$

или

$$|\mathbf{a}_i|^2 k^2 + 2k \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\mathbf{a}_i| |\mathbf{r}_0| + |\mathbf{r}_0|^2 - R^2 = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения

$$k = -r_0 k \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pm \sqrt{R^2 - r_0^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Решение в действительных числах существует, если выполнено соотношение:

$$R^2 - r_0^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0.$$

Это выражение означает, что апертура камеры достаточно мала, чтобы «конус обзора» пересек Землю. Если соотношение не выполнено, то корней нет, и следует принимать в расчет все точки на поверхности Земли, видимые с той точки в пространстве, где в данный момент находится спутник. В том случае, когда есть хотя бы 1 корень, следует воспользоваться меньшим, так как требуется знать только видимые со спутника точки пересечения «конуса обзора» с Землей. Координаты точек пересечения боковых образующих конуса с Землей имеют следующий вид

$$\mathbf{X}_i = k\mathbf{a}_i + \mathbf{r}_0, \text{ где } i = \overline{1,2}.$$

Таким образом находятся координаты боковых точек.

Выше был описан способ нахождения координат боковых точек в СК $Ox_1x_2x_3$ для сферической модели Земли. В том случае, когда берется модель WGS-84, направляющие вектора прямых образующих конус обзора \mathbf{a}_i находятся аналогично, но для того, чтобы найти координаты точек пересечения образующих прямых с поверхностью эллипсоида нужно решить другую систему, а именно

$$\begin{cases} \mathbf{r} = k\mathbf{a}_i + \mathbf{r}_0 \\ x^2 + y^2 + \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 z^2 = R_e^2 \end{cases} \quad i = \overline{1,2}$$

Здесь R_e и R_p - экваториальный и полярный радиусы эллипсоида вращения соответственно. Эта система так же сводится к квадратному уравнению относительно k , из которого нужно взять меньший корень по тем же соображениям.

3.3 Вычисление площади покрытия по боковым точкам

В этом разделе описывается метод вычисления площади покрытия. Рассматриваются сферические координаты (r, θ, φ) . Здесь θ - угол между осью Ox_3 и радиус-вектором спутника, φ - угол между осью Ox_1 и проекцией радиус-вектора на плоскость Ox_1x_2 , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, r - модуль радиус-вектора спутника (рис. 6). Вводится равномерная сетка на поверхности Земли. Мелкость разбиения задается следующим образом:

$$\theta_j - \theta_{j-1} = \pi\delta, \quad j = \overline{1, N}, \quad \delta = \frac{1}{N}.$$

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = 2\pi\delta, \quad i = \overline{1, N}, \quad \delta = \frac{1}{N}.$$

Здесь N – число узлов сетки.

На рис. 7 проиллюстрировано возможное расположение боковых точек A_1, A_2, B_1, B_2 в двумерном пространстве (θ, φ) . Узлы сетки, вошедшие в выпуклую оболочку этих точек, помечены черными квадратами. При достаточно малом времени $t = t_2 - t_1$ можно считать, что кривые, ограничивающие сфотографированную поверхность Земли – прямые A_1A_2 и B_1B_2 в пространстве (θ, φ) . Предполагается, что A_1B_1 и A_2B_2 так же прямые в пространстве (θ, φ) . От того, как задаются кривые A_1B_1 и A_2B_2 ничего существенного не поменяется, так как форма и площадь фигуры между боковыми линиями $A_1A_2 \dots$ и $B_1B_2 \dots$ не изменится. Поэтому удобнее всего положить, что A_1B_1 и A_2B_2 – прямые. Задача свелась к тому, что нужно вычислить площадь ограниченную четырьмя боковыми точками: двумя точками A_1, B_1 в момент времени t_1 и двумя точками A_2, B_2 в момент времени t_2 .

