

Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский физико-технический институт

(государственный институт)

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра прикладной математики

Диссертация допущена к защите

зав. кафедрой

— д. ф.-м. н., профессор Ю. П. Попов

«_____» _____ 2014 г.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
МАГИСТРА

Тема: «ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ POLAR-SITTER С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОЛНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ»

Направление: 010900.68 – Прикладные математика и физика

Магистерская программа: 010954 – Управление динамическими системами

Выполнил студент гр. 872 _____ Кабанов Сергей Михайлович

Научный руководитель,

д. ф.-м. н., профессор _____ М. Ю. Овчинников

Москва – 2014

Содержание

Введение	3
Глава 1. Постановка задачи	8
Глава 2. Вывод уравнений движения	10
Глава 3. Определение положений равновесия в плоскости Sxz	14
3.1. Задача Солнце—парус	14
3.2. Задача Солнце—Земля—парус	16
Глава 4. Исследование устойчивости точек равновесия в линейном приближении	21
Заключение	24
Приложение А. Вычисление первых коэффициентов разложения асимптотического ряда	25
Приложение Б. Определение первых коэффициентов разложения для точек равновесия при $\alpha = 0$	27
Приложение В. Явный вид частных производных псевдо-потенциальных функций	29
Литература	30

Введение

Идея полетов в космосе с использованием солнечного паруса возникла в 1920-е годы в России и принадлежит одному из пионеров ракетостроения Фридриху Цандеру, исходявшему из того, что частицы солнечного света — фотоны — имеют импульс и передают его любой освещаемой поверхности, создавая давление. Величину давления солнечного света впервые измерил русский физик Пётр Лебедев в 1900 году. К. Э. Циолковский также в 1920-е годы писал о возможности использования больших по площади очень тонких зеркал для достижения космических скоростей. После работ К. Э. Циолковского и Ф. Цандера к проблеме солнечного паруса учёные не обращались практически на протяжении 30 лет. Возродил идею солнечного паруса американский инженер Карл Вайли, который в мае 1951 года в журнале «Astounding Science Fiction» опубликовал статью, в которой писал о возможной конструкции солнечного паруса и стратегии подъёма солнечного паруса на орбиту. Карл Вайли (псевдоним Рассел Сандерс) был оптимистично настроен в отношении идеи перемещения космического аппарата с орбиты одной планеты на орбиту другой при помощи космического паруса. Подобные оптимистические идеи были обсуждены и Ричардом Гарвином в 1958 году в «IBM Watson laboratory» университета округа Колумбия. Ричард Гарвин также вводит термин «solar sailing» (переводится как «плавание с помощью солнечного паруса»). Так же, как и Вайли Гарвин отметил уникальные свойства и возможности светового двигателя: отсутствие необходимости в топливе и непрерывное ускорение, что позволяет набрать высокую скорость за длительный период времени. Несмотря на оптимизм Гарвина, солнечные паруса сложно ассоциировать с космическими путешествиями вследствие того, что аппарат космического паруса относительно мал. Столь ранний оптимизм не стал и следствием полёта, фактически

полёт солнечного паруса состоялся только спустя сорок лет.

После обращения Гарвина к проблеме солнечного паруса более детальные исследования орбит солнечных парусов были совершены в период с конца 1950-начала 1960-х годов. Ряд учёных смогли выяснить, что для назначения направления паруса, его орбита при движении вокруг солнца должна иметь вид логарифмических спиралей. Простое сравнение солнечного паруса с видом химических и ионных двигателей показало, что солнечный парус мог бы сравниться с этими системами и даже превосходить их для некоторого ряда миссий. Эти ранние исследования обращают внимание на основные проблемы и преимущества солнечного паруса. Интересно заметить, что писатель-фантаст Артур Кларк в 1963 году издал свой известный рассказ «The Wind from the Sun» («Солнечный ветер»), где описывается гонка космических кораблей с солнечными парусами. К началу 1970-х годов уровень развития техники позволял выводить большие полезные нагрузки на орбиту Земли и разворачивать там конструкции крупных космических аппаратов. Кроме того, разработки технологий по развёртыванию космических систем и получению тонких мембран позволяли задуматься о применении идеи к конкретной миссии. В 1973 году NASA финансировало начальные исследования солнечного паруса в лаборатории «Battelle» в Огайо, которые получили положительные рекомендации для дальнейшего изучения. В процессе работы Джером Райт обнаружил траекторию, которая могла позволить солнечному парусу встретиться с кометой Галлея в её перигелии в середине 1980-ых. Время полёта заняло бы около четырёх лет, а запуск предполагался в конце 1981 или в начале 1982 года. Это было замечательное открытие. Ионный двигатель, требующий восемь лет для осуществления этой миссии, требовал запуска уже в 1977 году. Встреча космического объекта воспринималась научным сообществом как необходимый элемент для сложной высокотехнологичной миссии. Брюс Мюррей,

на тот момент директор «Jet Propulsion Laboratory», направляет в сентябре 1976 года в управление NASA предложение, цель которого – технологическая реализация нового открытия. Разработка проекта миссии встречи с кометой Галлея с использованием солнечного паруса стартовала в ноябре того же года.

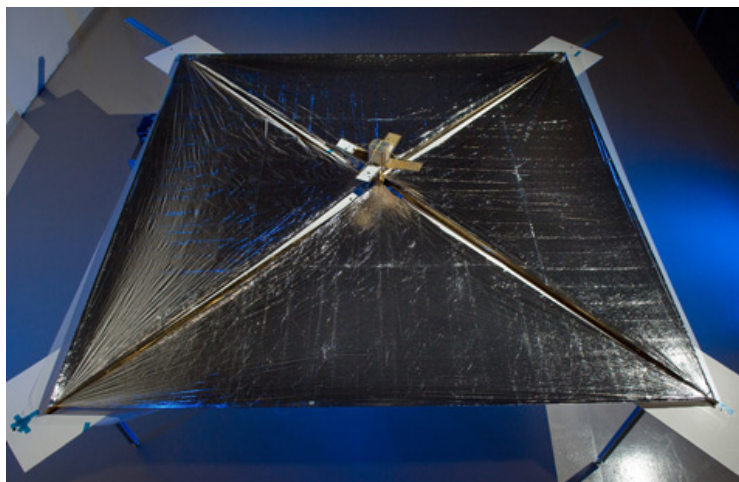


Рис. 1. Квадратный солнечный парус. Рисунок NASA



Рис. 2. Солнечный парус «Heliogyro»

Сначала рассматривали солнечный парус квадратной формы, размером 800×800 метров, устойчивый относительно трёх осей (см. рис. 1). Однако в мае 1977 такую форму паруса не рассматривали из-за высоких

рисков при развёртывании. Работа сосредоточилась над космическим парусом со стабилизируемым вращением «Heliogyro» (см. рис. 2). В конфигурации «Heliogyro» должно было использоваться двенадцать лезвий по 7.5 километров. Парус такой формы легче в развёртывании, чем квадратный солнечный парус из-за возможности разворачивания каждого лезвия вращающейся конструкции по отдельности. Также была определена динамика движения объекта, построена система управления и созданы образцы материала для лезвий. Работа вызвала большой интерес в научном и инженерном сообществах. Однако сторонники ионных двигателей доработали свой проект, улучшив оценку производительности, и стали успешно конкурировать с разработчиками солнечного паруса. После сравнительного анализа двух нестандартных вариантов двигателей NASA в сентябре 1977 года выбрала ионный двигатель по причине меньшего риска. Немного позже и этот проект был закрыт. В итоге NASA не успела подготовить проект миссии и не отправила аппарат к комете. Тем не менее это было успешно сделано в СССР, Японии и странах Западной Европы с использованием традиционных двигателей.

В наше время в связи с высоким техническим прогрессом существуют необходимые материалы для технической реализации солнечного паруса. Первое развёртывание солнечного паруса в космосе было произведено на российском корабле «Прогресс М-15» 24 февраля 1993 года в рамках проекта «Знамя-2». Японское космическое агентство (JAXA) 21 мая 2010 года запустило ракету-носитель H-IIA, на борту которой находились космический аппарат IKAROS с солнечным парусом и метеорологический аппарат для изучения атмосферы Венеры. Также в конце 2014 года специалистами NASA готовится запуск самого большого в истории паруса Sunjammer площадью 111.5 квадратных метров при весе в 31.7 килограмм. Все это подтверждает актуальность использования солнечного паруса в виде дви-

жетеля космического аппарата.

Одна из первых книг [1] о солнечном парусе была издана в 1992 году и содержала обзоры основных работ по исследованию некеплеровых орбит в задаче Солнце-парус. Первые работы, посвященные солнечному парусу в задаче трех тел Солнце-Земля-парус, начали появляться с выходом книги [2], в которой, в частности, были приведены численные расчеты точек либрации солнечного паруса для малых значений параметра паруса и их возможное использование в практических целях. В настоящее время упор делается на исследование гало-орбит относительно классических точек либрации L_1 и L_2 , как представляющих наибольший интерес для практического применения. В работах [3, 4] рассматривается стабилизация малой периодической орбиты паруса около точек $L_{1,2}$. В работе [5] исследована возможность импульсного управления парусом в плоскости эклиптики. Также есть статья [6], посвященная управлению парусом в задаче Земля-Луна-парус.

Исследование гало-орбит солнечного паруса в задаче трех тел – большая и развивающаяся сфера в научном мире. Из свежих работ можно по изучению практических миссий солнечного паруса в задаче трех тел можно отметить [7–9].

В нашей работе не рассматривается динамика паруса, напротив, мы хотим получить и исследовать статические положения солнечного паруса. Подобные исследования проведены в работах [2, 8, 10]. Однако, в нашей работе мы больше делаем упор на поиск аналитического решения. Нам удастся найти параметрическое семейство оригинальных решений в виде асимптотического ряда в области между Солнцем и Землей, что является большой редкостью для нелинейных уравнений такого типа и, таким образом, отличает от подобных работ [2, 8, 10] по исследованию точек либрации солнечного паруса.

Глава 1

Постановка задачи

В качестве модели солнечного паруса, следуя пионерской работе [2], возьмем плоскую поверхность, полностью отражающую солнечный свет без потерь. Считаем, что масса такого паруса сосредоточена в одной точке. Тогда, согласно сделанным предположениям, сила давления солнечной радиации направлена по внешней нормали к отражающей поверхности и описывается формулой

$$\mathbf{f}^{sail} = p_{\oplus} A \left(\frac{a}{r_{\odot}} \right)^2 (\hat{\mathbf{r}}_{\odot} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.1)$$

где $p_{\oplus} \simeq 5 \times 10^{-6}$ Н/м² – максимально возможное давление со стороны солнечной радиации на парус, находящейся на расстоянии в одну астрономическую единицу; A – площадь активной отражающей поверхности.

Будем рассматривать такой парус в круговой ограниченной задаче трех тел Солнце-Земля-парус. Считаем, что парус является пассивно гравитирующим телом, на которое действует сила солнечного давления, описываемая формулой (1.1). Также полагаем, что движение Земли относительно солнца происходит по известной круговой орбите. Для составления уравнений движения солнечного паруса введем две ортогональные системы координат, следующим образом:

- $SXYZ$ – инерциальная система координат, центр которой совпадает с центром масс Солнца. Ось SX лежит в плоскости эклиптики, и в начальный момент времени направлена на центр масс Земли. Ось SY дополняет систему до правой; $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ – орты соответствующих осей системы $OXYZ$.
- $Sxyz$ – неинерциальная система координат, совпадающая в началь-

ный момент с системой $Sxyz$ и вращающаяся относительно оси Sz с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{a^3}}$, равной угловой скорости обращения Земли вокруг Солнца. Таким образом Земля и Солнце всегда находятся на оси Sx ; $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – орты соответствующих осей системы $Sxyz$ (см. рис. 1.1).

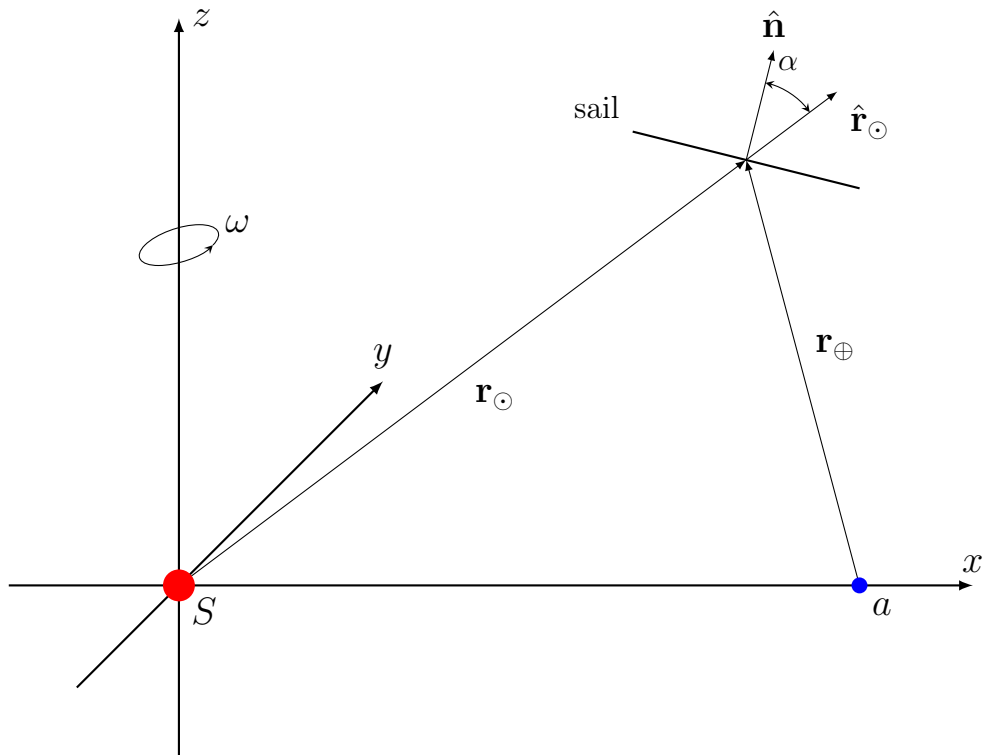


Рис. 1.1. Солнечный парус во вращающейся системе координат $Sxyz$

Глава 2

Вывод уравнений движения

Получим уравнения движения солнечного паруса под действием фотогравитационных сил Солнца и Земли. Векторное уравнение движения паруса массой m в инерциальной системе координат $SXYZ$ запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mu_{\odot}}{R^3} \mathbf{R} + \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} (\mathbf{a} - \mathbf{R}) + \mathbf{w}^{sail}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{R} = X\mathbf{E}_1 + Y\mathbf{E}_2 + Z\mathbf{E}_3$ – радиус–вектор паруса в системе координат $SXYZ$; $\mathbf{w}^{sail} = \mathbf{f}^{sail}/m$ – ускорение, сообщаемое парусу силой солнечного давления.