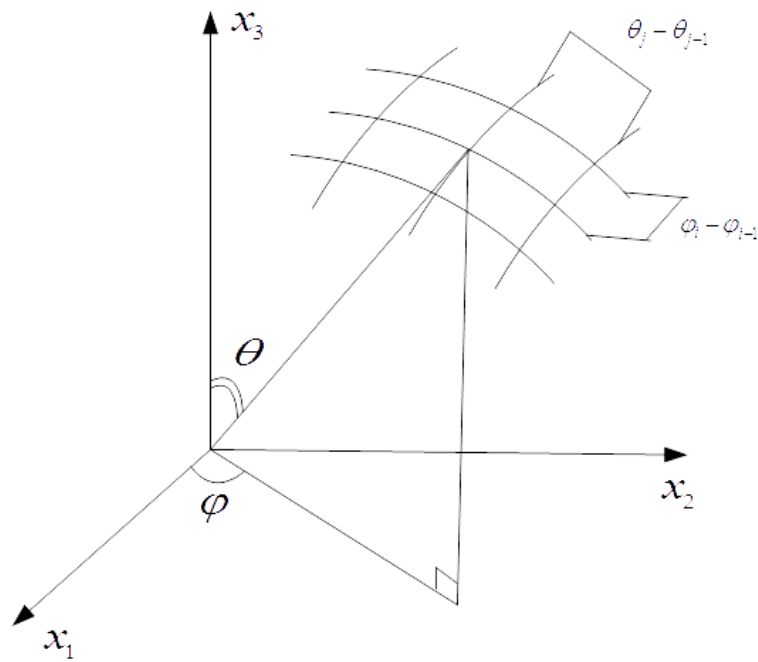


Рис. 6. Сетка на поверхности Земли

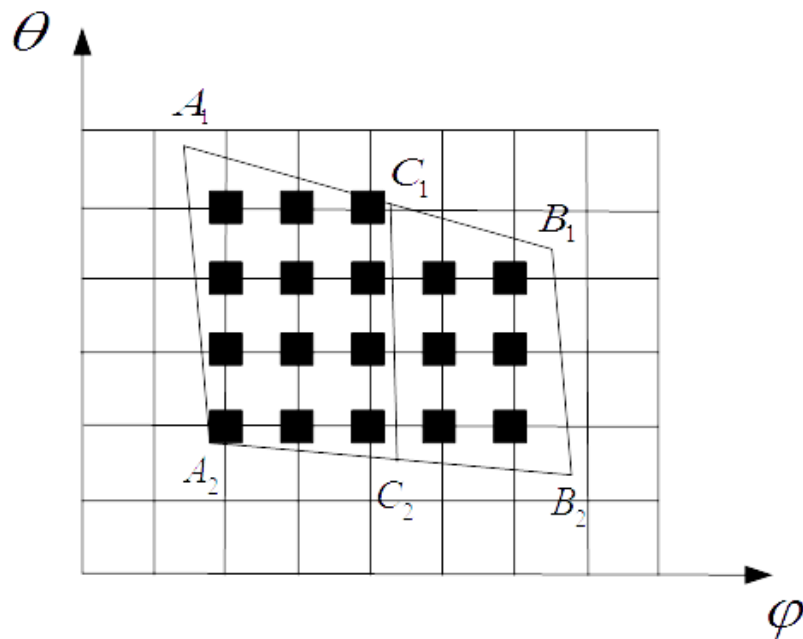


Рис. 7. Боковые точки в двумерном пространстве (θ, φ)

Метод предполагает расчет сфотографированной площади по узлам сетки, вошедшим в какой-либо из множества четырехугольников, построенных так же, как $A_1A_2B_2B_1$. Тот факт, вошел ли узел в очередной четырехугольник предлагается определять по алгоритму, использующему определение выпуклой оболочки,

приведенному, например, в [9]. Точка с радиус-вектором \mathbf{X} принадлежит выпуклой оболочке n векторов \mathbf{y}_i , если выполнены условия:

$$1) \mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{y}_i$$

$$2) \sum_{i=1}^n q_i = 1, \text{ где } 0 \leq q_i \leq 1, \forall i.$$

Таким образом, нужно проверить, лежит ли радиус-вектор каждого из узлов в каждом из четырехугольников, построенных так же, как $A_1A_2B_2B_1$. В область фотографирования будем включать те сегменты (θ_1, φ_1) , (θ_1, φ_2) , (θ_2, φ_1) , (θ_2, φ_2) , вершины которых включены в сфотографированную область по алгоритму выпуклой оболочки в соответствии с рис. 8. Площади тех сегментов, вершины которых включены в соответствии с пунктами 2, 3, 4, 5 на рисунке, будут включены с коэффициентами $\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ соответственно.