Пусть во вращающейся системе координат $Sxyz$ $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ – радиус–вектор паруса относительно центра масс Солнца. Причем, очевидно, что для первой производной вектора \mathbf{R} по времени во вращающейся системе координат выполнено равенство

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}, \quad (2.2)$$

тогда для второй производной по времени справедлива цепочка равенств

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} + \omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) + \omega\mathbf{e}_3 \times (\dot{\mathbf{r}} + \omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) = \ddot{\mathbf{r}} + 2\omega\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{r}} + \omega\mathbf{e}_3 \times (\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Перепишывая уравнение (2.1) с учетом выражения (2.3), получим векторное уравнение движения во вращающейся системе координат $Sxyz$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -2\omega\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{r}} - \omega\mathbf{e}_3 \times (\omega\mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) - \frac{\mu_{\odot}}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} (\mathbf{r} - \mathbf{a}) + \mathbf{w}^{sail}. \quad (2.4)$$

Перепишем уравнение (2.4) в скалярном виде. Для этого воспользуемся

следующими векторными равенствами:

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{r}} &= \omega \mathbf{e}_3 \times (\dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 + \dot{z}\mathbf{e}_3) = \omega \dot{x}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + \omega \dot{y}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \omega \dot{x}\mathbf{e}_2 - \omega \dot{y}\mathbf{e}_1, \\ \omega \mathbf{e}_3 \times (\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) &= \omega^2 \mathbf{e}_3 \times (x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1) = \omega^2 x\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 - \omega^2 y\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \\ &= -\omega^2 x\mathbf{e}_1 - \omega^2 y\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Также запишем выражения для векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_\oplus :

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{r}_\oplus &= \mathbf{r} - \mathbf{a} = (x - a)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

В итоге получим следующую систему скалярных уравнений движения паруса во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2 x - \frac{\mu_\odot}{r^3}x + \frac{\mu_\oplus}{r_\oplus^3}(a - x) + w_x^{sail}, \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{\mu_\odot}{r^3}y - \frac{\mu_\oplus}{r_\oplus^3}y + w_y^{sail}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu_\odot}{r^3}z - \frac{\mu_\oplus}{r_\oplus^3}z + w_z^{sail},\end{aligned}\tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}w_i^{sail} &= \frac{p_\oplus A}{m} \left(\frac{a}{r_\odot} \right)^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{n}_i, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_\oplus = \sqrt{(x - a)^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$

Для удобства работы с уравнениями (2.5) перейдем к безразмерным параметрам и переменным. Введем следующую каноническую систему единиц: за единицу массы примем массу Солнца $M_\oplus = 1$; за единицу расстояния примем расстояние между центрами масс Земли и Солнца $a = 1$; за единицу времени – время, необходимое Земле для описания дуги в 1 радиан вокруг Солнца. В такой системе единиц: $\mu_\oplus = 1$ и $\omega = 1$. И введем безразмерный гравитационный параметр Земли как $\mu = \mu_\oplus/\mu_\odot$. Что касается

солнечного давления, то введем безразмерный коэффициент β следующим образом:

$$\beta = \frac{p_{\oplus} A}{m \mu_{\odot} / a^2}. \quad (2.6)$$

Из равенства (2.6) видно, что безразмерный параметр паруса равен отношению силы, действующей на парус со стороны давления солнечного давления, к силе гравитационного притяжения Солнца на расстоянии в одну астрономическую единицу.

Теперь можно переписать уравнения (2.5) в безразмерном виде¹

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{x}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}(x-1) + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_x, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{y}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}y + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_y, \\ \ddot{z} &= -\frac{z}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}z + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_z, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_{\oplus} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) можно переписать в более удобном виде, если ввести безразмерную потенциальную функцию

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{r} + \frac{\mu}{r_{\oplus}}.$$

Таким образом система (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial x} &= \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y} &= \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_y, \\ \ddot{z} - \frac{\partial U}{\partial z} &= \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

¹ Здесь, в отличие от уравнений (2.5), координаты x , y , z измеряются в терминах астрономической единицы. Обозначения x , y , z сохранены для удобства.

Или еще короче – в векторной записи

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\mathbf{e}_3 \times \dot{\mathbf{r}} - \nabla U = \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.10)$$

Глава 3

Определение положений равновесия в плоскости Sxz

Для определения точек равновесия паруса положим нулю все производные по времени в системе уравнений (2.7) и получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}(x-1) + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_x &= 0, \\ y - \frac{y}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}y + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_y &= 0, \\ \frac{z}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}z + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_z &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

С первого взгляда на систему (3.1) становится понятно, что определить аналитическое решение таких нелинейных уравнений затруднительно. Поступим следующим образом: будем искать решение в плоскости Sxz (см. рис. 3.1а), полагая, что $n_y = 0$. Тогда второе уравнение системы (3.1) допускает решение $y = 0$. Таким образом, система уравнений переписется в проекции на плоскость Sxz

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}(x-1) + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_x &= 0, \\ \frac{z}{r^3} - \frac{\mu}{r_{\oplus}^3}z + \beta \frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}{r^2} \hat{n}_z &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1. Задача Солнце—парус

Даже после такого существенного упрощения аналитическое решение не очевидно. Будем считать, что отношение массы Земли к массе Солнца мало, то есть $\mu \ll 1$. Попробуем искать решение в виде асимптотического ряда по целым степеням малого параметра μ . В качестве порождающего

решения возьмем решение при $\mu = 0$, что соответствует решению фотогравитационной задачи в поле одного притягивающего центра, Солнца (см. рис. 3.1б). Будем называть такую задачу Солнце—парус. Итак, при $\mu = 0$, с учетом того, что $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \alpha$ и

$$\begin{aligned} n_x &= \cos(\alpha + \varphi) = \frac{x}{r} \cos \alpha - \frac{z}{r} \sin \alpha, \\ n_x &= \sin(\alpha + \varphi) = \frac{z}{r} \cos \alpha + \frac{x}{r} \sin \alpha, \end{aligned}$$

перепишем систему уравнений (3.2) в виде

$$\begin{aligned} x + \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^3} (x \cos \alpha - z \sin \alpha) &= \frac{x}{r^3}, \\ \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^3} (z \cos \alpha + x \sin \alpha) &= \frac{z}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

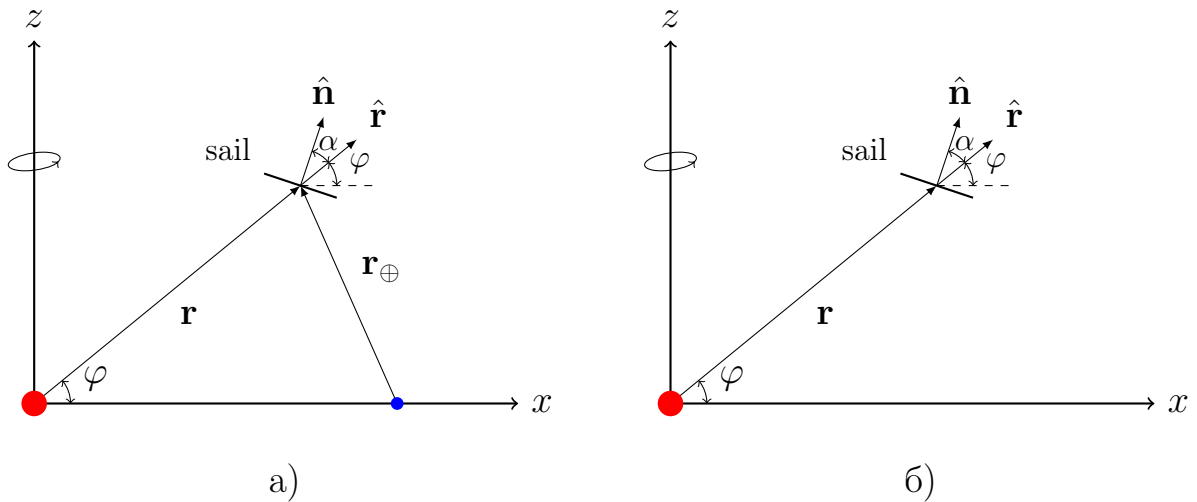


Рис. 3.1. Солнечный парус в плоскости Sxz : а) с учетом гравитационного поля Земли; б) без учета поля Земли, то есть при $\mu = 0$

Система уравнений (3.2) допускает точное решение

$$\begin{aligned} x &= \left(1 - \beta \cos^3 \alpha + \frac{\beta^2 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{1 - \beta \cos^3 \alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{(1 - \beta \cos^3 \alpha)^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ z &= \frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{1 - \beta \cos^3 \alpha} x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Формулы (3.4), по сути, определяют параметрическое (по параметру β) семейство параметрических по углу α ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$) кривых, задающих

положения равновесия паруса, то есть $x = x_\beta(\alpha)$, $z = z_\beta(\alpha)$ (см. рис. 3.5). Также следует отметить, что x и z , определяемые формулами (3.4) являются регулярными функциями угла α при значениях параметра β не превосходящими единицу, то есть при $0 \leq \beta \leq 1$. Поэтому случай $\beta > 1$ пока исключим из рассмотрения. Также на такое заключение наталкивает то, что при $\beta > 1$ нужно иметь большую площадь паруса при очень малой массе, чего не позволяют существующие материалы и технологии. В действительности, безразмерный параметр паруса в реализуемых полетах с использованием солнечной радиации не превосходит 0.07 (см. [8]).

3.2. Задача Солнце—Земля—парус

Перейдем теперь к задаче Солнце—Земля—парус (см. рис. 2.б). Уравнения (3.2) для определения положений равновесия запишем в виде

$$\begin{aligned} x + \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^3} (x \cos \alpha - z \sin \alpha) &= \frac{x}{r^3} + \frac{\mu(x-1)}{r_\oplus^3}, \\ \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r^3} (z \cos \alpha + x \sin \alpha) &= \frac{z}{r^3} + \frac{\mu z}{r_\oplus^3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решения системы (3.5) можно записать в виде асимптотического ряда (см. приложение А) по целым степеням малого параметра μ :

$$\begin{aligned} x_\beta(\alpha) &= x_0(\alpha; \beta) + \mu v_1(x_0, z_0) + \dots, \\ z_\beta(\alpha) &= z_0(\alpha; \beta) + \mu u_1(x_0, z_0) + \dots, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где x_0 и z_0 – решение задачи Солнце-парус, определяемое формулами (3.4). Асимптотическое решение задачи Солнце—Земля—парус мало отличается от порождающего решения задачи Солнце—парус ввиду малости параметра μ , $\mu = 3 \times 10^{-6}$. Также решение (3.6) в виде ряда неверно описывает поведение кривых равновесия задачи Солнце-Земля-парус в окрестности Земли. Точнее сказать, что ряд расходится внутри сферы действия Земли [17], так как