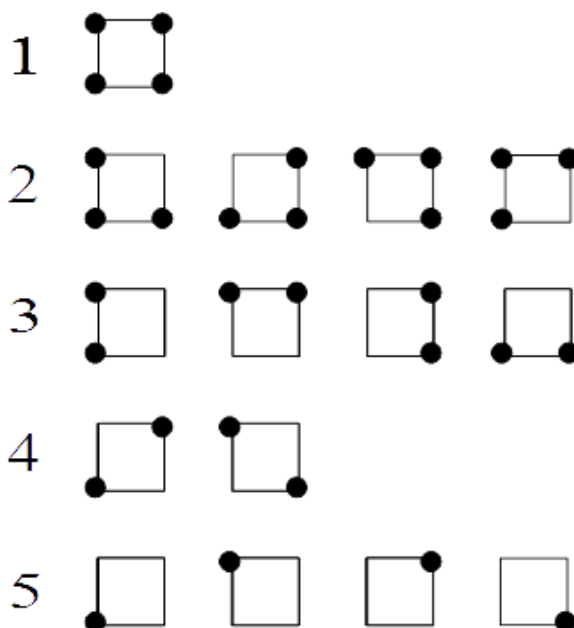


Рис. 8. Способы включения вершин сегмента во множество заматаемых узлов

В случае сферической модели Земли площадь каждого сегмента находится по формуле:

$$S_i = 2\pi R^2 \left[\left(1 - \cos\left(i \frac{\pi}{N}\right) \right) - \left(1 - \cos\left((i-1) \frac{\pi}{N}\right) \right) \right] / N.$$

где $i \frac{\pi}{N}$ и $(i-1) \frac{\pi}{N}$ – углы отклонения границ сегмента от оси вращения Земли.

В том случае, когда Земля задается эллипсоидом, взятым из модели WGS-84, площадь сегмента находится по формуле

$$S = \Delta\alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Здесь

$$x = R_e \cos(t),$$

$$y = R_e \sin(t).$$

После подстановки в формулу для вычисления площади сегмента, получим

$$S = \Delta\alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} R_e \cos(t) \sqrt{(R_e \sin(t))^2 + (R_p \cos(t))^2} dt$$

Здесь R_e и R_p - полярный и экваториальный радиусы Земли соответственно.

Далее делаем замену

$$\sin(t) = ash(\varphi)$$

$$sh(\varphi) = \frac{\sin(t)}{a}$$

$$\varphi = Arsh\left(\frac{\sin(t)}{a}\right)$$

$$\cos(t) dt = ach(\varphi) d\varphi$$

$$a = \frac{R_p}{\sqrt{R_e^2 - R_p^2}}$$

Выражение для S принимает вид:

$$S = \Delta\alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} R_e \operatorname{ach}(\varphi) \sqrt{\left(R_e \operatorname{ash}(\varphi)\right)^2 + R_p^2 - \left(R_p \operatorname{ash}(\varphi)\right)^2} d\varphi \quad (1)$$

Конечная формула для S :

$$S = \Delta\alpha b \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2\varphi) \right)_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Далее определим координаты, которые будут иметь узлы сетки при равенстве площадей всех сегментов, образующих двумерную сетку на поверхности Земли. Определение долготы не представляет труда: нужно 2π разделить на количество узлов, а для вычисления широты θ_i i -го узла сетки предлагается воспользоваться формулой (1). Считается известными первая координата по широте θ_1 и площадь сегмента S .

$$\varphi_2 = \operatorname{Arsh} \left(\frac{\sin(t_2)}{a} \right)$$

$$t_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{R_e}{R_p} \operatorname{tg}(\theta_2) \right)$$

Теперь, зная φ_1 и S , численно, методом Ньютона, находится φ_2 , а потом и θ_2 .

$$\theta_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{R_p}{R_e} \operatorname{tg}(t_2) \right)$$

Таким образом вычисляются широты всех узлов сетки.