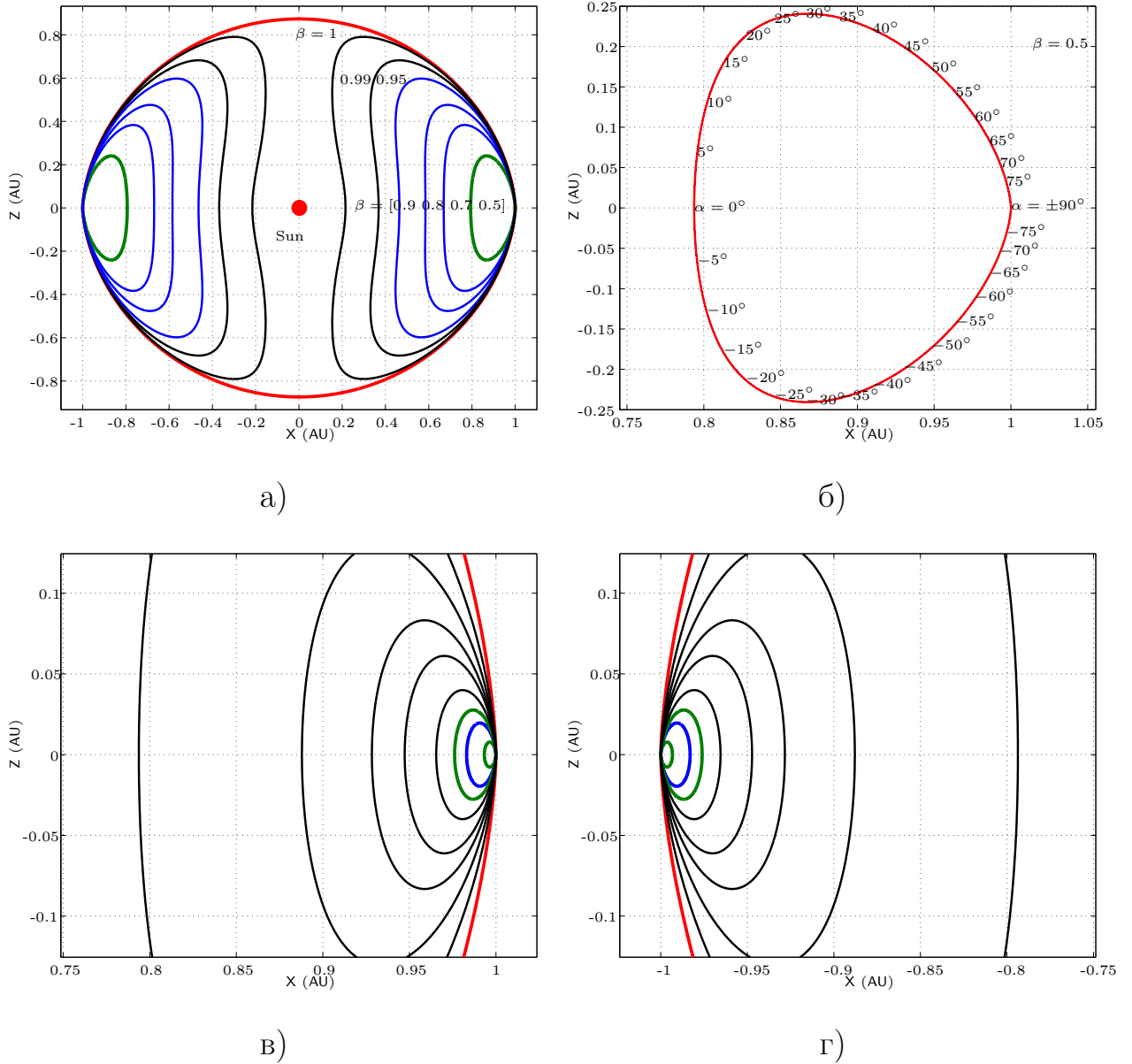


Рис. 3.2. Кривые равновесия задачи Солнце—парус

отношение μ/r_\oplus будет определяющим и им пренебрегать нельзя. Поэтому будем считать, что ряд (3.6) сходится к точному решению внутри области $(x - 1)^2 + z^2 > \mu^{2/5}$.

Перед использованием численных методов для определения точного решения вблизи Земли системы Солнце—Земля—парус, решим систему (3.5) для частных предельных значений углов $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. При $\alpha = \pi/2$ имеем классическую задачу трех тел, в которой решения лежат на оси Sx ;

имеем три классические точки Лагранжа [11], представимых в виде разложения по малому параметру μ

$$x_{L_1} = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \dots, \quad x_{L_2} = 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \dots, \quad x_{L_3} = -1 - \frac{\mu}{12} + \dots \quad (3.7)$$

При $\alpha = 0$ и $\beta \leq 1$ решения также лежат на оси Sx и задаются уравнением

$$x + \beta \frac{|x|}{x^3} = \frac{|x|}{x^3} + \mu \frac{|x-1|}{(x-1)^3}, \quad (3.8)$$

для которого найдется три действительных корня корня (см. приложение Б)

$$\begin{aligned} x_{SL_1} &= \sqrt[3]{1-\beta} - \frac{\mu}{3(\sqrt[3]{1-\beta}-1)^2} + \dots, \\ x_{SL_2} &= 1 + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{1/2} + \dots, \\ x_{SL_3} &= -\sqrt[3]{1-\beta} - \frac{\mu}{3(\sqrt[3]{1-\beta}+1)^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

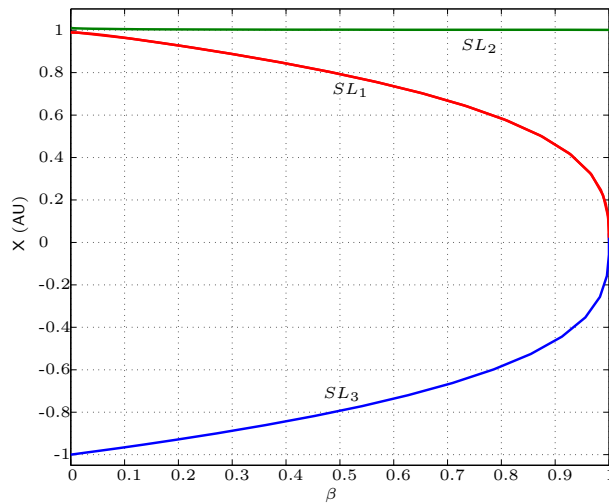


Рис. 3.3. Смещение классических точек Лагранжа

Полученные аналитические выражения (3.9) позволяют оценить зависимость от безразмерного параметра β сдвига классических точек Лагранжа (см. рис. 3.3). Также эти точки наряду с точками Лагранжа дают хорошее начальное приближение для численного поиска решения в области, где

аналитическое решение в виде ряда (3.6) несправедливо, то есть в окрестности Земли.

Используя численный метод продолжения по параметру α для решения системы (3.5), изложенный в [13–15], построим параметрическое семейство кривых равновесия паруса в трех областях (см. рис. 3.6) для различных параметров паруса: за Солнцем (кривые в окрестности точки L_3); между Солнцем и Землей (кривые в окрестности точки L_2); и за Землей (кривые в окрестности L_2). Схематическое изображение кривых равновесия в трех областях представлено на рисунке 3.5, где синим обозначены решения, к которым сходится асимптотический ряд (3.6) (то есть справедливо аналитическое решение); красным – решения, полученные в процессе численного решения, для которых ряд расходится.

Перейдем к исследованию устойчивости в линейном приближении полученных точек равновесия.

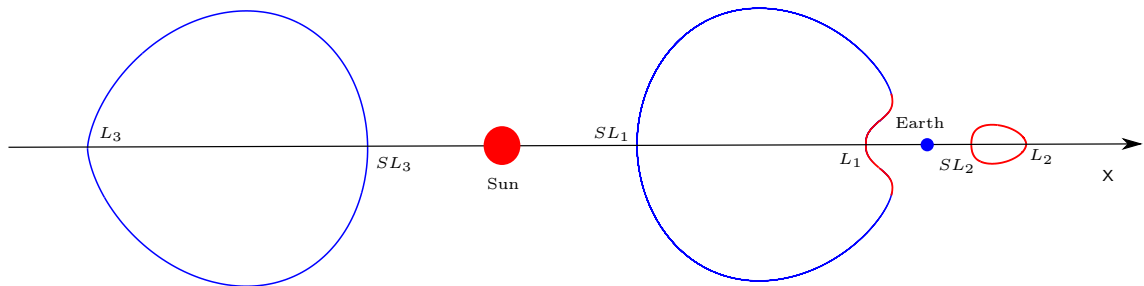
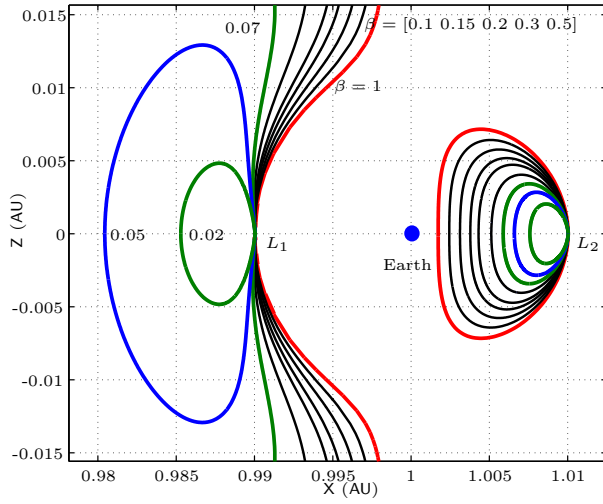
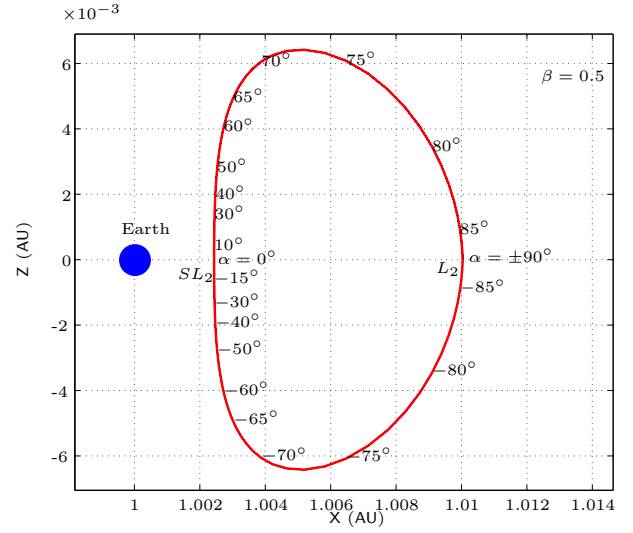


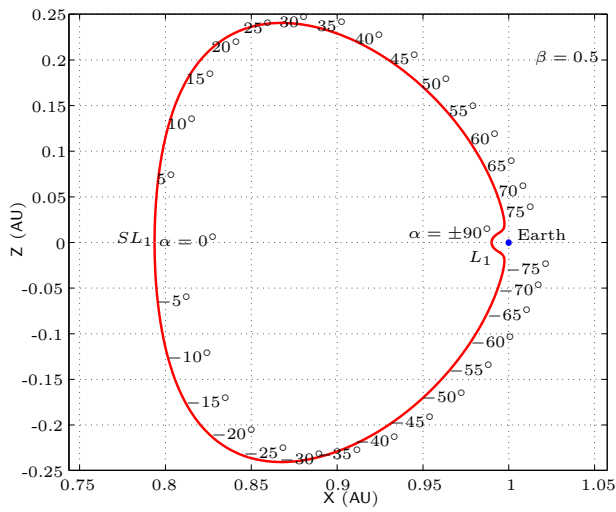
Рис. 3.4. Схематическое изображение кривых равновесия задачи Солнце—Земля—парус



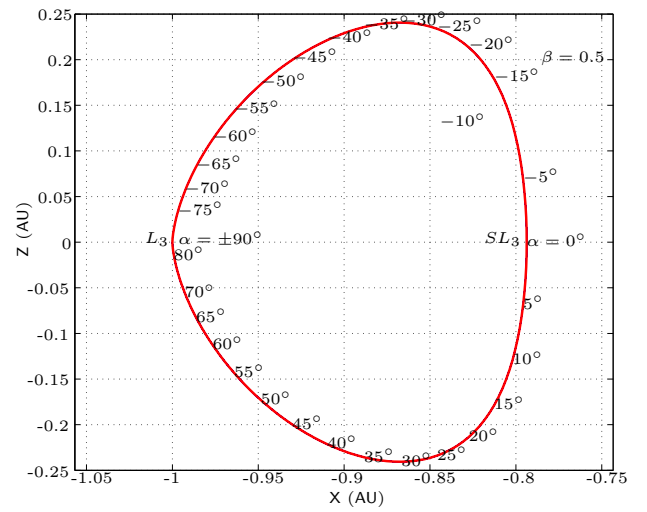
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.5. Кривые равновесия задачи Солнце—Земля—парус

Глава 4

Исследование устойчивости точек равновесия в линейном приближении

Запишем уравнения движения солнечного паруса в плоскости Sxz в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \Omega_x - W_z, \\ \ddot{z} &= \Omega_z + W_x,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где для удобства введены следующие обозначения

$$\Omega(x, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 + \beta \cos^3 \alpha}{r} + \frac{\mu}{r_{\oplus}}, \quad W(x, z) = \frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r}.\tag{4.2}$$

Пусть (ξ, ζ) – вариации координат (x, z) относительно точек равновесия (x_0, z_0) , тогда уравнения в вариациях для системы (4.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= a\xi + b\zeta, \\ \ddot{\zeta} &= c\xi + d\zeta.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Здесь

$$a = \Omega_{xx}^* - W_{xz}^*, \quad b = \Omega_{xz}^* - W_{zz}^*, \quad c = \Omega_{zz}^* + W_{xz}^*, \quad d = \Omega_{xz}^* + W_{zz}^*,\tag{4.4}$$

где $\Omega_{ij}^* = \left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial i \partial j} \right|_{(x_0, z_0)}$ и $W_{ij}^* = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial i \partial j} \right|_{(x_0, z_0)}$ (см. приложение В).

Перейдем к фазовым координатам. Вводя вектор $\eta = [\xi \ \zeta \ \dot{\xi} \ \dot{\zeta}]^t$, перепишем систему (4.3) в матричном виде

$$\dot{\eta} = \mathbf{A}\eta.\tag{4.5}$$

Матрица \mathbf{A} задается в блочном виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\tag{4.6}$$

а матрицы $\mathbf{0}$ и \mathbf{I} – нулевая и единичная матрицы соответственно. Характеристический многочлен матрицы \mathbf{A} равен

$$P(\lambda) = \lambda^4 - \text{tr } \mathbf{B} \cdot \lambda^2 + \det \mathbf{B}, \quad (4.7)$$

где $\text{tr } \mathbf{B} = a + d = \Omega_{xx}^* + \Omega_{zz}^*$ и $\det \mathbf{B} = ad - bc$.

Численное исследование для следа и определителя матрицы \mathbf{B} в точках равновесия дает цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} (\text{tr } \mathbf{B})^2 - 4 \det \mathbf{B} &> 0, \\ \text{tr } \mathbf{B} &> 0, \\ \det \mathbf{B} &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Исходя из неравенств (4.8), можно заключить, что характеристический многочлен (4.7) имеет пару действительных корней $\lambda_{1,2} = \pm|\omega|$ и пару чисто мнимых корней $\lambda_{3,4} = \pm i|\gamma|$. Однако, это справедливо не для всех точек равновесия. В одной предельной точке (LP) (см. рис. 4.1), находящейся в окрестности точки L_1 , определитель матрицы \mathbf{B} обращается в нуль. Тогда характеристический многочлен имеет только действительные корни: $\lambda_{1,2} = 0$ – корень второй кратности и $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\text{tr } \mathbf{B}}$. В таблице 4.1 приведены значения координат предельных точек для некоторых значений параметра паруса. Численный анализ показывает, что первая предельная точка появляется для параметра паруса $\beta \approx 0.16$.

Таким образом, заключаем, что плоское движение относительно точек равновесия неустойчиво в линейном приближении для любых параметров паруса $\beta \leq 1$ в отличие от точек в плоскости эклиптики [10, 16].