Все сегменты, находящиеся на одной широте, имеют одинаковую площадь. Зная площадь каждого сегмента и то, сфотографировали его или нет, можно найти общую площадь сфотографированной поверхности.

3.4 Вычисление времени, затраченного на зондирование заданного участка поверхности

При вычислении времени, требуемого на съемку заданного участка, предполагается, что поверхность, за которой нужно следить, задается выпуклым многоугольником либо несколькими выпуклыми многоугольниками. В самом простом случае это выпуклый четырехугольник. Если поверхность задать невыпуклым многоугольником, но вершинами, идущими по порядку, то его возможно разбить на выпуклые, используя например алгоритм Кируса-Бека, описанный в [10] за количество операций порядка $O(n)$ в худшем случае, где n - это количество вершин в многоугольнике.

Вводится дополнительная матрица T , в которой хранятся времена фотографирования соответствующих узлов сетки. Если узел не сфотографирован, то элемент матрицы T равен нулю. Если к концу вычислений один из элементов матрицы T , соответствующий какому-либо узлу из заданного многоугольника равен нулю, то заданный многоугольник не сфотографирован. В этом случае вычисляется доля заданной поверхности, которую удалось сфотографировать. Если в матрице T нулевых элементов нет, то в качестве окончания времени фотографирования берется максимальный элемент матрицы T (см. рис. 9).

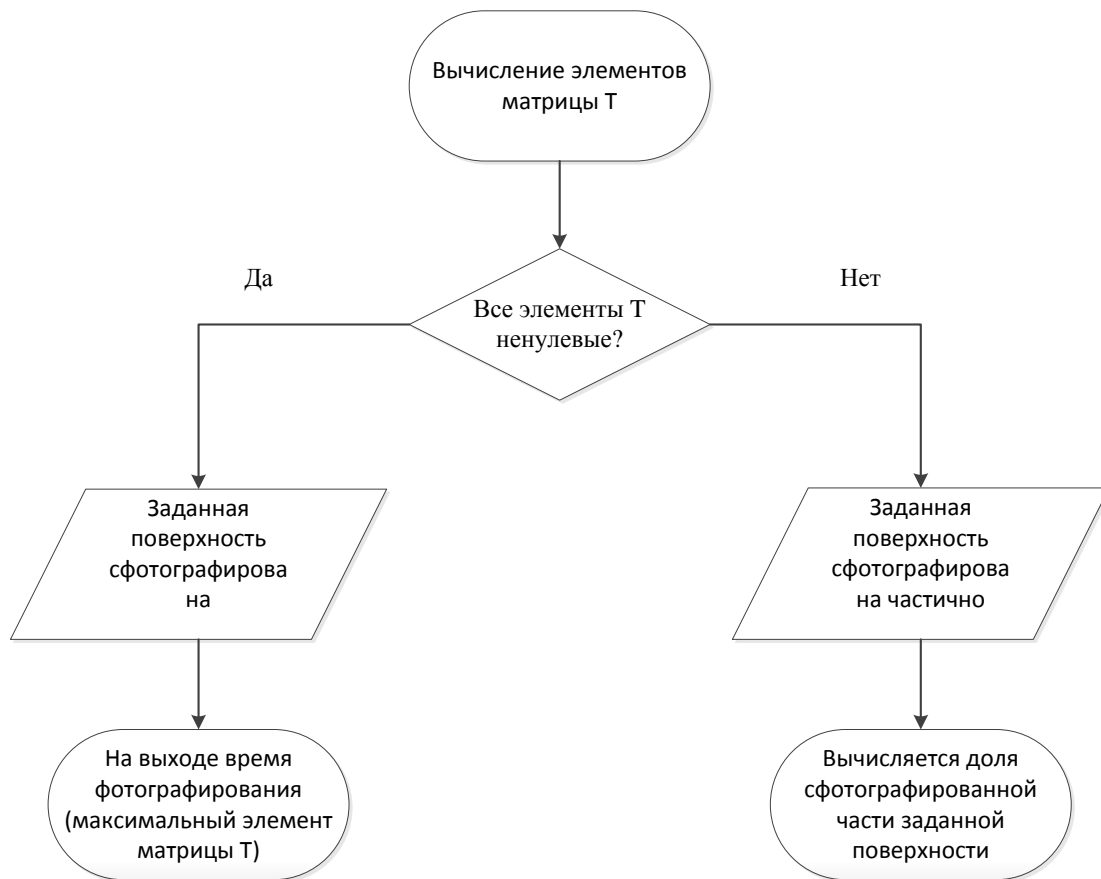


Рис. 9. Вычисление времени фотографирования заданной поверхности

4. Проведение расчетов с использованием программы

Для решения рассматриваемой задачи на основе разработанных методик был создан программный комплекс в среде MATLAB. На вход программы подаются начальное время t_0 , время окончания расчета t , шаг, с которым производится расчет (мелкость разбиения сетки), задается числом узлов N по каждой из сферических координат θ и φ , наблюдаемая поверхность задается матрицей, состоящей из координатных столбцов (долгота и широта). Для определения орбиты задаются 6 элементов орбиты $\Omega, \omega, i, e, p, t_\pi$ либо двухстрочные элементы интересующего спутника.

На выходе программы имеем визуализацию движения спутника, подспутниковой точки, боковых точек, площадь заметаемой поверхности и время, за которое будет просмотрен заданный участок поверхности, если таковой будет вообще просмотрен, иначе выводится доля сфотографированного участка от

заданной площади и сообщение о том, что поверхность не сфотографирована. Структура программы схематично изображена на рис. 10.

Программный комплекс состоит из нескольких подпрограмм, выполняющих различные вычисления:

- Функция `points_1`. Эта функция находит координаты боковых точек. На вход этой функции подаются параметры орбиты.
- Функция `points_2`. Эта функция находит координаты боковых точек. На вход к ней подаются двустрочные элементы модели NORAD.
- Функция `points_oblate`. Эта функция находит координаты боковых точек. На вход к ней подаются двустрочные элементы модели NORAD. В отличие от предыдущей функции, здесь Земля рассматривается как эллипсоид, взятый из модели WGS-84.
- Функция `conv_2D`. Эта функция ищет выпуклую оболочку 4-х точек в двумерном Евклидовом пространстве. Используется для того, чтобы определять заметаемые спутником узлы сетки.
- Функция `area`. Она предназначена для расчета заметаемой площади, в которую входят заметаемые узлы сетки. Эта функция представлена в четырёх модификациях:
 1. `area_tle_sphere` – соответствует сферической модели Земли и здесь разбиение сетки равномерно по координате θ
 2. `area_tle_sphere_2` - соответствует сферической модели Земли и здесь разбиение сетки устроено так, чтобы площади всех элементарных сегментов были равны между собой
 3. `area_tle_ellipsoid` – соответствует модели Земли, взятой из модели WGS-84, и здесь разбиение сетки равномерно по координате θ
 4. `area_tle_ellipsoid` - соответствует модели Земли, взятой из модели WGS-84, и здесь разбиение сетки устроено так, чтобы площади всех элементарных сегментов были равны между собой

- Функция `polygon`. По координатам точек-входных параметров эта функция ищет координаты узлов сетки, входящих в многоугольник, образованный этими точками.
- Функция `time_of_probing`. Эта функция вычисляет, за какое время будет покрыта заданная поверхность, и если поверхность не будет покрыта, то вычисляется доля покрытой поверхности из заданной по отношению к заданной поверхности. Эта функция имеет также как и функция `area` 4 аналогичных модификации.