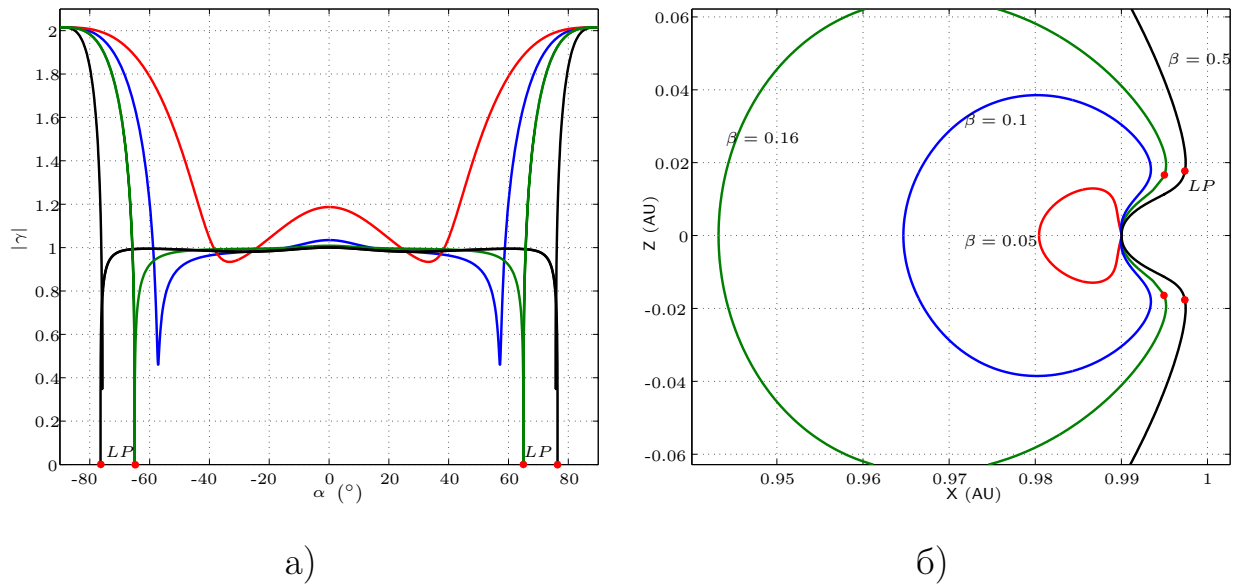


Рис. 4.1. Предельные точки для некоторых параметров β : а) изображено изменения модуля комплексного корня от угла; б) расположение предельных точек на кривых равновесия

Таблица 4.1. Значения предельных точек для некоторых параметров β

β	$\pm\alpha$ ($^\circ$)	x (AU)	$\pm z$ (AU)
0.16	64.992581	0.994806	0.015625
0.19	67.266544	0.995813	0.0156526
0.22	69.01765	0.995813	0.0167276
0.30	72.234991	0.996514	0.017225
0.50	76.404123	0.997371	0.0176578
0.60	77.624885	0.997615	0.017756
0.80	79.321167	0.997950	0.017869
0.99	80.216751	0.998124	0.0179179

Заключение

В выполненном этапе работы стало ясно, что нужные для практического применения положения равновесия типа polar-sitter существуют. Более того, в области между Солнцем и Землей существуют решения в виде замкнутых кривых, параметризованных углом установки паруса, мало отличные от равновесных решений задачи Солнце-парус. Последние существуют в аналитическом виде. Таким образом, для общей задачи справедливости решения в виде асимптотического ряда по малому безразмерному гравитационному параметру Земли.

Однако вблизи Земли решение в виде ряда становится несправедливым ввиду сильного влияния планеты, тем самым сила притяжения Земли становится определяющей. В этой области в процессе численного исследования плоских решений методом продолжения были найдены решения в окрестности точки L_2 также в виде семейства замкнутых параметрических кривых. Эти решения не характерны задаче Солнце-парус и никак не могут быть определены аналитически даже в виде асимптотического ряда. Такие решения обусловлены добавлением силы притяжения Земли, которая в этой области становится определяющей.

Исследование устойчивости полученных точек равновесия показывает, что статические положения равновесия неустойчивы в линейном приближении.

Приложение А

Вычисление первых коэффициентов разложения асимптотического ряда

Приведем разложение по параметру μ (до второго порядка малости) нелинейных слагаемых системы (3.5):

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x_0}{r_0^3} + \frac{\mu v_1}{r_0^3} + \frac{3\mu(x_0^2 v_1 + x_0 z_0 u_1)}{r_0^5} + O(\mu^2), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{z}{r^3} = \frac{z_0}{r_0^3} + \frac{\mu u_1}{r_0^3} + \frac{3\mu(z_0^2 u_1 + x_0 z_0 v_1)}{r_0^5} + O(\mu^2), \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{x \cos \alpha - z \sin \alpha}{r^3} &= \frac{x_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha}{r_0^3} + \frac{\mu(v_1 \cos \alpha - u_1 \sin \alpha)}{r_0^3} + \\ &+ \frac{3\mu(x_0 v_1 + z_0 u_1)(x_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha)}{r_0^5} + O(\mu^2), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{z \cos \alpha + x \sin \alpha}{r^3} &= \frac{z_0 \cos \alpha + x_0 \sin \alpha}{r_0^3} + \frac{\mu(u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha)}{r_0^3} + \\ &+ \frac{3\mu(x_0 v_1 + z_0 u_1)(z_0 \cos \alpha + x_0 \sin \alpha)}{r_0^5} + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Подставляем выше полученные разложения в систему (3.5) и приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях параметра μ :

$$\begin{aligned} \mu^0 : \quad x_0 + \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r_0^3} (x_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha) &= \frac{x_0}{r_0^3}, \\ \frac{\beta \cos^2 \alpha}{r_0^3} (z_0 \cos \alpha + x_0 \sin \alpha) &= \frac{z_0}{r_0^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mu^1 : \quad a_{11} v_1 + a_{12} u_1 &= b_1, \\ a_{21} v_1 + a_{22} u_1 &= b_2, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Коэффициенты второй системы (A.6) определены следующим образом

$$a_{11} = 1 + \frac{\beta \cos^3 \alpha}{r_0^3} + \frac{3\beta \cos^2 \alpha}{r_0^5} (x_0^2 \cos \alpha - z_0 x_0 \sin \alpha) - \frac{1}{r_0^3} - \frac{3x_0^2}{r_0^5}, \quad (\text{A.7})$$

$$a_{12} = \frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r_0^3} + \frac{3\beta \cos^2 \alpha}{r_0^5} (z_0 x_0 \cos \alpha - z_0^2 \sin \alpha) - \frac{3x_0 z_0}{r_0^5} \quad (\text{A.8})$$

$$a_{21} = \frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r_0^3} + \frac{3\beta \cos^2 \alpha}{r_0^5} (x_0 z_0 \cos \alpha + x_0^2 \sin \alpha) - \frac{3x_0 z_0}{r_0^5}, \quad (\text{A.9})$$

$$a_{22} = \frac{\beta \cos^3 \alpha}{r_0^3} + \frac{3\beta \cos^2 \alpha}{r_0^5} (z_0^2 \cos \alpha + x_0 z_0 \sin \alpha) - \frac{1}{r_0^3} - \frac{3z_0^2}{r_0^5}, \quad (\text{A.10})$$

$$b_1 = \frac{x_0 - 1}{r_{\oplus 0}^3}, \quad (\text{A.11})$$

$$b_2 = \frac{z_0}{r_{\oplus 0}^3}, \quad (\text{A.12})$$

где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ и $r_{\oplus 0} = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + z_0^2}$.