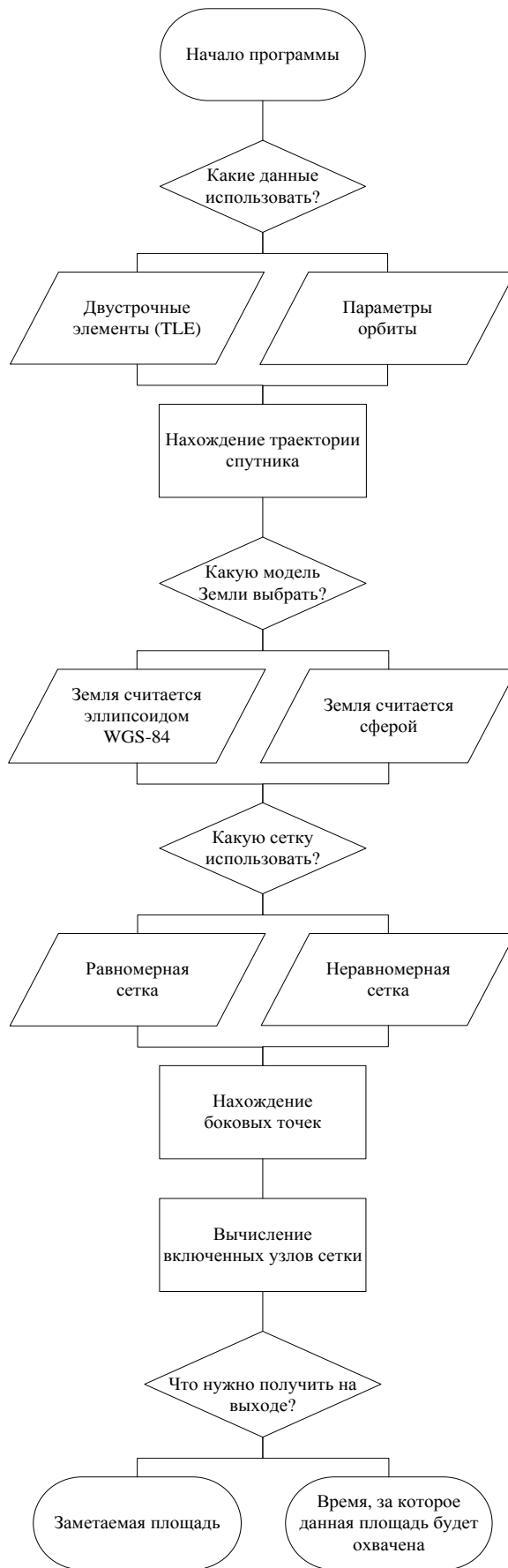


Рис. 10. Структура программы

Ниже приводятся примеры расчета площади для разных начальных данных.

Пример 1. Для того, чтобы проверить адекватность вышеизложенного метода, рассмотрим модельную задачу со следующими предположениями: Земля имеет форму шара, Земля не имеет угловой скорости, орбита имеет следующие параметры $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$, $e = 0^\circ$, $p = 6800$ км, $i_1 = 0^\circ$, $i_2 = 50^\circ$. Для экваториальной орбиты легко вычислить аналитически площадь, которую спутник просмотрит за один виток. Для начальных данных, соответствующих экваториальной орбите, имеем аналитически посчитанную площадь $S_{теор} = 1.9522 \cdot 10^7$ км². Для наклоненной орбиты в данном случае заматаемая площадь будет такой же, поскольку угловое вращение Земли отсутствует. Результаты вычислений методами, соответствующими рис.8, представлены в таблице 3. Площадь указана в миллионах квадратных километов.