Система уравнений (A.5) выполняется автоматически, так как x_0 , z_0 – порождающие решения системы (3.3). Система уравнений (A.5), в свою очередь, определяет коэффициенты разложения v_1 и u_1 , которые вычисляются по формулам

$$v_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad u_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (\text{A.13})$$

Приложение Б

Определение первых коэффициентов разложения для точек равновесия при $\alpha = 0$

Уравнение (3.8) для $x \geq 1$ переписывается в виде

$$(x - 1)^2(x^3 + \beta - 1) = \mu x^2. \quad (\text{Б.1})$$

Уравнение (Б.1), на области раскрытия модуля, имеет один порождающее решение: $x = 1$ – корень второй кратности. Тогда будем искать решение (см. [11, 12]) в виде ряда по $\mu^{1/2}$

$$x = 1 + \phi \mu^{1/2} + \dots \quad (\text{Б.2})$$

После подстановки в уравнение (Б.1) и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях параметра μ получаем уравнение для определения первого коэффициента разложения:

$$\phi^2 \beta = \mu. \quad (\text{Б.3})$$

Откуда, на области раскрытия модуля, получаем, что $\phi = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

Для $0 \leq x < 1$ имеем уравнение

$$(x - 1)^2(x^3 + \beta - 1) = -\mu x^2, \quad (\text{Б.4})$$

которое на области раскрытия модуля имеет один действительный корень первой кратности в качестве порождающего решения $x = \sqrt[3]{1 - \beta}$. Ищем решение уравнения (Б.4) в виде ряда по целым степеням малого параметра μ . Для определения первой поправки φ к порождающему решению получаем уравнение

$$3 \left(\sqrt[3]{1 - \beta} - 1 \right)^2 \varphi = -1. \quad (\text{Б.5})$$

Перейдем к последнему случаю раскрытия модуля, то есть $x < 0$. Имеем уравнение

$$(x - 1)^2(x^3 - \beta + 1) = -\mu x^2, \quad (\text{Б.6})$$

для которого на области раскрытия модуля найдется для μ один отрицательный корень первой кратности $x = -\sqrt[3]{1 - \beta}$. Прodelывая выкладки, схожие с предыдущим случаем, получаем уравнение для первого коэффициента разложения ν

$$3 \left(\sqrt[3]{1 - \beta} + 1 \right)^2 \nu = -1. \quad (\text{Б.7})$$

Приложение В

ЯВНЫЙ ВИД ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПСЕВДО-ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

$$\Omega_x = x - \frac{1 + \beta \cos^3 \alpha}{r^3} x - \frac{\mu(x-1)}{r_\oplus^3}, \quad (\text{B.1})$$

$$\Omega_z = -\frac{1 + \beta \cos^3 \alpha}{r^3} z - \frac{\mu z}{r_\oplus^3}, \quad (\text{B.2})$$

$$\Omega_{xx} = 1 - \frac{1 + \beta \cos^3 \alpha}{r^3} + \frac{3(1 + \beta \cos^3 \alpha)}{r^5} x^2 - \frac{\mu}{r_\oplus^3} + \frac{3\mu}{r_\oplus^5} (x-1)^2, \quad (\text{B.3})$$

$$\Omega_{zz} = -\frac{1 + \beta \cos^3 \alpha}{r^3} + \frac{3(1 + \beta \cos^3 \alpha)}{r^5} z^2 - \frac{\mu}{r_\oplus^3} + \frac{3\mu}{r_\oplus^5} z^2, \quad (\text{B.4})$$

$$\Omega_{xz} = \frac{3(1 + \beta \cos^3 \alpha)}{r^5} xz + \frac{3\mu}{r_\oplus^5} (x-1)z, \quad (\text{B.5})$$

$$W_x = -\frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^3} x, \quad (\text{B.6})$$

$$W_z = -\frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^3} z, \quad (\text{B.7})$$

$$W_{xx} = -\frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^3} + \frac{3\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^5} x^2, \quad (\text{B.8})$$

$$W_{xz} = -\frac{\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^3} + \frac{3\beta \cos^2 \alpha \sin \alpha}{r^5} z^2. \quad (\text{B.9})$$

Литература

1. Wright, J., «Space Sailing». Routledge, 258 p., 1992.
2. McInnes, C. R., «Solar sailing: technology, dynamics and mission applications». Springer Praxis, pp. 214–222, 1999.
3. Bookless, J., McInnes, C., «Control of lagrange point orbits using solar sail propulsion». In: Proceedings of 57th International Astronautical Congress, IAC-05-C1.6.03, 2005.
4. Baoyin, H., McInnes, C., «Solar sail halo orbits at the sun-earth artificial L_1 point». Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 94, pp.155-171, 2006.
5. Ming Xu, Shijie Xu, «Nonlinear dynamical analysis for displaced orbits above a planet». Celest. Mech. Dyn. Astron. 102, pp. 327–352, 2008.
6. Keita Tanaka and Jun'ichiro Kawaguchi, «A Design of Small Circular Halo Orbits around the L_2 of the Earth-Moon System». AAS 12-539, 2008.
7. Heiligers, J., Ceriotti, M., McInnes, C. R., and Biggs, J. D., «Design of Optimal Transfers Between North and South Pole-Sitter Orbits». 22nd AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Charleston, SC, 2012.
8. Jeannette Heiligers, Colin R. McInnes, «Agile Solar Sailing in three-body problem: motion between artificial equilibrium points». In: Proceedings of 64th International Astronautical Congress, IAC-13-C1.8.3, 2013.
9. Waters, T. J., and McInnes, C. R., «Periodic Orbits Above the Ecliptic in the Solar-Sail Restricted Three-Body Problem». Journal of Guidance, Control, and Dynamics 30(3), pp. 687-693, 2007.

10. Bombardelli, C., Pelaez, J., «On the stability of artificial equilibrium points in the circular restricted three-body problem». *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 109(1), pp. 13–26, 2011.
11. Маркеев А.П. «Точки либрации в небесной механике и космодинамике». М.: Наука, стр. 17-24, 1978.
12. Вигдорович И. И., Алексин В. А. «Асимптотические разложения корней алгебраических уравнений: учебно-методическое пособие». М.: МГИУ, 135 с., 2007.
13. Kuznetsov Yu. A., «Elements of Applied Bifurcation Theory». Springer-Verlag, 1998.
14. D. Roose, B. De Dier and A. Spence, «Aspects of continuation software». In: *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, NATO ASI series, Series C, Vol. 313, Kluwer, pp. 261-268, 1990.
15. Yu. A. Kuznetsov, V.V. Levitin, A. R. Skovoroda, «Continuation of stationary solutions to evolution problems in CONTENT». Mathematisch Centrum, 1996.
16. Thomas Waters, Patrick Browne, «Using AUTO on the Solar sail CR3BP». School of Mathematics, NUI Galway, Ireland, 2010.
17. Балк М. Б. «Элементы динамики космического полета». М.: Наука, стр. 201-209, 1965.