Таблица 3. Результаты работы программы

Мелкость разбиения	Наклонение орбиты	Метод счета площади			
		1	1,2	1,2,3	1,2,3,4,5
N = 500	i = 0	19.306	19.306	20.912	20.912
N = 1000	i = 0	19.287	19.287	20.090	20.090
N = 500	i = 50	16.942	18.640	19.535	19.778
N = 1000	i = 50	18.406	19.257	19.703	19.824

В программный комплекс включена возможность использования уточненных коэффициентов. Методом наименьших квадратов (который широко используется в подобных случаях, его описание можно найти, например в [11]) находятся искомые коэффициенты, при которых достигается минимум функционала $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (S_{теор} - S(x_1, x_2, x_3, x_4, i))^2$ на описанной в примере 1 задаче с наклонением i , мелкостью сетки N , для которых нужно получить искомый набор коэффициентов. Затем этот набор используется в произвольном случае, но с теми же параметрами i и N .

Пример 2. В качестве примера работы программы счета времени заданной поверхности рассмотрим следующую модельную задачу. Область съемки задаётся вершинами четырехугольника, ограничивающегося 55 и 65 градусами северной широты и 80 и 120 градусами восточной долготы. При этом полагается, что апертура камеры равна $\alpha = \pi / 3$ и время всего расчета 24 часа. Рассматриваются три спутника, движущихся по орбитам, отличающимся лишь долготой восходящего узла на угол $\pi / 3$ с параметрами: $\Omega_1 = 36^\circ$, $\Omega_2 = 96^\circ$, $\Omega_3 = 156^\circ$, $i = 51^\circ$, $e = 0$, $p = 6800$ км. Посчитанная общая площадь и доля сфотографированной поверхности от заданной сведены в таблицу 4.

Таблица 4. Результаты работы программы.

Размер сетки	Количество спутников			Время работы программы в случае 3-х спутников, секунды
	1	2	3	
100	275.65	425.52	448.68	16.50
	0.7158	0.9824	0.9824	
500	274.46	421.05	444.28	111.18
	0.6907	0.9912	0.9934	
1000	274.53	421.02	444.20	410.16
	0.6913	0.9920	0.9938	

По результатам видно, что разумным будет задействовать лишь два спутника, так как разница в сфотографированных долях площади в сравнении с теми же вычислениями, но с тремя спутниками, будет порядка 0.2%. При этом сетку при вычислении достаточно выбрать размером $N = 500$, потому как разница в долях сфотографированных частей заданной поверхности здесь также порядка 0.2%, а время при $N = 1000$ тратится намного (примерно в 4 раза) больше. Вышеуказанные вычисления производились на машине со следующими характеристиками: процессор Intel Pentium CPU 2020M с тактовой частотой 2.40 кГц, 4 Гб оперативной памяти (RAM).

Заключение

Разработан и реализован в среде MATLAB программный комплекс, позволяющий рассчитать заметаемую спутниками ДЗЗ площадь. В комплекс включена возможность вычисления времени, за которое поверхность, заданная с помощью координат вершин выпуклого многоугольника, будет просмотрена. Комплекс позволяет использовать две модели поверхности Земли (сферическая и WGS-84). Орбитальное движение может быть задано либо с использованием модели центрального поля Земли, либо SGP4. Реализован алгоритм вычисления площади, использующий определение выпуклой оболочки. Проведена верификация реализованных алгоритмов на модельных задачах.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному консультанту Ткачеву С.С. за помощь в реализации программного приложения.

Литература

1. <http://knts.tsniimash.ru>
2. <http://magru.net>
3. <http://ru.wikipedia.org/>
4. <http://www.satlink.ru/>
5. <http://www.sputnix.ru/>
6. Мирер С. А. Механика космического полета. Орбитальное движение. – М: Резолит, 2007.
7. Felix R. Hoots, Ronald L. Roehrich Spacetrack report NO.3. Models for Propagation of NORAD Element Sets// December 1980, Package Compiled by TS Kelso 31 December 1988
8. <http://space.kursknet.ru>
9. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
10. <http://www.codenet.ru/>
11. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику. – М.: ЛКИ, 2009.